ISSN 2008 - 918X

روشی نوین جهت بهبود قابلیّت ردیابی ترک در چرخ‌دنده‌های مارپیچ ۱

محسن رضایی- شهرام هادیان جزی- مهرداد پورسینا- فرهاد حاجی ابوطالبی

شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان آشفته در یک مجرای مربعی ۱۳

امین رسام- زینب پورانصاری- محمدرضا زنگنه

مقایسه‌ای بر دیدگاه‌های مجزّا و هم‌زمان برای حل عددی اندرکنش حرارتی سیّال و جامد ۲۳

عماد تندیس- علی اشرفی زاده

پیوندزنی سطح یک نوع الیاف نایلونی با استفاده از مخلوط دو مونومر اکریلیک و بهینه‌سازی پارامترهای مربوطه توسط یک نرم‌افزار متداول طراحی آزمایش ۳۹

محمد خسروی- سعید استاد موحد

بررسی اثرات لقی مفاصل لولایی بر رفتار سینماتیکی ربات موازی صفحه¬ای ۳RPR ۵۳

سید مجتبی واردی کولایی- مهدی بامداد- برزو فتحی

بررسی ارتعاشات غیرخطی میکرو لوله حامل سیّال تحت تحریک پارامتریک مغناطیسی ۶۹

رضا جهانگیری- اکبر اللهوردی زاده- بهنام داداش زاده- حمید عظیم زاده

مطالعهٔ پدیده‌شناسی پرش¬های هیدرولیکی چندضلعی ۸۷

علی اسدی- مجید ملک جعفریان- علیرضا تیمورتاش

ضریب اصطکاک جریان مغشوش سیّال پایه و نانوسیّال از دیدگاه آماری ۱۰۵

فرهاد وحیدی نیا- قنبرعلی شیخ‌زاده

روش پرتابی بهبودیافته برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار ۱۲۳

فریبا وحیدی‌فر- محمدعلی مهرپویا

بررسی تجربی تأثیر چیدمان عرضی برآمدگی‌های دوگانه بر بردار پیشرانش در نازل مافوق صوت همگرا-واگرا ۱۳۹

محمدرضا بابائیان- محمد حججی

یک مدل جدید ریاضی برای جریان در خط لوله گاز تراکم پذیر همراه با نشت ۱۵۵

مرجان علی‌یاری- فائزه فرهادی

بررسی عددی فرآیند کاهش پسا در جریان آرام با استفاده از ریبلت‌های مستطیلی (مقاله کوتاه) ۱۶۵

امیر حاجی‌خان میرزایی- علیرضا رئوف پناه

سال ۳۱، شماره ۱

پاییز و زمستان، ۱۳۹۸

دانشگاه فردوسی مشهد

دوفصلنامه علمی

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

(نشریه دانشکده مهندسی)

شماره پیاپی ۲۱

نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

ISSN: 2008-918X **ISSN (Online): 2423-6519**

سردبیر: دکتر مهران کدخدایان

مدیرمسئول: دکتر حمید نیازمند

صاحب‌امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

هیئت تحریریه:

دکتر اکبر آفاقی خطیبی	دانشیار، دانشگاه آر ام آی تی، استرالیا
دکتر کاظم ابهری	دانشیار، دانشگاه استرالیای جنوبی، استرالیا
دکتر علی اکبر اکبرزاده	استاد، دانشگاه آر ام آی تی، استرالیا
دکتر مسعود برومند	استاد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوا فضا
دکتر سیدمحمدرضا خلیلی	استاد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک
دکتر احسان روحی	دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر محمود شریعتی	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر ابراهیم شیرانی چهارسوقی	استاد، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی مکانیک
دکتر مسعود طهانی	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر مهران کدخدایان	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر حمید معین فرد	دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر بهداد مقتدری	استاد، دانشگاه نیوکاسل، استرالیا
دکتر محمدرضا مه‌پیکر	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر حمید نیازمند	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

مسئول دفتر نشریه: تکتم هوشمند

ویراستار ادبی: یوسف بینا

ویرایش و صفحه‌آرایی: فائزه علی‌اکبری

نشانی: مشهد- دانشگاه فردوسی مشهد- دانشکده مهندسی- دفتر نشریه - صندوق پستی: ۱۱۱۱-۹۱۷۷۵

تلفن: ۳۸۸۰۶۰۲۴-۰۵۱ دورنگار: ۳۸۷۶۳۳۰۱-۰۵۱

پست‌الکترونیکی: **ejour@um.ac.ir** وب سایت: **http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir**

شماره نامه مجوز وزارت علوم، تحقیقات و فناوری: ۱۳۳۳۷۵ مورخ ۱۳۹۰/۷/۱۹

نمایه شده در پایگاه‌های معتبر: EBSCO, Magiran, SID, ISC

فهرست مطالب

روشی نوین جهت بهبود قابلیّت ردیابی ترک در چرخ‌دنده‌های مارپیچ	محسن رضایی شهرام هادیان جزی مهرداد پورسینا فرهاد حاجی ابوطالبی	۱
شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان آشفته در یک مجرای مربعی	امین رسام زینب پورانصاری محمدرضا زنگنه	۱۳
مقایسه‌ای بر دیدگاه‌های مجزّا و هم‌زمان برای حل عددی اندرکنش حرارتی سیّال و جامد	عماد تندیس علی اشرفی زاده	۲۳
پیوندزنی سطح یک نوع الیاف نایلونی با استفاده از مخلوط دو مونومر اکریلیک و بهینه‌سازی پارامترهای مربوطه توسط یک نرم‌افزار متداول طراحی آزمایش	محمد خسروی سعید استاد موحد	۳۹
بررسی اثرات لقی مفاصل لولایی بر رفتار سینماتیکی ربات موازی صفحه‌ای 3RPR	سید مجتبی واردی کولایی مهدی بامداد برزو فتحی	۵۳
بررسی ارتعاشات غیرخطی میکرو لوله حامل سیّال تحت تحریک پارامتریک مغناطیسی	رضا جهانگیری اکبر اللهوردی زاده بهنام داداش زاده حمید عظیم زاده	۶۹
مطالعهٔ پدیده‌شناسی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی	علی اسدی مجید ملک جعفریان علیرضا تیمورتاش	۸۷
ضریب اصطکاک جریان مغشوش سیّال پایه و نانوسیّال از دیدگاه آماری	فرهاد وحیدی نیا قنبرعلی شیخ‌زاده	۱۰۵
روش پرتابی بهبودیافته برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار	فریبا وحیدی‌فر محمدعلی مهرپویا	۱۲۳
بررسی تجربی تأثیر چیدمان عرضی برآمدگی‌های دوگانه بر بردار پیشرانش در نازل مافوق صوت همگرا-واگرا	محمدرضا بابائیان محمد حججی	۱۳۹
یک مدل جدید ریاضی برای جریان در خط لوله گاز تراکم پذیر همراه با نشت	مرجان علی‌یاری فائزه فرهادی	۱۵۵
بررسی عددی فرآیند کاهش پسا در جریان آرام با استفاده از ریبلت‌های مستطیلی (مقاله کوتاه)	امیر حاجی‌خان میرزایی علیرضا رئوف پناه	۱۶۵

(مقالهٔ پژوهشی)

روشی نوین جهت بهبود قابلیّت ردیابی ترک در چرخ‌دنده‌های مارپیچ*

محسن رضایی[۱] شهرام هادیان جزی[۲] مهرداد پورسینا[۳] فرهاد حاجی ابوطالبی[٤]

چکیده *سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای مارپیچ نسبت به چرخ‌دنده‌های ساده از دقّت، عمر و کاربرد بیشتر و لرزش، سروصدا و خطای انتقال کمتری بهره می‌برند. یکی از مواردی که می‌تواند در کارکرد این سیستم‌ها خلل ایجاد کند، وجود ترک در ریشهٔ دندانه چرخ‌دنده است. به همین دلیل شناسایی ترک ریشهٔ دندانه در مراحل اولیه پیدایش و رشد آن، بسیار حائز اهمّیّت است. یکی از روش‌های متداول برای استخراج اثر ترک‌ها از سیگنال ارتعاشی، استفاده از روش سیگنال باقیمانده است. ازآنجاکه محاسبه سیگنال باقیمانده مستلزم دانستن سیگنال ارتعاشی حالت سالم و یا پارامترهای اولیه و شرایط کاری سیستم مورد بررسی است، ارائه راه‌کاری جهت برجسته نمودن اثر ترک روی سیگنال ارتعاشی بدون نیاز به اطّلاعات دیگر می‌تواند بسیار مفید واقع شود. در این پژوهش، ابتدا روش محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های مارپیچ و اثر ترک دندانهٔ روی آن بررسی شده و سپس یک سیستم کامل چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای شامل موتور و بار، مدل‌سازی و به‌صورت عددی حل شده تا سیگنال ارتعاشی سیستم حاصل گردد. سپس تأثیر این روش بر سیگنال ارتعاشی به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی دینامیکی یک سیستم با یک ترک کوچک ارائه می‌گردد. نهایتاً روش پیشنهادشده روی سیگنال ارتعاشی سیستم ارائه شده در یکی از تحقیقات پیشین، اعمال شده و کارایی آن نشان داده می‌شود.*

واژه‌های کلیدی چرخ‌دنده مارپیچ؛ ردیابی ترک؛ خطای انتقال؛ پردازش سیگنال

A Novel Method to Improve Crack Detection Ability in Helical Gear

M. Rezaei Sh. Hadian Jazi M. Poursina F. Haji Aboutalebi

Abstract *The helical gear systems have some distinctions such as more precision, long life and more applications in the industry, and less vibration, noise and transmission error compared to spur gear systems. One of the damages that can affect the operation of these systems is the gear tooth root crack. So, the crack detection in its early stages of growth and development is very important. The residual signal method is one of the common methods to extract the effect of crack from the system vibration signal. Since the residual signal calculation requires the information of the vibration response of the healthy state or the system initial parameters, providing a method to extract the effect of crack from the vibrating response without any more information is very helpful. In this research, at first the calculation of the helical gear pair mesh stiffness is explained, and the effect of tooth root crack is also described. Then, a single-stage helical gear system, with the motor and the load, is modeled and solved numerically to achieve the system dynamic response. Then, the effect of present method on the vibration signal obtained from the dynamic simulation of a system with a small crack is Shown and discussed. Finally, the proposed method is applied to the dynamic response signal of a system that presented in one of the previous researches, and its efficiency is illustrated.*

Key Words Helical Gear; Crack Detection; Transmission Error; Signal Processing.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۷/۱۰/۱۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۸/۹/٤ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.78275

(۱) دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران، s.hadian@eng.ui.ac.ir

(۳) دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

(٤) استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

مقدّمه

سیستم‌های انتقال قدرت در صنعت ازنظر کارایی، دقّت و عمر مورد بررسی و گزینش قرار می‌گیرند. ازجمله سیستم‌های انتقال قدرتی که نسبت به دیگر سیستم‌ها دارای نسبت ظرفیت باربری به وزن بالاتر، راندمان انتقال بیشتر، سروصدا و ارتعاش کمتر و عمر بیشتر است، می‌توان به سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای اشاره نمود. در این میان سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای مارپیچ از دقّت، عمر و کاربرد بیشتر و لرزش، سروصدا و خطای انتقال کمتری نسبت به دیگر سیستم‌ها بهره می‌برند. یکی از مواردی که باعث ایجاد خلل در کارکرد این سیستم‌ها می‌شود، وجود ترک در دندانهٔ چرخ‌دنده است که عموماً در ریشهٔ دندانه‌ها اتفاق می‌افتد. ازاین‌رو شناسایی و ردیابی ترک دندانه در آغاز پیدایش و رشد اولیه آن، بسیار حائز اهمّیّت بوده و همچنین یکی از حوزه‌های مورد علاقه و مطالعه پژوهشگران است. پژوهش‌ها در این زمینه به سه بخش محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های ترک‌دار، مدل‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده‌ای و پردازش سیگنال ارتعاشی تقسیم‌بندی می‌شوند.

محمد و همکارانش [1] به محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده ساده ترک‌دار با هدف تحلیل عیوب چرخ‌دنده بر اساس ارتعاشات آن پرداختند. ایشان به روش اجزاء محدود و روش‌های تحلیلی مختلفی سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های ساده را محاسبه کردند. اختلاف دو روش تحلیلی آنها در تعیین ناحیه مرده حاصل از ترک بود. آنها برای تعیین ناحیه مرده، به ترتیب از یک خط راست قائم و یک منحنی سهمی‌وار استفاده نموده و با استفاده از روش اجزاء محدود نشان دادند، زمانی که طول ترک نسبت به ضخامت دندانه زیاد می‌شود، تعیین ناحیه مرده بر اساس منحنی سهمی‌وار مناسب‌تر از خط راست خواهد بود.

لی و همکارش [2] دینامیک یک سیستم چرخ‌دنده‌ای ساده با یک مدل جرم متمرکز چهار درجهٔ آزادی را بررسی کرده و سیگنال ارتعاشی آن را به دست آوردند. درجات آزادی مدل آنها به ترتیب جابجایی پیچشی موتور، چرخ‌دنده راننده، چرخ‌دنده رانده‌شده و مصرف‌کننده است. آنها با استفاده از بسط فوریه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌ها، به حل رابطهٔ دینامیکی پرداختند.

وان و همکارانش [3] سفتی درگیری یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ را به روش تحلیلی محاسبه کردند. آنها یک دندانهٔ مارپیچ را با چندین دندانهٔ ساده با ضخامت کم که پشت سر هم قرار گرفته‌اند، جایگزین کردند. قرارگیری هر دندانهٔ ساده در راستای ضخامت چرخ‌دنده، نسبت به دندانهٔ قبلی وابسته به زاویهٔ مارپیچ دندانهٔ اصلی خواهد بود. آنها نتایج مدل خود را با یک مدل اجزاء محدود مقایسه کرده و نشان دادند این روش از دقّت کافی برخوردار است. سپس به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف ازجمله مدول چرخ‌دنده، زاویهٔ مارپیچ، ضخامت چرخ‌دنده و ترک در ریشهٔ دندانه پرداختند. آنها همچنین دینامیک یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ را با یک مدل جرم متمرکز شش درجهٔ آزادی بررسی کردند. درجات آزادی مدل آنها شامل دو درجهٔ آزادی عرضی و یک درجهٔ آزادی چرخشی برای هر چرخ‌دنده بود. آنها سیگنال ارتعاشی سیستم مورد نظر خود را به دست آورده و شتاب حرکت پینیون در راستای عرضی را برای مقادیر مختلف زاویهٔ مارپیچ نشان دادند.

برای بهبود استخراج عیوب پنهان در چرخ‌دنده‌ها روش‌های مختلفی بر اساس میانگین‌گیری هم‌زمان برای تحلیل سیگنال حاصل از این سیستم‌ها توسعه داده شده‌اند. در این میان دو روش پرکاربرد روش تفکیک دامنه‌ای و فازی (Amplitude and Phase Demodulation) و روش سیگنال باقیمانده (Residual Signal Method) هستند. مک‌فادن [4] پیشنهاد داد که برای شناسایی ترک دندانهٔ چرخ‌دنده از تفکیک فازی به‌جای تفکیک دامنه‌ای استفاده شود. در روش سیگنال

باقیمانده برای اینکه سیگنال تولید شده بر اثر عیب مورد نظر بهتر و واضح‌تر شناسایی شود، سیگنال منظم حاصل از فرکانس درگیری چرخ‌دنده را حذف کرده و تحلیل روی سیگنال باقیمانده انجام می‌شود. روش‌های مختلفی برای تولید سیگنال باقیمانده وجود دارد. اوّلین روش توسط استوارت [5] با توسعه شاخص‌های شناسایی عیوب ارائه شد. یکی از ابزارهای قدرتمندی که او ارائه داد شاخص کشیدگی سیگنال باقیمانده بود که به FM4 معروف است. راندال [6] نیز از روش حذف هارمونیک‌های درگیری چرخ‌دنده از سیگنال اصلی به محاسبه سیگنال باقیمانده در حوزه زمان بهره برد. یک روش جدید پالایش بر اساس مدل خودبرگشت‌کننده (Model Autoregressive) بعدها توسط وانگ و وونگ [7] توسعه یافت. محققان دیگر در مراجع [8-11] نشان دادند که روش مدل خودبرگشت‌کننده از مدل قدیمی استوارت زودتر و با بازدهی بالاتر عیوب را شناسایی می‌کند.

وو و همکارانش [12] از دو روش برای محاسبه سیگنال باقیمانده استفاده کردند. آنها در روش اول با حذف فرکانس‌های درگیری و فرکانس محور و هارمونیک‌های آنها از سیگنال اصلی، سیگنال باقیمانده را به دست آوردند. در روش دوم آنها سیگنال سیستم سالم را از سیگنال سیستم معیوب کم کرده و به سیگنال باقیمانده دست یافتند. سان و همکارانش [13] و بازونی و همکارانش [14] از سیگنال باقیمانده در تحقیقات خود به‌عنوان یک روش عیب‌یابی استفاده کرده‌اند. نهایتاً ماهگون [15] یک روش محاسبه سیگنال باقیمانده بر اساس تجزیه جمعی تجربی (Ensemble Decomposition Empirical Mode) ارائه داد. با استفاده از این روش سیگنال باقیمانده با حذف توابع مود طبیعی (Intrinsic Mode Functions) که هارمونیک‌های فرکانس درگیری و دیگر اجزای سیگنال‌های منظم را دربرمی‌گیرند، به دست می‌آید.

ازآنجاکه محاسبه سیگنال باقیمانده مستلزم دانستن سیگنال ارتعاشی حالت سالم و یا پارامترها و شرایط سیستم مورد بررسی است، ارائه راه‌کاری جهت برجسته نمودن تأثیر ترک دندانهٔ روی سیگنال ارتعاشی؛ بدون نیاز به دانستن اطّلاعات اضافی؛ می‌تواند در شناسایی محل ترک در سیگنال ارتعاشی بسیار مفید واقع شود. در این تحقیق این مهم محقق گشته و روشی جدید برای برجسته‌سازی اثرات عیوب محلی ارائه می‌گردد. بدین منظور، در این مقاله ابتدا روش محاسبه سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های مارپیچ و اثر ترک دندانهٔ روی آن بررسی شده و سپس یک سیستم کامل چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای شامل موتور و بار، مدل‌سازی و به‌صورت عددی حل شده تا سیگنال ارتعاشی سیستم حاصل گردد. سپس روش پیشنهادشده روی سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده مارپیچ اعمال شده و کارایی آن بررسی می‌گردد. نهایتاً روش پیشنهادشده روی سیگنال ارتعاشی یک سیستم دیگر که در تحقیقات پیشین ارائه شده است، اعمال شده و قابلیّت آن نشان داده می‌شود.

محاسبه سفتی درگیری به روش تحلیلی

اوّلین مرحله از مراحل بررسی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای تعیین سفتی درگیری دو چرخ‌دنده درگیر است. در این بخش برای روشن‌تر شدن موضوع ابتدا یک تعریف اجمالی از عنوان سفتی درگیری ارائه می‌شود. وقتی دو دندانه از دو چرخ‌دنده درگیر با یکدیگر تماس پیدا می‌کنند، بر اثر نیرویی که به یکدیگر وارد می‌کنند و رفتار الاستیک آنها، چرخ‌دنده‌ها دچار کرنش می‌شوند. نسبت نیروی اعمالی بین دو دندانه و جابجایی در راستای اعمال این نیرو را سفتی درگیری دو چرخ‌دنده می‌نامند. لازم به توضیح است که سفتی درگیری دو چرخ‌دنده از زمان دیدار تا زمان وداع دو دندانه متغیر است. سفتی درگیری دو چرخ‌دنده را با استفاده از

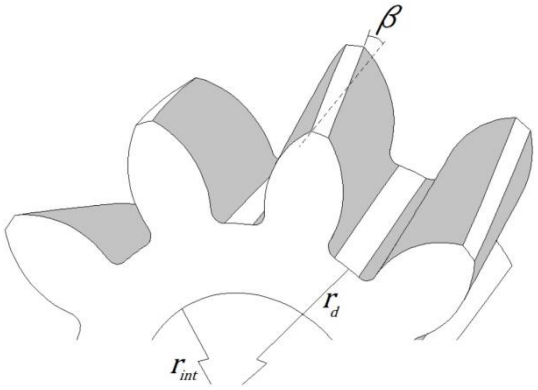
روش‌های مختلفی مانند روش تحلیلی، اجزاء محدود و آزمون تجربی می‌توان محاسبه کرد. در این پژوهش روش تحلیلی برای محاسبه سفتی درگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای محاسبه سفتی درگیری دو چرخ‌دنده به روش تحلیلی ابتدا به این مطلب اشاره می‌شود که سفتی درگیری دو چرخ‌دنده از برهم‌نهی سفتی جفت دندانه‌های درگیر در هر لحظه حاصل می‌شود. به این منظور، ابتدا سفتی یک جفت دندانهٔ درگیر مورد بررسی قرار گرفته و سپس با استفاده از نسبت تماس دو چرخ‌دنده سفتی درگیری کل حاصل می‌شود. سفتی یک جفت دندانه شامل چند جزء است. هر دندانه به‌تنهایی شامل سفتی پایه دندانه، سفتی محوری فشاری، سفتی برشی و سفتی خمشی است. همچنین دو دندانه در نقطه تماس دارای یک سفتی تماسی خواهند بود. برای سفتی درگیری دو چرخ‌دنده ساده از رابطهٔ (۱) استفاده می‌شود [16]:

$$K_e = \sum_{i=1}^{2} K_e^i$$
$$\frac{1}{K_e^i} = \frac{1}{K_{ap}^i} + \frac{1}{K_{bp}^i} + \frac{1}{K_{sp}^i} + \frac{1}{K_{fp}^i} + \frac{1}{K_h^i} + \frac{1}{K_{ag}^i} + \frac{1}{K_{bg}^i} + \frac{1}{K_{sg}^i} + \frac{1}{K_{fg}^i} \quad (۱)$$

زیرنویس‌های a، b، s، f و h به ترتیب بیان‌کنندهٔ سفتی محوری، خمشی، برشی، پایه و تماسی، و p و g به ترتیب مربوط به پینیون و چرخ‌دنده هستند. بالانویس i نیز مربوط به شماره جفت دندانه درگیر است که می‌تواند مقدار یک یا دو داشته باشد.

ازآنجاکه چرخ‌دنده‌های ساده به‌طور ناگهانی وارد درگیری شده و به‌طور ناگهانی از آن خارج می‌شوند، تغییرات ناگهانی شدیدی در سفتی درگیری آنها مشاهده شده و نهایتاً منجر به تولید ارتعاش و سروصدای بیشتر در این سیستم‌ها می‌شود. چرخ‌دنده‌های مارپیچ بر خلاف چرخ‌دنده‌های ساده، به علت وجود زاویهٔ مارپیچ در دندانه‌های خود، کاملاً آرام و یکنواخت وارد درگیری شده و به همین ترتیب خارج می‌شوند. سطح تماس یک دندانه مارپیچ در لحظه ابتدای درگیری یک نقطه بوده و سپس تبدیل به خط می‌شود. طول این خط رفته‌رفته با درگیر شدن کامل دندانه به بزرگ‌ترین مقدار خود می‌رسد، سپس در انتهای درگیری نیز طول خط تماس رو به کاهش گذاشته و در آخرین لحظه خروج از درگیری تبدیل به نقطه می‌گردد. این خاصیت چرخ‌دنده‌های مارپیچ باعث می‌شود تغییرات سفتی درگیری آنها نیز بسیار آرام و یکنواخت باشد که تولید ارتعاش و سروصدای کمتر سیستم را در پی دارد [3]. برشی از یک چرخ‌دنده مارپیچ در حالت سه‌بعدی در شکل (۱) نشان داده شده است.

واضح است که به دلیل وجود زاویهٔ مارپیچ، سفتی درگیری چرخ‌دنده‌های مارپیچ را نمی‌توان مشابه چرخ‌دنده‌های ساده محاسبه کرد، اما می‌توان از آن روش به‌گونه‌ای دیگر بهره برد. در این روش یک دندانهٔ مارپیچ به قطعات کوچک‌تری تقسیم شده که آنها را می‌توان با تقریب مناسب، یک دندانهٔ ساده با پهنای نازک فرض کرد [3]. لحظه شروع درگیری هر دو قطعه مجاور دارای یک فاصله زاویه‌ای است که به تعداد قطعات و زاویهٔ مارپیچ دندانهٔ اصلی بستگی دارد.



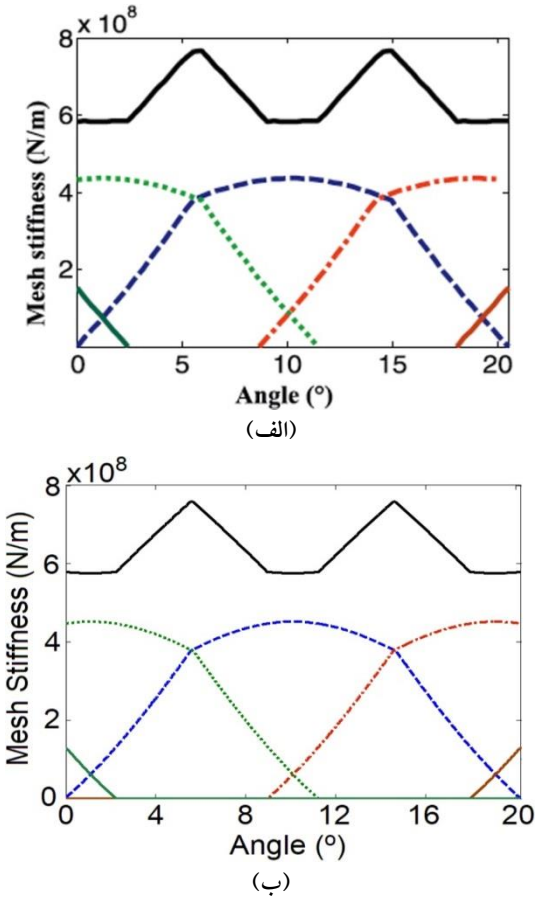
شکل «۱»: برشی از یک مدل سه‌بعدی چرخ‌دنده مارپیچ

چنانکه مشخص است، سفتی درگیری دندانهٔ مارپیچ اصلی می‌تواند از برهم‌نهی سفتی درگیری قطعات ساده با در نظر گرفتن فاصله زاویه‌ای آنها به دست آید. برای صحت‌سنجی این روش از نتایج تحقیق وان و همکارانش [3] که آنها نیز نتایج خود را با یک مدل اجزاء محدود صحت‌سنجی کرده‌اند، بهره برده می‌شود. در جدول (۱) مشخصات چرخ‌دنده‌های مورد استفاده در مرجع [3] نشان داده شده است. در این حالت نیز پس از محاسبه سفتی درگیری هر جفت دندانهٔ مارپیچ، با استفاده از نسبت تماس چرخ‌دنده‌ها نمودارهای به‌دست‌آمده با فاصله‌های مشخص روی‌هم قرار داده می‌شوند تا نمودار سفتی درگیری کلی دو چرخ‌دنده به دست آید.

جدول «۱»: مشخصّات چرخ‌دنده‌های مورد استفاده در مرجع [3]

مشخصّه	مقدار
مدول عمودی (میلی‌متر)	٤
زاویهٔ فشار عمودی (درجه)	۲۰
زاویهٔ مارپیچ (درجه)	۱۵
مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	۲۰٦
نسبت پواسون	۰/۳
عرض دندانه (میلی‌متر)	۳۰
تعداد دندانه‌ها	٤۰

نتایج به‌دست‌آمده در مرجع [3] و این پژوهش در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. چنانکه در هر دو نمودار قابل مشاهده است، خط‌چین آبی‌رنگ نشان دهنده سفتی جفت دندانهٔ حاضر، نقطه‌چین سبزرنگ نشان دهنده سفتی جفت دندانهٔ قبلی و خط-نقطه قرمزرنگ مربوط به جفت دندانهٔ بعدی می‌باشند. از برهم‌نهی مقادیر سفتی‌هایی که در هر لحظه وجود دارند، سفتی درگیری کل به دست می‌آید که در نمودار با خط ممتد مشکی نمایش داده شده است. روند تغییرات این نمودارها کاملاً با یکدیگر همخوانی دارد. بیشترین اختلاف دو نمودار در نقاط بیشینهٔ آنها (در نقاط ۵ و ۱۵ درجهٔ محور افقی) اتفاق افتاده است. میزان اختلاف نسبت به مقدار محاسبه شده در مرجع [3] ۱/۳۲ درصد محاسبه شده است.



شکل «۲»: نتایج سفتی درگیری چرخ‌دنده مارپیچ الف) به‌دست‌آمده در مرجع [3] ب) به‌دست‌آمده در این تحقیق

مدل‌سازی ترک در ریشهٔ دندانه

مدل‌سازی ترک ریشهٔ دندانه در معادلات حاکم بر دینامیک چرخ‌دنده‌ها در بخش محاسبه سفتی درگیری انجام می‌پذیرد. به‌گونه‌ای که برای مدل کردن اثر ترک، ناحیه‌ای از سطح دندانه را به‌عنوان ناحیه مرده تلقی کرده و در محاسبه سفتی‌های مختلف دندانه، آن ناحیه را لحاظ نمی‌کنند. روش‌های مختلفی نیز برای تعیین ناحیه مرده استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها بدین‌صورت است که از نوک ترک یک خط قائم

ترسیم شده و سطح بالای ترک ناحیه مرده فرض می‌شود. تنها متغیرهایی که در این روش تغییر می‌کنند، سطح مقطع و گشتاور سطح مقطع دندانه هستند که به‌صورت رابطه‌های (۲ و ۳) تغییر می‌کنند [17]:

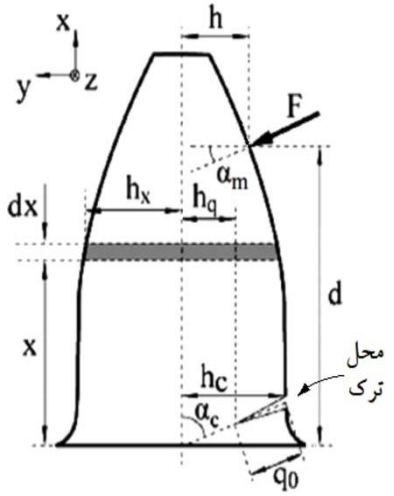
$$A_x = \begin{cases} (h_x + h_x)L & h_x \le h_q \\ (h_x + h_q)L & h_x > h_q \end{cases} \quad (۲)$$

$$I_x = \begin{cases} \frac{1}{12}(h_x + h_x)^3 L & h_x \le h_q \\ \frac{1}{12}(h_x + h_q)^3 L & h_x > h_q \end{cases} \quad (۳)$$

در رابطه‌های فوق h_q طول باقیمانده از نصف ضخامت دندانه در نیمه معیوب آن است که در شکل (۳) نشان داده شده و از رابطهٔ (٤) به دست می‌آید [17]:

$$h_q = h_c - q_0 \cos(\alpha_c) \quad (٤)$$

h_c نصف ضخامت دندانه در ناحیه ترک، q_0 طول ترک و α_c زاویهٔ راستای ترک با خط مرکزی دندانه است که در شکل (۳) نشان داده شده‌اند.



شکل «۳»: مشخصه‌های مورد نیاز محاسبه سفتی دندانهٔ ترک‌دار

برای صحت‌سنجی روابط ذکر شده و برنامه‌های رایانه‌ای توسعه‌یافته در نرم‌افزار متلب از نتایج تحقیق محمد و همکارانش [18] استفاده می‌شود. مقادیر پارامترهای چرخ‌دنده‌ها و اندازهٔ ترک استفاده شده در این تحقیق در جدول‌های (۲ و ۳) ذکر شده است. درصد طول ترک بیان شده در جدول (۳) در واقع درصد طول ترک نسبت به نصف ضخامت دندانه در محل ترک است. برای رسم نمودار سفتی درگیری یک جفت چرخ‌دنده که یکی از آنها دارای یک دندانهٔ ترک‌دار است به‌صورت زیر عمل می‌شود. ابتدا نمودار سفتی درگیری یک جفت دندانهٔ سالم و یک جفت دندانه که یکی از آنها دارای ترک است به دست آورده می‌شوند. سپس نمودار نهایی از برهم‌نهی این نمودارها به دست می‌آید. به این صورت که فرض می‌شود در لحظه اولیه که جفت دندانهٔ معیوب وارد درگیری می‌شوند، یک جفت دندانهٔ سالم درون درگیری بوده و سپس در ادامه از درگیری خارج می‌شوند. پس از مدتی یک جفت دندانهٔ سالم دیگر وارد درگیری شده و تا انتهای نمودار که درگیری جفت دندانهٔ معیوب به پایان می‌رسد، در درگیری می‌مانند. این فاصله‌های زمانی ورود و خروج از درگیری جفت دندانه‌های مختلف به نسبت تماس چرخ‌دنده‌ها بستگی دارد.

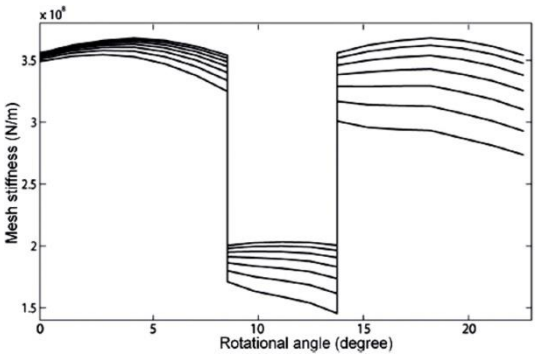
جدول «۲»: مشخصّات چرخ‌دنده و پینیون [18]

مشخصّه	پینیون	چرخ‌دنده
تعداد دندانه	۲۵	۳۰
مدول (میلی‌متر)	۲	۲
عرض دندانه (میلی‌متر)	۲۰	۲۰
نسبت تماس	۱/٦۳	۱/٦۳
زاویهٔ فشار (درجه)	۲۰	۲۰
مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	۲۰۰	۲۰۰
نسبت پواسون	۰/۳	۰/۳

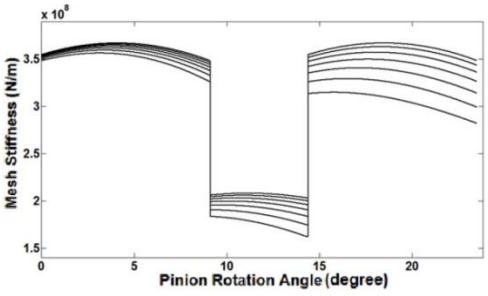
جدول «۳»: مشخصّات ترک ریشهٔ دندانه [18]

مورد	طول ترک (میلی‌متر)	درصد طول ترک	زاویهٔ ترک
۱	۰	۰	۷۰ درجه
۲	۰/۳	۸/۰۶	
۳	۰/۶	۱۶/۱۲	
٤	۰/۹	۲٤/۱۹	
٥	۱/۲	۳۲/۲٥	
٦	۱/٥	٤۰/۳۲	
۷	۱/۸	٤۸/۳۸	

در شکل (٤) نمودار سفتی درگیری برای مشخصات چرخ‌دنده ذکر شده در جدول (۲) و مقادیر مختلف اندازهٔ ترک ذکر شده در جدول (۳) در قسمت (الف) رسم شده توسط محمد و همکارانش [18] و در قسمت (ب) به‌دست‌آمده از برنامه‌های رایانه‌ای توسعه یافته در پژوهش حاضر که در محیط نرم‌افزار متلب نگاشته شده‌اند، ارائه شده‌اند. مقادیر مختلف اندازهٔ ترک در جدول (۳) به‌صورت درصد طول ترک آمده است که بر حسب نسبت طول ترک به ضخامت دندانه در ریشه محاسبه می‌شود. مشاهده می‌شود که روند تغییرات نمودارها کاملاً مشابه هستند. بیشترین اختلاف در بیشترین مقدار اندازهٔ ترک (۱/۸ میلی‌متر) و در انتهای نمودار اتفاق افتاده است که میزان اختلاف پاسخ به‌دست‌آمده در این تحقیق نسبت به تحقیق مرجع [18] ۱/۸۲ درصد بوده است.



(الف)

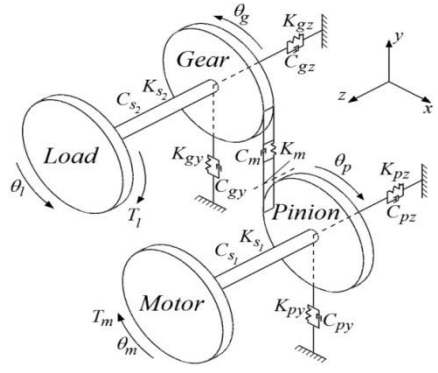


(ب)

شکل «٤»: نمودار سفتی درگیری برای مقادیر مختلف ترک الف) رسم شده در مرجع [18] ب) به‌دست‌آمده در این تحقیق

مدل‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده مارپیچ

برای مدل‌سازی سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای از مدل جرم متمرکز (Lumped Mass Model) استفاده می‌شود. در این نوع مدل، سیستم به‌صورت اجزایی با جرم‌های متمرکز که با فنر و دمپر به هم متصل هستند مدل‌سازی می‌شود. سفتی فنرها مربوط به سفتی اجزای سیستم مانند یاتاقان‌ها، محورها و سفتی درگیری چرخ‌دنده‌ها است. برای این منظور، یک مدل هشت درجهٔ آزادی سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ با موتور و بار چنانکه در شکل (۵) نشان داده شده است، در نظر گرفته شده است. همچنین معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک این سیستم مطابق معادلات (۱۲-۵) به‌دست‌آمده‌اند. با یک روانکاری خوب بین دندانه‌های چرخ‌دنده‌های درگیر، نیروی اصطکاکی بین دندانه‌های درگیر در راستای x قابل صرف نظر است.



شکل «۵»: مدل دینامیکی هشت درجهٔ آزادی سیستم چرخ‌دنده مارپیچ با موتور و بار

$$I_m\ddot{\theta}_m = -C_{s_1}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_p) - K_{s_1}(\theta_m - \theta_p) + T_m \quad (۵)$$

$$I_l\ddot{\theta}_l = -C_{s_2}(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_g) - K_{s_2}(\theta_l - \theta_g) - T_l \quad (۶)$$

$$I_p\ddot{\theta}_p = C_{s_1}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_p) + K_{s_1}(\theta_m - \theta_p) - F_yR_p \quad (۷)$$

$$I_g\ddot{\theta}_g = C_{s_2}(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_g) + K_{s_2}(\theta_l - \theta_g) + F_yR_g \quad (۸)$$

$$m_p\ddot{y}_p + C_{py}\dot{y}_p + K_{py}y_p = -F_y \quad (۹)$$

$$m_g\ddot{y}_g + C_{gy}\dot{y}_g + K_{gy}y_g = F_y \quad (۱۰)$$

$$m_p\ddot{z}_p + C_{py}\dot{z}_p + K_{py}z_p = -F_z \quad (۱۱)$$

$$m_g\ddot{z}_g + C_{gy}\dot{z}_g + K_{gy}z_g = F_z \quad (۱۲)$$

که در آنها I_m ، I_l ، I_p و I_g بـه ترتیـب ممـان اینرسـی موتور، بار، پینیون و چرخ‌دنـده، m_p و m_g بـه ترتیـب جرم پینیون و چرخ‌دنده، θ_m ، θ_l ، θ_p و θ_g به ترتیـب دوران محوری موتور، بار، پینیـون و چـرخ‌دنـده و y_p، y_g، z_p و z_g به ترتیب جابجایی پینیون و چرخ‌دنده در راستای y و z هستند. بالانویس‌های (˙) و (¨) بیـانگر مشتقات اول و دوم توابع بر حسب زمان هستند. K_{s_1} ، K_{s_2} ، C_{s_1} و C_{s_2} بـه ترتیـب سـفتی و ضـریب میرایـی محورهـــای ورودی و خروجـــی، K_{py} ، K_{gy} ، C_{py} و C_{gy} به ترتیـب سـفتی و ضـریب میرایـی یاتاقـان‌هـای پینیون و چرخ‌دنـده، T_m و T_l بـه ترتیـب گشـتاورهای اعمالی از طـرف موتـور و بـار و R_p و R_g بـه ترتیـب شعاع مبنای پینیون و چرخ‌دنده هستند. F_y و F_z نیز بـه ترتیب مؤلفه‌های نیروی درگیری جفت چـرخ‌دنـده در راستای y و z هستند کـه از معـادلات (۲۲-۱۳) قابـل محاسبه هستند.

$$F_y = K_{my}(\tilde{y}_p - \tilde{y}_g) + C_{my}(\dot{\tilde{y}}_p - \dot{\tilde{y}}_g) \quad (۱۳)$$

$$F_z = K_{mz}(\tilde{z}_p - \tilde{z}_g) + C_{mz}(\dot{\tilde{z}}_p - \dot{\tilde{z}}_g) \quad (۱٤)$$

$$\tilde{y}_p = y_p + R_p\theta_p \quad (۱۵)$$

$$\tilde{y}_g = y_g + R_g\theta_g \quad (۱٦)$$

$$\tilde{z}_p = z_p + \tilde{y}_p tan\beta \quad (۱۷)$$

$$\tilde{z}_g = z_g - \tilde{y}_p tan\beta \quad (۱۸)$$

$$K_{my} = K_m \cos^2\beta \quad (۱۹)$$

$$C_{my} = C_m \cos^2\beta \quad (۲۰)$$

$$K_{mz} = K_m \sin^2\beta \quad (۲۱)$$

$$C_{mz} = C_m \sin^2\beta \quad (۲۲)$$

که در آنها K_m و C_m به ترتیب سفتی و میرایی درگیری جفت چرخ‌دنده مارپیچ و β زاویهٔ مارپیچ است. میرایی هـر عضـو بـر حسـب سـفتی و جـرم آن بـه‌صـورت $2\xi m\sqrt{\frac{K}{m}}$ محاسبه می‌شود، کـه در آ ξ ضـریب میرایـی روانکار مورد استفاده روی عضو مورد نظر است. پـس از حل معادلات دیفرانسیلی در یک دور کامل چـرخش پینیون و به دست آوردن سیگنال‌های ارتعاشی، خطـای انتقال سیستم از معادلهٔ (۲۳) قابـل محاسـبه اسـت. بـه میزان اختلاف مکان هندسی نقطه‌ای روی دایـره مبنـای چرخ‌دنده و خط عمل چرخ‌دنده‌ها در حالـت واقعـی و مکانی که در حالت تئوری باید باشد. خطای انتقال یک جفت چرخ‌دنده گفته می‌شود:

$$TE = (y_p + R_p\theta_p) - (y_g + R_g\theta_g) \quad (۲۳)$$

مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن

مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌هـای متقـارن یـک روش پیشنهادی برای برجسته نمـودن تغییـرات محلـی یـک سیگنال است. این روش توسط نویسندگان پیشنهادشده و قابلیّت آن باید در مـوارد مختلـف مطالعـه گـردد. در سیگنال حاصل از این روش، اختلاف دامنه سـیگنال در محل عیب نسبت به قسمت‌های دیگر افـزایش یافتـه و در بهبود شناسایی عیوب می‌تواند مفیـد باشـد. در ایـن روش تعداد مشخصی از نقاط همسایه هر نقطـه مـورد نظر در دو طرف آن به‌طور متقارن در یکـدیگر ضـرب شده و مجموع این حاصل‌ضرب به آن نقطه اختصـاص می‌یابد. در واقع عامل افزاینده‌ی اختلاف نـواحی سـالم و معیوب، از ضـرب نمـودن مقـادیر همسـایه حاصـل می‌شود که باعث می‌شود کوچک‌ترین تغییراتی در یک

ناحیه از سیگنال به‌صورت تغییرات بزرگ خود را نشان دهد. برای یک سیگنال گسسته $x[n]$ مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SNCS_x[n,d] = \sum_{k=1}^{d} x[n+k]x[n-k] \qquad (٢٤)$$

که d اندازهٔ همسایگی را نشان می‌دهد.

در نظر گرفتن یک همسایگی حول نقطه مورد نظر برای انجام محاسبات در این روش، باعث می‌شود تغییرات جزئی در نقاطی که با نقاط همسایگی خود همخوانی ندارند به‌عنوان خطای اندازه‌گیری در نظر گرفته شده و نادیده گرفته شوند و بالعکس تغییراتی که روی تمام نقاط یک ناحیه به‌واسطه وجود عیب واقعی رخ می‌دهند، به‌عنوان تغییرات مهم تلقی شده و برجسته‌تر گردند.

نتایج

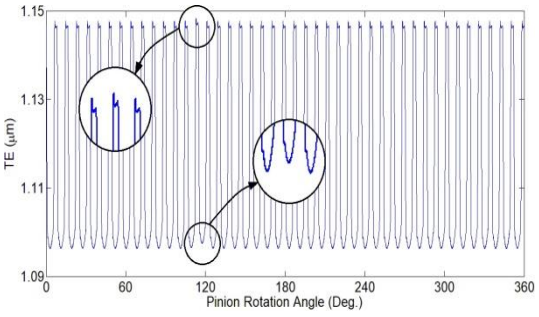
در جدول (٤) مشخصات یک سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای مطابق شکل (٥) ارائه شده است. سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیکی این سیستم با وجود یک ترک‌دار با طول و عمق ١٠ درصد طول و ضخامت دندانه، در دندانه شماره ١٤ پینیون، در شکل (٦ -الف) نشان داده شده است.

هرچند به علت کوچک بودن اندازهٔ ترک، اثر آن روی سیگنال ارتعاشی یا همان خطای انتقال سیستم بسیار کم بوده و در شکل به‌راحتی قابل تمایز نیست، اما مقدار خطای انتقال در ناحیه‌ای که دندانهٔ ترک‌دار (دندانه ١٤ام) وارد درگیری شده تا لحظه‌ای که از درگیری خارج می‌شود (حدود زاویهٔ ١٢٠ درجه چرخش پینیون) نسبت به مقادیر متناظر آن در دندانه-های دیگر بیشتر است. در شکل (٦- ب) نیز حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن با اندازهٔ همسایگی برابر با یک سیکل درگیری نشان داده شده است. چنانکه مشهود است، این عملیات در برجسته کردن اثر ترک و نشان دادن محل وقوع آن کاملاً کارآمد بوده است.

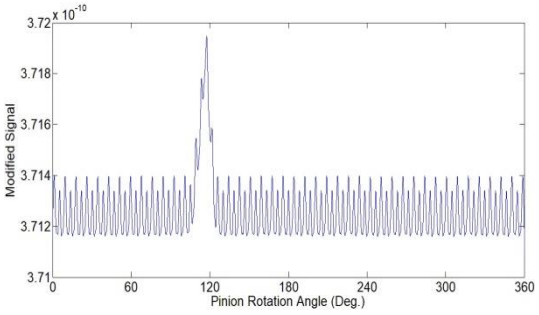
جدول «٤»: مقادیر و مشخصّات سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
توان موتور	$3\ KW$	سفتی پیچشی محور ورودی	$160.96\ \frac{kN.m}{rad}$
سرعت دورانی موتور	$1000\ RPM$	سفتی پیچشی محور خروجی	$317.89\ \frac{kN.m}{rad}$
مدول عمودی	$3\ mm$	شعاع داخلی پینیون	$25\ mm$
زاویهٔ فشار عمودی	$20\ deg.$	شعاع داخلی چرخ‌دنده	$30\ mm$
زاویهٔ مارپیچ	$15\ deg.$	مقاومت تسلیم	$276\ MPa$
پهنای چرخ‌دنده	$20\ mm$	مدول الاستیسیته	$68.9\ GPa$
تعداد دندانه پینیون	44	نسبت پواسون	0.33
تعداد دندانه چرخ‌دنده	59	مدول برشی	$26\ GPa$
جرم پینیون	$677\ g$	ممان اینرسی پینیون	$1.774\ g.m^2$
جرم چرخ‌دنده	$1.259\ kg$	ممان اینرسی چرخ‌دنده	$5.808\ g.m^2$
سفتی محوری یاتاقان ورودی	$0.951\ \frac{kN}{mm}$	سفتی شعاعی یاتاقان ورودی	$23.87\ \frac{kN}{mm}$
سفتی محوری یاتاقان خروجی	$2.079\ \frac{kN}{mm}$	سفتی شعاعی یاتاقان خروجی	$46.922\ \frac{kN}{mm}$
جرم محور ورودی	$3.21\ kg$	ممان اینرسی محور ورودی	$0.86\ g.m^2$
جرم محور خروجی	$4.69\ kg$	ممان اینرسی محور خروجی	$1.86\ g.m^2$

در شکل (۷ –الف) سیگنال ارتعاشی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای با ۷۱ دندانهٔ پینیون و چهار دندانهٔ ترک‌دار که توسط وانگ و وونگ [7] ارائه شده، نشان داده شده است. چنانکه از شکل الف قابل برداشت است، ناحیه بین زاویهٔ ۲٤۰ تا ۳٤۰ درجه چرخش پینیون دارای اثرات عیوب محلی بوده است؛ اما به علت مخدوش بودن سیگنال، تعیین دقیق دندانه‌های معیوب امکان‌پذیر نیست. در شکل (۷– ب) حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن با اندازهٔ همسایگی به اندازهٔ یک دندانه نشان داده شده است. چنانکه مشهود است، چهار ناحیه مجزا به‌صورت مشخص و واضح نمایان شده‌اند که می‌تواند در تعیین دندانه‌های معیوب بسیار اثربخش و مفید باشد. می‌توان نتیجه گرفت که این عملیات در برجسته کردن اثر ترک و نشان دادن محل وقوع آن کاملاً کارآمد بوده است.

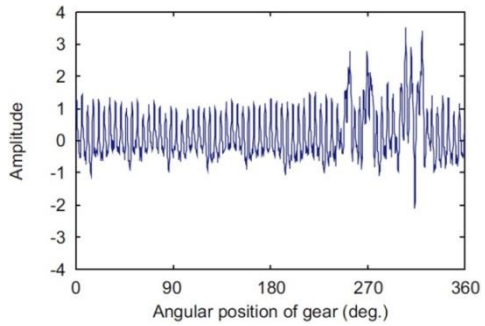


(الف)

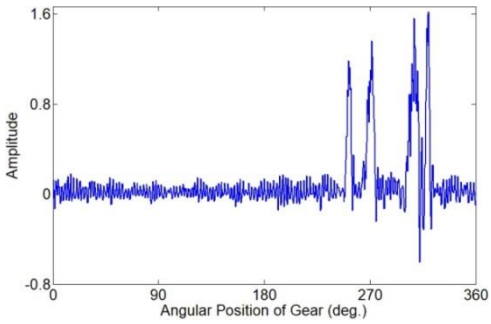


(ب)

شکل «٦»: الف) سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیکی سیستم شکل (٥– ب) حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن



(الف)



(ب)

شکل «۷»: الف) سیگنال ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای ارائه شده توسط وانگ و وونگ [7]. ب) حاصل مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن

نتیجه‌گیری

کارایی، دقّت و عمر سیستم‌های انتقال قدرت در صنعت بسیار مهم است. ازجمله سیستم‌های انتقال قدرتی که نسبت به دیگر سیستم‌ها دارای نسبت ظرفیت باربری به وزن بالاتر، راندمان انتقال بیشتر، سروصدا و ارتعاش کمتر و عمر بیشتر است، می‌توان به سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای اشاره نمود. در این میان سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای مارپیچ از دقّت، عمر و کاربرد بیشتر و لرزش، سروصدا و خطای انتقال کمتری نسبت به دیگر سیستم‌ها بهره می‌برند. یکی از مواردی که می‌تواند در کارکرد این سیستم‌ها خلل ایجاد کند، وجود ترک در دندانه چرخ‌دنده است که عموماً در ریشهٔ دندانه‌ها اتفاق می‌افتد. ازاین‌رو شناسایی و ردیابی ترک دندانه در زمان پیدایش و رشد اولیه آن، بسیار حائز اهمّیّت است. عموماً در پژوهش‌های مربوطه، برای استخراج اثر ترک‌ها از سیگنال ارتعاشی

و برای تعیین محل وقوع آنها از روش سیگنال باقیمانده استفاده می‌کنند. ازآنجاکه محاسبه سیگنال باقیمانده مستلزم دانستن سیگنال ارتعاشی حالت سالم و یا پارامترها و شرایط سیستم مورد بررسی است، ارائه راه‌کاری جهت برجسته نمودن تأثیر ترک دندانه روی سیگنال ارتعاشی می‌تواند در شناسایی محل ترک در سیگنال ارتعاشی بسیار مفید و مثمر ثمر واقع شود. بدین منظور از سیگنال ارتعاشی حاصل از شبیه‌سازی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای مارپیچ تک‌مرحله‌ای با یک ترک کوچک در ریشهٔ دندانه پینیون استفاده شد. سپس روش مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن به‌عنوان روش پیشنهادی در این تحقیق، روی سیگنال ارتعاشی سیستم اعمال شده و قابلیّت منحصربه‌فرد آن نشان داده شد. بدین‌صورت که تغییرات کوچکی که به‌واسطه یک ترک کوچک روی سیگنال ارتعاشی سیستم رخ داده بود، با اعمال روش پیشنهادی تا حدود سه برابر کل دامنه ارتعاشی افزایش یافت. همچنین این روش روی یک سیگنال ارتعاشی مخدوش ارائه‌شده در یکی از تحقیقات پیشین، اعمال شده و کارایی آن در تعیین دندانه‌های معیوب به‌خوبی نشان داده شد. در این مثال نیز نسبت دامنه ارتعاشی ناحیه معیوب به ناحیه سالم که کمتر از دو برابر بود تا بیش از چهار برابر ارتقاء یافت. به‌طورکلی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که این عملیات در برجسته کردن اثر ترک و نشان دادن محل وقوع آن کاملاً مفید و کارآمد عمل می‌کند. ازجمله پژوهش‌هایی که در آینده در این زمینه قابل انجام است، می‌توان به بررسی اثر اندازهٔ همسایگی بر روی برجسته‌سازی محل عیب و همچنین اعمال روش پیشنهادی بر روی سیگنال‌های ارتعاشی تجربی سیستم‌های مختلف چرخ‌دنده‌ای اشاره نمود.

واژه‌نامه

تفکیک دامنه‌ای و فازی	Amplitude and Phase Demodulation
سیگنال باقیمانده	Residual Signal
مدل خودبرگشت‌کننده	Autoregressive Model
تجزیه جمعی تجربی	Ensemble Empirical Mode Decomposition
توابع مود طبیعی	Intrinsic Mode Functions
سفتی درگیری	Mesh Stiffness
چرخدنده مارپیچ	Helical Gear
ترک در ریشه دندانه	Tooth Root Crack
مجموع حاصل‌ضرب همسایه‌های متقارن	Sum of Symmetric Neighbors Multiplication
خطای انتقال	Transmission Error

مراجع

1. Mohammed, O.D., Rantatalo, M. and Aidanpää, J.-O., "Improving mesh stiffness calculation of cracked gears for the purpose of vibration-based fault analysis", *Engineering Failure Analysis*, Vol. 34, pp. 235–251, (2013).
2. Li, C.J. and Lee, H., "Gear fatigue crack prognosis using embedded model, gear dynamic model and fracture mechanics", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19, pp. 836–846, (2005).
3. Wan, Z., Cao, H., Zi, Y., He, W. and Chen, Y., "Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 92, pp. 447–463, (2015).
4. McFadden, P.D., "Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 108, pp.

165–170, (1986).

5. Stewart, R.M., "*Some useful data analysis techniques for gearbox diagnostics*", University of Southampton, (1977).
6. Randall, R.B., "*Vibration-based condition monitoring: industrial, aerospace and automotive applications*", John Wiley & Sons, (2011).
7. Wang, W. and Wong, A.K., "Autoregressive model-based gear fault diagnosis", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, pp. 172–179, (2002).
8. Endo, H., Randall, R.B., and Gosselin, C., "Differential diagnosis of spall vs. cracks in the gear tooth fillet region: Experimental validation", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 636–651, (2009).
9. Zhou, X., Shao, Y., Lei, Y. and Zuo, M., "Time-varying meshing stiffness calculation and vibration analysis for a 16DOF dynamic model with linear crack growth in a pinion", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 134, pp. 11011, (2012).
10. Assaad, B., Eltabach, M. and Antoni, J., "Vibration based condition monitoring of a multistage epicyclic gearbox in lifting cranes", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 42, pp. 351–367, (2014).
11. Elasha, F., Ruiz-Carcel, C., Mba, D. and Chandra, P., "A comparative study of the effectiveness of adaptive filter algorithms, spectral kurtosis and linear prediction in detection of a naturally degraded bearing in a gearbox", *Journal of Failure Analysis and Prevention*, Vol. 14, pp. 623–636, (2014).
12. Wu, S., Zuo, M.J. and Parey, A., "Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, pp. 608–624, (2008).
13. Sun, R., Yang, Z., Chen, X., Tian, S. and Xie, Y., "Gear fault diagnosis based on the structured sparsity time-frequency analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 102, pp. 346-363, (2018).
14. Buzzoni, M., D'Elia, G., Mucchi, E. and Dalpiaz, G., "A vibration-based method for contact pattern assessment in straight bevel gears", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 120, pp. 693-707, (2019).
15. Mahgoun, H., Bekka, R.E. and Felkaoui, A., "Gearbox fault diagnosis using ensemble empirical mode decomposition (EEMD) and residual signal", *Mechanics & Industry*, Vol. 13, pp. 33–44, (2012).
16. Yu, W., Shao, Y. and Mechefske, C.K., "The effects of spur gear tooth spatial crack propagation on gear mesh stiffness", *Engineering Failure Analysis*, Vol. 54, pp. 103–119, (2015).
17. Mohammed, O.D., Rantatalo, M. and Aidanpää, J.-O.,: "Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 54, pp. 293–305, (2015).
18. Mohammed, O.D. and Rantatalo, M., "Gear tooth crack detection using dynamic response analysis", *Insight* (Northampton), Vol. 55, pp. 417–421, (2013).

(مقالهٔ پژوهشی)

شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان آشفته در یک مجرای مربعی*

امین رسام [۱] زینب پورانصاری [۲] محمدرضا زنگنه [۳]

چکیده *در این تحقیق، شبیه‌سازی عددی گردابه‌های بزرگ جریان آشفته با استفاده از مدل زیرشبکهٔ اسماگورینسکی دینامیکی (DS) در یک مجرای مربعی در عدد رینولدز اصطکاکی Re_τ=۱۸۰ انجام و نتایج حاصل از آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مشخص شدن دقّت شبیه‌سازی با مدل DS، نتایج با داده‌های مرجع حاصل از شبیه‌سازی عددی به روش مستقیم مقایسه شده‌اند. همچنین، برای بررسی تأثیر مدل DS، یک شبیه‌سازی عددی بدون مدل زیرشبکه نیز انجام شده و نتایج آن با مدل DS مقایسه شده است. شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از روش حجم محدود و با دقّت مرتبهٔ دوم، برای گسسته‌سازی معادلات ناویر–استوکس، انجام شده‌اند. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که نتایج مدل زیرشبکهٔ DS، در شبکهٔ مورد استفاده، مطابقت خوبی با داده‌های شبیه‌سازی مستقیم، برای کمّیت‌های سرعت متوسط و تنش‌های رینولدز، داشته و بهبود قابل‌ملاحظه‌ای در نتایج شبیه‌سازی با مدل زیرشبکهٔ DS نسبت به شبیه‌سازی بدون مدل زیرشبکه مشاهده می‌گردد.*

واژه‌های کلیدی شبیه‌سازی گرادبه‌های بزرگ؛ مدل اسماگورینسکی دینامیکی؛ جریان آشفته؛ مجرای مربعی.

Large-Eddy Simulation of Turbulent Square Duct Flow

A. Rasam Z. Pouransari M. R. Zangeneh

Abstract *In this research, large-eddy simulation of a turbulent square duct flow is performed at the friction Reynolds number $Re_\tau = 180$, using the dynamic Samgorinsky (DS) subgrid-scale model and the results are discussed. To assess the accuracy of the DS model, the results are compared with the reference direct numerical simulation data. Moreover, to see the effect of the DS model, a numerical simulation without a subgrid-scale model is also performed and the results are compared with those of the DS model. Simulations are carried out using a second-order finite volume method for discretization of the Navier—Stokes equations. Results from the DS model simulations, for the grid used, are in good agreement with the direct numerical simulation data for the mean velocity and Reynolds stresses and an appreciable improvement is observed with respect to the no subgrid-scale model simulations.*

Key Words Large-Eddy Simulation, Dynamic Smagorinsky Model, Turbulent Flow, Square Duct

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱۰/۱۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۱/۲۹ می‌باشد. **DOI:**10.22067/fum-mech.v31i1.84947

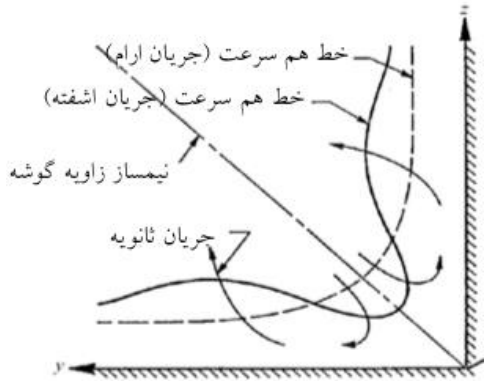
(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهیدبهشتی. a_rasam@sbu.ac.ir

(۲) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران.

(۳) دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی.

مقدّمه

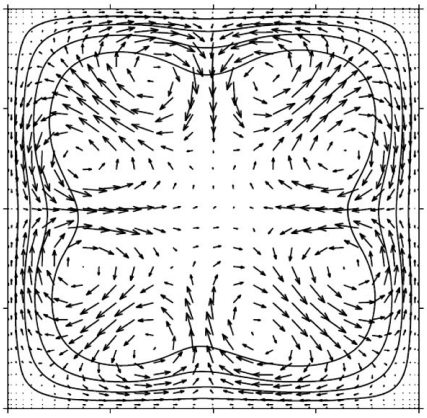
جریان آشفته در مجراهای چهارگوش دارای کاربردهای صنعتی متعدّدی است. از آن جمله می‌توان به کاربرد در صنایع گرمایشی، تهویهٔ مطبوع، محفظه‌های احتراق و سیستم‌های انتقال آب اشاره نمود. به‌علاوه، علی‌رغم سادگی نسبی هندسی، وجود جریان‌های ثانویّه باعث پیچیدگی فیزیکی این جریان‌ها می‌گردد. این جریان‌های ثانویّه که در اثر آشفتگی به وجود می‌آیند، باعث انتقال مومنتوم از مرکز کانال به گوشه‌های مجرا و اختلاط جریان می‌گردند. این موضوع در شکل (۱) به‌روشنی دیده می‌شود. در این شکل خطوط هم‌سرعت برای جریان‌های آرام و آشفته در گوشهٔ یک مجرا نشان داده شده‌اند. به دلیل پیچیدگی این جریان‌ها، شبیه‌سازی عددی آن‌ها، برای بررسی دقّت مدل‌های آشفتگی مانند شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ، حائز اهمّیّت است. همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، این جریان‌های ثانویهٔ آشفته در مقاطع عمود بر جهت جریان متوسط شامل ۸ گردابه در گوشه‌ها می‌باشند. این گردابه‌ها دوبه‌دو بر خلاف جهت یکدیگر چرخیده و نسبت به قطرهای مقطع مربعی مجرا متقارن می‌باشند [2, 3].



شکل «۱»: خطوط هم سرعت درگوشهٔ مجرا برگرفته از مرجع [1]

ازجمله مهم‌ترین مطالعات در مورد اندرکنش جریان‌های ثانویّه، سرعت متوسط و سرعت‌های نوسانی آشفتگی در مجراها می‌توان به پژوهش‌های انجام شده توسط گسنر [2] و گسنر و جونز [3]، با استفاده از داده‌های تجربی اشاره نمود. بررسی‌های انجام شده در این تحقیقات بر روی معادله ورتیستی متوسط در راستای جریان اصلی، نشان می‌دهند که گرادیان‌های تنش برشی آشفتگی در راستای عمود بر نیمساز زاویه گوشه مجرا، باعث ایجاد جریان‌های ثانویّه، در جهت عمود بر جهت جریان متوسط اصلی، به سمت گوشه‌ها می‌گردد. همان‌طور که در شکل (۱) نیز نشان داده شده، این جریان‌های ثانویّه باعث ایجاد انحنای متفاوتی در خطوط هم سرعت در جریان آشفته نسبت به جریان آرام می‌گردد.

بررسی‌های عددی متعدّدی در مورد جریان‌های آشفته در مجاری چهارگوش انجام‌شده است. این شبیه‌سازی‌ها را می‌توان با توجّه به روش به‌کاررفته به سه دستهٔ: شبیه‌سازی مستقیم [7-4 ,1]، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان [8, 9] و شبیه‌سازی به روش معادلات متوسط‌گیری شدهٔ رینولدز تقسیم نمود. نمونه‌هایی از مطالعات انجام شده با استفاده از روش شبیه‌سازی مستقیم و شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان در ادامه به‌اختصار مورد بررسی قرار می‌گیرند.



شکل «۲»: بردارهای سرعت متوسط برگرفته از مرجع [2]

از میان مطالعات انجام شده به روش شبیه‌سازی مستقیم، می‌توان به بررسی‌های انجام شده توسط ژنگ و همکاران [7] در اعداد رینولدز اصطکاکی، ۳۰۰، ۶۰۰، ۹۰۰ و ۱۲۰۰ اشاره نمود. در این تحقیق، تأثیر عدد رینولدز بر دینامیک جریان مورد بررسی قرار گرفته است. وینوئسا و همکاران [1] به بررسی تأثیر نسبت ابعاد مجرا بر روی گردابه‌های ثانویّه در مجراهای مستطیلی در اعداد رینولدز اصطکاکی ۱۸۰ و ۳۳۰ پرداخته‌اند. هوسر و برینگن [4] جریان آشفته در یک کانال مربعی در عدد رینولدز اصطکاکی ۶۰۰ را مورد بررسی قرار دادند. از مهم‌ترین یافته‌های ایشان می‌توان به برقراری ارتباط بین ناهمسانگردی تنش رینولدز در گوشه‌ها با ساختارهای جریان آشفته اشاره کرد. پینلی و همکاران [5] نقش ساختارهای جریان در شکل‌گیری جریان‌های ثانویّه را با استفاده از شبیه‌سازی عددی به روش مستقیم در یک مجرای مربعی مورد بررسی قرار دادند. از میان مطالعات انجام شده به روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ نیز می‌توان به تحقیق انجام شده به‌وسیله زو و پولارد [9] با استفاده از مدل زیرشبکهٔ اسماگورینسکی اشاره کرد. نتایج حاصل از این شبیه‌سازی‌ها در عدد رینولدز اصطکاکی ۲۰۰ در یک مجرای مربعی تطابق مناسبی با نتایج شبیه‌سازی‌های مستقیم نشان می‌دهد.

با توجّه به اندازه ساختارهای آشفتهٔ موجود در جریان داخل مجرا، در نظر گرفتن یک دامنهٔ محاسباتی بزرگ برای شبیه‌سازی‌های عددی ضروری است. به همین دلیل، شبیه‌سازی این نوع جریان‌ها به روش‌های مستقیم و گردابه‌های بزرگ ازنظر محاسباتی پرهزینه است. به‌تبع آن، در مقایسه با دیگر جریان‌های آشفته، شبیه‌سازی‌های عددی کمتری در این مورد وجود داشته و نیازمند بررسی‌های بیش‌تری است.

در این تحقیق، از روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان برای شبیه‌سازی عددی جریان آشفته داخل یک مجرای مربعی با عدد رینولدز اصطکاکی $\mathrm{Re}_\tau = ۱۸۰$ با استفاده از مدل زیرشبکهٔ اسماگورینسکی دینامیکی پرداخته می‌شود. عدد رینولدز اصطکاکی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Re}_\tau = \frac{h u_\tau}{\upsilon} = ۱۸۰, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{\text{دیوار}}}{\rho}}. \qquad (۱)$$

در این روابط، h نصف ارتفاع مجرا، υ ویسکوزیتهٔ سینماتیکی سیال، ρ چگالی سیال و $\tau_{\text{دیوار}}$ تنش برشی بر روی دیوارهٔ مجرا است. به‌منظور بررسی اثر مدل زیرشبکه، یک شبیه‌سازی عددی بدون مدل نیز انجام و نتایج حاصل از آن‌ها با یکدیگر و هم‌چنین داده‌های شبیه‌سازی مستقیم مرجع [1] مقایسه می‌شوند.

معادلات حاکم و مدل زیرشبکه

معادلات حاکم بر گردابه‌های بزرگ جریان، در حالت تراکم‌ناپذیر، با اعمال فیلتر بر معادلات ناویر- استوکس غیرقابل تراکم و معادلهٔ پیوستگی به‌صورت زیر به دست می‌آیند [10]:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3. \qquad (۳)$$

در این معادلات، از قاعده جمع بر روی اندیس‌های تکراری استفاده شده، $\tilde{}$ نشان‌دهنده یک کمّیت فیلتر شده، $\tilde{u}_i$ بردار سرعت، $\tilde{p}$ فشار، F_i بردار نیروی حجمی و τ_{ij} تانسور تنش زیرشبکه است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [10]:

$$\tau_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \qquad (٤)$$

این تنش‌ها ناشی از مقیاس‌های زیر شبکه بوده و نیازمند مدسازی می‌باشند. از مدل اسماگورینسکی دینامیکی [11] با اصلاحات لی‌لی [12] برای مدل‌سازی τ_{ij} در معادلات حاکم بر گردابه‌های بزرگ استفاده شده است. این مدل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau_{ij} - \frac{2}{3}K^{SGS}\delta_{ij} = -2\upsilon_T \tilde{S}_{ij}, \upsilon_T = C\tilde{\Delta}|\tilde{S}| \quad (۵)$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right), \quad |\tilde{S}| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}. \quad (۶)$$

در این روابط υ_T، ویسکوزیته گردابه‌ای، δ_{ij} دلتای کرونکر، K^{SGS} انرژی جنبشی آشفتگی زیرشبکه، $\tilde{\Delta} = 2\sqrt[3]{\Omega}$ (Ω حجم یک سلول محاسباتی است)، $\tilde{S}_{ij}$ تانسور نرخ کرنش و C ضریب اسماگورینسکی است، که به‌صورت دینامیکی محاسبه می‌شود.

روش حل عددی، دامنهٔ حل و شبکه‌بندی

شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم‌افزار متن‌باز code Saturne نسخهٔ ۵ [13] به روش حجم محدود هم‌مکان انجام گرفته است. در این روش، شکل پایستار معادلات ناویر- استوکس با استفاده از روش مرکزی با دقّت مرتبهٔ دو گسسته‌سازی و از روش مرتبهٔ دوم کرنک-نیکولسون نیز برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شده است.

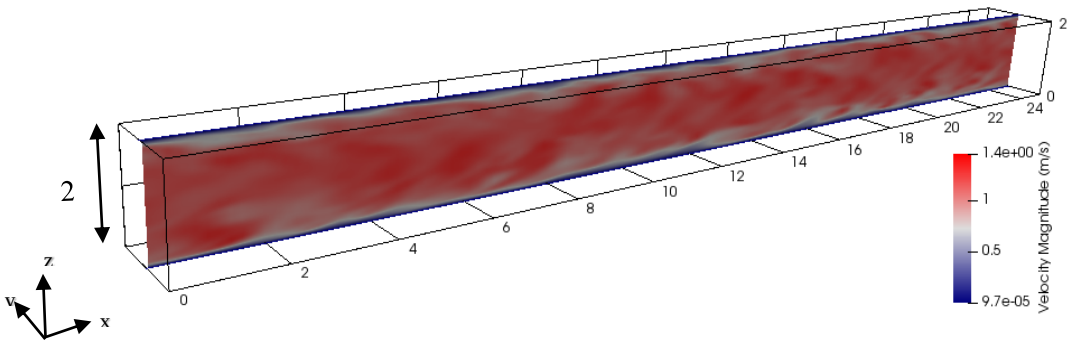
از الگوریتم SIMPLEC برای وابستگی معادلات سرعت-فشار و میانیانی Rhie-Chow به‌منظور جلوگیری از نوسانات استفاده شده است. صحت عملکرد نرم‌افزار به‌کاررفته در این تحقیق، برای انجام شبیه‌سازی به روش گردابه‌های بزرگ، توسط رسام و همکاران [14,15] مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصّات شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده و همچنین شبیه‌سازی مستقیم مرجع [1] در جدول (۱) آمده است.

جدول «۱»: مشخصّات شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده، شامل فاصلهٔ نقاط شبکه و عدد رینولدز اصطکاکی. شبیه‌سازی مستقیم مربوط به مرجع [1] است.

شبیه‌سازی	مدل	Δx^+	Δy^+	Δz^+	Re_τ
DS-SGS	DS	۳۵	۹	۹	۱٤۲/۱
No-SGS	--	۲۸	۱۱	۱۱	۱۵٤/۸
DNS	--	۱۰	۵	۹	۱٤۸/۳

اندازهٔ دامنهٔ حل در جهت جریان، با توجّه به ساختارهای جریان آشفته در این جهت تعیین می‌گردد. برای شبیه‌سازی مناسب گردابه‌های بزرگ، دامنهٔ حل در این شبیه‌سازی‌ها 25h در نظر گرفته شده است. اندازهٔ مجرای مربعی در دو جهت دیگر نیز 2h است. شایان یادآوری است که دامنهٔ حل مشابه دامنهٔ حل در مرجع [1] است. دامنهٔ حل، به همراه کانتور سرعت آنی در یک مقطع x-z در مجرای مورد نظر در شکل (۳) نشان داده شده است. شرط مرزی روی دیواره‌های مجرا، عدم لغزش و شرط مرزی در ورودی و خروجی، تناوبی در نظر گرفته شده است؛ بنابراین جریان متوسط در راستای x کاملاً توسعه‌یافته خواهد بود. برای برقراری جریان، نیروی حجمی F_i در معادلهٔ (۲)، در هر گام زمانی از شبیه‌سازی به‌گونه‌ای محاسبه می‌شود که دبی حجمی ورودی مقدار ثابتی باشد. لذا، شبیه‌سازی‌های عددی با سرعت میانگین ورودی ثابت انجام شده و عدد رینولدز، برمبنای سرعت میانگین ورودی (U_b)، $Re_b = U_b h/\nu$=۲۵۰۰ و مطابق با شبیه‌سازی مستقیم مرجع [1] است.

شبکهٔ محاسباتی در جهت جریان یکنواخت بوده و توزیع نقاط شبکه در دو جهت دیگر، به‌صورت تابع تانژانت هذلولوی است [16]. فواصل نقاط شبکه در جدول (۱) در مقیاس‌های دیواره داده شده‌اند. این مقیاس‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:



شکل «۳»: شماتیکی از دامنهٔ حل به همراه کانتورهای اندازه سرعت لحظه‌ای در مقطع میانی مجرا برای شبیه‌سازی DS-SGS

$$\Delta x^+ = \frac{u_\tau^* \Delta x}{\nu}, \qquad \Delta y^+ = \frac{u_\tau^* \Delta y}{\nu}, \qquad \Delta z^+ = \frac{u_\tau^* \Delta z}{\nu}, \qquad u_\tau^* = \langle \sqrt{\frac{\tau_{\text{دیوار}}}{\rho}} \rangle \quad (٦)$$

$$\Delta x^+ = \frac{u_\tau^* \Delta x}{\nu}, \qquad \Delta y^+ = \frac{u_\tau^* \Delta y}{\nu}, \qquad \Delta z^+ = \frac{u_\tau^* \Delta z}{\nu}, \qquad u_\tau^* = \langle \sqrt{\frac{\tau_{\text{دیوار}}}{\rho}} \rangle \quad (٧)$$

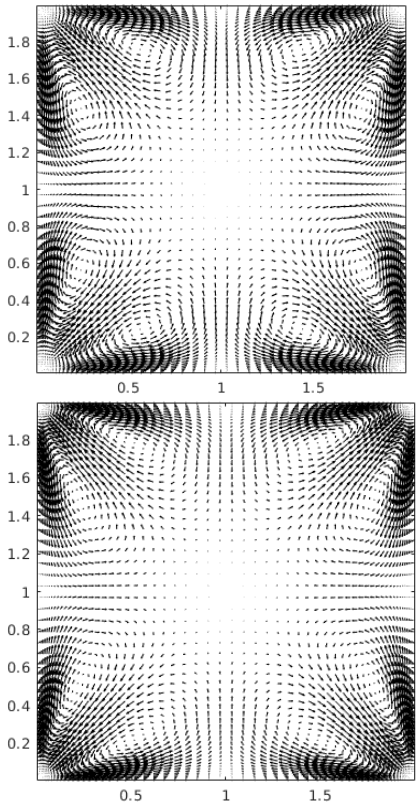
در این روابط، u_τ^* سرعت اصطکاکی متوسط‌گیری شده روی تمام دیواره‌ها است. مقادیر Δx^+، Δy^+ و Δz^+ متناسب با مقادیر توصیه‌شده در مرجع [17] در نظر گرفته شده است.

بردارهای سرعت

بردارهای سرعت متوسط برای یک مقطع عمود بر جهت جریان (y-z) در شکل (٤) نمایش داده‌شده‌اند. شکل‌ها ساختارهای جریان در این مقطع را نشان می‌دهند. همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، ۸ گردابه در گوشه‌های مجرای مربعی دیده می‌شود که کاملاً متقارن می‌باشند.

گردابه‌های بردارهای سرعت در دو شبیه‌سازی متشابه بوده و تنها اختلافات جزئی بین نتایج دو شبیه‌سازی مشاهده می‌گردد.

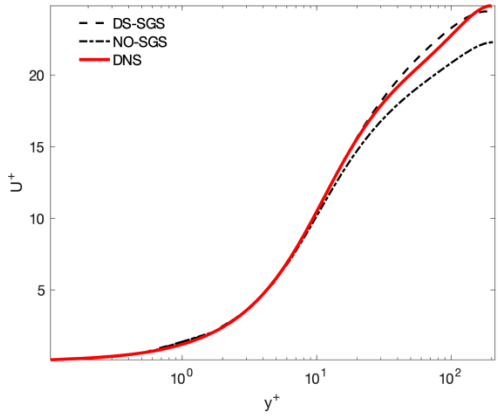
تقارن موجود در شکل‌ها و شباهت با نتایج شبیه‌سازی مستقیم مرجع، صحت شبیه‌سازی‌ها و کافی بودن مدّت زمان متوسط‌گیری‌ها را برای سرعت متوسط نشان می‌دهد.



شکل «٤»: بردارهای سرعت متوسط در یک مقطع y-z برای شبیه‌سازی DS-SGS (بالا) و شبیه‌سازی No-SGS (پائین).

سرعت متوسط

پروفیل‌های سرعت متوسط در راستای x به‌صورت زیر محاسبه و در مقیاس دیواره در مرکز مجرا در شکل (٥) نشان داده شده‌اند.



شکل «۵»: پروفیل‌های سرعت متوسط $\mathbf{U^+}$ بر حسب $\mathbf{y^+}$ در مقیاس دیواره در مرکز مجرا. داده‌های DNS برگرفته از مرجع [2] است.

$$U^+ = \frac{\langle u \rangle}{u_\tau^*},\ \langle u \rangle = \frac{1}{T}\langle \int_0^T u(x,y,z,t)dt \rangle_x \qquad (۸)$$

در روابط بالا، T بیان‌گر مدّت زمان متوسط‌گیری است. همان‌طور که در رابطهٔ (۸) نشان داده شده، تمام کمّیت‌های متوسط‌گیری شده، هم در زمان و هم در راستای x که جریان آشفته در آن راستا همگن آماری است، متوسط‌گیری شده‌اند [18]. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سرعت متوسط برای شبیه‌سازی DS-SGS که از مدل DS استفاده می‌کند، با نتایج شبیه‌سازی مرجع در تمام نقاط مطابقت بسیار خوبی دارد؛ اما در شبیه‌سازی No-SGS پروفیل سرعت در لایهٔ میانی و ناحیه قانون لگاریتمی کم‌تر از مقدار شبیه‌سازی مرجع است. این اختلاف، ناشی از پیش‌بینی بیش‌تر از مقدار واقعی تنش برشی دیواره، $\tau_{\text{دیوار}}$ است. این موضوع در پیش‌بینی‌های مربوط به مقادیر Re_τ در جدول (۱) نیز مشهود است. بزرگ بودن تنش برشی دیواره نیز نشان می‌دهد که آشفتگی جریان در شبیه‌سازی‌های عددی No-SGS بیشتر از مقدار شبیه‌سازی مرجع است. ازآنجایی‌که نقش مدل زیر شبکه حذف بخشی از انرژی جنبشی آشفتگی (مربوط به مقیاس‌های زیرشبکه) است [18]، بیش‌تر بودن آشفتگی در شبیه‌سازی‌های No-SGS ناشی از نبود مدل زیرشبکه است چراکه وظیفهٔ مدل زیرشبکه، مدل‌سازی مناسب اثر گردابه‌های کوچک بر جریان است که بر اساس نظریهٔ آبشار انرژی، انرژی جنبشی آشفتگی را مستهلک می‌کنند.

تنش‌های رینولدز

شکل (٦) تنش‌های متوسط رینولدز را در مختصات دیواره نشان می‌دهد. این تنش‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

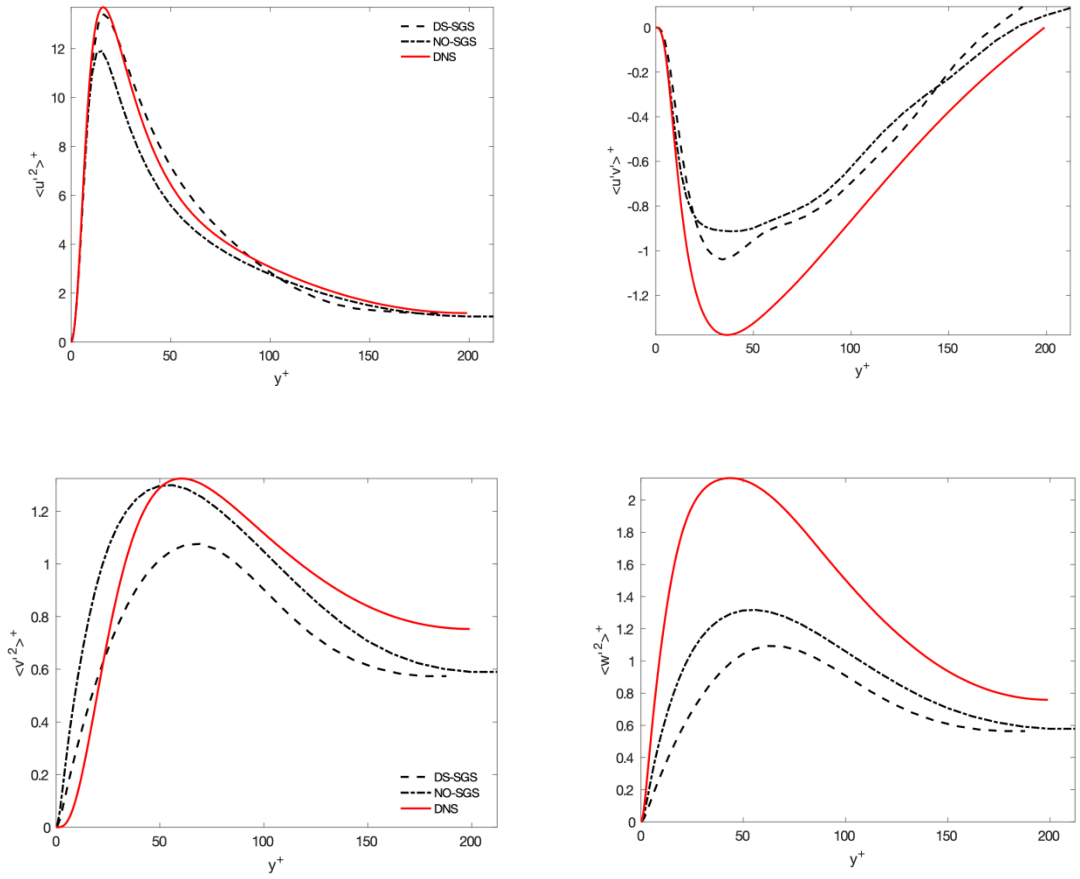
$$\begin{aligned}
\langle u'u' \rangle^+ &= \frac{\langle u'u' \rangle}{u_\tau^{*2}} = \langle u^2 \rangle^+ - \langle u \rangle^{2+} \\
\langle v'v' \rangle^+ &= \frac{\langle v'v' \rangle}{u_\tau^{*2}} = \langle v^2 \rangle^+ - \langle v \rangle^{2+} \\
\langle w'w' \rangle^+ &= \frac{\langle w'w' \rangle}{u_\tau^{*2}} = \langle w^2 \rangle^+ - \langle w \rangle^{2+} \\
\langle u'v' \rangle^+ &= \frac{\langle u'v' \rangle}{u_\tau^{*2}} = \langle uv \rangle^+ - \langle u \rangle^+ \langle v \rangle^+
\end{aligned} \qquad (۹)$$

در این روابط، (u, v, w) مؤلفه‌های سرعت می‌باشند. مؤلفه نرمال تنش رینولدز در جهت جریان در مختصات دیواره، $< u'u' >^+$ به‌درستی در شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از مدل زیرشبکهٔ DS پیش‌بینی شده است. درحالی‌که در شبیه‌سازی بدون مدل زیرشبکه، نتیجه بسیار کم‌تر از مقدار پیش‌بینی شده در شبیه‌سازی مرجع است. این اختلاف نیز به دلیل عدم وجود استهلاک مربوط به مدل زیرشبکه بوده که باعث شده تا در مختصات دیواره این اختلاف به وجود بیاید. شایان‌ذکر است که این رویه برخلاف آن چیزی است که در شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان در کانال‌ها دیده می‌شود [17]. همچنین، محل بیشینهٔ $< u'u' >^+$ در شبیه‌سازی DS-SGS مشابه نتیجهٔ شبیه‌سازی مرجع و در $y^+ = yu_\tau^*/\upsilon \approx ۱۹$ است، درحالی‌که در شبیه‌سازی No-SGS محل بیشینه تنش در y^+ کوچک‌تری قرار دارد. این موضوع نشان‌دهنده کوچک‌تر بودن مقیاس‌های جریان در نزدیکی دیواره،

به‌خاطر آشفتگی بیش‌تر جریان است. سایر تنش‌های نرمال ($<w'w'>^+$ و $<v'v'>^+$) در شبیه‌سازی عددی No-SGS مطابقت بهتری نسبت به DS-SGS با نتایج مرجع دارند؛ اما در ناحیهٔ نزدیک دیواره، هیچ‌کدام از شبیه‌سازی‌ها پیش‌بینی درستی از رفتار این تنش‌ها ندارند. این اختلاف در دقّت پیش‌بینی مؤلفه‌های کوچک‌تر تنش‌های نرمال رینولدز به‌وسیله مدل زیرشبکه، درحالی‌که مؤلفه $<u'u'>^+$ با دقّت مناسبی پیش‌بینی شده است، نشان‌دهنده مدل‌سازی نادرست ویسکوزیته گردابه‌ای در معادلهٔ (۵) است.

شایان یادآوری است که علّت این نادرستی مدل‌سازی ویسکوزیته گردابه‌ای به‌صورت یک کمّیت اسکالر و به‌صورت همسانگرد (مقدار یکسان برای تمام مؤلفه‌های تنش زیرشبکه) است.

تنش برشی رینولدز در شبیه‌سازی No-SGS، مطابقت نسبتاً بهتری با نتایج شبیه‌سازی مرجع دارد. نبود استهلاک انرژی زیرشبکه در این شبیه‌سازی باعث بیشتر شدن آشفتگی جریان و افزایش این مؤلفه تنش نسبت به شبیه‌سازی DS-SGS است.



شکل «٦»: پروفیل‌های تنش متوسط رینولدز $\langle u'^2\rangle^+$ ، $\langle v'^2\rangle^+$، $\langle w'^2\rangle^+$ و $\langle u'v'\rangle^+$ برحسب y^+. داده‌های DNS برگرفته از مرجع [2] است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان آشفته در داخل مجرایی مربعی با استفاده از روش حجم محدود انجام شد. شبیه‌سازی‌ها، یک مرتبه با استفاده از مدل زیرشبکهٔ اسماگورینسکی دینامیکی و یک مرتبه بدون استفاده از مدل زیرشبکه انجام شد تا اثر مدل زیرشبکه در شبیه‌سازی‌ها مشخص گردد. در ضمن، با مقایسه نتایج حاصل از این دو شبیه‌سازی با نتایج حاصل از یک شبیه‌سازی عددی مستقیم، دقّت نتایج شبیه‌سازی‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفت.

از بررسی نتایج مشخص شد که در شبیه‌سازی بدون مدل، آشفتگی جریان و درنتیجه تنش برشی دیواره بیشتر است. این موضوع باعث شد تا کمّیت‌های سرعت متوسط و تنش $< u'u' >^+$ در مختصات دیواره نسبت به نتایج شبیه‌سازی مرجع کوچک‌تر باشند.

برخلاف نتایج شبیه‌سازی بدون مدل، شبیه‌سازی عددی با مدل اسماگورینسکی دینامیکی، مطابقت خوبی با نتایج شبیه‌سازی مرجع برای کمّیت‌های سرعت متوسط و تنش $< u'u' >^+$ داشت. نتایج در مورد سایر تنش‌های نرمال درست برعکس بود و شبیه‌سازی بدون مدل عملکرد بهتری داشت.

تنش‌های نرمال $< v'v' >^+$ و $< w'w' >^+$ به‌دست‌آمده از هر دو شبیه‌سازی در ناحیه نزدیک دیواره رفتار مجانبی نادرستی داشتند. بهبود در پیش‌بینی تنش برشی $< u'v' >$ نیز که نقش بسیار مهمی در تولید انرژی جنبشی آشفتگی در جریان دارد، در شبیه‌سازی با مدل اسماگورینسکی دینامیکی نسبت به شبیه‌سازی بدون مدل مقدار قابل‌ملاحظه‌ای نبود. با توجّه به پیچیدگی جریان داخل مجاری چهارگوش، به نظر می‌رسد که تحقیقات بیش‌تری برای مدل‌سازی مناسب این نوع از جریان‌ها مورد نیاز باشد.

تقدیر و سپاس‌گزاری

از پشتیبانی و در اختیار گذاشتن منابع مرکز محاسباتی پیشرفتهٔ دانشگاه شهید بهشتی ایران در این پروژه صمیمانه قدردانی می‌شود.

واژه‌نامه

روش حجم محدود هم‌مکان	Collocated finite volume method
همگن آماری	Statistically homogeneous
لایه میانی	Buffer layer
ناحیه قانون لگاریتمی	Log-law region
شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ	Large-Eddy Simulation (LES)
شبیه‌سازی مستقیم	Direct Numerical Simulation (DNS)
زیرشبکه	Subgrid-scale
رینولدز اصطکاکی	Friction Reynolds number
ناهمسانگردی	Anisotropy
متن باز	Open source
مقیاس دیواره	Wall units

مراجع

1. Vinuesa, R., Noorani, A., Lozano-Durán, A., Khoury, G.K.E., Schlatter, P., Fischer, P.F. and Nagib, H.M., "Aspect ratio effects in turbulent duct flows studied through direct numerical simulation", *Journal of Turbulence*, 15(10), pp. 677-706, (2014).
2. Gessner, F., "The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner", *Journal of Fluid Mechanics*, 58(1), pp. 1-25, (1973).
3. Gessner, F. and Jones, J., "On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels", *Journal of Fluid Mechanics*, 23(4), pp. 689-713, (1965).
4. Huser, A. and Biringen, S., "Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct", *Journal of Fluid Mechanics*, 257, pp. 65-95, (1993).
5. Pinelli, A., Uhlmann, M., Sekimoto, A. and Kawahara, G., "Reynolds number dependence of mean flow structure in square duct turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, 644, pp. 107-122, (2010).
6. Pirozzoli, S., Modesti, D., Orlandi, P. and Grasso, F., "Turbulence and secondary motions in square duct flow", *Journal of Fluid Mechanics*, 840, pp. 631-655, (2018).
7. Zhang, H., Trias, F.X., Gorobets, A., Tan, Y. and Oliva, A., "Direct numerical simulation of a fully developed turbulent square duct flow up to Reτ= 1200", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 54, pp. 258-267, (2015).
8. Hebrard, J., Métais, O. and Salinas-Vasquez, M., "Large-eddy simulation of turbulent duct flow: heating and curvature effects", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 25(4), pp. 569-580, (2004).
9. Xu, H. and Pollard, A., "Large eddy simulation of turbulent flow in a square annular duct", *Physics of Fluids*, 13(11): pp. 3321-3337, (2001).
10. Sagaut, P., "*Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction*", Springer Science & Business Media, (2006).
11. Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W.H., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 3(7), pp. 1760-1765, (1991).
12. Lilly, D.K., "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(3), pp. 633-635, (1992).
13. Archambeau, F., Méchitoua, N. and Sakiz, M., "Code Saturne: A finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows-Industrial applications", *Journal of Finite Volumes*, 1(1): pp. 1-62, (2004).
14. Rasam, A., Wallin, S., Brethouwer, G. and Johansson, A.V., "Large eddy simulation of channel flow with and without periodic constrictions using the explicit algebraic subgrid-scale model", *Journal of Turbulence*, 15(11), pp. 752-775, (2014).
15. Rasam, A., Wallin, S., Brethouwer, G. and Johansson, A.V., "Improving separated-flow predictions using an anisotropy-capturing subgrid-scale model", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 65, pp. 246-251, (2017).
16. Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., "*Computational fluid Dynamics*", Vol. I, Engineering Education System, (2000).

17. Rasam, A., Brethouwer, G., Schlatter, P., Li, Q. and Johansson, A.V., "Effects of modelling, resolution and anisotropy of subgrid-scales on large eddy simulations of channel flow", *Journal of Turbulence*, (12): pp. N10, (2011).
18. Pope, S.B., "*Turbulent flows*", IOP Publishing, (2001).

(مقالهٔ پژوهشی)

مقایسه‌ای بر دیدگاه‌های مجزّا و هم‌زمان برای حل عددی اندرکنش حرارتی سیّال و جامد*

عماد تندیس[۱] علی اشرفی زاده[۲]

چکیده *حل عددی مسائل اندرکنش حرارتی سیّال-جامد (CHT) که شامل چندین ناحیهٔ محاسباتی هستند به لحاظ هزینه‌های محاسباتی و پایداری حل، ازجمله موضوعات چالش‌برانگیز به شمار می‌آید. علت عمده این چالش‌ها را می‌توان به همبستگی بین معادلات در نواحی مختلف و همچنین همبستگی بین معادلات حاکم درون ناحیهٔ سیّال مرتبط دانست. این مقاله به بررسی مقایسه‌ای دو دیدگاه جهت اعمال همبستگی معادلهٔ انرژی در مرز مشترک بین نواحی می‌پردازد: دیدگاه مجزّا و دیدگاه هم‌زمان. در دیدگاه اوّل، اعمال دقیق همبستگی به کمک استفاده از روش‌های تکراری امکان‌پذیر است، حال‌آنکه دیدگاه دوم، بر مبنای حل هم‌زمان معادلات انرژی در تمام نواحی است. به عبارت دقیق‌تر، هدف اصلی در پژوهش حاضر توسعه سه حلگر CHT بر مبنای روش حجم محدود و مقایسه هزینه‌های محاسباتی آنها جهت شبیه‌سازی اندرکنش حرارتی سیّال-جامد با درجات مختلف همبستگی است. هر سه حلگر مورد نظر، در شیوه اعمال همبستگی بین فشار و سرعت در سیّال، مشترک می‌باشند و تفاوت آنها در شیوه اعمال همبستگی بین معادلات انرژی در نواحی مختلف و همچنین بین انرژی و ممنتوم در سیّال است. همچنین OpenFOAM به‌عنوان یک نرم‌افزار منبع باز جهت توسعه الگوریتم‌های پیشنهادی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس، دقّت و هزینهٔ محاسباتی حلگرهای مذکور، به کمک شبیه‌سازی مسئلهٔ اندرکنش بین جابجایی آزاد در سیّال و رسانش در دیواره عمودی مجاور در حالت‌های مختلفی از همبستگی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از حل حالت‌های مختلف مسئلهٔ مورد نظر نشان می‌دهد که برخلاف آنچه درحلگرهای OpenFOAM اعمال شده، به‌کارگیری حلقهٔ مجزّا جهت تضمین همبستگی انرژی- انرژی برای هر تکرار، هزینه‌های محاسباتی را بخصوص برای مسائل با همبستگی قوی تا حد زیادی کاهش می‌دهد.*

واژه‌های کلیدی اندرکنش حرارتی سیّال جامد، دیدگاه هم‌زمان، دیدگاه مجزّا، همبستگی، حجم محدود، سرعت همگرایی، OpenFOAM

Comparison of Monolithic and Partitioned Approaches for the Solution of Fluid-Solid Thermal Interaction Problems

E. Tandis A. Ashrafizadeh

Abstract *Numerical solution of conjugate heat transfer (CHT) problems in multi-region domains is a challenging issue in terms of efficiency and stability due to inherent coupling between governing equations in separate sub-domains. This paper aims at comparing two distinct strategies for coupling energy equations at interface of regions: partitioned and monolithic. While the former enforces strong coupling via iterative procedures, the latter suggests simultaneous solution of energy equation throughout all regions at once. More precisely, the primary objective of this study is to compare computational costs for three finite volume- based CHT solvers which share a same method for handling pressure-velocity coupling in the fluid, i.e. semi-implicit projection method, and are distinguished from the coupling strategy for energy equation at interface of interacting sub-domains. The first method applies simultaneous solution of energy equation across all regions while second and third ones use separate solver for each region with difference in handling iterative loops. The accuracy and convergence rate of three algorithms are assessed via transient solution of conjugate free convection in fluid and conduction in vertical wall. Finally, it is concluded that, in contrast to partitioned solver in OpenFOAM for CHT problems, employing a separate loop to enforce energy-energy coupling per iteration, can be much more beneficial in terms of computational costs.*

Key Words Conjugate Heat Transfer, Monolithic, Partitioned, Coupling, Finite Volume, Convergence Rate, OpenFOAM.

✶تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱۰/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۲/۶ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.84760

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی، تهران، ایران.
e.tandis@email.kntu.ac.ir

(۲) استاد دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی، تهران، ایران

مقدّمه

اندرکنش حرارتی سیّال و جامد که با عنوان اختصاری CHT شناخته شده است در مسائل کاربردی متنوعی شامل صنعتی، علوم زیستی و غیره نقش اساسی دارد و به همین دلیل توجّه محقّقان زیادی را به خود جلب کرده است. مسائلی از این نوع را می‌توان جزء دسته‌ای از مسائل چند فیزیکی به شمار آورد که ویژگی بارز آنها وجود چندین ناحیهٔ محاسباتی سیّال و جامد بوده به‌طوری‌که معادلات حاکم بر آنها در مرز مشترک نواحی، همبسته می‌باشند. علاوه بر این نوع همبستگی، مسائل CHT دارای همبستگی‌های دیگری نیز هستند که ناشی از وابستگی معادلات انرژی، ممنتوم و پیوستگی به هم است. این موضوع، به‌خصوص در مسائل شامل جابجایی آزاد که عدد گراشف در آنها مقادیر بالایی دارد، بر پیچیدگی این نوع از مسائل چند فیزیکی می‌افزاید.

آنالیز این دسته از مسائل چند فیزیکی می‌تواند به شیوه‌های گوناگونی صورت پذیرد. اوّلین و ساده‌ترین روش، استفاده از روش‌های تحلیلی است که می‌تواند در مورد پارامترهای مؤثر بر مسئله و همچنین جهت اعتبارسنجی الگوریتم‌های عددی در حل مسائل ساده مورد استفاده قرار گیرد. این روش، بااینکه جواب‌های نسبتاً دقیقی در برخی مسائل ساده [1-3] ارائه می‌دهد ولی در تحلیل دقیق مسائل پیچیده در این حوزه، ناتوان است. علاوه بر روش تحلیلی، روش‌های آزمایشگاهی نیز می‌تواند به‌عنوان ابزاری قدرتمند در حل مسائل واقعی استفاده شوند؛ اما با وجود دقّت مطلوب، روش‌های آزمایشگاهی معمولاً پرهزینه و زمان‌بر هستند. نهایتاً، روش‌های عددی به‌عنوان گزینه‌ای که می‌توانند بازه وسیعی از مسائل CHT را در زمانی نسبتاً کم و با دقّتی معقول حل نمایند، در چند دههٔ پیشین، موضوع بسیاری از تحقیقات بوده است [4-6].

الگوریتم‌های عددی در حوزهٔ مسائل CHT – و به‌طورکلی مسائل چند فیزیکی- را، از نظر چگونگی اعمال همبستگی بین معادلات، می‌توان به دو دسته عمده تقسیم‌بندی کرد: روش‌های مجزّا (Partitioned) و روش‌های هم‌زمان (Monolithic). ویژگی مثبت روش‌های مجزّا را می‌توان به امکان استفاده از حلگرهای موجود و حتی تجاری دانست به‌گونه‌ای که ترکیب مناسب این حلگرها به کمک کدهای واسط (Interface)، می‌تواند شیوه‌های گوناگونی از این روش‌ها را با بازده‌های محاسباتی متفاوت ارائه دهد. با وجود انعطاف‌پذیری مناسب روش‌های مجزّا، این روش‌ها در مقایسه با روش‌های هم‌زمان بازده محاسباتی پایین‌تری دارند. به‌عبارت‌دیگر، حل مسائلی که همبستگی معادلات به هم از نوع قوی است روش‌های هم‌زمان می‌توانند در زمانی کمتر و با پایداری بیشتری به حل مسئله بپردازند. در الگوریتم‌های مجزّا، شیوه مشترک، به این صورت است که حل‌های مرتبط با نواحی سیّال و جامد به‌صورت متوالی فراخوانده می‌شوند [7-10] و اعمال دقیق شرایط مرزی در مرز مشترک به کمک حلقه‌های predictor-corrector صورت می‌پذیرد و این مسلماً هزینه‌های محاسباتی بالایی را به حلگرهای CHT تحمیل می‌کند. بر خلاف روش‌های مجزّا، در الگوریتم‌های هم‌زمان، معادلاتی که اساس فیزیکی و متغیرهای وابسته مشابهی در نواحی سیّال و جامد دارند – در اینجا معادلهٔ انرژی- در تمام فضای محاسباتی به‌صورت هم‌زمان حل می‌شوند و به‌این‌ترتیب سرعت همگرایی بالا می‌رود [11, 12].

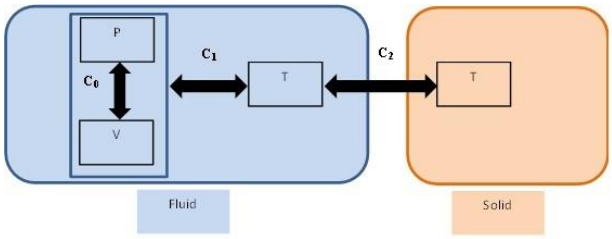
اعمال مناسب شرایط مرزی در مرز مشترک – که آن را شرط مرزی همبستگی می‌نامیم- یکی از پارامترهای مهم در دقّت و هزینه‌های محاسباتی حلگرهای CHT و بخصوص در حالت حل گذرا است. این مسئله، موضوع بسیاری از مطالعات صورت گرفته در زمینه حل عددی مسائل اندرکنش گرمایی بین سیّال و جامد بوده است [13-16]. هدف این مطالعات

عمدتاً ارائه شیوه‌های اعمال شرط مرزی همبستگی به‌گونه‌ای بوده است که ۱) دقّت بالا، ۲) پایداری حل، ۳) هزینه محاسباتی پایین و ٤) پایستاری را نتیجه دهد. به‌عنوان‌مثال، شرط مرزی از نوع دیریشله-رابین که مقادیر ضرایب آن موضوع بسیاری از تحقیقات پیشین [15] بوده است به‌صورت مکرر برای اعمال شرط مرزی همبستگی در این‌گونه مسائل و با هدف بهینه‌سازی دقّت و پایداری الگوریتم‌های مجزّا پیشنهاد گردیده است. بر اساس این روش‌ها، شرط مرزی پیشنهادی در مرز مشترک سیّال و جامد، روی حلگر سیّال از نوع شرط دما ثابت و برای حلگر جامد از نوع شرط مرزی شار حرارتی است. علاوه بر این، شروط مرزی دیگری برای مرز مشترک ارائه شده است. از میان آنها می‌توان به شرط مرزی رابین-رابین [16] اشاره کرد که نتایج ارائه شده حاصل از اعمال آن، قابل قبول گزارش شده است.

ازآنجایی‌که در مسائل CHT، معادلات سیّال شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی و همچنین معادلهٔ انرژی در جامد ایفای نقش می‌کنند، به‌منظور طراحی روش‌های عددی با کارایی بهتر، نیاز است تا به‌طور دقیق‌تر، همبستگی بین معادلات مورد مطالعه قرار گیرد. به همین منظور، در این تحقیق به بررسی دقیق‌تر همبستگی بین متغیرهای مجهول شامل فشار، سرعت و دما در سیّال و همچنین دما در جامد می‌پردازیم. شکل (۱) این همبستگی‌ها را به‌صورت شماتیک نشان می‌دهد.

در مسائل سیّالاتی فارغ از نقش معادلهٔ انرژی، همبستگی بین سرعت و فشار یک خاصیت ذاتی در معادلات ممنتوم و پیوستگی است و در اینجا آن را همبستگی نوع صفر (C_0) می‌نامیم. مطالعات گسترده‌ای در زمینه نقش این نوع همبستگی در معادلات حاکم بر سیّال، شیوه‌های گوناگون اعمال آن در الگوریتم‌های مختلف و نقش آن در کارایی الگوریتم‌ها صورت گرفته است [17-19]. لذا، این نوع همبستگی در این مقاله کمتر مورد توجّه قرار گرفته و یک روش مجزّا و معمول در سایر حلگرها، جهت اعمال آن استفاده خواهد شد؛ اما با توجّه به هزینهٔ محاسباتی آن، نقش آن در کارایی الگوریتم‌های مورد نظر در این تحقیق، شرح داده خواهد شد.

بر اساس مطالعات پیشین، دو نوع همبستگی دیگر، نقش مؤثری در پایداری و بازده محاسباتی الگوریتم‌های عددی دارند: همبستگی بین معادلات ممنتوم و انرژی در نواحی شامل سیّال که آن را همبستگی نوع اوّل می‌نامیم و همبستگی بین معادلات انرژی در نواحی سیّال و جامد که مرز مشترک دارند که از آن با عنوان همبستگی نوع دوم یاد می‌کنیم. این دو نوع همبستگی در شکل (۱)، به ترتیب با C_1 و C_2 نشان داده‌شده‌اند.



شکل «۱»: نمایش همبستگی‌های مختلف در یک مسئلهٔ CHT

سؤال منطقی که در این خصوص مهم به نظر می‌رسد ترتیب نحوهٔ اعمال همبستگی در ارتباط با هم است. به‌عنوان‌مثال در دیدگاه کاملاً مجزّا، آیا بهتر است در الگوریتم عددی، ابتدا معادلات سیّال – شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی – را تا دقّت بالایی ارضا کنیم (تضمین C_0 و C_1) سپس به حل معادلهٔ انرژی در جامد بپردازیم و در نهایت همبستگی بین معادلهٔ انرژی در جامد و سیّال را با یک حلقهٔ بیرونی تضمین کنیم (تضمین C_2) ؟ یا اینکه در ابتدا فقط معادلات پیوستگی و ممنتوم را با دقّت بالا ارضا کنیم (تضمین C_0) و سپس معادلات انرژی سیّال و جامد را در یک حلقهٔ دیگر تضمین نماییم (تضمین C_2) و درنهایت همبستگی بین دو دسته معادلهٔ حاصل - معادلات انرژی از یک طرف و پیوستگی و ممنتوم از طرف دیگر – را از طریق یک حلقهٔ بیرونی اعمال نماییم (تضمین C_1)؟

اهمّیّت سؤال مذکور با نگاهی بر حلگرهای موجود در نرم‌افزار منبع باز و رایج OpenFOAM [20] در مسائل CHT بیشتر مشخص می‌شود [21,22]. در نسخه extent4.0 از این نرم‌افزار، چهار حلگر در این خصوص وجود دارد و هر دو استراتژی شرح داده شده در پاراگراف قبل، در آنها قابل مشاهده است. در حلگر اوّل و دوم، به ترتیب chtMultiRegionFoam و chtMultiRegionSimpleFoam، در هر تکرار از یک حلقهٔ بیرونی، همبستگی C_0 به‌صورت قوی اعمال شده و دو همبستگی دیگر به‌واسطه همان حلقهٔ بیرونی مشترک تضمین می‌شوند. در حلگر سوم، conjugateHeatFoam، در هر گام زمانی، C_0 و C_2 قویاً اعمال شده ولی C_1 به‌صورت ضعیف اعمال شده است. در حلگر چهارم، conjugateHeatSimpleFoam، ابتدا C_0 و C_2 قویاً اعمال شده و یک حلقهٔ تکرار بیرونی جهت تضمین C_1 اعمال شده است. قابل ذکر است که حلگر دوم و چهارم فقط جهت حل دائم طراحی‌شده‌اند حال‌آنکه حلگر اوّل و سوم، برای حل گذرا به کار می‌روند. همچنین، در حلگرهای سوم و چهارم، معادلات انرژی در سیّال و جامد، به‌صورت هم‌زمان حل می‌گردد و در حلگرهای اوّل و دوم الگوریتم مجزّا به کار گرفته شده است. علاوه بر این، حلگرهای سوم و چهارم، فقط قادر به حل مسائلی شامل یک ناحیهٔ سیّال و یک ناحیهٔ جامد هستند.

مقالهٔ حاضر، با نگاهی عمیق‌تر، به تأثیر شیوه اعمال همبستگی بین معادلات در کارایی حلگرهای رایج در مسائل CHT می‌پردازد. به‌طور دقیق‌تر، در این تحقیق، توسعه و مقایسه سه نوع حلگر در زمینه حل مسائل CHT به روش‌های هم‌زمان و مجزّا شرح داده می‌شود به‌طوری‌که دو تا از الگوریتم‌ها از نوع مجزّا و یکی از آنها از نوع حلگر هم‌زمان است. ویژگی مشترک بین سه حلگر مورد نظر این است که شیوهٔ گسسته‌سازی معادلات در همگی، بر مبنای روش‌های حجم محدود است و همچنین به‌منظور اعمال همبستگی فشار- سرعت در سیّال (C_0)، از الگوریتمی از خانواده Semi-Implicit Projection Method (SIPM) به نام الگوریتم PISO بهره گرفته شده است. تفاوت الگوریتم‌های مورد نظر، در نحوهٔ اعمال همبستگی‌های نوع اوّل و دوم است. روش هم‌زمان با یک حلقهٔ درونی جهت اعمال همبستگی C_0، به حل جریان درون سیّال می‌پردازد و پس از حل سیّال، به حل هم‌زمان معادلهٔ انرژی در تمامی نواحی سیّال و جامد می‌پردازد (اعمال قوی C_2). تمام این روند –حل جریان سیّال و معادلات انرژی- برای هر گام زمانی درون یک حلقهٔ تکرار قرار دارد به‌طوری‌که شرط خروج از حلقه، ارضای دقیق معادلات ممنتوم، پیوستگی، انرژی و همچنین ارضای همبستگی C_1 تا مقدار مطلوب است. در روش مجزّا، بعد از اعمال همبستگی C_0 در سیّال به شیوه مذکور، دو دیدگاه در مورد نحوهٔ اعمال دو همبستگی دیگر بررسی می‌شود: اعمال همبستگی‌های C_1 و C_2 در یک حلقهٔ مشترک

بیرونی یا استفاده از یک حلقهٔ تکرار دیگر (داخلی) جهت تضمین C_2 در هر تکرار از حلقهٔ بیرونی. در نتیجه، دو الگوریتم برای حلگر مجزّا، یکی بر اساس حلقهٔ جداگانه و دیگری بر اساس حلقهٔ واحد، در این تحقیق ارائه گردیده است. در نهایت عملکرد سه الگوریتم مورد نظر به کمک حل مسئلهٔ اندرکنش حرارتی بین دیوار عمودی و جریان جابه‌جایی آزاد در سیّال مجاور، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. به همین منظور، با تغییر خواص ترموفیزیکی سیّال و جامد، شرایط همبستگی مختلفی برای مسئله اعمال شده، در ابتدا به اعتبارسنجی هر سه حلگر پرداخته و سپس توانایی آنها به لحاظ هزینهٔ محاسباتی به کمک بررسی سرعت همگرایی در حالت‌های مختلف مطالعه می‌شود.

معادلات ریاضی

در این بخش فرمولاسیون ریاضی یک مسئلهٔ CHT شامل معادلات حاکم و همچنین شرط مرزی سازگاری (شرط مرزی همبستگی) بین نواحی سیّال و جامد ارائه می‌شود. معادلات گذرای مربوط به جریان سیّال بوزینسک (Boussinesq)، شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی به‌صورت زیر است:

$$\nabla . \mathbf{u} = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u . \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \upsilon \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}\beta(T - T_{ref}) \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} . \nabla) T = \frac{1}{\rho C_P} \nabla . (k \nabla T) \qquad (۳)$$

که $\mathbf{u}$، p، و T به ترتیب سرعت، فشار و دمای سیّال هستند و باید از طریق فرایند حل محاسبه گردند. متغیر $\mathbf{g}$ بردار شتاب گرانشی و سایر پارامترها، نشان‌دهنده خواص سیّال شامل ν ویستکوزیته سینماتیکی، β ضریب انبساط حرارتی، C_p ظرفیت گرمایی ویژه، k رسانندگی و ρ چگالی می‌باشند. همچنین، معادلهٔ انرژی وابسته به زمان برای یک ناحیهٔ جامد را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{(\rho C_P)_s} \nabla . (k_s \nabla T_s) \qquad (٤)$$

که در آن اندیس s جهت تمایز کمّیت‌های جامداتی از سیّالاتی استفاده شده است. به‌منظور تکمیل معادلات ریاضی، شرط مرزی‌های مناسب برای بخش سیّال و جامد نیاز است. در اینجا توجّه بیشتر، معطوف به شرط مرزی همبستگی در مرز مشترک سیّال و جامد است. این شرط مرزی بر اساس پیوستگی دما و همچنین پایستاری انرژی روی سطح کنترلی فرضی روی مرز مشترک بوده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T(\Gamma_{f,s}, t) = T_s(\Gamma_{f,s}, t) \qquad (٥)$$

$$n . (k \nabla T) = n . (k_s \nabla T_s) \qquad (٦)$$

درجهٔ همبستگی معادلات، به‌مانند بسیاری از خصوصیات پدیده‌های فیزیکی، به کمک اعداد بدون بعد قابل بیان است. به‌منظور استخراج این اعداد، با استفاده از عملیات جبری، معادلات به‌صورت بدون بعد زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} . \nabla \tilde{u} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re^2} \nabla^2 \tilde{u} - \frac{Gr}{Re^2} \tilde{T} \qquad (٧)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{u} . \nabla) \tilde{T} = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \tilde{T} \qquad (٨)$$

بر اساس معادلات (۷ و ۸)، میزان همبستگی بین معادلات ممنتوم و انرژی به اعداد گراشف $Gr = \frac{g\beta(T_H - T_L)L^3}{\nu^2}$، پرانتل $Pr = \frac{\upsilon}{\alpha}$، و رینولدز $Re = \frac{UL}{\upsilon}$ بستگی دارد به‌طوری‌که برای اعداد گراشف بالا، درجهٔ همبستگی نوع اوّل (C_1) بیشتر است. توجّه

شود که در اینجا، L طول مشخصه مسئله، U سرعت مشخصّه جریان و α ضریب پخش گرمایی است.

به‌منظور کمینه‌سازی همبستگی نوع دوم که ناشی از پیوستگی دما و پایستاری شار گرمایی در مرز مشترک است، از کمیت بدون بعد σ استفاده می‌گردد:

$$\sigma = \frac{k_f/\sqrt{\alpha_f}}{k_s/\sqrt{\alpha_s}} \qquad (۹)$$

هرچه σ به سمت عدد ۱ نزدیک شود همبستگی معادلات انرژی در مرز سیّال و جامد قوی‌تر خواهد بود [12].

روش عددی

در این بخش، جزییات مربوط به الگوریتم عددی سه حلگر CHT که بر اساس حجم محدود عمل می‌کنند بحث می‌شود. در واقع، هر سه روش به جستجوی مقادیری از فشار، سرعت و دما هستند به‌گونه‌ای که معادلات پایستاری -شامل بقای جرم، ممنتوم و انرژی- درون حجم کنترل‌ها و همچنین سطوح کنترل مرزی و به‌خصوص در مرزهای مشترک ارضا شوند. الگوریتم PISO [۲۳] به‌عنوان روشی برای اعمال همبستگی بین سرعت و فشار در جریان سیّال (C_0) برای هر سه حلگر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرایند حل در این حلگرها، با گسسته‌سازی معادلهٔ ممنتوم برای جریان سیّال به‌صورت زیر آغاز می‌شود:

$$u_P = \frac{H(u)}{a_P} - \frac{1}{a_P}\nabla p \qquad (۱۰)$$

که در آن a_P نشان‌دهنده ضریب سرعت در حجم کنترل P – واقع در قطر اصلی ماتریس ضرایب – و عملگر H(u) در واقع معرف مجموع ترم‌های منبع شامل نیروی شناوری و سرعت حجم کنترل‌های اطراف در معادلهٔ ممنتوم مربوط به این حجم کنترل است. با جایگزینی معادلهٔ (۱۰) در (۱)، معادلهٔ حاکم بر فشار به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\nabla.\left(\frac{1}{a_p}\nabla p\right) - \nabla.\left[\frac{H(u)}{a_p}\right] = 0 \qquad (۱۱)$$

پس از حل معادلهٔ فشار، شار جرمی ورودی روی سطوح اطراف حجم کنترل، به کمک معادلهٔ زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$F = \rho s_f.u = \rho s.\left[\left(\frac{H(u)}{a_P}\right)_f - \left(\frac{1}{a_P}\right)_f (\nabla p)_f\right] \qquad (۱۲)$$

همان‌طور که ذکر شد وجه تمایز الگوریتم‌ها، در چگونگی اعمال پیوستگی دما و پایستاری شار گرمایی در مرز مشترک – روابط (۵ و ۶) و همچنین همبستگی بین معادلات منتوم و انرژی در نواحی حاوی سیّال است. در خصوص همبستگی در مرز مشترک برای الگوریتم‌های مجزّا، نوع مناسب شرط مرزی برای نواحی سیّال و جامد روی پایداری فرایند حل بسیار تأثیرگذار خواهد بود. شیوه‌های مختلفی از نحوهٔ اعمال این شرط مرزی با هدف مطالعهٔ پایداری حل و بهترین نرخ همگرایی در مرجع [15] مقایسه شده‌اند. Henshaw و همکاران [14] نشان دادند در حالتی که خواص ترموفیزیکی ماده‌های مجاور به هم نزدیک باشد شرط مرزی از نوع رابین-رابین می‌تواند نرخ همگرایی بالایی را نتیجه دهد. در این تحقیق، از این نوع شرط مرزی که در کتابخانه نرم‌افزار OpenFOAM نیز موجود است استفاده می‌شود. نحوهٔ اعمال این شرط مرزی به این صورت است که برای مرزهای سیّال و جامد، ترکیبی از شرط مرزی دیریشله (دمای ثابت) و نیومن (گرادیان صفر) با تأثیر وزنی به ترتیب ω و $1-\omega$

در نظر گرفته می‌شود به‌طوری‌که ضریب وزنی ω از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\omega_{own} = \frac{\frac{k_{nei}}{\Delta_{nei}}}{\frac{k_{nei}}{\Delta_f} + \frac{k_{own}}{\Delta_s}} \qquad (۱۳)$$

که در آن زیرنویس own و nei به نواحی دو طرف مرز مشترک و Δ، مطابق شکل (۲)، به فاصله عمودی بین مرکز حجم کنترل‌های مجاور در دو ناحیه اشاره می‌کند.

برای الگوریتم هم‌زمان، حل هم‌زمان معادلهٔ انرژی در تمام فضای محاسباتی نیازمند میانیابی مناسبی برای خاصیت رسانندگی، k، در مرز مشترک است به‌گونه‌ای که اعمال دقیق پایستاری انرژی در این مرز تضمین شود. در غیاب ترم تشعشع در مرز مشترک، شکل گسسته پایستاری انرژی به‌صورت زیر قابل بیان است:

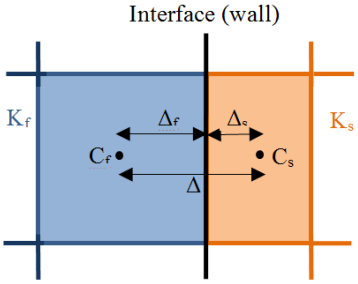
$$k_{nei}\frac{(T_{nei}-T_w)}{\Delta_{nei}} = k_{own}\frac{(T_w-T_{own})}{\Delta_{own}} \qquad (۱٤)$$

به‌منظور محاسبه رسانندگی در مرز مشترک، k_{int}، به‌گونه‌ای که معادلات (۵ و ٦) به‌طور مطلوبی ارضا شوند، دو سمت معادلهٔ (۱٤) باید با مقدار $k_{int}\frac{(T_{nei}-T_{own})}{\Delta}$ برابر باشند. با انجام محاسبات جبری ساده در نهایت به رابطهٔ زیر برای رسانندگی روی مرز می‌رسیم:

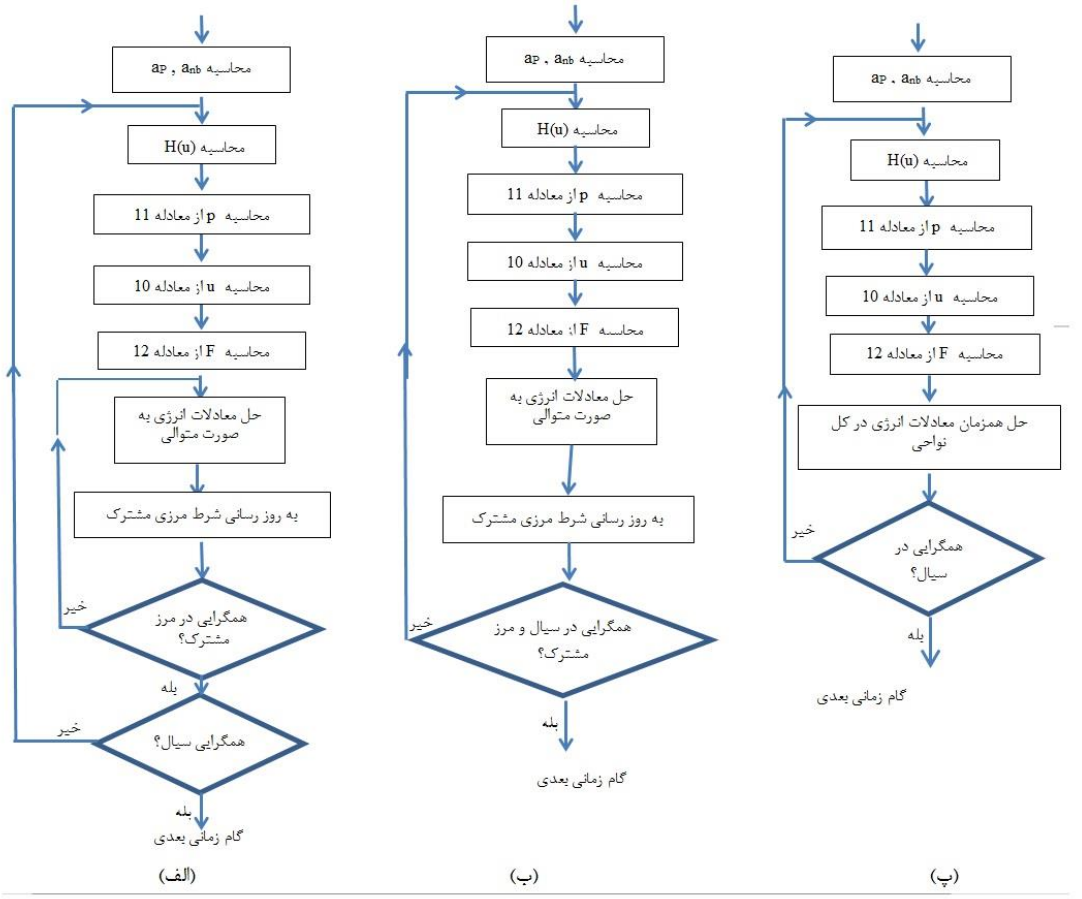
$$k_{int} = \frac{k_f k_s}{\frac{\Delta_f}{\Delta}k_s + \frac{\Delta_s}{\Delta}k_f} \qquad (۱۵)$$

تا اینجا، به نحوهٔ گسسته سازی و حل معادلات به‌صورت جداگانه پرداختیم. در خصوص الگوریتم کلی و ترتیب اعمال همبستگی‌ها، همبستگی نوع اوّل برای حلگر هم‌زمان، از طریق یک حلقهٔ تکرار بیرونی تضمین می‌گردد. برای اعمال این همبستگی در دیدگاه مجزّا، دو روش وجود دارد: استفاده از حلقهٔ مشترک برای اعمال همبستگی نوع اوّل و دوم یا استفاده از دو حلقهٔ جداگانه. شکل (۳) سه الگوریتم مورد نظر را به کمک فلوچارت نمایش می‌دهد.

همان‌طور که در فلوچارت‌های شکل (۳) دیده می‌شود، الگوریتم شکل (الف) که به‌اختصار آن را SIPM-SP (مخفف Semi Implicit Projection Method- Separate Loop) می‌نامیم، از یک حلقهٔ بیرونی برای تضمین همبستگی نوع اوّل و یک حلقهٔ داخلی برای تضمین نوع دوم استفاده می‌شود. حال‌آنکه الگوریتم (ب) که SIPM-IP (مخفف Semi Implicit Projection Method- Integrated Loop) نام دارد، فقط یک حلقه جهت اعمال همبستگی‌های C_1 و C_2 به‌کار گرفته است. در نهایت الگوریتم (پ) که حلگر هم‌زمان بوده و با عنوان SIPM-M (مخفف Semi Implicit Projection Method- Monolithic) شناخته می‌شود، از یک حلقهٔ تکرار برای تضمین همبستگی نوع اوّل استفاده می‌کند و همبستگی نوع دوم، از طریق حل هم‌زمان معادلات انرژی تضمین می‌گردد.



شکل «۲»: وضعیت حجم کنترل در نواحی سیّال (f) و جامد (s)



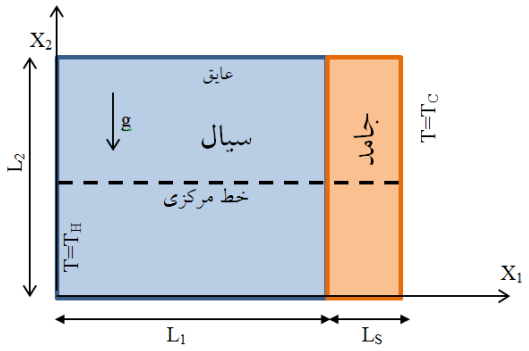
شکل «۳»: فلوچارت سه حلگر CHT الف) SIPM-SP ب)SIPM-IP پ)SIPM-M

در این مطالعه، نرم‌افزار منبع باز OpenFOAM نسخه extend4.0 جهت اعمال الگوریتم‌های مورد نظر روی شبکه‌های سه‌بعدی غیر سازمان یافته به کار گرفته شده است. شایان یادآوری است که حلگر هم‌زمان با عنوان conjugateHeatFoam در نرم‌افزار موجود است که محدودیت تنها دو ناحیه (یک ناحیهٔ سیّال و یک ناحیهٔ جامد) در آن وجود دارد. همچنین، همان‌طور که در مقدمه اشاره شد این حلگر استاندارد، همبستگی C_1 را تضمین نمی‌کند. در اینجا، ما به توسعه این الگوریتم به‌منظور اعمال قوی C_1 و همچنین امکان به‌کارگیری آن در حالت‌های چند ناحیه‌ای می‌پردازیم. حلگر استاندارد دیگر مربوط به مسائل CHT در این نرم‌افزار، یک حلگر مجزّا با نام chtMultiRegionFoam با شیوه حلقهٔ مشترک (فلوچارت شکل ۳- ب) است که برای چندین ناحیهٔ جامد و سیّال طراحی شده است. به‌منظور اعمال الگوریتم حلگر مجزّا با حلقهٔ جداگانه (فلوچارت شکل ۳-الف)، در حلگر استاندارد اخیر، تغییراتی داده می‌شود.

شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش، به‌منظور اعتبار سنجی، نتایج حل عددی برای مسئلهٔ دوبعدی اندرکنش حرارتی بین جریان جابجایی آزاد در سیّال و هدایت در دیوار عمودی

مجاور که شماتیک آن در شکل (٤) نمایش داده شده است، ارائه می‌شود.



شکل «٤»: شماتیک مسئلهٔ جابجایی آزاد سیّال در کنار دیوار عمودی

این مسئله، به دلیل قابلیّت بررسی رفتار حلگر در درجات مختلف همبستگی‌های نوع اوّل و دوم، در تحقیقات پیشین به‌صورت مکرر شبیه‌سازی شده است. در میان آنها، کاظمی کامیاب و همکاران [24] از یک حلگر مجزّا با همبستگی ضعیف جهت حل این مسئله استفاده کردند تا عملکرد مؤثر حلگر پیشنهادی‌شان را با فرضی کلی اثبات کنند: تمامی خواص برای سیّال و جامد ثابت هستند به‌غیراز رسانندگی گرمایی که می‌تواند تابعی از دما باشد. در تحقیق دیگری [25]، آنها عملکرد یک حلگر مجزّا با همبستگی قوی را به کمک این مسئله در درجات مختلف همبستگی- با تغییر اعداد بدون بعد σ و گراشف- مورد مطالعه قرار دادند. همچنین Pan و همکاران [12]، به اعتبارسنجی و مطالعه کارایی الگوریتم هم‌زمان پیشنهادی در حالت درجات مختلف همبستگی در این مسئله پرداختند.

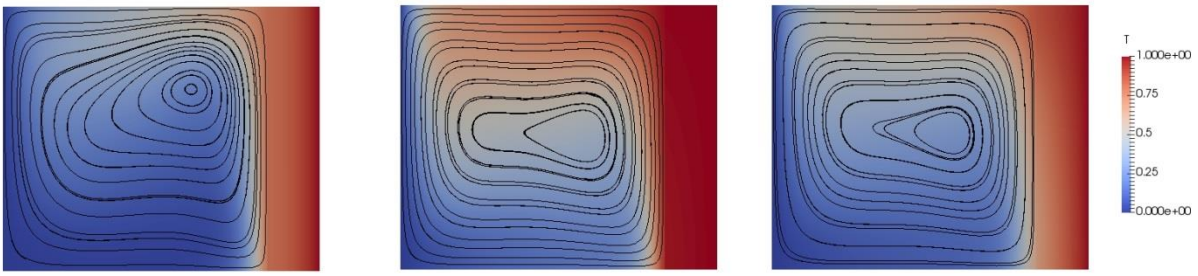
در تحقیق حاضر، سه حلگر SIPM-SP، SIPM-IP و SIPM-M برای حل مسئلهٔ مطرح شده استفاده می‌شوند تا بدین ترتیب دقّت نتایج الگوریتم‌های مذکور با نتایج موجود در مرجع [12] مقایسه و اعتبارسنجی گردد. جدول (١)، کمیت‌های بدون بعد برای خواص ذکر شده در این مرجع را نشان می‌دهد:

در این مطالعه، مقادیر هندسی شامل طول و عرض و ضخامت دیواره به‌صورت $L_1/L_2=1$ و $L_2=1$ و $L_1/L_s=0.2$ در نظر گرفته می‌شود. سیّال در شروع حل در حالت سکون با فشار و دمای صفر فرض می‌گردد. در لحظهٔ $t=0$، دمای دیواره سمت راست در جامد ناگهان به ١ ($T_h=1$) افزایش می‌یابد و دمای دیواره سمت چپ سیّال در دمای صفر($T_C=0$) ثابت نگه داشته می‌شود. بقیهٔ دیواره‌ها به‌جز مرز مشترک سیّال-جامد در شرایط عایق قرار داده می‌شود و شرط عدم لغزش بر روی چهار دیوار اطراف سیّال اعمال می‌گردد. در حلگرهای مجزّا، شرط همگرایی برای خروج از حلقهٔ بیرونی به‌صورت $\frac{\max(r^n)}{\max(r^0)}<10^{-6}$ در نظر گرفته می‌شود که در آن r^n نشان‌دهنده باقیمانده روی مرز مشترک در تکرار n ام است. شکل ٥، خطوط جریان و توزیع دما در نواحی سیّال و جامد را در زمان $t=0.07$ sec نمایش می‌دهد.

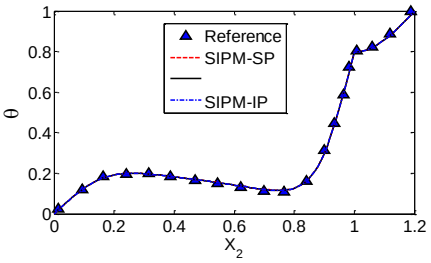
شکل (٦)، پروفیل دمای حاصل از سه حلگر و روی خط افقی مرکزی را با نتایج ارائه شده در مرجع [12] مقایسه کرده است. همان‌طور که از نمودارهای این شکل مشهود است هر سه حلگر در درجات مختلف از همبستگی، نتایجی تقریباً منطبق بر نتایج موجود در مرجع مورد نظر را ارائه می‌دهند.

جدول «١»: جزییات سه حالت مختلف برای مسئلهٔ جابجایی آزاد در کنار دیوار عمودی

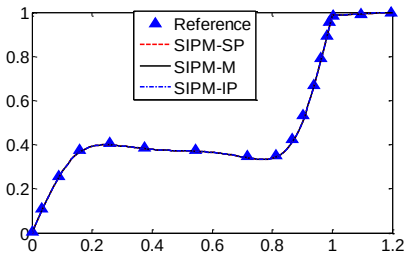
	جنس سیّال	جنس جامد	Pr	ks/kf	Gr	σ
حالت ١	هوا	فولاد	0.7	1600	1.43×105	3.95×10-4
حالت ٢	آب	فولاد	7	80	104	0.12
حالت ٣	آب	بتن	7	2.7	104	0.93



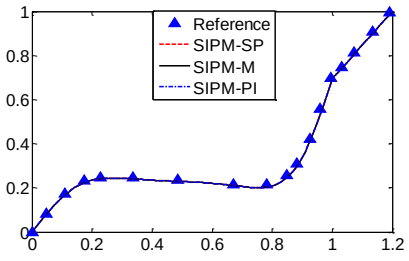
شکل «۵»: کانتور دما و خطوط جریان برای حالت‌های ۱ تا ۳



Case1



Case2



Case3

شکل «٦»: مقایسهٔ نتایج سه حلگر برای پروفیل دما روی خط افقی گذرنده از مرکز با نتایج مرجع [12]

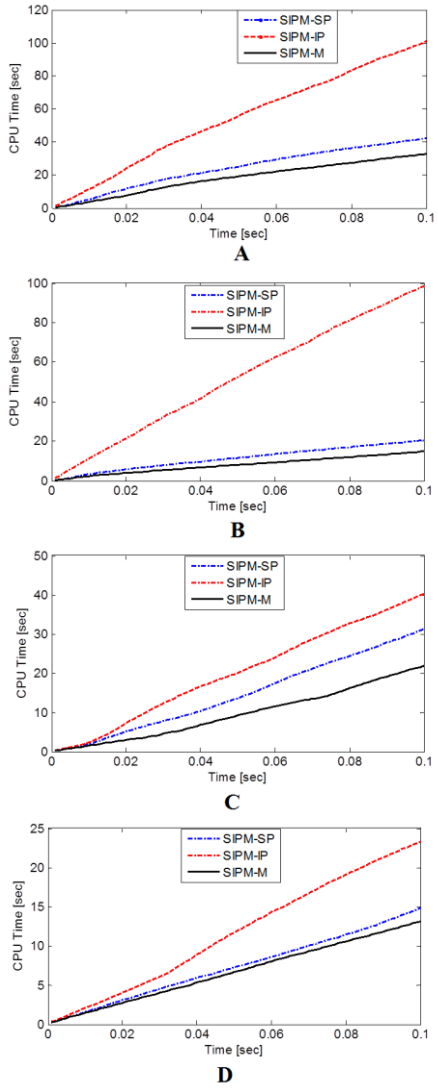
به‌منظور مقایسه هزینهٔ محاسباتی سه حلگر مورد نظر، خواص جدیدی برای سیّال و جامد در این مقاله پیشنهاد شده است به‌گونه‌ای که چهار حالت شامل ترکیب‌های مختلف قوی و ضعیف برای دو نوع همبستگی C_2–C_1 (قوی- قوی، قوی- ضعیف؛ ضعیف- قوی، و ضعیف- ضعیف) ایجاد گردد. جدول (۲)، جزییات مربوط به این چهار حالت را ارائه داده است.

جدول «۲»: مشخصّات چهار حالت برای جابجایی آزاد مجاور دیوار عمودی

	Pr	ks/kf	Gr	σ
CaseA	0.7	1.6	1.43×105	0.93
Case B	0.7	1.6	104	0.93
Case C	0.7	1600	1.43×105	4×10-4
Case D	0.7	1600	104	4×10-4

هزینه‌های محاسباتی مربوط به سه الگوریتم پیشنهادی برای حالت A تا D در شکل (۷) مقایسه شده است. همان‌طور که در نمودارها پیداست الگوریتم SIPM-IP همواره کندترین نرخ همگرایی را داشته است و این بخصوص برای حالت‌های A و B که همبستگی قوی بین معادلات انرژی در سیّال و جامد وجود دارد، کاملاً مشهود است. برای حالت B، استفاده از حلقهٔ جداگانه سرعت همگرایی را تا حدود ۵ برابر افزایش داده است. همچنین، برای تمام چهار حالت، الگوریتم SIPM-M سریع‌ترین نرخ همگرایی را نسبت به بقیهٔ الگوریتم‌ها نتیجه داده است. بااین‌وجود، نمودار همگرایی برای حالت B نشان می‌دهد که برای حالتی

که همبستگی نوع اوّل ضعیف است (عدد گراشف کم) هزینه‌های محاسباتی برای الگوریتم‌های مجزّا و هم‌زمان می‌توانند به هم نزدیک‌تر می‌شود. همچنین در حالتی که هر دو همبستگی از نوع ضعیف باشند دو الگوریتم مذکور تفاوت چندانی در بازده محاسباتی ندارند.



شکل «۷»: زمان محاسباتی صرف شده برای هر سه حلگر در چهار حالت جدول ۲

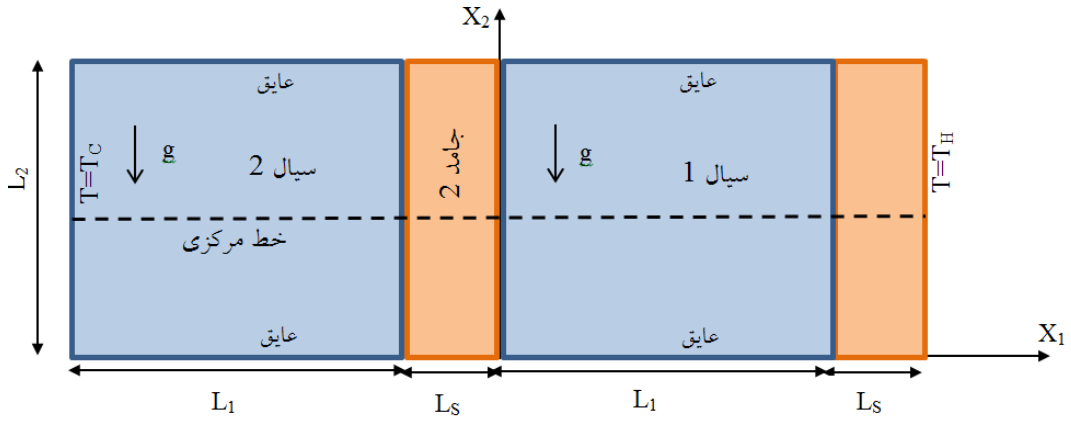
دو ناحیهٔ سیّال- دو ناحیهٔ جامد

به‌منظور بررسی بیشتر، مسئلهٔ مورد بحث به حالتی شامل نواحی بیشتر سیّال و جامد، همانند شکل (۸)، توسعه داده می‌شود تا عملکرد الگوریتم‌ها برای حالات با نواحی بیشتر نیز مورد مطالعه و مقایسه قرار گیرد. خواص سیّال و جامد در نواحی مختلف مطابق با جدول (۲) برای چهار حالت در نظر گرفته می‌شود.

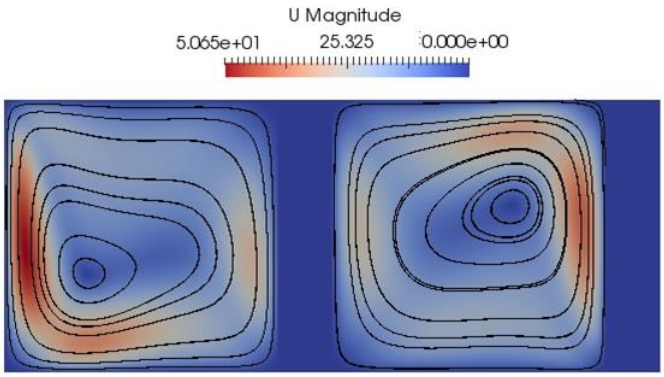
شرایط اوّلیه و مرزی برای این مسئله، همانند مسئلهٔ قبلی است با این تفاوت که در مسئلهٔ حاضر، دو ناحیه برای سیّال و دو ناحیه برای جامد وجود دارد. مسئلهٔ حاضر، این امکان را فراهم می‌آورد تا تأثیر افزایش تعداد نواحی بر احتمال مشاهده تفاوت معنی‌داری در هزینه‌های محاسباتی بررسی شود. به همین منظور، سه الگوریتم مورد بحث برای حالات A تا D در این مسئله به‌کار گرفته می‌شوند. شکل (۹) نتایج کیفی شامل توزیع سرعت و خطوط جریان حاصل از شبیه‌سازی به کمک الگوریتم هم‌زمان برای حالت A را نمایش می‌دهد.

به‌منظور مقایسه دقّت نتایج حاصل از سه الگوریتم، پروفیل دما روی خط افقی گذرنده از مرکز برای حالت A در شکل (۱۰) نشان داده شده است. بر اساس نمودار نشان داده در این شکل، تطابق پروفیل دمای حاصل از سه الگوریتم کاملاً واضح به نظر می‌رسد. همچنین، ازآنجایی‌که حالت A شامل دو نوع همبستگی قوی است بنابراین، بحرانی‌ترین حالت در نظر گرفته شده و از بررسی حالت B تا D صرف‌نظر می‌گردد. شکل (۱۱)، مقایسه‌ای از زمان محاسباتی برای سه الگوریتم مورد بحث جهت حل مسئلهٔ اخیر را نشان می‌دهد. همانند رفتاری که در شکل (۷) ملاحظه شد در اینجا نیز هموار الگوریتم هم‌زمان هزینهٔ محاسباتی کمتری را نتیجه می‌دهد. به‌علاوه، برای حالت B، استفاده از حلقهٔ جداگانه سرعت همگرایی را تا حدود ٦ برابر افزایش داده است؛ بنابراین می‌توان الگوریتم‌های مورد نظر را به لحاظ بازده محاسباتی به‌صورت زیر دسته‌بندی نمود:

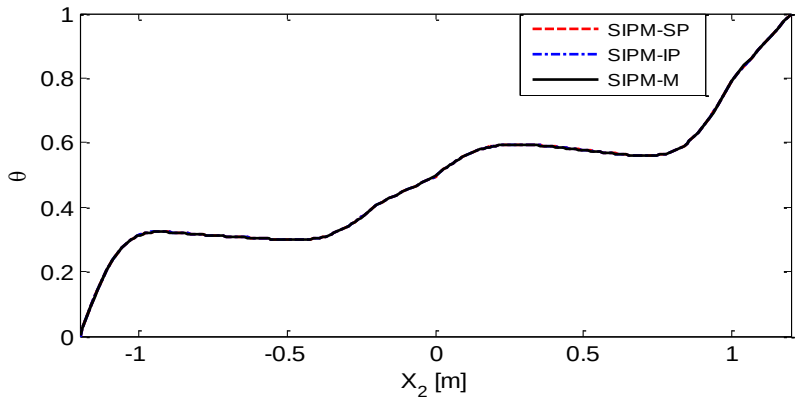
SIPM-M > SIPM-SP > SIPM-IP



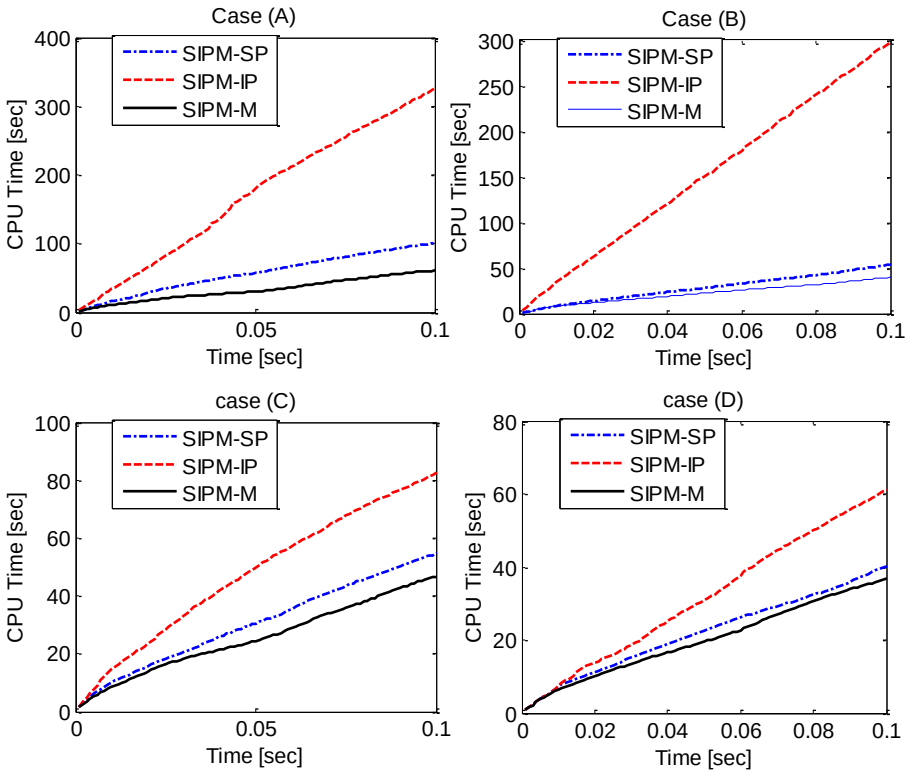
شکل «۸»: شماتیک مسئلهٔ چند ناحیه‌ای جابجایی آزاد مجاور دیواره عمودی



شکل «۹»: نتایج پروفیل دما حاصل از سه حلگر برای حالت A



شکل «۱۰»: کانتور سرعت و خطوط جریان برای حالت A



شکل «۹»: زمان محاسباتی مسئلهٔ چند ناحیه‌ای در ٤ حالت توسط سه حلگر

نتایج به‌دست‌آمده از حل مسائل بالا که برای همبستگی قوی و ضعیف و همچنین حالت‌های چند ناحیه‌ای صورت گرفت نشان می‌دهد که استفاده از یک حلقهٔ مشترک جهت اعمال همبستگی‌های C_1 و C_2 می‌تواند هزینهٔ محاسباتی را نسبت به الگوریتم‌های دیگر تا حد زیادی (حدود ٦ برابر) افزایش دهد؛ بنابراین، الگوریتم بکار گرفته شده در حلگرهای multiRegionHeatFoam و multiRegionSimpleFoam که از یک حلقهٔ مشترک جهت اعمال همبستگی‌های مذکور استفاده می‌کنند بازده محاسباتی دارند و با اضافه کردن یک حلقهٔ داخلی، می‌توان سرعت همگرایی آنها را تا حد زیادی افزایش داد. علت بازده پایین روش حلقهٔ مشترک را می‌توان در این حقیقت یافت که تضمین C_0 برای سیّال، پرهزینه‌ترین بخش الگوریتم‌های مورد نظر است و لذا حل دقیق دما در هر تکرار از حلقهٔ بیرونی، با توجّه به همبستگی نوع C_1، می‌تواند تعداد دفعات لازم جهت اعمال دقیق و پرهزینه C_0 را کاهش دهد. از طرف دیگر، در قیاس با تضمین C_0، حل معادلات انرژی به دلیل رفتار نسبتاً خطی، هزینهٔ محاسباتی پایینی دارد. در نتیجه، با توجّه به اینکه پرداختن هزینهٔ محاسباتی کوچک تضمین C_2، از تحمیل تعداد دفعاتی که الگوریتم باید هزینهٔ محاسباتی بالای اعمال C_0 را بپردازد، جلوگیری می‌کند، استفاده از حلقهٔ جداگانه برای اعمال همبستگی بین معادلات انرژی در نواحی سیّال و جامد، کارایی الگوریتم‌های CHT در حل مسائل با همبستگی قوی را افزایش می‌دهد.

از طرف دیگر مقایسه روش‌های حل هم‌زمان و مجزّا، این واقعیت را نشان می‌دهد که روش حل هم‌زمان معادلات انرژی سیّال و جامد، هزینهٔ محاسباتی پایین‌تری دارد و این امر بخصوص در مسائلی با همبستگی C_2 قوی، مشهود است. بااین‌وجود،

همان‌طور که از شکل‌های (۷ و ۱۱) (نمودارهای A و B) نمایان است، برای مسائلی با همبستگی قوی، تفاوت هزینهٔ محاسباتی ایجاد شده بین حل هم‌زمان و مجزّا، به اندازه تفاوت استفاده از حالت حلقهٔ مشترک و مجزّا نیست و موضوع دوم، در درجهٔ اوّل اهمّیّت قرار دارد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، سه نوع حلگر عددی در زمینه اندرکنش حرارتی سیّال- جامد بر اساس نحوهٔ اعمال همبستگی بین معادلات، مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت. همبستگی‌های مورد نظر، شامل همبستگی سرعت- فشار و ممنتوم- انرژی در سیّال و انرژی- انرژی در مرز مشترک سیّال- جامد است. ویژگی مشترک الگوریتم‌های بررسی شده، استفاده از روش حجم محدود جهت گسسته سازی، روش PISO جهت اعمال همبستگی سرعت- فشار، و اعمال قوی سه نوع همبستگی مذکور است. نتایج این مطالعه را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

- حل عددی مسائل اندرکنش حرارتی سیّال-جامد، نیازمند توجّهی ویژه به ارتباط بین معادلات است بخصوص زمانی که درجهٔ همبستگی آنها از نوع قوی باشد.
- سه الگوریتم ارائه‌شده قادر به حل دقیق مسائل CHT هستند.
- حل هم‌زمان معادلهٔ انرژی در تمام نواحی سیّال و جامد، منجر به بازده محاسباتی بالا خواهد شد.

مقایسه نتایج حاصل از دو نوع الگوریتم مجزّا نشان می‌دهد که استفاده از حلقه‌های جداگانه برای دو نوع همبستگی، سرعت همگرایی را تا حد زیادی افزایش می‌دهد. لذا، حلگرهای مجزّای OpenFOAM در مسائل CHT، multiRegionHeatFoam و multiRegionSimpleFoam، با توجّه به عدم استفاده از حلقهٔ داخلی جهت تضمین همبستگی انرژی- انرژی، بازده محاسباتی پایینی دارند؛ بنابراین، برای مسائل با همبستگی بالا، توصیه می‌شود حلگرهای مربوطه مطابق الگوریتم SIPM-SP اصلاح شوند.

واژه نامه

همبستگی قوی	Strong coupling
همبستگی ضعیف	Weak coupling
دیدگاه حل همزمان	Monolithic approach
دیدگاه حل مجزا	Partitioned approach
انتقال حرارت سیال- جامد	Conjugate heat transfer
نرخ همگرایی	Convergence rate
چندناحیه‌ای	Multi-region
حل عددی	Numerical solution
روش حلقه‌ی مشترک	Integrated loop method
روش حلقه‌ی جداگانه	Separate loop method
انتقال حرارت هدایت	Conduction heat transfer
انتقال حرارت جابجایی	Convection heat transfer
معادلات حاکم	Governing equations
مرز مشترک	Interface
هزینه محاسباتی	Computational cost
اندرکنش حرارتی	Thermal interaction
روش گسسته سازی حجم محدود	Finite volume method

مراجع

1. Pozzi, A. and Tognaccini, R., "Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena", *Journal of Fluid Mechanics*,Vol. 538, pp. 361-376, (2005).
2. Pozzi, A. and Tognaccini, R., "Coupling of conduction and convection past an impulsively started semi-infinite flat plate", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 1121-1131, (2000).
3. Fourcher, B. and Mansouri, K., "An approximate analytical solution to the Graetz problem with periodic inlet temperature", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, pp. 229-235, (1997).
4. Ismail, K. and Henriquez, J., "Two-dimensional model for the double glass naturally ventilated window", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 461-475, (2005).
5. Gunes, H., "Low-order dynamical models of thermal convection in high-aspect ratio enclosures", *Fluid Dynamics Research*, Vol. 30, pp. 1-30, (2002).
6. Park, S. and Lee, C., "Analysis of coherent structures in Rayleigh–Bénard convection", *Journal of Turbulence*, Vol. 16, pp. 1162-1178, (2015).
7. Moretti, R., Errera, M.-P., Couaillier, V. and Feyel, F., "Stability, convergence and optimization of interface treatments in weak and strong thermal fluid-structure interaction", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 126, pp. 23-37, (2018).
8. Felippa, C. and Park, K., "Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems: formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 24, pp. 61-111, (1980).
9. Le Tallec, P., "Domain decomposition methods in computational mechanics", *Computational Mechanics Advances*, Vol. 1, pp. 121-220, (1994).
10. Piperno, S., Farhat, C. and Larrouturou, B., "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems Part I: Model problem, theory and two-dimensional application", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 124, pp. 79-112, (1995).
11. Pan, X., Kim, K., Lee, C. and Choi, J.-I., "A decoupled monolithic projection method for natural convection problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 314, pp. 160-166, (2016).
12. Pan, X., Lee, C. and Choi, J.-I., "Efficient monolithic projection method for time-dependent conjugate heat transfer problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 369, pp. 191-208, (2018).
13. Radenac, E., Gressier, J. and Millan, P., "Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer", *Computers & Fluids*, Vol. 100, pp. 95-107, (2014).
14. Meng, F., Banks, J.W., Henshaw, W.D. and Schwendeman, D.W., "A stable and accurate partitioned algorithm for conjugate heat transfer", *Journal of Computational Physics*, Vol. 344, pp. 51-85, (2017).
15. Errera, M.-P. and Duchaine, F., "Comparative study of coupling coefficients in dirichlet–robin procedure for fluid–structure aerothermal simulations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 312, pp. 218-234, (2016).
16. Scholl, S., Janssens, B. and Verstraete, T., "Stability of static conjugate heat transfer coupling approaches using Robin interface conditions", *Computers & Fluids*, Vol. 172, pp. 209-225, (2018).

17. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., "*An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*", Pearson Education, (2007).
18. Van der Heul, D.R., Vuik, C. and Wesseling, P., "A conservative pressure-correction method for flow at all speeds", *Computers & Fluids*, Vol. 32, pp. 1113-1132, (2003).
19. Uroić, T. and Jasak, H., "Block-selective algebraic multigrid for implicitly coupled pressure-velocity system", *Computers & Fluids*, Vol. 167, pp. 100-110, (2018).
20. Jasak, H., Jemcov, A. and Tukovic, Z., "OpenFOAM: A C++ library for complex physics simulations, International workshop on coupled methods in numerical dynamics", IUC Dubrovnik Croatia, pp. 1-20, (2007).
21. Konle, M., AG, M.A.E., de Guillebon, L. and Cottier, F., "Multi-Physics Simulations of an Aero Engine Combustor with OpenFoam", *Proceedings of 1st Global Power and Propulsion Forum*, GPPF-2017-0045, Zurich, (2017).
22. el Abbassia, M., Lahaye, D. and Vuik, C., "Modelling turbulent combustion coupled with conjugate heat transfer in openfoam", *Conference: Tenth Mediterranean Combustion Symposium*, (2017)
23. Issa, R.I., "Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting", *Journal of Computational Physics*, Vol. 62, pp.40-65, (1986).
24. Kazemi-Kamyab, V., Van Zuijlen, A. and Bijl, H., "Accuracy and stability analysis of a second-order time-accurate loosely coupled partitioned algorithm for transient conjugate heat transfer problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 74, pp. 113-133, (2014).
25. Kazemi-Kamyab, V., Van Zuijlen, A. and Bijl, H., "Analysis and application of high order implicit Runge–Kutta schemes for unsteady conjugate heat transfer: A strongly-coupled approach", *Journal of Computational Physics*, Vol. 272, pp. 471-486, (2014).

(مقالهٔ پژوهشی)

پیوندزنی سطح یک نوع الیاف نایلونی با استفاده از مخلوط دو مونومر اکریلیک و بهینه‌سازی پارامترهای مربوطه توسط یک نرم‌افزار متداول طراحی آزمایش*

محمد خسروی[۱] سعید استاد موحد[۲]

چکیده *زیست رسوب‌گذاری دریایی به تجمعی از انواع ارگانیسم‌ها برسازه‌های فرورفته در آب دریا گفته می‌شود. این پدیده اثرات مخربی بر سازه‌های شناور در آب مانند کشتی‌ها، قفس‌های پرورش ماهی و غیره دارد. به‌منظور کاهش رسوب‌گذاری زیستی بر روی الیاف یک نوع نایلون، مخلوط دو مونومر اکریلیک، ۲ – هیدروکسی اتیل متاکریلات و متیل آکریلات به روش پیش‌تابش و در شرایط مختلف بر روی الیاف فوق پیوند زده شد. سپس پارامترهای درصد پیوندزنی و درصد هوموـکو پلیمر با تغییر متغیرهای عملیاتی مانند دمای واکنش (۹۰-۶۰℃)، زمان واکنش (۴ h-۱)، زمان پیش‌تابش (۴۰ min-۱۰) و غلظت آغازگر (۹-۳%) اندازه‌گیری شده و با مقادیر محاسبه شده توسط یک نرم‌افزار متداول طراحی آزمایش (Design-expert®) مقایسه گردیده و نتایج مورد بحث قرار گرفتند. جهت بهینه‌سازی نتایج توسط نرم‌افزار و بررسی اثر متقابل متغیرهای فوق جهت پیش‌بینی پارامترهای مذکور، از روش پاسخ سطح و طراحی نقاط مرکزی با استفاده از ۴ متغیر و ۲ سطح پاسخ استفاده شد. افزایش زمان تابش و غلظت آغازگر باعث افزایش درصد پیوندزنی به دلیل افزایش مراکز فعّال بر سطح الیاف شدند. به کمک تحلیل جدول آنالیز واریانس و مقدار متغیر p-valuee با بازه اطمینان ۰/۰۵، پارامترهای مهم در مدل به ترتیب اهمّیّت، دمای واکنش، زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر تشخیص داده شدند. همچنین صحت آماری نتایج به‌دست‌آمده به کمک مقادیر متغیرهای آماری مانند ضریب مشخصه‌سازی (۹۶٪)، ضریب مشخص‌سازی تنظیم شده (۹۳٪) و تناسب دقّت (۳۰/۳۰۲) مورد تأیید قرار گرفتند. در شرایط بهینه معرفی شده توسط نرم‌افزار، مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط مدل پیشنهادی نرم‌افزار عبارت بودند از درصد پیوندزنی، ۳۸/۵۹ و هوموکوپلیمر ۴۳/۴۲ در صد که با مقادیر تجربی به ترتیب ۳۷/۸۹ و ۴۲/۹۸ درصد تطابق مناسبی داشتند. همچنین دو معادله جهت پیش‌بینی مقادیر پارامترها با تغییر متغیرهای مورد مطالعه توسط نرم‌افزار ارائه گردیدند.*

واژه‌های کلیدی الیاف نایلون؛ ۲– هیدروکسی اتیل متاکریلات؛ متیل آکریلات؛ درصد پیوندزنی؛ طراحی آزمایش.

The Grafting of a Nylon Fiber Surface by a Mixture of Two Acrylic Monomers and the Evaluation of Optimum Values by using a Traditional Design of Experiment Software

M. Khosravi S. Ostad Movahed

Abstract *Bio-fouling as a worldwide marine industries concern is the accumulation of micro and macro-organisms on the submersed surfaces in the sea water. It has destructive effects on the sunk parts of the ships, fish cages and all other marine submersed structures. To reduce bio-fouling on the nylon fibers a dual mix of 2-Hydroxy ethyl methacrylate (HEMA) and methyl acrylate (MA) was grafted on the fiber surface using a pre-irradiation technique in different conditions. Subsequently, degree of grafting and homo and or co-polymer % of the aforementioned monomers at different operative parameters including reaction temperatures (60-90℃), and times (1-4h), pre-irradiation time (10-40min) and also initiator concentration (3-9 wt%) were measured and the results were compared and discussed with those calculated values by a traditional design of experiment software (Design expert®). The optimum grafting conditions and the interaction between above mentioned parameters were evaluated by the software using four variables and two surface responses with central point design method. It found that increasing pre-irradiation time and also initiator concentration improved the grafting % of the monomers on the fiber surface. The reason referred to increasing the active sites on the fiber surface after pre-irradiation. With the aid of variance analysis and considering p-values variable with 0.05 confidence interval, it revealed that the important parameters lied down in the order of reaction temperature, reaction time, pre-irradiation time and initiator concentration. Also, the results were confirmed statistically by the characteristic coefficient, adjustment coefficient and fit precision of 96%, 93% and 30.302, respectively. The real values for degree of grafting and also homo and co-polymer percent were 37.89% and 42.98% respectively. They were in conformity with predicted values by mathematical model with the values of 38.59 and 43.42%. Also, two equations were proposed by the software for calculation of the aforementioned parameters with studied operative parameters.*

Key Word Nylon Fibers, 2-Hydroxy Ethyl Methacrylate, Methyl Acrylate, Grafting percent (%), Design of Experiment

✶تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۸/۲۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۱/۲ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.84217

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه شیمی، زیر گروه پلیمر، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه شیمی، زیر گروه پلیمر، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه فردوسی مشهد. s-ostad@um.ac.ir

مقدّمه

زیست رسوب‌گذاری دریایی به‌عنوان تجمع میکروارگانیسم‌ها و ماکرو ارگانیسم‌های دریایی بر سطوح ساخته دست بشر تعریف می‌شود [1-3] این پدیده اثرات زیان‌باری بر سطوح کشتی‌ها، اسکله‌ها، قفس‌های پرورش ماهی غوطه‌ور در آب و دیگر سازه‌های فرورفته در محیط‌های دریایی دارد و سالانه هزینهٔ گزافی را بر صنعت حمل‌ونقل تحمیل می‌نماید [4]. در مورد کشتی‌ها، زیست رسوب‌گذاری دریایی سبب مقاومت اصطکاکی بالا در حین حرکت سازه شده که افزایش تا بیش از ٤٠٪ مصرف سوخت را به دنبال دارد. به‌منظور جلوگیری از ته‌نشینی ارگانیسم‌های فوق روش‌های گوناگونی پیشنهاد شده‌اند. در روش‌های ابتدایی سطح شناور در آب با قیر، واکس، فلزات سنگین (سرب) یا پوشش های سمی مبتنی بر آرسنیک پوشانده می‌شدند [5]. در اواسط دههٔ ۱۹٦۰، رنگ‌های ضد رسوب‌گذار خود تمیز شونده حاوی تری بوتیل قلع (TBT) برای اوّلین بار با هزینهٔ کم مورد استفاده قرار گرفتند [6,7]. مادهٔ مذکور به‌عنوان یک زیست‌کش در برابر طیف گسترده‌ای از ارگانیسم ها عمل کرده و به طور مؤثری مانع از رسوب گذاری بر بدنهٔ کشتی تا بیش از ۵ سال می‌شود. بااین‌وجود، بعد از دههٔ ۱۹۷۰ اثرات نامطلوب آن بر روی سایر آبزیان غیر هدف همچون انواع صدف‌ها مشاهده گردید. این اثرات باعث ممنوعیت استفاده از پوشش‌های حاوی تری بوتیل قلع گردید [8,9].

در سال‌های اخیر از انواع پلیمرهای عامل‌دار جهت اتصال فیزیکی و یا شیمیایی (پیوندزنی پلیمر به سطح) به‌عنوان یک روش جایگزین و بی‌خطر جهت کاهش رسوب‌گذاری ارگانیسم‌های زیستی بر روی سطوح مختلف استفاده شده‌اند [10-46]. پلیمرهای مذکور از طریق سه مکانیسم جلوگیری از نزدیک شدن رسوبات به سطح (ایجاد یک لایه ابی مابین پلیمر و رسوب مانند هیدروژل‌ها)، لیز نمودن سطح جهت کاهش چسبندگی رسوبات به سطح و تخریب رسوبات (خاصیّت ضد میکروبی) عمل نموده و زیست رسوب‌گذاری را کاهش می‌دهند.

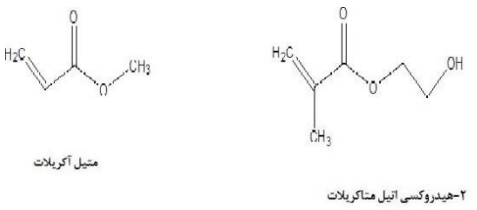
نتایج یک مطالعه که اخیراً منتشر گردیده است [47] نشان می‌دهد که دو مونومر ۲-هیدروکسی اتیل متاکریلات (HEMA) و متیل اکریلات (MA) هنگامی‌که بر روی سطح الیاف نایلونی پیوند زده می‌شود، خواص ضد رسوبی مناسبی به سطح الیاف می‌دهد؛ بنابراین پیش‌بینی می‌شود که ترکیب این دو مونومر این خواص را به‌طور چشمگیرتری بهبود بخشد.

در این تحقیق به‌منظور کاهش رسوب‌گذاری زیستی بر روی الیاف یک نوع نایلون، مخلوط دو مونومر اکریلیک، ۲ – هیدروکسی اتیل متاکریلات و متیل آکریلات به روش پیش‌تابش و در شرایط مختلف بر روی الیاف فوق پیوند زده شد. سپس پارامترهای درصد پیوندزنی و مقدار هوموپلیمر با تغییر متغیرهای عملیاتی مانند دمای واکنش، زمان واکنش، زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر اندازه‌گیری شده و با مقادیر محاسبه‌شده توسط یک نرم‌افزار متداول طراحی آزمایش (Design-expert®) مقایسه گردیده و نتایج مورد بحث قرار گرفتند. جهت بهینه‌سازی نتایج توسط نرم‌افزار و بررسی اثر متقابل متغیرهای فوق جهت پیش‌بینی پارامترهای مذکور، از روش سطح پاسخ و طراحی نقاط مرکزی با استفاده از ٤ متغیر و ۲ سطح پاسخ استفاده شد. همچنین معادلاتی جهت پیش‌بینی درصد پیوندزنی مونومرها و مقدار هوموپلیمر بر مبنای متغیرهای مورد مطالعه، پیشنهاد گردید.

بخش تجربی

مواد. الیاف نایلون ٦ از نوع نخ‌های کاملاً آرایش یافته (FDY) ۲۱۰ دنیر و ٣٤ رشته‌ای از شرکت الیاف ایران تهیه شد. دترجنت غیر یونی زردرنگ ایرامید CD با ٨٤٪ ماده‌ی شیمیایی کوکونات فتی اسید دی‌اتانول آمید

توسط شرکت پدیده شیمی جم اهدا شد. سدیم کربنات، دی کلرو متان، کلسیم هیدرید، متانول، بنزوفنون (BP) به‌عنوان آغازگر نوری و پاراتولوئن سولفونیک اسید تک‌آبه (PTSA) به‌عنوان بازدارندهٔ هوموپلیمریزاسیون از شرکت مرک آلمان تهیّه شدند. دو مونومر ۲-هیدروکسی اتیل متاکریلات (HEMA) و متیل اکریلات (MA) (شکل ۱) از شرکت ریدل تهیّه شدند.



شکل «۱»: ساختار شیمیایی مونومرهای استفاده‌شده

روش آزمون. نمونه‌های الیاف در سایزهای ۱۰cm بریده شده و مقدار ۱۰ gr از الیاف جدا شده و در محلول آبی حاوی۵۰۰ ml آب مقطر، ۱gr دترجنت غیر یونی ایرامید CD و ۱gr سدیم کربنات قرار گرفتند. این محلول آبی به مدّت ۳۰۰min در دمای ۷۰°C قرار داده شدند. در مرحلهٔ بعد الیاف از محلول بیرون آورده شدند و پس از شستشو با آب مقطر در دمای ۵۰°C به مدّت یک شبانه‌روز در اون خشک شده و سپس جهت پیوند زنی مونومرها مورد استفاده قرار گرفتند. جهت پیوند زدن مونومرها، یک محلول واکنش حاوی ۳۲cc دی کلرومتان، ۸cc متانول و مقدار مشخصی آغازگر نوری (بنزوفنون) به مدّت ۱h توسط همزن مغناطیسی هم زده شد. سپس تعدادی الیاف به جرم تقریبی ۱/۸٤ gr به محلول فوق اضافه گردیده و پس از ۲٤h ادامه هم زدن، الیاف از محلول خارج شده و تحت تابش اشعهٔ ماورا بنفش در زمان‌های مشخص قرار گرفتند. سپس الیاف پیش‌تابش داده شده به یک بالن سه‌دهانه حاوی ۵۰ cc آب دیونیزه ۰/۲٤۳ gr گرم بازدارنده پاراتولوئن سولفونیک اسید به‌عنوان بازدارنده هوموپلیمریزاسیون و مخلوط ۱cc، ۲- هیدروکسی اتیل متاکریلات و ۲cc متیل آکریلات، اضافه گردیده و به مدّت زمان و دمای مشخص جهت عمل پیوند زنی قرار داده شدند. پس از اتمام واکنش، الیاف با مقدار مشخصی آب دیونیزه داغ به‌منظور حذف مونومرها و آغازگر واکنش نکرده تحت فشار خلأ شسته وخشک شدند.

مونومرهای موجود در ظرف واکنش سه انتخاب جهت واکنش دارند:

الف) پیوند بر روی سطح الیاف

ب) پلیمره شدن هریک به‌تنهایی و ایجاد هوموپلیمر

ج) کوپلیمره شدن با یکدیگر

برای اندازه گیری مورد الف از فاکتور "درصد پیوندزنی" و برای اندازه‌گیری مجموع موارد ب و ج از فاکتور "درصد هموپلیمر+درصدکوپلیمر" استفاده می‌شود.

به‌منظور محاسبهٔ درصد پیوندزنی و درصد هموپلیمر+درصدکوپلیمر به ترتیب از روابط (۱ و ۲) استفاده شدند [48]:

g_1=وزن نمونه قبل پیوند

$$\text{Degree of grafting (\%)} = (g_2-g_1)/g_1 \times 100 \qquad (۱)$$

g_2 =وزن نمونه بعد از پیوند، استخراج و خشک نمودن

$$\text{Degree of homo and co-polymer (\%)} = H/g_m \times 100 \qquad (۲)$$

H=وزن هموپلمر +وزن کوپلیمر

g_m=وزن مونومر استفاده شده در واکنش

نتایج و بحث

نرم‌افزار طراحی آزمایش، Design-expert ® یک نرم افزار آماری بوده که اوّلین نسخه آن در سال ۱۹۸۸ جهت طراحی آزمایش مورد استفاده قرار گرفته است [49]. این نرم‌افزار با کمک آنالیز واریانس مقادیر بهینهٔ

پارامترهای عملیاتی برای یک فرآیند را محاسبه می‌نماید. از قابلیّت‌های کلیدی نرم‌افزار می‌توان به تولید ابزار سه‌بعدی، امکان خلق طراحی‌های دوبعدی و حل عددی معادلات اشاره نمود. نرم‌افزار مذکور از روش سطح پاسخ (RSM) برای مدل‌سازی و آنالیز مسائل استفاده می‌کند. این روش اثر چندین متغیر را بر روی یک یا چند پاسخ بررسی کرده و در نهایت مقادیر بهینه پاسخ را ارائه می‌نماید [50].

در این روش بر حسب نیاز از دو مدل درجهٔ اوّل (پاسخ، تابع خطی از متغیرهای مستقل، رابطهٔ ۳) و درجهٔ دوم (رابطهٔ ٤) می‌توان استفاده کرد [51]:

$$y = \beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2 + \beta_k x_k+ \varepsilon \qquad (۳)$$

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \varepsilon \qquad (٤)$$

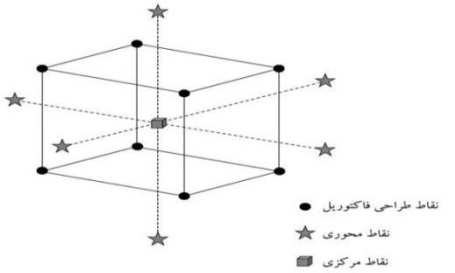
که در روابط بالا،y معرف پاسخ آزمایش، x معرِّف متغیرهای مستقل آزمایش، β ضریب رگرسیون و ε مربوط به خطای مدل می‌باشند. یکی از مناسب‌ترین روش‌های سطح پاسخ استفاده از طراحی ترکیبی مرکزی (*CCD*) است [52].

در این روش طراحی، از سه دسته از نقاط استفاده می‌شود (شکل ۲):

۱- نقاط مرتبط با طراحی فاکتوریل که در دو سطح در گوشه‌های مکعب قرار دارند؛

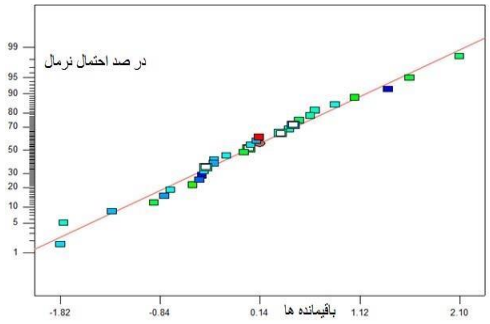
۲- نقاط محوری که در خارج از محدوده متغیرها قرار دارند؛

۳- نقاط مرکزی که در مرکز مکعب قرار دارند.

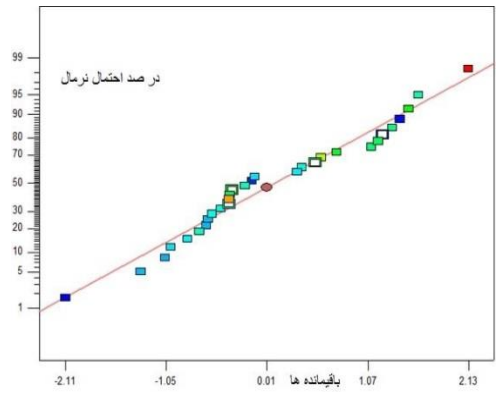


شکل «۲»: موقعیت نقاط در روش CCD با سه متغیر

در روش یادشده محل نقاط محوری به کمک پارامتری به نام α تعیین می‌شود. در روش سطح پاسخ، معمولاً فرض بر این است که اثرات متقابل ۲ به بالا صرف نظر گردد. در این تحقیق نیز از اثرات متقابل ۲ به بالا صرف نظر شده است. همچنین مقدار α برابر با ۲ در نظر گرفته شده است. در این مطالعه تعداد آمایش‌های روش CCD برای ٤ متغیر دمای واکنش، زمان واکنش، زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر برابر با ۳۰ بوده که به کمک نرم‌افزار به‌صورت تصادفی طراحی شدند. ١٦ آزمایش مربوط به طراحی فاکتوریل، ۸ آزمایش مربوط به نقاط محوری و ٦ آزمایش نیز مربوط به نقاط مرکزی بودند. وجود نقاط مرکزی در روش سطح پاسخ انحنای مربوط به سیستم را بهتر مدل می‌کند [51]. همچنین وجود این نقاط خطای ناشی از تکرار را تخمین می‌زند. جدول (۱) محدودهٔ متغیرهای ورودی مورد استفاده در روش سطح پاسخ رانشان می‌دهد. جدول (۲) مقادیر متغیرها در آزمایش‌ها و نتایج تجربی به‌دست‌آمده برای درصد پیوندزنی و همچنین (همو+ کوپلیمر) را نشان می‌دهد. شکل‌های (۳ و ٤) به ترتیب نمودار احتمال نرمال بر حسب باقی‌مانده درصد پیوندزنی و درصد همو-کو پلیمر را نشان می‌دهند. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود نقاط به‌طور مناسبی در امتداد یک خط راست بوده و از یک توزیع نرمال پیروی می‌کنند.



شکل «۳»: نمودار احتمال نرمال بر حسب باقی‌مانده برای درصد پیوندزنی.



شکل «٤»: نمودار احتمال نرمال بر حسب باقی‌مانده برای درصد همو-کو پلیمر.

یکی از منابع مهمی که در طراحی آزمایش به آزمایشگرها کمک کرده و اطلاعات بسیار زیادی در اختیار آن‌ها قرار می‌دهد، جدول مرسوم به آنالیز واریانس است. در این جدول، پارامتر "ارزش-P" به‌عنوان ابزاری مفید جهت ارزیابی درجهٔ اهمّیّت هر منبع (متغیر و یا ترکیبی از متغیرها) مورد استفاده قرار می‌گیرد [53]. مقادیر p-value کمتر از ۰/۰۵ و بزرگ‌تر از ۰/۱۰۰ به ترتیب نشانه تأثیرگذار بودن و بی‌اهمّیّت بودن منبع در مدل پیشنهادی می‌باشند. جدول‌های (۳ و ٤) به ترتیب آنالیز واریانس برای درصد پیوندزنی بر روی الیاف نایلونی و درصد همو-کو پلیمر مخلوط مونومرهای مورد مطالعه را نشان می‌دهند. همان‌طور که از جدول (۳) فوق مشاهده می‌شود، مدل پیش‌بینی می‌کند که اثر دو متغیر زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر تأثیر بیشتری بر روی درصد پیوند زنی نسبت به دو متغیر دیگر، دما و زمان واکنش دارند. همچنین تأثیر متقابل و ترکیبی متغیرهای فوق (به‌جز ترکیب دمای واکنش و غلظت آغازگر) دارای اهمّیّت بالایی در پیش‌بینی درصد پیوندزنی از خود نشان می‌دهند. جدول فوق نشان می‌دهد که توان دو متغیرهای دما و زمان واکنش بر خلاف دو متغیر دیگر بر روی پارامتر فوق مؤثر می‌باشند.

همچنین جدول (٤) نشان می‌دهد که متغیرهای دما و زمان واکنش به همراه غلظت آغازگر اثر بیشتری بر روی تشکیل همو و یا کوپلیمر حاصل از دو مونومر مورد مطالعه دارند. مدل پیش‌بینی می‌کند که زمان پیش‌تابش بر روی پارامتر مذکور دارای اهمّیّت کمتری است. علاوه بر این جدول (٤) نشان می‌دهد که تأثیر متقابل و ترکیبی متغیرهای دمای واکنش- غلظت آغازگر و دمای واکنش - زمان پیش‌تابش دارای اهمّیّت کمتری جهت تولید همو-کو پلیمر می‌باشند.

بااین‌حال برای رعایت سلسله‌مراتب مدل، کلیه منابع، چه مؤثر و یا با تأثیر کمتر باید در مدل آورده شوند [53]. رعایت سلسله‌مراتب مدل، ارتباط مابین متغیرها را برقرار می‌کند. به همین دلیل مدل‌های بررسی شده‌ای که بدون رعایت سلسله‌مراتب استخراج می‌شوند، مدل‌های نادرستی هستند. بااین‌حال اثرات غیر مهم را می‌توان حذف کرده و مدل توسعه‌یافته دیگری به دست آورد.

جدول «۱»: محدودهٔ متغیرهای ورودی مورد استفاده درروش سطح پاسخ

متغیرها	واحد	کد	سطح پایین (-)	سطح بالا (+)	دامنه تغییرات
دمای واکنش	سانتی‌گراد	A	٦٠	٩٠	٧٥
زمان واکنش	ساعت h	B	١	٤	٢/٥
زمان پیش‌تابش	دقیقه min	C	١٠	٤٠	٢٥
غلظت آغازگر	wt%	D	٣	٩	٦

همچنین شاخص‌های آماری ضریب مشخص‌سازی و ضریب مشخص‌سازی تنظیم شده به ترتیب ۰.۹٦ و ۰.۹۳ از آنالیز واریانس به دست آمدند که با توجّه به نزدیک بودن به یکدیگر و همچنین به عدد ۱، مطلوب ارزیابی می‌گردند.

جدول «۲»: مقادیر متغیرها در آزمایش‌ها و نتایج تجربی به‌دست‌آمده

شماره آزمایش	A	B	C	D	درصد درصد پیوندزنی wt%	درصد (هوموپلیمر+کوپلیمر)wt%
۱	۶۰	۱	۱۰	۹	۸/۵۷	۳۶/۶۳
۲	۷۵	۱	۲۵	۶	۱۰/۱۲	۴۲/۲۵
۳	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۱۵/۹	۴۳/۱۳
۴	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۱۱/۱۲	۳۷/۸۹
۵	۹۰	۱	۱۰	۳	۱/۱۲	۴۲/۸
۶	۶۰	۱	۴۰	۳	۵/۲۴	۳۷/۹
۷	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۳	۸/۸۷	۳۶/۷
۸	۹۰	۴	۱۰	۹	۱۹/۵۷	۵۱/۶۸
۹	۹۰	۱	۴۰	۳	۹/۱	۵۶/۶۱
۱۰	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۱۳/۱	۳۸/۱۴
۱۱	۷۵	۴	۲۵	۶	۱۳/۵۱	۳۹/۳۸
۱۲	۶۰	۱	۱۰	۳	۱۱/۵	۳۶/۶۶
۱۳	۶۰	۴	۱۰	۹	/۶۵	۳۶/۶۳
۱۴	۶۰	۴	۴۰	۶	۱۵/۴۶	۴۵/۲۵
۱۵	۶۰	۲/۵۰	۲۵	۶	۲۳/۷۵	/۶۲
۱۶	۶۰	۴	۴۰	۳	۱۵/۲۳	۳۱/۲
۱۷	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۱۴/۰۱	۳۱/۴۴
۱۸	۹۰	۲/۵۰	۲۵	۶	۱۴/۰۸	۳۹/۷
۱۹	۷۵	۲/۵۰	۴۰	۶	۲۱/۹۹	۴۳/۱۶
۲۰	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۲۴/۱۴	۳۸/۴۸
۲۱	۶۰	۱	۴۰	۹	۱۹/۷۸	۴۶/۵۱
۲۲	۶۰	۴	۱۰	۳	۲۲/۳۲	۴۳/۱۶
۲۳	۶۰	۴	۱۰	۳	۲۶/۴	۴۱/۲۴
۲۴	۹۰	۴	۴۰	۹	۴۶/۷۶	۴۰/۴۵
۲۵	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۹	۲۱/۴۷	۶۱/۳
۲۶	۷۵	۲/۵۰	۱۰	۶	۱۶/۵۴	۳۶/۸
۲۷	۹۰	۱	۱۰	۹	۹/۶۵	۴۰/۷
۲۸	۹۰	۴	۴۰	۳	۱۲/۹۸	۳۲/۶
۲۹	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۸/۱۱	۳۷/۸
۳۰	۷۵	۲/۵۰	۲۵	۶	۱۴/۲۸	۴۰

جدول «۳»: جدول آنالیز واریانس برای درصد پیوندزنی مخلوط مونومرهای مورد مطالعه

منبع	مجموع از منبع	دی اف	معنی‌دار بودن مربع	ارزش -F	ارزش-P
A	۳/٦۰	۱	۳/٦۰	/٦۷	٤۲/۷۰
B	۵/۳۰	۱	۵/۳۰	/۹۸	/۳۳۷٦
C	٤۵٤/۲٦	۱	٤۵٤/۲٦	۸٤/۰٤	/۰۰۰۱
D	٤٤۲/۳۱	۱	٤٤۲/۳۱	۸۱/۸۳	/۰۰۰۱
AB	۱۱۳/۵٤	۱	۱۱۳/۵٤	۲۱/۰۱	/۰۰۰٤
AC	۱۹/۱٤	۱	۱۹/۱٤	۳/۵٤	/۰۷۹٤
AD	۵/۷٦	۱	۵/۷٦	۱/۰۷	/۳۱۸٤
BC	٤۲۲/۷۹	۱	٤۲۲/۷۹	۷۸/۲۲	/۰۰۰۱
BD	٤۲۱/۹٦	۱	٤۲۱/۹٦	۷۸/۰۷	/۰۰۰۱
CD	٤۷۲/۱۸	۱	٤۷۲/۱۸	۸۷/۳٦	/۰۰۰۱
A^2	۳٦/۳٦	۱	۳٦/۳٦	٦/۷۳	/۰۲۰٤
B^2	۲۷/۸۷	۱	۲۷/۸۷	۵/۱٦	/۰۳۸۳
C^2	۱۰/۲۵	۱	۱۰/۲۵	۱/۹۰	/۱۸۸۷
D^2	/۰۲۰	۱	/۲۰	۳/ ۷٤۵	/۹۵۲۰

جدول «٤»: جدول آنالیز واریانس برای درصد همو-کو پلیمر مخلوط مونومرهای مورد مطالعه

منبع	مجموع از منبع	دی اف	معنی‌دار بودن مربع	ارزش- F	ارزش-P
A	۱٦۸/۷۷	۱	۱٦۸/۱۷	۱۳/۷۳	/۰۰۱۵
B	۲۱۷/۷۸	۱	۲۱۷/۷۸	۱۷/۷۱	/۰۰۰۵
C	/۱۵	۱	/۱۵	/۰۱۲	/۹۱۲۷
D	۱۰۵/۸۳	۱	۱۰۵/٦۳	۸/۵۹	/۰۰۸٦
AB	۱۱۷/۹۵	۱	۱۱۷/۹۵	۹/۵۹	/۰۰۵۹
AC	۹/٦۲	۱	۹/٦۲	/۷۸	/۳۸۷۵
AD	/۷۱	۱	/۷۱	/۰۵۸	/۸۱۲۹
BC	/۸۷۲۰	۱	/۸۷۲۰	۷/۰۹	/۰۱۵٤
BD	۱۹۲/۲۸	۱	۱۹۲/۲۸	۱٦/٦٤	/۰۰۰۹
CD	۱۲۵/۱۲	۱	۱۲۵/۱۲	۱۰/۱۸	/۰۰٤۸

با توجّه به نتایج فوق، نرم‌افزار معادلات (۵ و ٦) را به ترتیب برای درصد پیوندزنی و درصد همو-کو پلیمر پیشنهاد نمود:

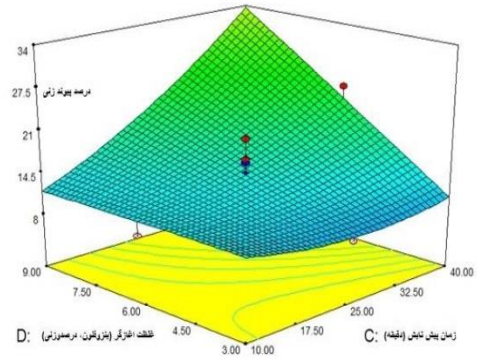
$$\text{Degree of grafting (\%)} = +58.27481 - 2.63825*A + 29.81527*B + 0.15126*C + 1.70849*D - 0.11965AB - 0.24102BC - 1.23401BD + 0.13378CD + 0.019758A^2 - 1.41293B^2 \quad (۵)$$

$$\text{Degree of homo and co-polymer (\%)} = +48.94532 - 0.041657*A - 8.99374*B + 0.12089*C - 3.16614*D + 0.12208*AB - 3.48604E-003*AC + 4.97687E-003*AD - 0.10497BC + 0.80207*BD + 0.066134*CD \quad (٦)$$

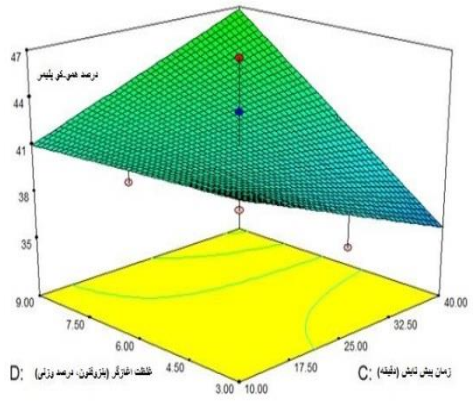
که در آن A، B، C و D به ترتیب عبارت‌اند از دما (°C) و زمان واکنش (h)، زمان پیش‌تابش (min) و غلظت آغازگر (wt %).

شکل‌های (۵ و ٦) به ترتیب درصد پیوندزنی و درصد همو-کو پلیمر به‌صورت تابعی از زمان تابش و غلظت آغازگر (بنزوفنون) در شرایط ثابت برای دو متغیر دیگر (دما و زمان واکنش) را نشان می‌دهند. همان‌طور که از شکل‌های فوق مشاهده می‌شود افزایش زمان تابش و غلظت آغازگر به ترتیب باعث افزایش درصد پیوندزنی و کاهش درصد همو-کو پلیمر می‌گردد. افزایش زمان تابش باعث افزایش مراکز فعّال بر روی سطح الیاف گردیده و پدیده پیوند مابین مونومر و سطح الیاف را تسهیل می‌نماید.

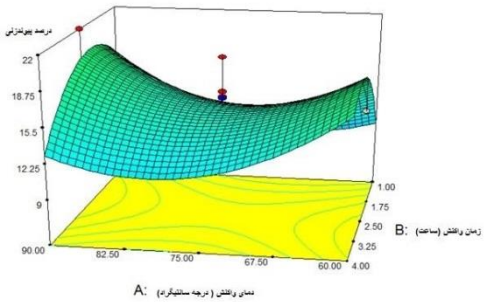
شکل‌های (۷ و ۸) به ترتیب درصد پیوندزنی و درصد همو-کو پلیمر به‌صورت تابعی از دما و زمان واکنش در شرایط ثابت برای دو متغیر دیگر (زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر) را نشان می‌دهند. همان‌طور که از شکل‌های فوق مشاهده می‌شود افزایش زمان واکنش ابتدا باعث افزایش درصد پیوندزنی گردیده و در ادامه باعث کاهش این پارامتر به دلیل پیشی گرفتن واکنش‌های متقابل مونومرها با یکدیگر جهت تولید همو و یا کو-پلیمر می‌گردد. از طرف دیگر افزایش دمای واکنش در ابتدا با شیب زیاد و در ادامه با شیب کم باعث کاهش درصد پیوند زنی گردیده که به دو دلیل تخریب و شکست پیوندهای مابین مونومر و سطح الیاف و همچنین افزایش سرعت همو-کو پلیمریزاسیون مونومر ها است. شکل (۸) همچنین نشان می‌دهد که افزایش دما و زمان واکنش اثر مثبت بر روی تولید همو و کو-پلیمر ها به دلیل تحرک بیشتر مولکول‌های کوچک مونومر نسبت به ماکرو مولکول‌های الیاف و احتمال برخورد بیشتر این مولکول‌ها و انجام واکنش با یکدیگر دارد.



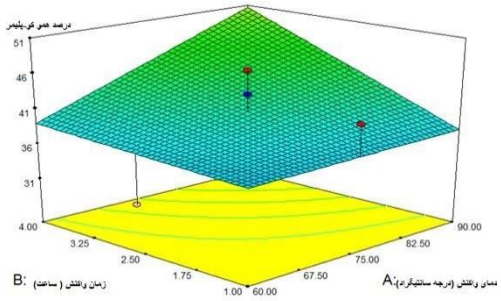
شکل «۵»: درصد پیوندزنی پیش‌بینی‌شده توسط نرم‌افزار به‌صورت تابعی از زمان تابش و غلظت آغازگر (بنزوفنون) در شرایط ثابت برای دو متغیر دیگر (دما و زمان واکنش)



شکل «٦»: درصد همو-کو پلیمر پیش‌بینی‌شده توسط نرم‌افزار به‌صورت تابعی از زمان تابش و غلظت آغازگر (بنزوفنون) در شرایط ثابت برای دو متغیر دیگر (دما و زمان واکنش)



شکل «۷»: درصد پیوندزنی پیش‌بینی‌شده توسط نرم‌افزار به‌صورت تابعی از دما و زمان واکنش در شرایط ثابت برای دو متغیر دیگر (زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر)



شکل «۸»: درصد همو-کو پلیمر پیش‌بینی‌شده توسط نرم‌افزار به‌صورت تابعی از دما و زمان واکنش در شرایط ثابت برای دو متغیر دیگر (زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر)

جهت محاسبه مقادیر بهینه متغیرهای مورد مطالعه از روش تابع تمایل که یکی از پرکاربردترین روش‌های بهینه‌سازی است، استفاده شد.

در این روش در ابتدا هر پاسخ y_i به یک تابع تمایل d_i که در محدودهٔ زیر متغیر است تبدیل می‌گردد:

$$0 \le d_i \le 1 \qquad (۷)$$

اگر پاسخ y_i حداکثر مقدار خود را داشته باشد، مقدار d_i برابر با ۱ است و اگر پاسخ y_i خارج از محدوده قابل قبول باشد مقدار d_i برابر با ۰ خواهد بود. متغیرها باید طوری انتخاب شوند که تابع تمایل کلی (k) که به‌صورت زیر تعریف می‌شود حداکثر مقدار خود را داشته باشد:

$$k = (d_1 . d_2 . d_3 ... d_m)^{1/m} \qquad (۸)$$

که در معادله (۸)، m تعداد پاسخ‌هاست [51].

مقادیر بهینه متغیرهای مورد مطالعه شامل دمای واکنش، زمان واکنش، زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر جهت تعیین درصد پیوند زنی و درصد همو و کو-پلیمر که با روش تابع تمایل توسط نرم‌افزار محاسبه گردیدند به ترتیب عبارت بودند از ۷۵°C، ۱ ساعت، ٤٠ دقیقه و ۹ درصد وزنی.

مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط مدل پیشنهادی نرم‌افزار با در نظر گرفتن مقادیر بهینه فوق عبارت بودند از درصد پیوندزنی، ۳۸.۵۹ و هوموکوپلیمر ٤۳/٤۲ درصد که با مقادیر تجربی به ترتیب ۳۷.۸۹ و ٤۲.۹۸ درصد تطابق مناسبی داشتند.

نتیجه‌گیری

نرم‌افزار Design-expert® ابزاری مناسب و قدرتمند جهت آنالیز و تعیین مقادیر بهینه درصد پیوند زنی مخلوط دو مونومر اکریلیک، ۲ – هیدروکسی اتیل متاکریلات و متیل آکریلات بر روی سطح الیاف نایلونی و همچنین تعیین درصد همو و کو-پلیمر مونومر های فوق بود. آنالیز نتایج و بررسی اثر متقابل متغیرهای مورد مطالعه (دمای واکنش، زمان واکنش، زمان پیش‌تابش و غلظت آغازگر) بر روی پارامترهای درصد پیوندزنی و درصد همو و کو-پلیمر توسط نرم‌افزار فوق و به روش سطح پاسخ و طراحی نقاط مرکزی با استفاده از ٤ متغیر و ۲ سطح پاسخ انجام گرفت. نتایج نشان دادند که افزایش زمان تابش و غلظت آغازگر باعث افزایش درصد پیوندزنی به دلیل افزایش مراکز فعّال بر سطح الیاف می‌شوند. به کمک تحلیل جدول آنالیز واریانس و مقدار متغیر p-valuee با بازه اطمینان ۰/۰۵، پارامترهای مهم در مدل به ترتیب اهمّیّت، دمای واکنش، زمان واکنش، زمان پیش‌تابش و

غلظت آغازگر تشخیص داده شدند. همچنین صحت آماری نتایج به‌دست‌آمده به کمک مقادیر متغیرهای آماری مانند ضریب مشخصّه‌سازی (۰/۹۶)، ضریب مشخص‌سازی تنظیم شده (۰/۹۳) و تناسب دقّت (۳۰/۳۰۲) مورد تأیید قرار گرفتند. در شرایط بهینه معرفی‌شده توسط نرم‌افزار (دمای واکنش ۷۵°C، زمان واکنش ۱ ساعت، زمان پیش‌تابش ٤٠ دقیقه و غلظت آغازگر ۹ درصد وزنی، مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط مدل پیشنهادی نرم‌افزار عبارت بودند از درصد پیوندزنی، ۳۸/۵۹ و هوموکوپلیمر ٤۳/٤۲ در صد که با مقادیر تجربی به ترتیب ۳۷/۸۹ و ٤۲/۹۸ درصد تطابق مناسبی داشتند.

سپاسگزاری

مراحلی از این طرح در آزمایشگاه شیمی پلیمر دانشکدهٔ علوم دانشگاه فردوسی مشهد انجام شده است که بدین‌وسیله مجریان از کلیه دست‌اندرکاران قدردانی می‌نمایند.

واژه‌نامه

ارگانیسم	Organism
بهینه سازی	Optimization
بازه اطمینان	Confidence interval
پیوندزنی	Grafting
پاسخ سطح	Surface response
تحلیل انالیز واریانس	Variance analysis
تناسب دقت	Fit precision
درصد پیوندزنی	Degree of grafting
درصد همو-کوپلیمر	Homo-copolymer %
دمای واکنش	Reaction temperature
زیست رسوب گذاری	Bio-fouling
زیست فیلم	Biofilm
زمان پیش تابش	Pre-irradiation time
سطح الیاف	Fiber surface
ضریب مشخصه سازی	Characteristics coefficient
ضریب مشخصه سازی تنظیم شده	Adjustment coefficient
طراحی نقاط مرکزی	Central point design method
غلظت اغازگر	Initiator concentration
مراکز فعال	Active sites
نرم افزار طراحی ازمایش	Design of experiment software

مراجع

1. Magin, C.M., Cooper, S.P. and Brennan, A.B., "Non-toxic antifouling strategies", *Mater. Today*, Vol. 1, 13(4), pp. 36-44, (2010).
2. Margaillan, M. and Bressy A., "Fouling release coatings: a nontoxic alternative to biocidal antifouling coatings", *Chemical Reviews*, Vol. 11, 112(8), pp. 4347-90, (2012).
3. Finnie. A.A. and Williams, D.N., "Paint and coatings technology for the control of marine fouling", *Biofouling*, Vol. 29(10), pp. 185-206, (2010).
4. Grozea, C.M. and Walker, G.C., "Approaches in designing non-toxic polymer surfaces to deter marine biofouling", *Soft Matter*, Vol. 5(21), pp. 4088-100, (2009).
5. Woods Hole Oceanographic Institution and United States. Navy Dept. Bureau of Ships, Marine fouling and its prevention, (No. 580), United States Naval Institute, (1952).
6. Alzieu, C.L., Sanjuan, J., Deltreil, J.P. and Borel, M., "Tin contamination in Arcachon Bay: effects on

oyster shell anomalies", *Marine Pollution Bulletin*, Vol. 17(11), pp. 494-498, (1986).
7. Alzieu, C., "Environmental impact of TBT: the French experience", *Science of the Total Environment*, Vol. 258(1), pp. 99-102, (2000).
8. Terlizzi, A., Fraschetti, S., Gianguzza, P., Faimali, M. and Boero, F., "Environmental impact of antifouling technologies: state of the art and perspectives", *Aquatic Conservation: Marine and Freshwater Ecosystems*, Vol. 11(4), pp. 311-317, (2001).
9. Hellio, C., Maréchal, J.P., Da Gama, B.A.P., Pereira, R.C. and Clare, A.S., "Natural marine products with antifouling activities", *Advances in Marine Antifouling Coatings and Technologies*, pp. 572-622, (2009).
10. Neoh, K.G. and Kang, E.T., "Combating bacterial colonization on metals via polymer coatings: relevance to marine and medical applications", *ACS Applied Materials & Interfaces*, Vol. 3(8), pp. 2808-2819, (2011).
11. Faure, E., Falentin-Daudré, C., Jérôme, C., Lyskawa, J., Fournier, D., Woisel, P. and Detrembleur, C., "Catechols as versatile platforms in polymer chemistry", *Progress in Polymer Science*, Vol. 38(1), pp. 236-270, (2013).
12. Liu, Y., Tan, T.T.Y., Yuan, S. and Choong, C., "Multifunctional P (PEGMA)–REDV conjugated titanium surfaces for improved endothelial cell selectivity and hemocompatibility", *Journal of Materials Chemistry B*, Vol. 1(2), pp. 157-167, (2013).
13. Yah, W.O., Xu, H., Soejima, H., Ma, W., Lvov, Y. and Takahara, A., "Biomimetic dopamine derivative for selective polymer modification of halloysite nanotube lumen", *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 134(29), pp. 12134-12137, (2012).
14. Fan, X., Lin, L., Dalsin, J.L. and Messersmith, P.B., "Biomimetic anchor for surface-initiated polymerization from metal substrates", *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 127(45), pp. 15843-15847, (2005).
15. Yuan, S., Wan, D., Liang, B., Pehkonen, S.O., Ting, Y.P., Neoh, K.G. and Kang, E.T., "Lysozyme-coupled poly (poly (ethylene glycol) methacrylate)− stainless steel hybrids and their antifouling and antibacterial surfaces", *Langmuir*, Vol. 27(6), pp. 2761-2774, (2011).
16. Xu, L.Q., Jiang, H., Neoh, K.G., Kang, E.T. and Fu, G.D., "Poly (dopamine acrylamide)-co-poly (propargyl acrylamide) -modified titanium surfaces for 'click'functionalization", *Polymer Chemistry*, Vol. 3(4), pp. 920-927, (2012).
17. Yang, W.J., Cai, T., Neoh, K.G., Kang, E.T., Dickinson, G.H., Teo, S.L.M. and Rittschof, D., "Biomimetic anchors for antifouling and antibacterial polymer brushes on stainless steel", *Langmuir*, Vol. 27(11), pp. 7065-7076, (2011).
18. Chen, A., Peng, H., Blakey, I. and Whittaker, A.K., "Biocidal polymers: a mechanistic overview", *Polymer Reviews*, Vol. 57(2), pp. 276-310, (2017).
19. Krishnan, S., Weinman, C.J. and Ober, C.K., "Advances in polymers for anti-biofouling surfaces", *Journal of Materials Chemistry*, Vol. 18(29), pp. 3405-3413, (2008).
20. Kingshott, P., Thissen, H. and Griesser, H.J., "Effects of cloud-point grafting, chain length, and density of PEG layers on competitive adsorption of ocular proteins", *Biomaterials*, Vol. 23(9), pp. 2043-2056, (2002).
21. Schilp, S., Rosenhahn, A., Pettitt, M.E., Bowen, J., Callow, M.E., Callow, J.A. and Grunze, M., "Physicochemical properties of (ethylene glycol)-containing self-assembled monolayers relevant for protein and algal cell resistance", *Langmuir*, Vol. 25(17), pp. 10077-10082, (2009).
22. Statz, A., Finlay, J., Dalsin, J., Callow, M., Callow, J.A. and Messersmith, P.B., "Algal antifouling and

fouling-release properties of metal surfaces coated with a polymer inspired by marine mussels", *Biofouling*, 22(6), pp. 391-399, (2006).

23. Harder, P., Grunze, M., Dahint, R., Whitesides, G.M. and Laibinis, P.E., "Molecular conformation in oligo (ethylene glycol)-terminated self-assembled monolayers on gold and silver surfaces determines their ability to resist protein adsorption", *The Journal of Physical Chemistry B*, Vol. 102(2), pp. 426-436, (1998).
24. Murosaki, T., Ahmed, N. and Gong, J.P., "Antifouling properties of hydrogels", *Science and Technology of Advanced Materials*, Vol. 12(6), pp. 064706, (2012).
25. Lundberg, P., Bruin, A., Klijnstra, J.W., Nystro□m, A.M., Johansson, M., Malkoch, M. and Hult, A., "Poly (ethylene glycol)-Based Thiol-ene Hydrogel Coatings− Curing Chemistry, Aqueous Stability, and Potential Marine Antifouling Applications", *ACS Applied Materials & Interfaces*, Vol. 2(3), pp. 903-912, (2010).
26. Murosaki, T., Noguchi, T., Hashimoto, K., Kakugo, A., Kurokawa, T., Saito, J., Chen, Y.M., Furukawa, H. and Gong, J.P., "Antifouling properties of tough gels against barnacles in a long-term marine environment experiment", *Biofouling*, Vol. 25(7), pp. 657-666, (2009).
27. Jiang, S. and Cao, Z., "Ultralow-fouling, functionalizable, and hydrolyzable zwitterionic materials and their derivatives for biological applications, *Advanced Materials*, Vol. 22(9), pp.920-932, (2010).
28. Chen, S., Zheng, J., Li, L. and Jiang, S., "Strong resistance of phosphorylcholine self-assembled monolayers to protein adsorption: insights into nonfouling properties of zwitterionic materials", *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 127(41), pp. 14473-14478, (2005).
29. He, Y., Hower, J., Chen, S., Bernards, M.T., Chang, Y. and Jiang, S., "Molecular simulation studies of protein interactions with zwitterionic phosphorylcholine self-assembled monolayers in the presence of water", *Langmuir*, Vol. 24(18), pp.10358-10364, (2008).
30. Zhang, Z., Finlay, J.A., Wang, L., Gao, Y., Callow, J.A., Callow, M.E. and Jiang, S., "Polysulfobetaine-grafted surfaces as environmentally benign ultralow fouling marine coatings", *Langmuir*, Vol. 25(23), pp. 13516-13521, (2009).
31. Li, Y., Liu, C.M., Yang, J.Y., Gao, Y.H., Li, X.S., Que, G.H. and Lu, J.R., "Anti-biofouling properties of amphiphilic phosphorylcholine polymer films", *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces*, Vol. 85(2), pp. 125-130, (2011).
32. Aldred, N., Li, G., Gao, Y., Clare, A.S. and Jiang, S., "Modulation of barnacle (Balanus mphitrite Darwin) cyprid settlement behavior by sulfobetaine and carboxybetaine methacrylate polymer coatings", *Biofouling*, Vol. 26(6), pp. 673-683, (2010).
33. Morra, M., "Engineering of biomaterials surfaces by hyaluronan", *Biomacromolecules*, Vol. *6*(3), pp. 1205-1223, (2005).
34. Ederth, T., Ekblad, T., Pettitt, M.E., Conlan, S.L., Du, C.X., Callow, M.E., Callow, J.A., Mutton, R., Clare, A.S., D'Souza, F. and Donnelly, G., "Resistance of galactoside-terminated alkanethiol self-assembled monolayers to marine fouling organisms", *ACS Applied Materials & Interfaces*, Vol. 3(10), pp. 3890-3901, (2011).
35. Cao, X., Pettit, M.E., Conlan, S.L., Wagner, W., Ho, A.D., Clare, A.S., Callow, J.A., Callow, M.E., Grunze, M. and Rosenhahn, A., "Resistance of polysaccharide coatings to proteins, hematopoietic cells, and marine organisms", *Biomacromolecules*, Vol. *10*(4), pp. 907-915, (2009).
36. De Kerchove, A.J. and Elimelech, M., "Calcium and magnesium cations enhance the adhesion of motile and nonmotile Pseudomonas aeruginosa on alginate films", *Langmuir*, Vol. 24(7), pp. 3392-3399, (2008).

37. Lejars, M., Margaillan, A. and Bressy, C., "Fouling release coatings: a nontoxic alternative to biocidal antifouling coatings", *Chemical Reviews*, Vol. 112(8), pp. 4347-4390, (2012).
38. Beigbeder, A., Degee, P., Conlan, S.L., Mutton, R.J., Clare, A.S., Pettitt, M.E., Callow, M.E., Callow, J.A. and Dubois, P., "Preparation and characterisation of silicone-based coatings filled with carbon nanotubes and natural sepiolite and their application as marine fouling-release coatings", *Biofouling*, Vol. 24(4), pp. 291-302, (2008).
39. Beigbeder, A., Mincheva, R., Pettitt, M.E., Callow, M.E., Callow, J.A., Claes, M. and Dubois, P., "Marine fouling release silicone/carbon nanotube nanocomposite coatings: on the importance of the nanotube dispersion state", *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, Vol. 10(5), pp. 2972-2978, (2010).
40. Beigbeder, A., Labruyère, C., Viville, P., Pettitt, M.E., Callow, M.E., Callow, J.A., Bonnaud, L., Lazzaroni, R. and Dubois, P., "Surface and fouling-release properties of silicone/Organomodified Montmorillonite coatings", *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol. 25(14), pp.1689-1700, (2011).
41. Fang, J., Kelarakis, A., Wang, D., Giannelis, E.P., Finlay, J.A., Callow, M.E. and Callow, J.A., "Fouling release nanostructured coatings based on PDMS-polyurea segmented copolymers", *Polymer*, Vol. 51(12), pp. 2636-2642, (2010).
42. Ekin, A., Webster, D.C., Daniels, J.W., Stafslien, S.J., Cassé, F., Callow, J.A. and Callow, M.E., "Synthesis, formulation, and characterization of siloxane–polyurethane coatings for underwater marine applications using combinatorial high-throughput experimentation", *Journal of Coatings Technology and Research*, Vol. 4(4), pp. 435, (2007).
43. Shivapooja, P., Wang, Q., Orihuela, B., Rittschof, D., López, G.P. and Zhao, X., "Bioinspired surfaces with dynamic topography for active control of biofouling", *Advanced Materials*, Vol. *25*(10), pp. 1430-1434, (2013).
44. Huang, J., Koepsel, R.R., Murata, H., Wu, W., Lee, S.B., Kowalewski, T., Russell, A.J. and Matyjaszewski, K., "Nonleaching antibacterial glass surfaces via "grafting onto": the effect of the number of quaternary ammonium groups on biocidal activity", *Langmuir*, Vol. 24(13), pp. 6785-6795, (2008).
45. Li, P., Poon, Y.F., Li, W., Zhu, H.Y., Yeap, S.H., Cao, Y., Qi, X., Zhou, C., Lamrani, M., Beuerman, R.W. and Kang, E.T., "A polycationic antimicrobial and biocompatible hydrogel with microbe membrane suctioning ability", *Nature Materials*, Vol. 10(2), pp. 149-156, (2011).
46. Petrone, L., Di Fino, A., Aldred, N., Sukkaew, P., Ederth, T., Clare, A.S. and Liedberg, B., "Effects of surface charge and Gibbs surface energy on the settlement behaviour of barnacle cyprids (Balanus amphitrite)", *Biofouling*, Vol. 27(9), pp. 1043-1055, (2011).
47. Saleh, N., Ostad. Movahed, S. Attarbashi, F., "The Study on the anti-biofouling effects of the grafted polyamided fibers by several vinyl chemicals, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 135, pp. 46760-46771, (2018).
48. Bucheñska, J., "Modification of polyamide fibers (PA6) by grafting polyacrylamide (PAM)", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 58(10), pp. 1901-1911, (1995).
49. Li, H., "Design of Experiments Software, DOE software", *The Chemical Information Network*, July 17, (2003).
50. Hardin, R.H. and Sloane, N.J.A., "A New Approach to the Construction of Optimal Designs", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 37, pp. 339-369, (1993).
51. Montgomery, D.C. and Runger, G.C., "*Applied statistics and probability for engineers*", John Wiley &

Sons, (2010).

52. Asadi, N. and Zilouei, H., "Optimization of organosolv pretreatment of rice straw for enhanced biohydrogen production using Enterobacter aerogenes", *Bioresource Technology*, Vol. 227, pp. 335-344, (2017).
53. Gheshlaghi. R.E., Scharer, J.M., Moo-Young, M. and Douglas, PL., "Application of statistical design for the optimization of amino acid separation by reverse-phase HPLC", *Analytical Biochemistry*, Vol. 383(1), pp. 93-102, (2008).

(مقالهٔ پژوهشی)

بررسی اثرات لقی مفاصل لولایی بر رفتار سینماتیکی ربات موازی صفحه‌ای 3RPR*

سید مجتبی واردی کولایی[۱] مهدی بامداد[۲] برزو فتحی[۳]

چکیده *برای ایجاد حرکت نسبی بین عضوهای متصل‌به‌هم در یک مکانیزم، وجود لقی در مفاصل امری اجتناب‌ناپذیر است. علاوه بر ایجاد خطا در دقّت موقعیت‌یابی، وجود لقی یکی از مهم‌ترین عوامل ایجاد ضربه، شوک و در نتیجهٔ تولید ارتعاشات و صدا در هنگام کارکرد مکانیزم است. تلورانس‌ها و خطاهای ناشی از فرایند طراحی و ساخت، سائیدگی و خوردگی مفاصل بعد از یک دورهٔ معیّن کاری و اثرات حرارتی به‌عنوان مهم‌ترین عوامل ایجاد و افزایش لقی شناخته شده‌اند. بدیهی است که در صورت وجود لقی در مفاصل لولایی، یک یا دو درجهٔ آزادی غیرقابل‌کنترل به مکانیزم افزوده می‌شود که می‌تواند منبع ایجاد خطا باشد. در این مقاله، اثرات لقی مفاصل لولایی بر رفتار سینماتیکی ربات موازی صفحه‌ای 3RPR مورد بررسی قرار می‌گیرد. ربات موازی در نرم‌افزار تحلیل دینامیکی آدامز مدل‌سازی شده و نتایج شبیه‌سازی برای دو حالت ایده‌آل (بدون لقی) و حالت واقعی (با لقی) با هم مقایسه می‌شوند. همچنین اثرات اندازه لقی مفاصل و تأثیر آن بر رفتار ربات نیز مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج عددی نشان می‌دهند که با افزایش اندازه لقی، مقادیر سرعت و شتاب افزایش چشم‌گیری می‌یابند.*

واژه‌های کلیدی لقی مفصل؛ سینماتیک؛ تحلیلی دینامیکی؛ نرم‌افزار آدامز؛ ربات موازی صفحه‌ای 3RPR.

The Effects of Revolute Joint Clearance on the Kinematic Behavior of the 3RPR Planar Parallel Manipulator

S.M. Varedi-Koulaei M. Bamdad B. Fathi

Abstract *To create a relative movement between connected members in a mechanism, the presence of clearance in the joints is inevitable. In addition to raise errors in positioning accuracy, the presence of clearance is one of the most important factors in causing impact, shock, and thus the production of vibrations and sound during the operation of the mechanism. Tolerances and errors due to the process of design and construction, wear and corrosion of joints after a certain period of work and thermal effects are known as the most important sources in creating and increasing clearance. Obviously, if there is a clearance in the revolute joints, one or two degrees of uncontrollable freedom are added to the mechanism, which can be the source of the error. In this paper, the clearance effects of revolute joints on the kinematic behavior of a 3RPR parallel robot are examined. Parallel robots are modeled in the Adams Dynamic Analysis Software, and the simulation results are compared for two ideal (without clearance) and real mode (with clearance). The effects of joint clearance size and its effect on robot behavior are also evaluated. Numerical results show that by growing the size of the clearance, the values of velocity and acceleration increase dramatically.*

Key Words Joint Clearance, Kinematics, Dynamic Analysis, ADAMS Software, 3RPR Planar Parallel Manipulator.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱۱/٤ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۲/۳ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.84217

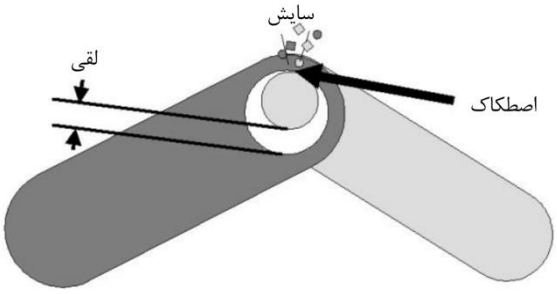
(۱) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

(۲) نویسنده مسئول: استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، bamdad@shahroodut.ac.ir

(۳) کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی بابل، بابل، ایران

مقدّمه

یکی از مزایا و انتظارات استفاده از یک مکانیزم موازی، دقّت در عملکرد آن است. در نتیجه، فرآیندهای ساخت اعضای مکانیزم همانند لینک‌ها و یا از آن مهم‌تر، مفاصل که دارای اجزای پیچیده‌تری هستند، باید با دقّت زیاد و استفاده از تکنیک‌های مدرن صورت پذیرد. اگرچه در این زمینه، تکنولوژی پیشرفت قابل‌ملاحظه‌ای داشته است و روش‌های ساخت با دقّت زیادی ارائه شده‌اند، ولی بااین‌حال وجود تلورانس‌هایی بین اجزای متصل‌به‌هم اجتناب‌ناپذیر است. در واقع، برای ایجاد حرکت نسبی بین عضوهای متصل‌به‌هم، وجود لقی در مفاصل یک مکانیزم ضروری است. در نتیجهٔ وجود این فواصل بسیار اندک بین اجزای یک مکانیزم و یا یک ربات، تأثیرات قابل‌ملاحظه‌ای در موقعیت نقطهٔ کارکرد آن حاصل می‌گردد که با انتظار طراح از دقّت زیاد مغایرت دارد. علاوه بر ایجاد خطا در دقّت موقعیت‌یابی، وجود لقی یکی از مهم‌ترین عوامل ایجاد ضربه، شوک و در نتیجه تولید ارتعاشات و صدا در هنگام کارکرد مکانیزم است. تلورانس‌ها و خطاهای ناشی از فرایند طراحی و ساخت، سائیدگی و خوردگی مفاصل بعد از یک دورهٔ معیّن کاری و اثرات حرارتی به‌عنوان مهم‌ترین عوامل ایجاد و افزایش لقی شناخته شده است. همچنین، لقی بین دو بخش در حال اتصال در مفصل صلب، سبب پس‌زنی می‌شود. همچنین در همه مفاصل فوق، یک حرکت نسبی بین دو جسم وجود دارد که موجب اصطکاک، سایش و در نتیجه افزایش لقی می‌شود (شکل ۱). بدیهی است که در صورت وجود لقی در یک مفصل لولایی، دو درجهٔ آزادی غیرقابل‌کنترل به مکانیزم افزوده می‌شود که می‌تواند منبع ایجاد خطا در رفتار دینامیکی آن باشد.



شکل «۱»: وجود لقی و اثرات آن در مفصل

در سال‌های اخیر، محقّقان در تلاش بوده‌اند تا به شناخت کاملی از رفتار مکانیزم با توجّه به وجود لقی در مفاصل لولایی دست یابند. در واقع تأثیر وجود لقی بر دقّت مکانیزم یکی از موضوعات مهمی است که اخیراً موردتوجّه بسیاری قرار گرفته است.

در ابتدا کلهاتکار و یانیک [1] در سال ۱۹۷۰ اثر پرش در مفصل را در تولید تابع مکانیزم بررسی نموده و بیشترین مقدار انحراف خروجی به علّت لقی را محاسبه کردند. سپس، دابوسکی و فردونشیتاین [2,3] پیش‌بینی پاسخ دینامیکی مکانیزم دارای مفصل لق را بررسی کردند. ارلس و وو [4] مدلی را با فرض تماس دائم برای لقی ارائه کردند. در این مدل، با فرض اینکه دو عضو به‌طور دائم با هم در تماس‌اند، لقی به‌وسیله یک عضو مجازی بدون جرم جایگزین می‌شود. این کارهای آغازین در مورد لقی با چندین مورد دیگر ادامه یافت تا اینکه در سال ۱۹۹۰، لنکرانی و نیک‌روش [5] مدل جدید و ماندگاری را بر اساس تئوری هرتز [6]، برای نیروی تماسی در محل مفصل لق ارائه کردند. در این مدل ارزشمند، برای درنظرگرفتن اتلاف انرژی در حین برخورد، جمله میرایی (Damping term) به رابطهٔ هرتز افزوده شده است. این مدل تا به امروز موردتوجّه و مورداستفاده بسیاری از محقّقان دیگر قرار گرفته است. فلورز و همکارانش در کارهای خود از این مدل برای بررسی سینماتیک و دینامیک مکانیزم لنگ- لغزنده بهره برده‌اند [7,8] و اثر روغن‌کاری در مفصل لق و تأثیر آن بر دینامیک مکانیزم را نیز بررسی نمودند [9]. چواب و همکارانش [10] مقایسه‌ای میان

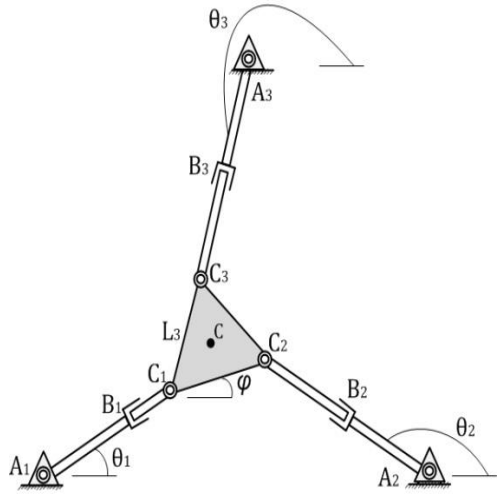
مدل‌های مختلف به عمل آوردند. آن‌ها یک مکانیزم لنگ- لغزنده را در دو حالت با و بدون روغن‌کاری مفصل در نظر گرفتند و دریافتند که در حالت مدل روغن‌کاری هیدرودینامیک برای مفصل، مقادیر ماکزیمم نیروهای ضربه‌ای در مفصل کاهش می‌یابند. تیان و همکارانش [11] نیز دینامیک مکانیزم‌های فضایی و لقی مفصل کروی را در دو حالت تماس با روغن‌کاری و تماس خشک مورد بررسی قرار دادند. برای تماس خشک، آن‌ها نیروی تماسی را بر اساس قانون تماس هرتز و با افزودن جملهٔ میرایی به سبب اتلاف انرژی به دست آوردند. نیروی اصطکاکی در محل مفصل نیز بر اساس رابطهٔ اصطکاک کولومب (Coulomb's friction) به‌دست‌آمده است. درحالی‌که در حالت روغن‌کاری مفصل، نیروهای مفصل را با استفاده از معادلهٔ رینولدز (Reynolds' equation) به دست آوردند. اولیایی و قضاوی [12] نیز به تحلیل مکانیزم لنگ- لغزنده دارای یک مفصل لق پرداختند و سپس با استفاده از یک روش کنترلی، ضربات موجود در محل مفصل لق را کاهش دادند. ارکایا و اوزمای [13] هم با استفاده از مدل لنکرانی- نیک‌روش به تحلیل مکانیزم لنگ- لغزنده دارای دو مفصل پرداختند و اثرات آن را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند. ارکایا همچنین در پژوهش دیگری به بررسی مشخصّه‌های ارتعاشی مکانیزم دارای مفصل لق پرداخت [14]. واردی و همکارانش [15,16] نیز با تحلیل مکانیزم لنگ- لغزنده دارای مفاصل لق، به بهینه‌سازی سینماتیکی و دینامیکی آن جهت کاهش اثرات نامطلوب لقی پرداختند.

اما نکته قابل‌توجّهی که در کارهای ذکر شده فوق وجود دارد این است که تقریباً در همه آن‌ها، مؤلفین لقی مفاصل را در مکانیزم‌های صفحه‌ای و یک درجهٔ آزادی لنگ- لغزنده و چهارمیله‌ای مورد بررسی قرار داده‌اند و کارهای انجام شده بر روی مکانیزم‌های فضایی و یا مکانیزم‌های صفحه‌ای با درجهٔ آزادی بالاتر انگشت‌شمار است. ازجمله این کارها، می‌توان به فلورز و همکارانش [17] اشاره کرد که لقی مفصل لولایی را در یک مکانیزم فضایی بررسی کردند و یا تیان و همکارانش [18] که لقی یک مفصل استوانه‌ای را مورد بحث قرار دادند. همچنین فرج‌تبار و همکارانش [19] و واردی و همکارانش [20] نیز بر روی مکانیزم صفحه‌ای 3RRR دارای مفاصل لق، کارهای متفاوت تحلیلی و طراحی انجام دادند.

مقایسهٔ ربات‌های سری و موازی نشان می‌دهد که یکی از مزایای زنجیره‌های موازی دقّت موقعیت‌یابی است؛ بنابراین بررسی عوامل کاهش دقّت در این ربات‌ها امری ضروری است. یکی از این ربات‌های موازی پرکاربرد در صنعت، ربات موازی 3RPR است که در این مقاله مورد توجّه قرار گرفته است. این ربات سبک با توجّه به ساختار میله بندی موازی آن در کاربردهای سریع و یا حتی بسیار سریع می‌تواند به‌خوبی به کار گرفته شود. پایداری ربات‌های موازی حتی زمانی که به نظر اجزای ساختار آن از صلبیت برخوردار نباشند توسط محقّقان بررسی و تحسین شده است [21]. پایداری بالا و دقّت قابل‌قبول ایجاد شده به دلیل سفتی بالای ساختار متحرک ربات در کنار مزیت سرعت، آن را گزینهٔ ایده‌آلی برای کاربردهایی نظیر فرایندهای مونتاژ و دمونتاژ، گذاشت و برداشت می‌کند. در این مقاله، به بررسی اثرات لقی مفاصل لولایی در رفتار دینامیکی ربات موازی صفحه‌ای 3RPR پرداخته می‌شود. تحلیل‌های متنوع سرعت، شتاب در راستای ارتقای کیفیّت عملکرد ربات با نگاه خاص به کاربرد صنعتی اشاره شده صورت می‌گیرد. در انتها، ازآنجاکه وجود لقی در مفاصل باعث ایجاد تغییرات با فرکانس بالا در حرکت اعضا می‌شود، تحلیل فرکانسی صورت می‌گیرد. این تحلیل که با استفاده از سیگنال شتاب مجری نهایی حاصل می‌شود نمایشگر رفتار یک مکانیزم در حضور لقی است.

ربات موازی صفحه‌ای 3RPR

شکل (۲) ربات موازی صفحه‌ای 3RPR را که با احتساب زمین دارای هشت عضو است، نشان می‌دهد. این مکانیزم دارای یک صفحه کاری است که با استفاده از سه ساق به زمین متصل شده است. صفحه کاری یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول L_3 است که نقطه وسط آن (C) به‌عنوان نقطه موردنظر برای تولید مسیر در نظر گرفته می‌شود. هرکدام از ساق‌ها نیز دارای دو عضو می‌باشند که به‌وسیله مفاصل کشویی به هم مرتبط‌اند. سه ساق‌ها ربات از دو انتها با استفاده از مفاصل لولایی به صفحه ثابت (زمین) و صفحه کاری متصل شده‌اند. ربات موردبحث با وجود هشت عضو صلب و نه مفصل (لولایی و کشویی)، دارای ۳ درجهٔ آزادی است. بنابراین، با توجّه به تعداد درجات آزادی مکانیزم، سه محرک در مفاصل کشویی (مفاصل A_1، A_2 و A_3) قرار داده شده است. به‌غیراز مفاصل محرک، بقیه مفاصل که شامل همه مفاصل لولایی است دارای لقی هستند [22]. به ازای هر مفصل لولایی لق، دو درجهٔ آزادی به سیستم اضافه می‌شود و همین امر روند انجام تحلیل‌های سینماتیکی و دینامیکی را پیچیده‌تر از حالت ایده‌آل (بدون لقی) می‌کند.



شکل «۲»: ربات موازی صفحه‌ای 3RPR دارای شش مفصل لق

با استفاده از مختصات نقاط $C_i\ (i=1,2,3)$ و $A_i\ (i=1,2,3)$ در هر ساق، می‌توان اندازه فواصل $A_iC_i\ (i=1,2,3)$ و در نتیجه میزان جابه‌جایی‌های مفاصل کشویی (سیلندر-پیستون‌ها) را به دست آورد:

$$\left(x_{C_i}-x_{A_i}\right)^2+\left(y_{C_i}-y_{A_i}\right)^2=(\overline{A_iC})^2 \qquad i=1,2,3 \qquad (۱)$$

که مختصات نقاط $C_i\ (i=1,2,3)$ را می‌توان بر اساس مختصات نقطه C مجری نهایی نوشت. در نتیجه با اطّلاع از x_C و y_C خواهیم داشت:

$$x_{C_1}=x_C+(\overline{CC_1})\cos\left(\varphi+\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$y_{C_1}=y_C+(\overline{CC_1})\sin\left(\varphi+\frac{7\pi}{6}\right) \qquad (۲)$$

$$x_{C_2}=x_C+(\overline{CC_2})\cos\left(\varphi+\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$y_{C_2}=y_C+(\overline{CC_2})\sin\left(\varphi+\frac{11\pi}{6}\right) \qquad (۳)$$

$$x_{C_3}=x_C+(\overline{CC_3})\cos\left(\varphi+\frac{15\pi}{6}\right)$$
$$y_{C_3}=y_C+(\overline{CC_3})\sin\left(\varphi+\frac{15\pi}{6}\right) \qquad (۴)$$

همچنین فاصلهٔ $\overline{CC_i}$ را نیز می‌توان بر اساس طول ضلع مثلث و به‌صورت $L_3/\sqrt{3}$ محاسبه نمود.

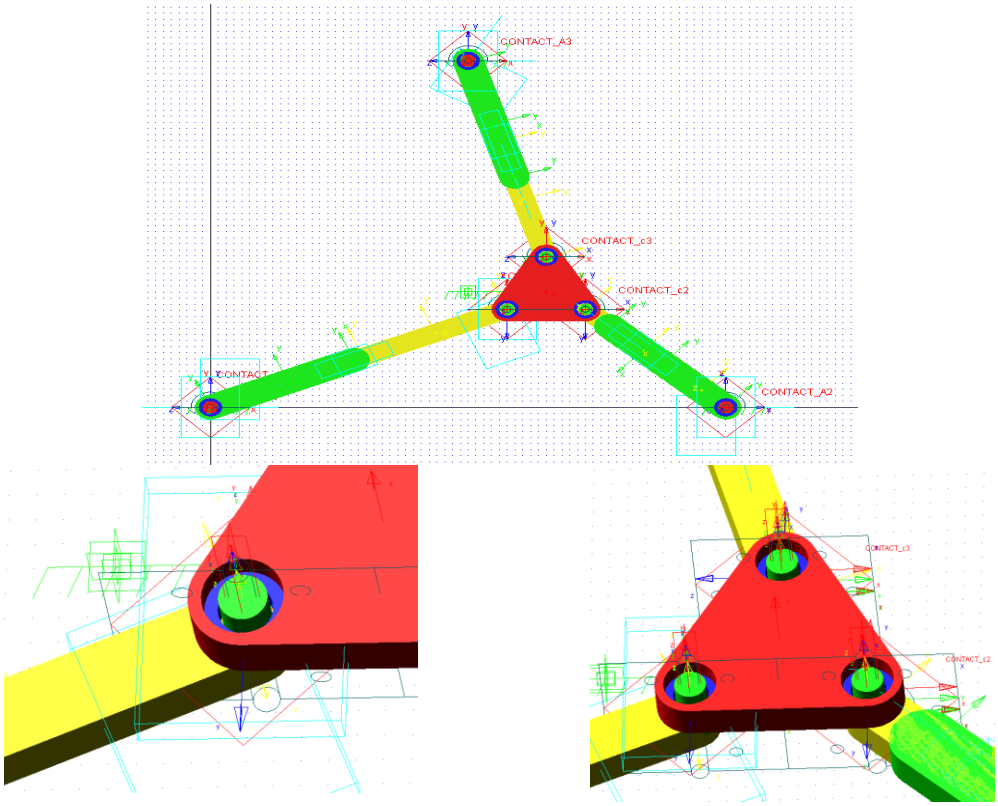
معادلهٔ (۱) می‌تواند به‌عنوان معادلات سینماتیک مستقیم و معکوس این ربات مورد استفاده قرار گیرد. مسئله سینماتیک معکوس، شامل محاسبهٔ مقادیر جابه‌جایی مفاصل کشویی و یا فواصل $A_iC_i\ (i=1,2,3)$ بر اساس اطّلاع از موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی (x_C, y_C, φ) است. در واقع با مشخص بودن موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی (x_C, y_C, φ) و با استفاده از معادلات (۳-۱) می‌توان موقعیت‌های x_{C_i} و y_{C_i} را برای هر سه ساق محاسبه نمود. در نتیجه، ازآنجاکه موقعیت سه تکیه‌گاه A_i نیز از هندسه ربات مشخص است، می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۱)، طول هر یک از ساق‌ها و یا به عبارتی طول مفاصل کشویی

ربات را در هر لحظه به دست آورد. این روابط نشان می‌دهد حل سینماتیک معکوس این ربات موازی به‌راحتی قابل دستیابی است. حل سینماتیک مستقیم این ربات، که شامل استخراج موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی (x_C, y_C, φ) بر اساس اطّلاع از مقادیر جابه‌جایی مفاصل کشویی است، با دشواری‌هایی همراه است. زیرا معادلهٔ (۱) برای سه ساق به یک دستگاه معادلات غیرخطی سه معادلهٔ و سه مجهول تبدیل می‌شود که برای حل آن باید از ترکیبی از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده نمود. روش‌هایی نظیر نیوتون-رافسون (Newton-Raphson Method)، هوموتوپی کانتینوایشن (Homotopy Continuation Method)، روش عدد بزوت (Bezout number)، برنامه‌ریزی خطی تکراری و یا ترکیبی از این روش‌ها می‌توانند برای حل معادلات سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی مورد استفاده قرار گیرد [23-26].

در این مقاله، همه مفاصل لولایی ربات 3RPR، لق در نظر گرفته می‌شوند که در این صورت پیچیدگی روابط سینماتیکی و دینامیکی ربات بسیار افزایش می‌یابد. در نتیجه در اینجا برای بررسی اثرات لقی مفاصل لولایی از نرم‌افزار تحلیل دینامیکی آدامز استفاده می‌شود. محقّقان از نرم‌افزار آدامز در شبیه‌سازی و تحلیل ربات‌های موازی استفاده کرده‌اند [27-29]. نتایج بیانگر کیفیت بالا و قابل‌اعتماد بودن نرم‌افزار مذکور در تحلیل دینامیکی این ربات‌ها است.

مدل‌سازی ربات 3RPR در نرم‌افزار آدامز

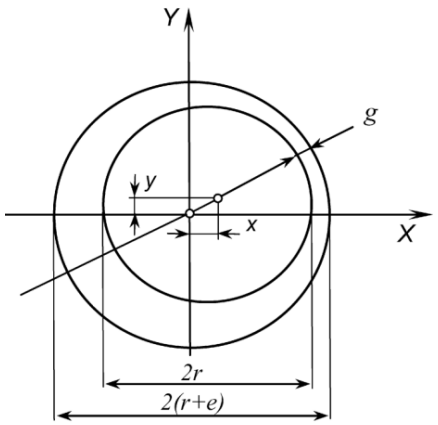
شکل (۳) مدل‌سازی ربات صفحه‌ای 3RPR را در نرم‌افزار آدامز از نماهای مختلف نشان می‌دهد. مطابق شکل همه مفاصل لولایی به‌صورت لق مدل شده‌اند و عضوها صلب در نظر گرفته می‌شوند. حداکثر لقی مفاصل به اندازه 1 mm در نظر گرفته می‌شود.



شکل «۳»: مدل‌سازی ربات 3RPR دارای مفاصل لق در آدامز

مدل‌سازی لقی مفاصل. در مکانیزم‌های صفحه‌ای، لقی هرکدام از مفاصل لولایی دو درجهٔ آزادی به سیستم اضافه می‌کند که می‌تواند شامل جابه‌جایی‌های افقی و عمودی مرکز پین نسبت به مرکز یاتاقان در جهات x و y باشد (شکل ٤). در حین تماس، برهم‌کنش سطوح در مفصل بر اساس نیروهای قائم و مماسی در نقطه تماس است. با توجّه به شکل (٤)، اگر اختلاف شعاع سطوح به اندازه e باشد، رابطهٔ زیر را می‌توان به‌عنوان فاصله بین دو سطح برحسب جابه‌جایی‌های x و y نوشت [26]:

$$g = e - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (۵)$$



شکل «٤»: مرکز لولایی صفحه‌ای دارای لقی

در معادلهٔ (۵)، اگر $g > 0$ باشد بدین معناست که تماسی بین سطوح وجود ندارد و نیروی تماسی صفر است. در حالت $g = 0$ دو سطح با هم در تماس‌اند (بدون فرورفتگی) و وقتی $g < 0$ باشد سطوح درهم‌فرورفته‌اند. مهم‌ترین نکته‌ای که در مدل‌سازی باید مورد توجّه قرار گیرد نحوه مدل‌کردن مفاصل لق و انتخاب مدل تماسی مناسب است.

مدل‌سازی تماس. در نرم‌افزار آدامز از دو روش برای تعریف تماس بین سطوح استفاده می‌شود (شکل ۵) که مدل ضربه (Impact) و مدل استرداد (Restitution) از آن جمله‌اند. البتّه مطابق شکل (۵)، کاربر نیز می‌تواند هر مدل دیگری را مورد استفاده قرار دهد. در این مقاله از روش تماسی بر اساس تابع ضربه (IMPACT-Function-Based Contact) استفاده می‌شود.

رابطهٔ نیروی نرمال در نقطه تماس شامل دو مؤلفه است. در این رابطهٔ علاوه بر اثر کشسانی (الاستیک)، اثر میرایی (دمپینگ) نیز وارد معادلهٔ شده است. نیروی کشسانی بر پایه قانون هرتز تابعی از میزان فرورفتگی سطوح ($\delta = -g$) بوده و نیروی میرایی نیز تابعی از سرعت فرورفتگی سطوح ($\dot{\delta}$) است. بنابراین رابطهٔ نیروی نرمال در نرم‌افزار آدامز را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت [30]:

$$\begin{cases} F_N = K\delta^n + STEP(\delta, 0, 0, d_{max}, C_{max})\dot{\delta}, & \delta > 0 \\ 0, & \delta \le 0 \end{cases} \qquad (٦)$$

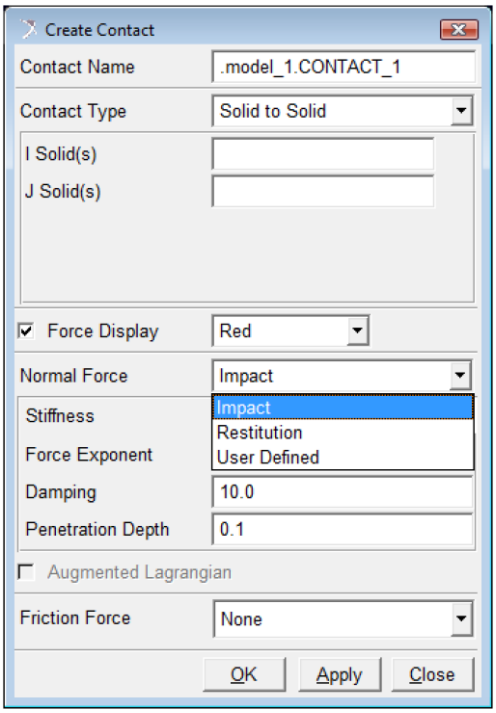
که K ضریب سفتی است و مقدار آن به هندسه صفحات تماسی و خواص فیزیکی آن‌ها بستگی دارد.

$$K = \frac{4}{3\pi(h_i + h_j)}\sqrt{\frac{R_i R_j}{R_i + R_j}}$$
$$h_k = \frac{1 - v_k^2}{\pi E_k}, \qquad k = i, j \qquad (۷)$$

که R_i، v_i و E_i به‌ترتیب شعاع، ضریب پواسون و مدول کشسانی جسم iام است. مقدار توان n نیز بر اساس مواد مورد استفاده در صفحات در حال تماس تعیین می‌شود (برای صفحات فلزی n برابر 1.5 است). در نرم‌افزار آدامز، ضریب دمپینگ نیز به‌صورت تابع پلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$STEP(\delta, 0, 0, d_{max}, C_{max}) = \begin{cases} 0, & \delta \le 0 \\ C_{max}\left(\frac{\delta}{d_{max}}\right)^2\left(3 - 2\frac{\delta}{d_{max}}\right) & 0 < \delta < d_{max} \\ C_{max} & \delta \ge d_{max} \end{cases} \qquad (۸)$$

در رابطهٔ فوق d_{max} عددی مثبت و حقیقی است (تقریباً 0.01 mm) که فرورفتگی معیّنی را برای اعمال ماکزیمم مقدار ضریب دمپینگ C_{max} مشخص می‌کند.



شکل «۵»: نحوهٔ تعریف تماس بین سطوح در آدامز

شبیه‌سازی و نتایج

ربات موازی صفحه‌ای 3RPR شکل (۲) را با داده‌های جدول (۱) در نظر بگیرید. شعاع یاتاقان و اندازه لقی برای هر شش مفصل لولایی لق یکسان است. به‌علاوه فاصله بین تکیه‌گاه‌های A_1، A_2 و A_3 با یکدیگر برابر 660 mm است. در واقع این سه تکیه‌گاه، مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند که قاعدهٔ آن بر روی محور x قرار دارد.

جدول «۱»: پارامترهای ربات صفحه‌ای 3RPR

جرم مجری نهایی	0.2 kg
طول ضلع مجری نهایی	100 mm
حداکثر کورس سیلندر	200 mm
طول ضلع صفحه ثابت (A_iA_{i+1})	660 mm
چگالی اعضا	2270 kg/m^3
مدول الاستیک اعضا	73 GPa
ضریب پواسون اعضا	0.3

فرض می‌شود نقطهٔ C از مثلث مجری نهایی دایره‌ای به مرکز (0.33 m, 0.1905 m) و شعاع 0.1 m را طی کند. در نتیجه می‌توان مقادیر ورودی محرک‌های کشویی را در حالت ایده‌آل (بدون لقی)، با استفاده از معادلهٔ ۱ (سینماتیک معکوس) و مشتق‌گیری از آن به دست آورد. حال با توجّه به اطّلاع از ورودی محرک‌ها، این مقادیر در نرم‌افزار آدامز وارد شده و دینامیک حرکت ربات مورد بررسی قرار می‌گیرد. قبل از استخراج و بررسی نتایج شبیه‌سازی باید از صحت مدل‌سازی ربات در نرم‌افزار آدامز اطمینان حاصل نمود. بدین منظور، شتاب مجری نهایی ربات بدون در نظر گرفتن لقی مفاصل از سه راه مختلف با هم مقایسه می‌شود:

۱- حل سینماتیک ربات در حالت ایده‌آل (بدون لقی) به‌صورت تحلیلی؛

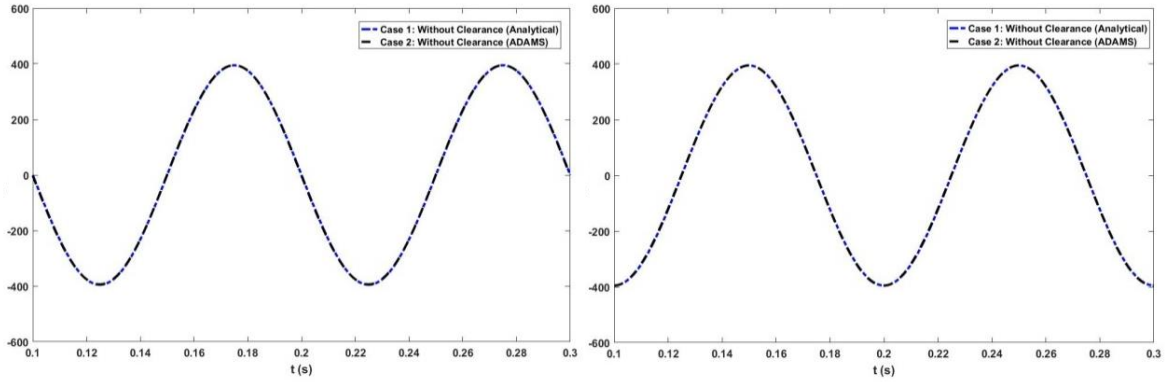
۲- مدل‌سازی ربات بدون لقی مفاصل در نرم‌افزار آدامز؛

۳- مدل‌سازی ربات دارای مفاصل لق در نرم‌افزار آدامز و درنظرگرفتن مقدار بسیار کوچکی برای اندازه لقی (0.0001 mm).

شکل (٦) نمودارهای شتاب در دو راستای x و y را برای دو حالت اوّل (حل تحلیلی و حل با نرم‌افزار آدامز بدون در نظر گرفتن لقی مفاصل) با هم مقایسه می‌کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود دو نمودار دقیقه بر روی‌هم منطبق شده‌اند و این امر نشان‌دهنده مدل‌سازی صحیح ربات در نرم‌افزار آدامز در حالت بدون لقی است. همچنین در شکل (۷) نمودارهای شتاب در حالت‌های ۲ و ۳ با هم مقایسه می‌شوند. همان‌طور که بیان شد در هر دو این حالات از حل نرم‌افزار آدامز استفاده می‌شود، با این تفاوت که در حالت ۳ ربات با در نظر گرفتن لقی مفاصل مدل‌سازی می‌شود و در شبیه‌سازی، اندازه کوچکی برای لقی در نظر گرفته می‌شود.

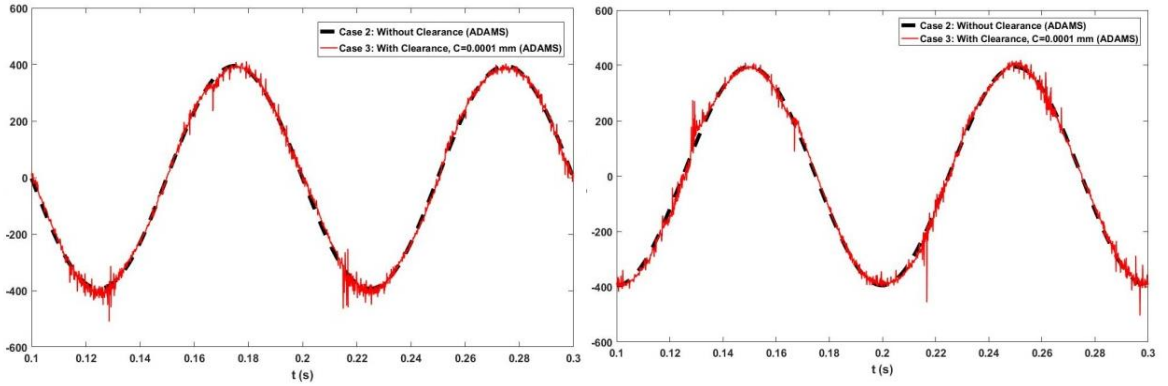
مشاهدهٔ شکل (۷) نیز نشان می‌دهد که نمودارها بسیار به هم نزدیک هستند. نیروهای ضربه‌ای در مفاصل، مطابق انتظار انحرافی را به‌صورت سیگنالی از خطا در نمودارها ایجاد می‌کنند که ناشی از لقی 0.0001 میلی‌متری در مفاصل است. بنابراین می‌توان بر درستی مدل‌سازی نرم‌افزاری و کارکرد مناسب آن صحه گذاشت. حال و پس از اطمینان از صحت مدل‌سازی ربات در نرم‌افزار آدامز، می‌توان اعتماد بیشتری به نتایج حاصله داشت.

شکل (۸) به بررسی موقعیت مکانی مرکز جرم مجری نهایی (نقطه C) در سه مقدار لقی مختلف (Cl=1mm, 0.5 mm , 0.00001mm) می‌پردازد. با توجّه به این نمودارها، می‌توان دریافت که با افزایش اندازه لقی مفصل، میزان خطا نسبت به حالت بدون لقی افزایش می‌یابد. همچنین موقعیت زاویه‌ای مجری نهایی در شکل (۸) به شکل واضح‌تری تأثیر لقی را نمایش می‌دهد. تغییرات دوران در ربات موازی مذکور می‌تواند به‌راحتی عملکرد ربات را زیر سؤال ببرد. بنابراین اگر از مکانیزم موردنظر برای تولید مسیر با دقّت بالا استفاده می‌شود باید به اثرات لقی در ایجاد خطا توجّه ویژه‌ای داشت.



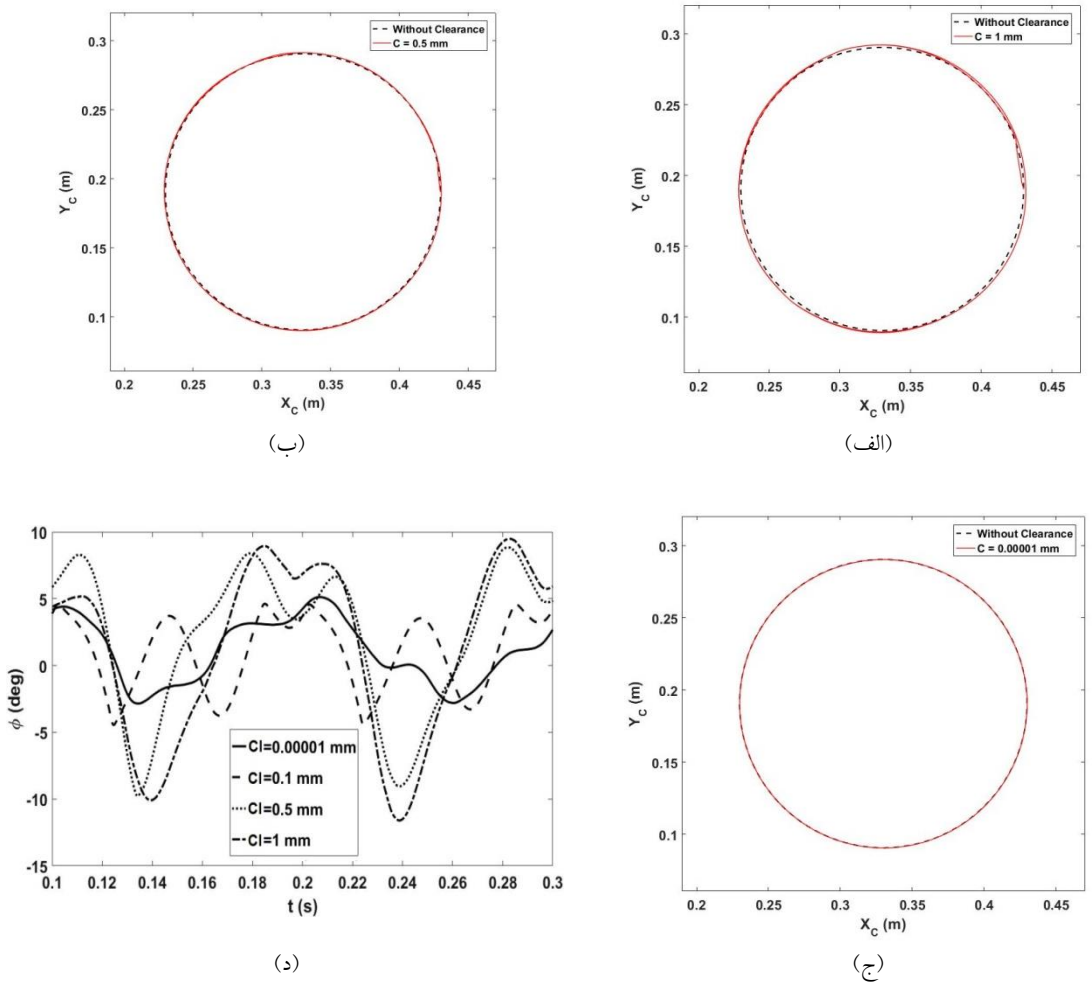
(ب) (الف)

شکل «٦»: مقایسهٔ شتاب خطی مرکز جرم مجری نهایی در حالت ۱ و ۲: (الف) شتاب راستای محور x (ب) شتاب راستای محور y



(ب) (الف)

شکل «۷»: مقایسهٔ شتاب خطی مرکز جرم مجری نهایی در حالت ۲ و ۳ : (الف) شتاب راستای محور x (ب) شتاب راستای محور y



(الف) (ب)

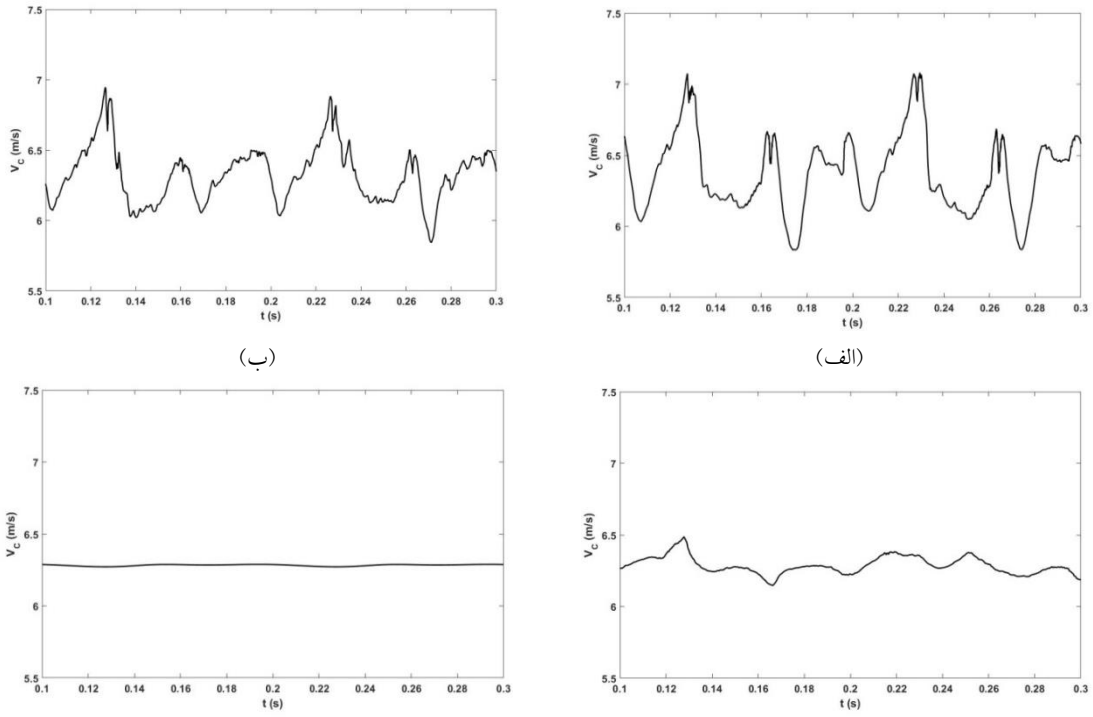
(ج) (د)

شکل «۸»: مقایسهٔ جابه‌جایی مرکز جرم و دوران مجری نهایی در لقی‌های مختلف: (الف) جابه‌جایی مرکز جرم در Cl=1 mm (ب) جابه‌جایی مرکز جرم در Cl=0.5 mm (ج) جابه‌جایی مرکز جرم در Cl=0.00001 mm (د) تغییرات دوران مجری نهایی در لقی‌های مختلف

در شکل‌های (۹ و ۱۰) به بررسی تغییرات سرعت‌های خطی و زاویه‌ای در لقی‌های مختلف در بازه زمانی 0.2s حرکت پرداخته شده است. در این دو شکل نیز می‌توان مشاهده نمود که سرعت‌ها با افزایش اندازه لقی مفاصل، نسبت به حالت ایده‌آل (بدون لقی) اختلاف بیشتری نشان می‌دهند. پروفیل سرعت هموار مکانیزم بدون لقی در لقی یک میلی‌متر تا حدود 1m/s انحراف نشان می‌دهد.

در شکل‌های (۱۳-۱۱) نیز مقادیر شتاب‌های خطی و زاویه‌ی مجری نهایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. بدیهی است تغییرات ناگهانی و با دامنهٔ بالای شتاب می‌تواند موجب افزایش نیرو و ضربه در مکانیزم شود. این امر همچنین، افزایش ارتعاشات، ایجاد سروصدا و خوردگی یاتاقان‌ها را در پی خواهد داشت.

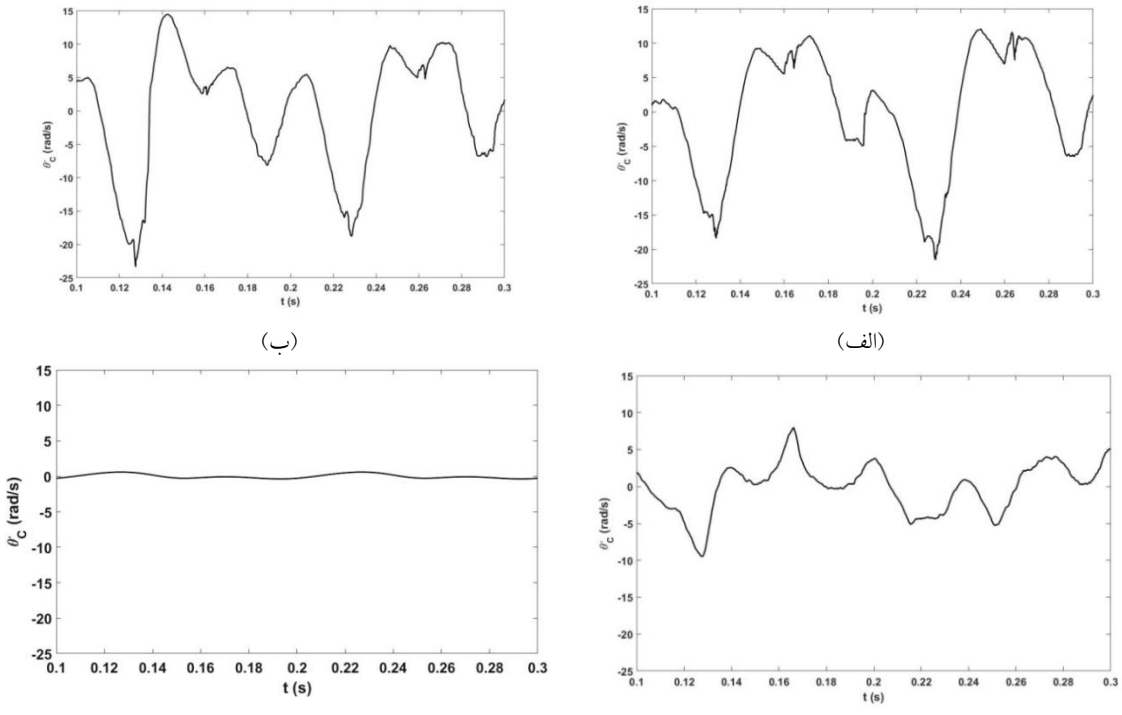
در شکل‌های (۱۳-۱۱) نمودارهای شتاب خطی مجری نهایی در دو راستای x و y برای لقی‌های مختلف با هم مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش اندازه لقی مفاصل، مقادیر بیشینه شتاب مرکز جرم مجری نهایی افزایش چشم‌گیری پیدا می‌کند. این اثر در شکل (۱۳) و در مقایسهٔ شتاب‌های زاویه‌ای نیز دیده می‌شود. در نتیجه، در حالت وجود لقی در مفاصل، باید به تغییرات شتاب اعضا توجّه بیشتری نمود تا بتوان از اثرات مخرب آن پیشگیری نمود.



(ب) (الف)

(د) (ج)

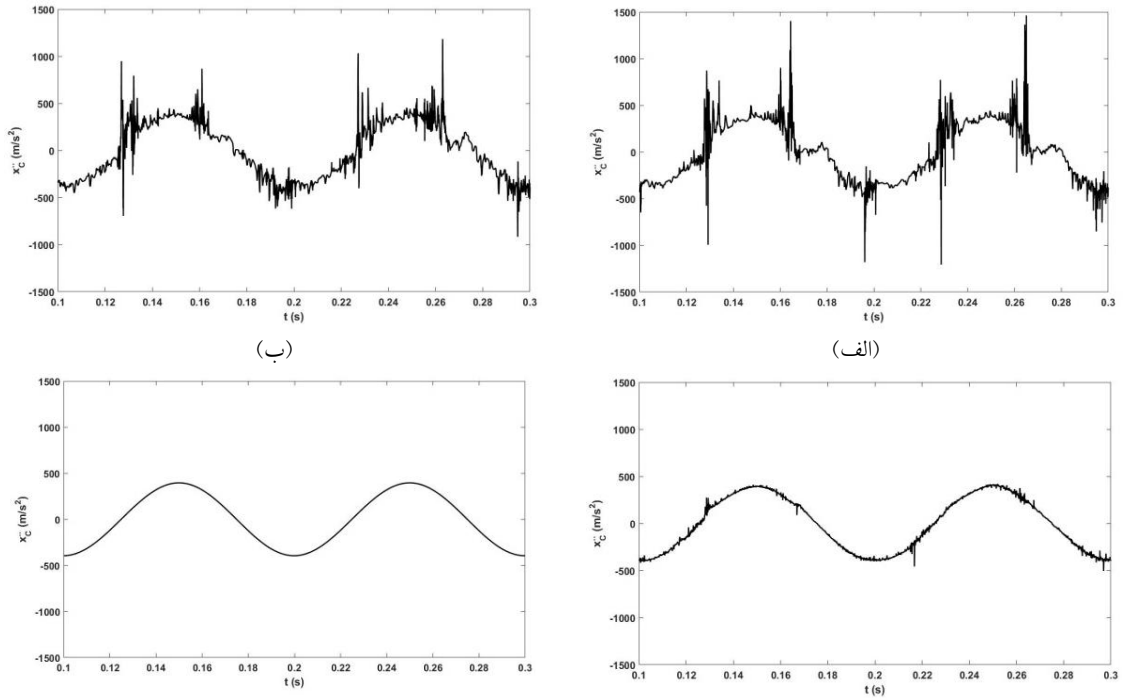
شکل «۹»: مقایسهٔ اندازه سرعت خطی مرکز جرم مجری نهایی در لقی‌های مختلف: (الف) Cl=1 mm (ب) Cl=0.5 mm (ج) Cl=0.00001 mm (د) حالت ایده‌آل



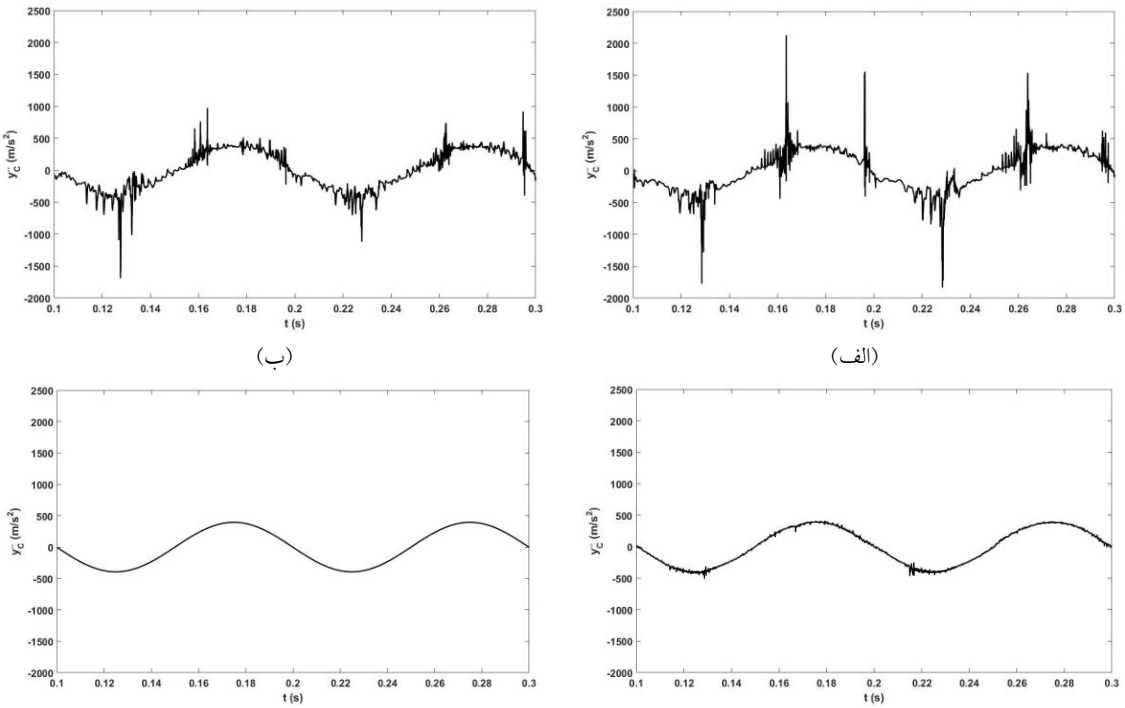
(ب) (الف)

(د) (ج)

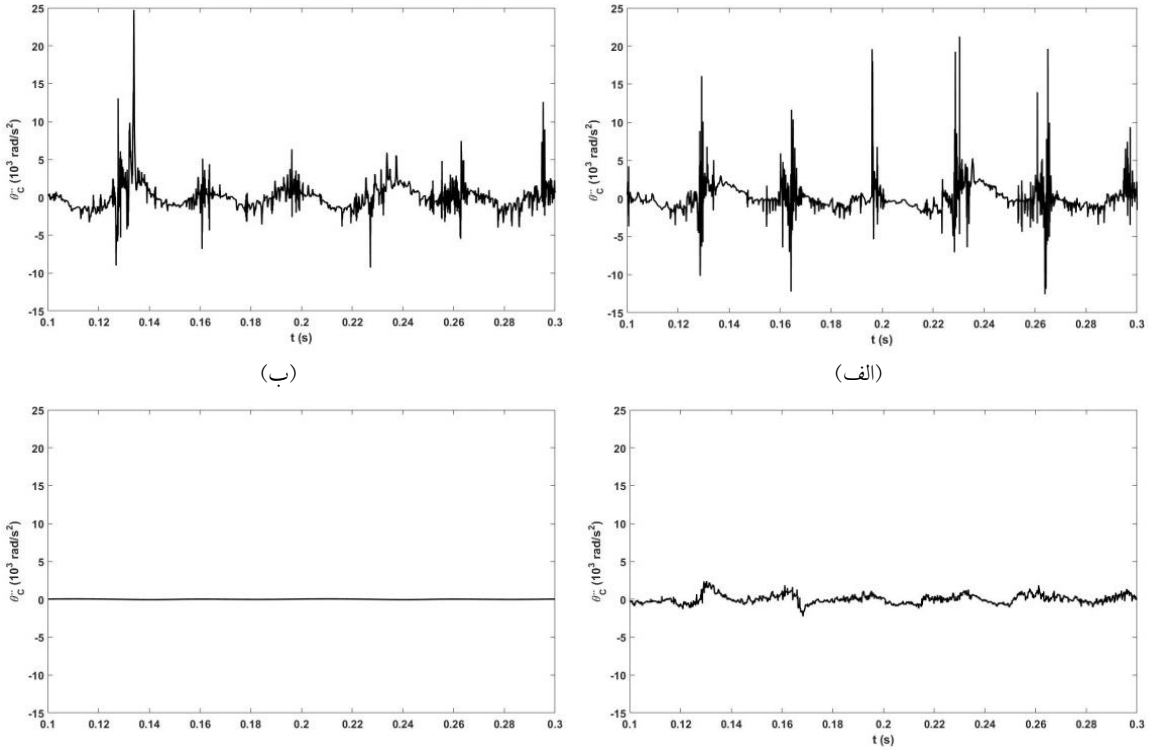
شکل «۱۰»: مقایسهٔ سرعت زاویه‌ای مجری نهایی در لقی‌های مختلف: (الف) Cl=1 mm (ب) Cl=0.5 mm (ج) Cl=0.00001 mm (د) حالت ایده‌آل



شکل «۱۱»: مقایسهٔ شتاب راستای x مرکز جرم مجری نهایی در لقی‌های مختلف: (الف) Cl=1 mm (ب) Cl=0.5 mm (ج) Cl=0.00001 mm (د) حالت ایده‌آل



شکل «۱۲»: مقایسهٔ شتاب راستای y مرکز جرم مجری نهایی در لقی‌های مختلف: (الف) Cl=1 mm (ب) Cl=0.5 mm (ج) Cl=0.00001 mm (د) حالت ایده‌آل

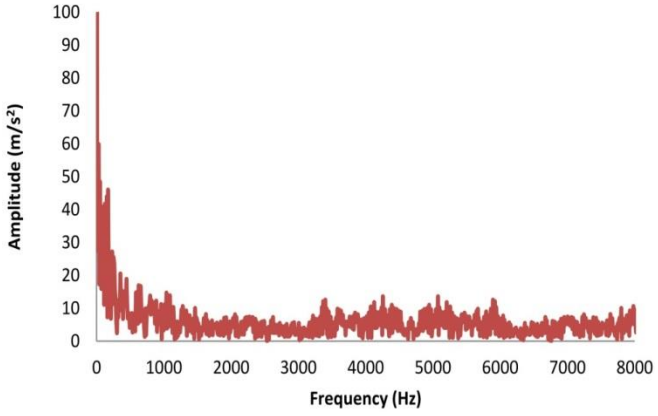


شکل «۱۳»: مقایسهٔ سرعت زاویه‌ای مجری نهایی در لقی‌های مختلف: (الف) Cl=1 mm (ب) Cl=0.5 mm
(ج) Cl=0.00001 mm (د) حالت ایده‌آل

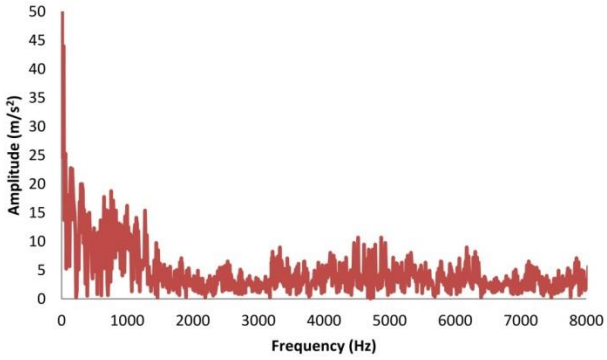
تحلیل فرکانسی با استفاده از روش FFT

تبدیل فوریه سریع (Fast Fourier Transform) یا FFT یکی از مهم‌ترین الگوریتم‌های مورد استفاده در پردازش سیگنال و آنالیز داده‌ها در یک سیستم ارتعاشی است و برای تعیین فرکانس های غالب یک سیگنال ارتعاشی به کار گرفته می‌شود [31, 32]. در مورد اثرات لقی مفاصل نیز اکثر تحلیل‌های دینامیکی انجام شده در حوزه زمان است [8-16, 28-30]. بنابراین، به دلیل تمرکز کمتر روی تجزیه‌وتحلیل در حوزه فرکانس در سیستم‌های دارای لقی مفاصل، در این بخش از FFT برای مطالعه این اثرات استفاده می‌شود. ازآنجاکه وجود لقی در مفاصل باعث ایجاد تغییرات با فرکانس بالا در شتاب اعضا می‌شود، از سیگنال شتاب مجری نهایی برای تحلیل حوزه فرکانسی و استخراج ویژگی‌های ارتعاشی سیستم استفاده می‌شود.

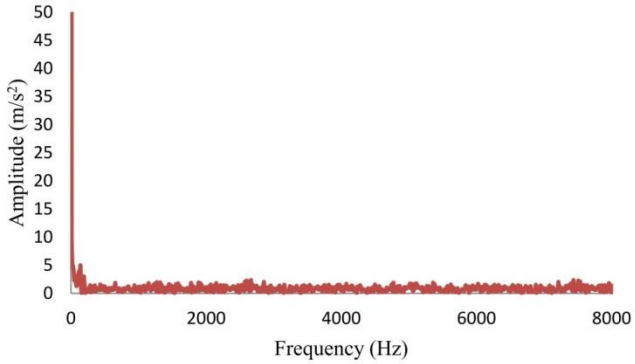
نتایج آنالیز FFT برای اندازهٔ لقی‌های مختلف در شکل (۱٤) ارائه شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که بیشینه دامنه نوسان، که برای هر سه نمودار در محدوده بین ۱٤۰ تا ۱٦۰ هرتز است، با افزایش اندازه لقی افزایش می‌یابد. همان‌طور که در شکل (۱٤-الف) مشخص است، در اندازه لقی Cl=0.00001mm، بیشینهٔ دامنه در حوالی ۱٤۰ هرتز قرار دارد و قلّه دیگری در این نمودار مشاهده نمی‌شود. با افزایش اندازه لقی در شکل‌های (۱٤-ب و ج)، علاوه بر وجود مقدار ماکزیمم دامنه در حوالی فرکانس ۱٤۰ هرتز، قلّه‌های دیگری نیز تا فرکانس ۱٦۰ هرتز مشاهده می‌شوند. این امر بیانگر این واقعیت است که با افزایش اندازه لقی، هرچند مقادیر بیشینه شتاب‌ها و نیروها در مکانیزم افزایش می‌یابند، اما نوسانات سیستم کاهش می‌یابد. به‌عبارت‌دیگر، در اندازهٔ لقی‌های بالاتر مد تماسی در بازه‌های زمانی بیشتری رخ می‌دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل «١٤»: نتایج آنالیز FFT بردار شتاب در اندازهٔ لقی‌های مختلف: (الف) لقی C=1 mm (ب) لقی C=0.5 mm (ج) لقی C=0.00001 mm

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی اثرات لقی مفاصل لولایی در سینماتیک حرکت ربات صفحه‌ای موازی ربات موازی صفحه‌ای 3RPR پرداخته شده است. ربات موازی در نرم‌افزار تحلیل دینامیکی آدامز مدل‌سازی و شبیه‌سازی شده است. نتایج حاصل شده بیانگر قابل‌اعتماد بودن مدل نرم‌افزاری در تحلیل دینامیکی است. نتایج

شبیه‌سازی برای دو حالت ایده‌آل (بدون لقی) و حالت واقعی (با لقی) با هم مقایسه شده‌اند. نشان داده شده است که در صورت وجود لقی در مفاصل لولایی مقادیر سرعت و شتاب مجری نهایی (و دیگر اعضا) نسبت به حالت ایده‌آل افزایش می‌یابند. با افزایش اندازه لقی، اثرات نامطلوب که شامل خطای مسیر و افزایش ناگهانی شتاب‌ها است بیشتر می‌شود. همچنین وجود لقی، خطای ردگیری مسیر را نیز در پی خواهد داشت. انحراف دوران مجری نهایی در این حالت می‌تواند قابل توجّه باشد. در نتیجه، باید با استفاده از روش‌هایی مانند بهینه‌سازی جرمی و یا استفاده از روش‌های کنترلی برای کاهش این اثرات نامطلوب تلاش کرد.

واژه‌نامه

آدامز	ADAMS
اصطکاک کولمب	Coulomb's Friction
تبدیل سریع فوریه	Fast Fourier Transform
جابجایی	Displacement
دینامیک	Dynamic
ربات موازی	Parallel Robot
سرعت	Velocity
سینماتیک	Kinematic
شتاب	Acceleration
عدد بزوت	Bezout number
لقی	Clearance
مجری نهایی	End-Effector
معادله رینولدز	Reynolds' Equation
مفصل لولایی	Revolute Joint
مکانیزم	Mechanism
میرایی	Damping
نیوتون–رافسون	Newton-Raphson
هوموتوپی–کانتینوایشن	Homotopy Continuation

مراجع

1. Kolhatkar, S.A. and Yajnik, K.S., "The effects of play in the joints of a function-generating mechanism", *Journal of Mechanisms*, Vol. 5, pp. 521-632, (1970).
2. Dubowsky, S. and Freudenstein, F., "Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, part 1: formulation of dynamic model", *Journal of Engineering for Industry*, 93(1), pp. 305–309, (1971).
3. Dubowsky, S. and Freudenstein, F., "Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, part 2: dynamic response", *Journal of Engineering for Industry*, 93(1), pp. 310–316, (1971).
4. Earles, S.W.E. and Wu, C.L.S., "Motion analysis of a rigid link mechanism with clearance at a bearing using lagrangian mechanics and digital computation", *Mechanisms*, pp. 83–89, (1973).
5. Lankarani, H.M. and Nikravesh, P.E., "A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 369–376, (1990).
6. Hertz H., "*On the contact of solids, 1881, On the contact of rigid elastic solids and on hardness, 1882*", Translated by D.E. Jones, G.A. Schott, Miscellaneous Papers, MacMillan and Co. Ltd., London, pp. 146–183, (1896).
7. Flores, P. and Ambrosio J., "Revolute Joints with Clearance in Multibody Systems", *Journal of Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1359–1369, (2004).
8. Flores, P., Ambrosio, J. and Claro, J.P., "Dynamic Analysis for Planar Multibody Mechanical

Systems with Lubricated Joints", *Multibody System Dynamics*, Vol. 12, pp. 47–74, (2004).

9. Flores, P., Ambrosio, J., Claro, J.C.P., Lankarani, H.M. and Koshy, C.S., "A Study on Dynamics of Mechanical Systems Including Joints with Clearance and Lubrication", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 41, pp. 247–261, (2006).
10. Schwab, A.L., Meijaard, J.P. and Meijers, P., "A Comparison of Revolute Joint Clearance Models in the Dynamic Analysis of Rigid and Elastic Mechanical Systems", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 895–913, (2002).
11. Tian, Q., Zhang, Y., Chen, L. and Flores, P., "Dynamics of Spatial Flexible Multibody Systems with Clearance and Lubricated Spherical Joints", *Journal of Composite Structures*, Vol. 87, pp. 913–929, (2009).
12. Olyaei A.A. and Ghazavi M.R., "Stabilizing slider-crank mechanism with clearance joints", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 53, pp. 17–29, (2012).
13. Erkaya S. and Uzmay İ., "Experimental investigation of joint clearance effects on the dynamics of a slider-crank mechanism", *Multibody System Dynamics*, Vol. 24, pp. 81–102, (2010).
14. Erkaya S., "Prediction of vibration characteristics of a planar mechanism having imperfect joints using neural network", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26 (5), pp. 1419-1430, (2012).
15. Varedi, S.M., Daniali, H.M., Dardel, M. and Fathi, A., "Optimal dynamic design of a planar slider-crank mechanism with a joint clearance", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 86, pp. 191–200, (2015).
16. Varedi, S.M., Daniali, H.M. and Dardel, M., "Dynamic synthesis of a planar slider–crank mechanism with clearances", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, pp. 1587–1600, (2015).
17. Flores, P., Ambrosio J., Claro, J.C.P. and Lankarani, H.M., Spatial revolute joints with clearance for dynamic analysis of multibody systems, Proc. Inst. Mech. Eng., Part-K: *Journal of Multi-body Dynamics*, 220(4), 257–271, (2006).
18. Tian, Q., Sun, Y., Liu, C., Hu, H. and Flores, P., "Elasto–hydrodynamic lubricated cylindrical joints for rigidflexible multibody dynamics", *Computers & Structures*, 114–115, 106–120, (2013).
19. Farajtabar M., Daniali H.M. and Varedi S.M., Pick and place trajectory planning of planar 3-RRR parallel manipulator in the presence of joint clearance, *Robotica*, (2015).
20. Varedi S. M., Daniali H.M. and Farajtabar M., "The effects of joint clearance on the dynamics of the 3RRR planar parallel manipulator", *Robotica*, (2016).
21. Bamdad, M. and Faroghi, S., "Stability measure for a parallel cable driven robot", *Modares Mechanical Engineering*, (2013).
22. Caro, S, Binaud, N. and Wenger, P, "Sensitivity analysis of 3-RPR planar parallel manipulators", *Journal of Mechanical Design, American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 131, pp. 121005-1–121005-13, (2009).
23. Varedi, S.M., Daniali, H. and Ganji, D., "Kinematics of an offset 3-UPU translational parallel manipulator by the homotopy continuation method", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(3), pp. 1767–1774, (2009).
24. Merlet, J.P., "Algebraic-Geometry Tools for the Study of Kinematics of Parallel Manipulators", *Computational Kinematics*, pp. 183-194, (1993).
25. Sadjadian, H. and Taghirad, H.D., "Comparison of Different Methods for Computing the Forward Kinematics of a Redundant Parallel Manipulator", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 44(3),

pp. 225-246, (2005).

26. Korayem, M.H., Najafi, K. and Bamdad, M., "Synthesis of Cable Driven Robots Dynamic Motion with Maximum Load Carrying Capacities: Iterative Linear Programming Approach", *Scientia Iranica*, 17 (3B), pp. 229-239, (2010).
27. Korayem, M.H., Bamdad, M. and Akbareh, A., "Trajectory optimization of cable parallel manipulators in point-to-point motion", *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 5, pp. 29-34, (2010).
28. Zhao, Y, Bai, Z.F., "Dynamics analysis of space robot manipulator with joint clearance", *Acta Astronautica*, 68(7), pp. 1147-55, (2011).
29. Tian, Q, Zhang, Y, Chen, L. and Flores, P., "Dynamics of spatial flexible multibody systems with clearance and lubricated spherical joints", *Computers & Structures*, 87(13), pp. 913-29, (2009).
30. Khemili, I. and Romdhane, L., "Dynamic analysis of a flexible slider–crank mechanism with clearance", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 27, pp. 882–898, (2008).
31. Farokhzad, S., "Vibration Based Fault Detection of Centrifugal Pump by Fast Fourier Transform and Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System", *Journal of Mechanical Engineering and Technology*, Vol. 1 (3), pp. 82-87, (2013).
32. Lin, H.C., Ye, Y.C., Huang, B.J. and Su, J.L., "Bearing vibration detection and analysis using enhanced fast Fourier transform algorithm", *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 8(10), pp. 1–14, (2016).

(مقالهٔ پژوهشی)

بررسی ارتعاشات غیرخطی میکرو لوله حامل سیّال تحت تحریک پارامتریک مغناطیسی*

رضا جهانگیری[۱] اکبر اللهوردی زاده[۲] بهنام داداش زاده[۳] حمید عظیم زاده[٤]

چکیده *در این پژوهش، اثر پارامترهای مختلف سیستم روی پاسخ غیرخطی نوسانات جانبی میکرولوله تیرمانند حاوی سیّال با شرایط مرزی دو سر ساده نامتحرک تحت شرایط تشدید پارامتریک مغناطیسی محوری بررسی می‌شود. از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ اوّل ردی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن برای استخراج معادلات غیرخطی حاکم بر حرکات جانبی میکرولوله با لحاظ کردن جملات غیرخطی هندسی ون-کارمن استفاده می‌شود. در سرعت‌های جریان بالاتر از سرعت بحرانی آستانه فلاتر (متناظر با کوپلینگ مودهای اوّل و دوم)، رفتار سیستم غیرخطی دو درجهٔ آزادی تحت شرایط تشدید پارامتریک مغناطیسی تحلیل می‌شود. با استخراج منحنی‌های پاسخ غیرخطی، اثرات پارامترهای دامنهٔ تحریک مغناطیسی، پارامتر فرکانس تحریک و پارامتر غیرمحلی تنش روی دامنهٔ تشدید سیستم بررسی و مورد بحث قرار می‌گیرد.*

واژه‌های کلیدی ارتعاشات غیرخطی؛ میکرو لوله حاوی سیّال؛ تشدید پارامتریک مغناطیسی؛ تئوری الاستیسیته غیرمحلی.

Nonlinear Vibration Analysis of Fluid Conveying Microtube under Parametric Magnetic Excitation

R. Jahangiri A. Allahverdizadeh B. Dadashzadeh H. Azimzadeh

Abstract *In this research, effects of various system parameters on nonlinear response of transverse vibrations of beam-like fluid conveying microtube with fixed simply supported boundary conditions under axial magnetic parametric resonance condition is investigated. Reddy's first order shear deformation theory and Eringen nonlocal elasticity theory are used to derive microtube nonlinear equations of transverse motion considering nonlinear geometric terms of von-Karman. For fluid flow velocities more than flutter critical velocity, behavior of 2 DoF nonlinear system is studied under parametric magnetic resonance condition. By deriving nonlinear response curves, effects of various parameters including magnetic excitation amplitude, parameter of excitation frequency and nonlocal stress parameter on resonance amplitude is investigated and discussed.*

Key Words Nonlinear Vibrations, Fluid Conveying Microtube, Parametric Magnetic Resonance, Nonlocal Elastisity Theory

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱/۲۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۲/۲ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v31i1.80049

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، سلماس. r_jahangiri@tabrizu.ac.ir

(۲) استادیار، گروه مهندسی مکاترونیک، دانشگاه تبریز، تبریز

(۳) استادیار، گروه مهندسی مکاترونیک، دانشگاه تبریز، تبریز

(٤) کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، سلماس

مقدّمه

میکرو لوله‌ها به‌طور گسترده در مدارهای میکرو سیّالاتی، تجهیزات بیومکانیکی و سیستم‌های میکرو الکترو مکانیکی کاربرد دارند. لذا مدل‌سازی و تحلیل رفتار دینامیکی و پایداری میکرو لوله‌های حاوی سیّال تحت شرایط مرزی و نیروهای خارجی وارد شده به آنها حائز اهمّیّت است.

پایدوسیس و همکارانش [1] در تحقیقات خود با گسترش دادن تئوری‌ها و مفاهیم اصلی ناپایداری و رفتار ارتعاشی لوله‌های حاوی سیّال، اندرکنش بین سازه و سیّال را مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق دیگری پایدوسیس و همکاران [2] به بررسی و مطالعه تأثیر شرایط مرزی روی پایداری، فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی لوله‌های حامل سیّال پرداختند و نشان دادند که رفتار دینامیکی لوله‌های حامل سیّال مشابه رفتار دینامیکی سیستم‌هایی است که در آنها مؤلفه شتاب کریولیس از اندرکنش بین سیّال با مرز لوله به ایجاد می‌شود. سینها و همکاران [3] با تجزیه‌وتحلیل رفتار دینامیکی لوله‌های حامل سیّال نشان دادند که برای دستیابی به نتایج دقیق‌تر و معتبر بایستی اثر جرم خود سیّال جاری نیز در مدل‌سازی لحاظ گردد.

با توجّه به اهمّیّت و کاربردهای فراوان لوله‌های حاوی سیّال در ابعاد میکرو و نانو، انصاری و همکاران [4,5] در تحقیقات خود به بررسی رفتار ارتعاشی خطی و غیرخطی و پایداری دینامیکی نانو و میکرو لوله‌های حامل سیّال پرداختند. قاضوی و همکاران [6,7] با استفاده از تئوری کلاسیک الاستیسیته به بررسی تحریک پارامتریک میکرو تیر یکسرگیردار تحریک شده با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. در میکرو و نانو سازه‌ها اندازه سازه به دلیل تعاملات مولکولی پاسخ را تحت تأثیر قرار می‌دهد. ارینگن [8,9] یک تئوری پیشنهاد داده است که بر اساس آن مؤلفه‌های تنش در هر نقطهٔ تابعی از کرنش‌های تمام نقاط سازه هستند. لذا رابطهٔ تنش-کرنش به فاصلهٔ بین دو نقطهٔ وابسته است؛ بنابراین بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی، تنش تابعی از پارامتر مقیاس طول خواهد بود. لی و همکاران [10] رفتار دینامیکی نانو لوله‌های ویکوالاستیک میرا شونده غیر محلی را بررسی کردند. برای این منظور با استفاده از مدل ویسکوالاستیک کلوین- وویت، میرایی خارجی وابسته به سرعت و تئوری تیر تیموشنکو معادلات حاکم و شرایط مرزی برای بررسی ارتعاشات خمشی نانو تیر استخراج شده است. برخلاف سازه‌های محلی با لحاظ کردن اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی، تیر غیرمحلی دارای فرکانس‌های حداکثری بوده که فرکانس‌های مجانبی نامیده می‌شوند که برای تیرهای تیموشنکو غیر محلی میرا و نامیرا به‌دست‌آمده‌اند. کیانی ارتعاشات ایجاد شده توسط جریان [11] و آرانی و همکاران ارتعاشات تحت نیروی مغناطیسی [12] را برای بررسی و مطالعه ارتعاشات اجباری نانو لوله‌های حاوی سیّال بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی مد نظر قرار داده‌اند. صادقی و همکاران ناپایداری فلاتر نانولوله‌های کربنی یکسرگیردار حاوی سیّال تحت تأثیر میدان مغناطیسی طولی را جهت کاربرد در سیستم‌های بیولوژیکی و ابزارهای پزشکی نوظهور برای دارورسانی جهت درمان سرطان مورد مطالعه قرار داده‌اند [13].

بهاءالدّینی و حسینی [14] اثرات الاستیسیته غیر محلی و شرط لغزش را بر روی ارتعاشات آزاد و ناپایداری فلاتر نانو لوله‌های یکسر گیردار ویسکوالاستیک کربنی حامل سیّال بررسی نمودند. از روش همیلتون و تئوری تیر غیرمحلی اویلر برنولی برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. از روش گلرکین توسعه یافته برای گسسته سازی معادلات حاکم و مقادیر ویژه و سرعت‌های فلاتر بحرانی استفاده شده است. بهاءالدّینی و همکاران [15] ناپایداری‌های فلاتر و واگرای نانولوله پیزوالکتریکی گیردار حامل سیّال را بررسی کردند. در این مطالعه از تئوری الاستیسیته غیر محلی برای لحاظ کردن اثرات

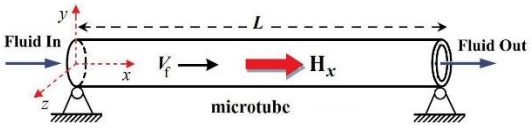
اندازه در محاسبات و همچنین تئوری تیر اویلر برنولی به همراه اثرات تنش سطحی استفاده کردند و تأثیرات ولتاژ پیزوالکتریک، اثرات سطح، پارامتر غیر محلی و شرایط مرزی را بر روی مرزهای واگرایی و فلاتر نانولوله مورد بحث قرار دادند.

یانگ و همکاران [16] ارتعاشات غیرخطی آزاد ایجاد شده توسط میکرو سیّالات را در میکرو لوله‌ها با استفاده از تئوری تنش کوپل شده به‌صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. سعادت‌نیا و اسماعیل‌زاده [17] روش اغتشاشات را برای مطالعه ارتعاشات هارمونیک غیرخطی نانو لوله‌های پیزوالکتریکی حامل سیّال با استفاده از تئوری کلاسیک الاستیسیته بکار بردند. یانگ و همکاران [18] با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، رفتار ارتعاشی لوله‌های ویسکو- الاستیک حامل سیّال را مورد مطالعه قرار دادند و نواحی پایداری رفتار دینامیکی را به ازای تغییرات پارامترهای مختلف مسئله تجزیه‌وتحلیل کردند.

با توجّه به پیشینه پژوهش، تاکنون مسئله ارتعاشات غیرخطی و غیرمحلی میکرو لولهٔ مغناطیس شونده حاوی سیّال تحت فلاتر و تحت شرایط تشدید پارامتریک مغناطیسی به‌صورت جامع مورد بررسی قرار نگرفته است. در این راستا ابتدا با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ اوّل با لحاظ کردن اثر جملات غیرخطی هندسی ون-کارمن و تئوری الاستیسیته غیرمحلی اریگن، به مدل‌سازی رفتار دینامیکی میکرو لوله حامل سیّال تحت تحریک پارامتریک مغناطیسی در آن‌سوی ناپایداری سیّال انگیخته فلاتر پرداخته می‌شود. با توجّه به اینکه هم‌زمانی تحریک پارامتریک مغناطیسی و جریان محوری سیّال با در نظر گرفتن اثر کوپلینگ مودهای ارتعاشی آن‌سوی سرعت بحرانی متناظر با آستانه فلاتر، تأثیر عمده بر رفتار غیرخطی میکرو لوله‌ها دارند، لذا با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و با در نظر گرفتن اثر کوپلینگ مودهای ارتعاشی به بررسی ارتعاشات غیرخطی میکرو لوله حاوی سیّال تحت شرایط رزونانس پارامتریک مغناطیسی پرداخته خواهد شد و اثرات پارامترهای مختلف اعم از دامنهٔ تحریک مغناطیسی، پارامتر تنظیم فرکانس و پارامتر غیرمحلی تنش روی دامنهٔ تشدید سیستم بررسی و مورد بحث قرار می‌گیرد.

مدل‌سازی

شماتیک میکرو لوله مغناطیس شونده حامل سیّال با سرعت V_f و به طول L، شعاع R و ضخامت h با شرایط مرزی ساده نامتحرک در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل «۱»: شماتیک میکرو لوله حامل سیّال

با به‌کارگیری میدان تغییر شکل به‌صورت:

$$U(x,z,t) = u(x,t) + z\phi_x(x,t)$$
$$W(x,z,t) = w(x,t) \qquad (۱)$$

که در آن u و w بیانگر مؤلفه‌های جابجایی محوری و جانبی نقاط واقع بر محور خنثی میکرو لوله مغناطیس شونده بوده و ϕ_x چرخش بردارهای نرمال بر مقطع عرضی حول محور y است. با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبهٔ اوّل ردی می‌توان اجزاء نیروی محوری N_x، گشتاور خمشی M_x و نیروی برشی مرتبهٔ اوّل Q_x مربوط به میکرو لوله تیرمانند را با انتگرال‌گیری روی مقاطع عرضی آن به‌صورت ماتریسی زیر استخراج کرد:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_m + B_{11}\varepsilon_b$$
$$M_x = B_{11}\varepsilon_m + D_{11}\varepsilon_b \qquad (۲)$$
$$Q_x = A_{55}\varepsilon_s$$

در رابطهٔ فوق $\varepsilon_m = \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ کرنش غشائی، $\varepsilon_b = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}$ کرنش خمشی و $\varepsilon_s = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}$ کرنش برشی مرتبهٔ اوّل می‌باشند. همچنین در روابط فوق A_{11}، B_{11} و D_{11} به ترتیب نشان‌دهندهٔ اعضای ماتریس‌های سختی محوری، کوپلینگ خمشی- محوری و کوپلینگ خمشی بوده و A_{55} نشان‌دهندهٔ اعضای ماتریس‌های سختی برشی میکرو لوله مغناطیس شونده است. با استفاده از مدل تیر ردی و اصل همیلتون، مجموع انرژی کرنشی ذخیره شده داخل میکرو لوله مغناطیس شونده ناشی از اعمال بارهای مکانیکی خارجی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta U dt = \int_{t_1}^{t_2}[\,(N_x.n)\delta u \\ +\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right).n\,\delta w + (Q_x.n)\delta w \\ +(M_x.n)\delta\phi_x]dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L[-\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w - \frac{\partial Q_x}{\partial x}\delta w - \frac{\partial M_x}{\partial x}\delta\phi_x \\ +Q_x\delta\phi_x]dxdt\end{aligned} \quad (۳)$$

در رابطهٔ فوق n نشان‌دهندهٔ بردار نرمال بر مرزهای محیطی سطح میانی میکرو لوله است. از طرف دیگر انرژی جنبشی ذخیره شده در میکرو لوله تیرمانند را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$T_{Microtube} = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)\left(\dot{U}^2 + \dot{W}^2\right)dz\,Rd\theta\,dx \quad (۴)$$

که در آن U و W مؤلفه‌های جابجایی محوری و جانبی نقاط داخل میکرو لوله هستند. با فرض اینکه $\vec{V} = V_x\boldsymbol{i} + V_z\boldsymbol{k}$ نشان‌دهندهٔ میدان سرعت نسبی مابین سیّال و میکرو لوله مغناطیس شونده باشد می‌توان مؤلفه‌های میدان سرعت داخل میکرو لوله را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}V_x(x,t) &= \dot{U} + V_f\cos\theta \\ V_z(x,t) &= \dot{W} - V_f\sin\theta\end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن $\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}$ زاویه محور لوله نسبت به راستای افقی در هر نقطهٔ و V_f نشان‌دهندهٔ سرعت اصلاح شدهٔ سیّال با استفاده از عدد نادسن است. ازاین‌رو، انرژی جنبشی جریان سیّال گذرنده از سطح مقطع عرضی A_f با سرعت V_f به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}T_{Fluid} = \frac{1}{2}\int_0^L\int_{A_f}\rho_f\,(\dot{U}^2 + \dot{W}^2 \\ +2\dot{U}V_f\cos\theta - 2\dot{W}V_f\sin\theta)dA_f dx\end{aligned} \quad (۶)$$

حال با به‌کارگیری روابط ماکسول و فرم محلی قوانین تعادل به استخراج نیروی لورنتز انگیخته شده توسط میدان مغناطیسی طولی می‌پردازیم. با فرض اینکه دامنهٔ میدان مغناطیسی نسبت به راستای طولی دارای توزیع یکنواخت است؛ با استفاده از تئوری کلاسیک الکترومغناطیس، کار مجازی انجام شده جانبی توسط میدان مغناطیسی طولی روی میکرو لوله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [19]:

$$\delta V_{Lorentz} = \int_0^L \eta A H_x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta w dx \quad (۷)$$

که در آن η ضریب نفوذپذیری میدان مغناطیسی و H_x دامنهٔ میدان مغناطیسی تحریک در راستای محور لوله است. کار مجازی انجام شده روی جریان سیّال ویسکوز توسط انحنای میکرولوله دربرگیرنده اثرات شتاب‌های مماسی و جانب مرکز سیّال است که با فرض ثابت بودن چگالی سیّال نسبت به مکان و زمان می‌توان با استفاده از معادلات ناویر استوکس آن را به‌صورت زیر استخراج نمود:

$$\begin{aligned}&\delta W_{Viscosity} \\ &= -\int_0^L\left(-\mu_e A_f\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} - \mu_e A_f V_f\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\sin\theta\right. \\ &\left.+\,\mu_e A_f V_f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\cos\theta\right)\delta U dz \\ &-\int_0^L\left(-\mu_e A_f\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} - \mu_e A_f V_f\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\cos\theta\right. \\ &\left.-\,\mu_e A_f V_f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\sin\theta\right)\delta W dz\end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن μ_e بیانگر ویسکوزیته مؤثر سیّال است.

کار مجازی انجام شده در سیستم شامل کار اثرات میدان مغناطیسی طولی و ویسکوزیته جریان سیّال داخل میکرو لوله است که با جایگذاری آن در اصل همیلتون:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt + \int_{t_1}^{t_2}(\delta W_{Lorentz}+\delta W_{Viscosity})dt = 0 \quad (۹)$$

و سپس با متحد صفر قرار دادن ضرایب δu، $\delta\phi_x$ و δw مربوط به انتگرال‌های سطحی و انتگرال‌های خطی، سه معادله دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی حاکم بر حرکات محوری u، دورانی ϕ_x و جانبی w نقاط واقع بر صفحهٔ میانی میکرو لوله حاوی سیّال تحت شرایط مرزی مورد نظر در حضور اثرات اینرسی‌های محوری، دورانی و عرضی استخراج می‌گردد.

تئوری الاستیسیته غیرموضعی که برای نخستین بار توسط ارینگن [9] پیشنهاد شد علاوه بر اجتناب از حل معادلات پیچیده، توانایی پیش‌بینی رفتار نانو و میکرو سازه‌ها را دارد. ازاین‌رو با به‌کارگیری مدل الاستیسیته غیرمحلی ارینگن:

$$\sigma_{xx}-e_0a^2\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}=Q_{11}\varepsilon_{xx}$$
$$\sigma_{xz}-e_0a^2\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial x^2}=Q_{55}\gamma_{xz} \quad (۱۰)$$

و با انجام عملیات ریاضی لازم معادلات حاکم بر حرکات محوری، جانبی و دورانی میکرو لوله مغناطیس شونده حاوی سیّال به شکل زیر دست آورد:

$$\begin{aligned}&A_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+A_{11}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\\&-\left(1-e_0a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[I_0\ddot{u}+I_1\ddot{\phi}_x\\&-V_fI_{0f}\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-V_f^2I_{0f}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\dot{V}_fI_{0f}\\&-\mu_eA_f\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}+\mu_eA_fV_f\frac{\partial^3w}{\partial x^3}\frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$+\mu_eA_fV_f\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^2]=0$$

$$\begin{aligned}&A_{55}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\&+\left(1-e_0a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)+I_0\ddot{w}\right.\\&-I_{0f}V_f\left(\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\dot{u}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\&-I_{1f}V_f\left(\frac{\partial\dot{\phi}_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\dot{\phi}_x\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\&+2I_{0f}V_f\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}-I_{0f}V_f\left(\dot{w}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\&-\mu_eA_f\frac{\partial^3w}{\partial x^2\partial t}-\mu_eA_fV_f\frac{\partial^3w}{\partial x^3}\\&+\mu_eA_fV_f\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x}+I_{0f}V_f^2\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\\&\left.+I_{0f}\dot{V}_f\frac{\partial w}{\partial x}+\eta AH_x^2\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\mu\dot{w}\right)=0\end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned}&B_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+D_{11}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\\&-A_{55}\left(\phi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\left(1-e_0L^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\\&\left(I_1\ddot{u}+I_2\ddot{\phi}_x\right)=0\end{aligned} \quad (۱۳)$$

از پارامترهای بی‌بعد زیر به منظور بی‌بعد سازی معادلات حاکم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\bar{u}=\frac{u}{L},\bar{x}=\frac{x}{L},\bar{w}=\frac{W}{h},e_n=\frac{e_0a}{L},\\&\eta=\frac{L}{R},\beta=\frac{h}{R},\rho_b=\frac{\rho_f}{\rho_t},f=\frac{A_f}{A_t},\\&V=\frac{V_f}{\omega^*L},\bar{t}=\omega^*t,\mu_{eb}=\mu\sqrt{\frac{L^4}{I_{0,t}D_{11}}},\\&H=H_x\sqrt{\frac{\eta_mL^4}{D_{11}}},\omega^*=\sqrt{\frac{D_{11}}{I_{0,t}L^4}}\end{aligned} \quad (۱۴)$$

در اینجا e_n مشخصهٔ بدون بعد غیرمحلی تنش، η و β نشان‌دهندهٔ مشخصهٔ نسبت‌های منظر بدون بعد میکرو لوله و ρ_b و f به ترتیب بیانگر چگالی بدون بعد و نسبت سطح مقطع گذر سیّال به سطح مقطع عرضی میکرو لوله مغناطیس شونده، V و μ_{eb} نیز به ترتیب

نشان‌دهندهٔ پارامتر مشخصّه بی‌بعد سرعت و ویسکوزیته بی‌بعد سیّال، ω^* فرکانس مرجع و H پارامتر بدون بعد میدان مغناطیسی اعمالی در راستای محور میکرو لوله مغناطیس شونده می‌باشند. به منظور سادگی از بالا نویس بار در پارامترهای بی‌بعد شده صرف‌نظر می‌شود. با توجّه به شکل (۱) فرض می‌کنیم که شرایط مرزی تکیه‌گاهی حاکم بر حرکات طولی و جانبی لبه‌های ابتدائی و انتهائی میکرو لوله تیرمانند از نوع ساده نامتحرک به‌صورت زیر است:

$$x = 0, L: \ u = w = M_x = 0 \qquad (۱۵)$$

تحقیقات انجام‌گرفته در زمینهٔ آنالیز دینامیکی تیرها نشان داده است که تأثیر شکل مودهای مربوط به فرکانس‌های پائین بسیار چشمگیرتر و غالب بر اثرات شکل مودهای متناظر با فرکانس‌های بالا می‌باشند [20]. لذا برای مطالعه و بررسی تغییر شکل‌های دینامیکی جانبی و غیرخطی تیرها و صفحات می‌توان در روش گالرکین از چند شکل مود قابل‌قبول که شرایط مرزی تکیه‌گاهی مربوط به لبه‌های تیر و یا صفحه را ارضاء می کنند؛ استفاده کرد و معادلات تعادل دینامیکی کوپل شده دیفرانسیلی با مشتقات جزئی را به فرم معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل نمود. ازاین‌رو می توان تابع تغییر مکان جانبی استاتیکی نقاط روی میکرو لوله مغناطیس شونده را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{M} w_m(t)\phi_m(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m(t)\sin m\pi x \qquad (۱۶)$$

در اینجا M نشان‌دهندهٔ تعداد نیم موج‌ها در جهت محور x است و $w_m(t)$ نشان‌دهندهٔ دامنهٔ وابسته به زمان در مود mام است. معادلات حاکم بر حرکت (۱۳-۱۱) دربرگیرنده دستگاه معادلات کوپل‌شده غیرخطی بوده می‌توان همانند مراجع [21,22] و با چشم‌پوشی از اثرات اینرسی، حل تقریبی مؤلفه‌های جابجایی محوری و دورانی میکرو لوله مغناطیس شونده با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده نامتحرک (۱۵) را به‌صورت تابعی از دامنهٔ عرضی این شکل مودها به فرم زیر بیان کرد:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{M} U_m(t)\sin m\pi x$$
$$\phi_x(x,t) = \sum_{m=1}^{M} \Phi_{x_m}(t)\cos m\pi x \qquad (۱۷)$$

که در اینجا، توابع زمانی $U_m(t)$ و $\Phi_{x_m}(t)$ نشان‌دهندهٔ دامنهٔ زمانی تغییر شکل‌های محوری و دورانی متناظر با هر یک از شکل مودهای محوری و دورانی می‌باشند. با صرف‌نظر از اثر اینرسی‌های محوری و دورانی و با جایگذاری $u(x,t)$ و $\phi_x(x,t)$ از رابطهٔ (۱۷) در معادلات (۱۲ و ۱۳) حاکم و سپس با اعمال روش گالرکین، می‌توان $U_m(t)$ و $\Phi_{x_m}(t)$ را بر حسب دامنهٔ زمانی جابجایی‌های جانبی میکرو لوله به دست آورد. در ادامه با استفاده از دو شکل مود ارتعاشی اوّل میکرو لوله در تقریب میدان جابجایی‌های جانبی و با جایگذاری روابط (۱۷) در معادله حاکم بر حرکات جانبی (۱۳) و سپس با اعمال روش گالرکین، می‌توان معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکات جانبی میکرو لوله حاوی سیّال در حضور تحریک مغناطیسی محوری با دامنهٔ هارمونیک را به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}&\ddot{w}_1 + a_1\mu_{eb}\dot{w}_1 + a_2V\dot{w}_2 \\ &+\left(\omega_1^2 + a_3H^2(t)\right)w_1 + a_4\mu_{eb}Vw_2 + h_1^{NL} \\ &= 0 \\ &\ddot{w}_2 + b_1\mu_{eb}\dot{w}_2 + b_3Vw_1 \\ &+\left(\omega_2^2 + b_4H^2(t)\right)w_2 + h_2^{NL} = 0\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن ω_1 و ω_2 نشان‌دهندهٔ فرکانس‌های طبیعی میکرو لوله با دخالت دادن اثرات سرعت جریان، تحریک مغناطیسی متناظر با هرکدام از درجات آزادی سیستم می‌باشند. معادلات (۱۸) دربرگیرنده جملات

تحریک پارامتریک مغناطیسی و توابع غیرخطی $h_i^{NL} = h_i(w_1, w_2)$ شامل جملات غیرخطی مرتبهٔ دوم و سوم از دامنهٔ تغییر مکان‌های جانبی دو شکل مود انتخابی و حاصل‌ضرب‌های آنها می‌باشند.

بررسی تأثیر پارامتر مشخصّهٔ غیرمحلی تنش روی سرعت آستانه فلاتر

با استفاده از دو شکل مود قابل‌قبول برای تخمین تغییر مکان‌های جانبی میکرو لوله به‌صورت:

$$w(x,t) = w_1(t)\sin\pi x + w_2(t)\sin 2\pi x \qquad (۱۹)$$

و با نادیده گرفتن اثر جملات غیرخطی در (۱۸) و با صرف‌نظر کردن از اینرسی‌های $\ddot{u}$ و $\ddot{\phi}$ جابجایی‌های محوری و دورانی می‌توان حل تقریبی جابجایی‌های محوری و دورانی را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U_1(t)\sin\pi x + U_2(t)\sin 2\pi x \\ \phi_x(x,t) &= \Phi_{x_1}(t)\cos\pi x + \Phi_{x_2}(t)\cos 2\pi x \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} U_1(t) &= C_1 V\mu_{eb} w_1(t)^2 + C_2 V^2 w_1(t)w_2(t) + \\ &\quad C_3 V\mu_{eb} w_2(t)^2 + C_4 V w_2(t)\dot{w}_2(t) + C_5 w_1(t)w_2(t) \\ U_2(t) &= D_1 w_1(t)^2 + D_2 V\mu_{eb} w_1(t)w_2(t) \\ \Phi_{x_1}(t) &= E_1 w_1(t) \\ \Phi_{x_2}(t) &= F_1 w_2(t) \end{aligned}$$

در اینجا C_1، C_2، C_3، C_4، C_5، D_1، D_2، E_1 و F_1 ضرایب ثابت می‌باشند. در ادامه با جایگذاری حل تقریبی $u(x,t)$ و $\phi_x(x,t)$ از (۲۰) در معادلات حاکم بر حرکات جانبی و با اعمال مجدد روش گالرکین، می توان معادلات خطی حاکم بر تغییر مکان های جانبی میکرو لوله را بر حسب دامنهٔ شکل مودهای جانبی ارتعاشی به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} &\ddot{w}_1 + a_1\mu_{eb}\dot{w}_1 + a_2 V\dot{w}_2 \\ &+\left(\omega_1^2 + a_3 H^2(t)\right)w_1 + a_4\mu_{eb} V w_2 = 0 \\ &\ddot{w}_2 + b_1\mu_{eb}\dot{w}_2 + b_3 V w_1 \\ &+\left(\omega_2^2 + b_4 H^2(t)\right)w_2 = 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

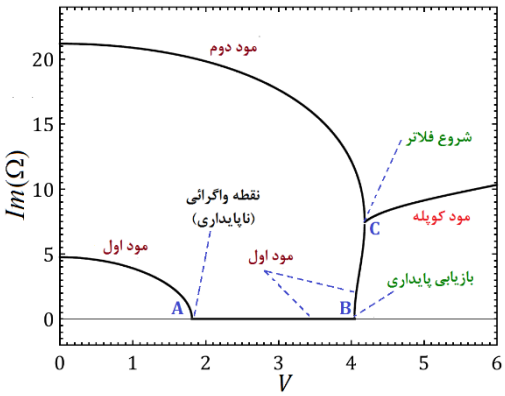
با جایگذاری حل همگن خطی هارمونیک $\boldsymbol{w}(t) = \{\boldsymbol{w}\}e^{-i\omega t}$ که در آن $\{\boldsymbol{w}\} = \{w_1, w_2\}$ است؛ برای تغییر مکان‌های جانبی در (۲۱) می‌توان معادلات فلاتر خطی میکرو لوله دربرگیرندهٔ اثرات میدان مغناطیسی، سرعت جریان و ویسکوزیته جریان را به‌صورت زیر استخراج کرد:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &a_{11} = \omega_1^2 + a_3 H^2 + a_1\mu_{eb} i\omega - \omega^2 \\ &a_{12} = a_2 V i\omega + a_4\mu_{eb} V \\ &a_{21} = b_3 V \\ &a_{22} = \omega_2^2 + b_4 H^2 + b_1\mu_{eb} i\omega - \omega^2 \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

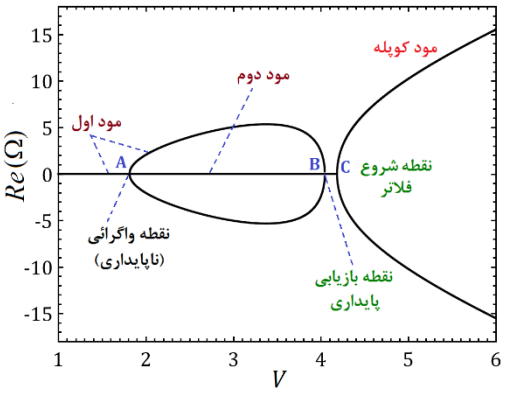
با حل مسئله، مقدار ویژه متناظر با (۲۲) مشخصات فلاتر خطی با تغییرات سرعت جریان به دست می‌آید. لذا با در نظر گرفتن مقادیر عددی کمیّت‌های بدون بعد ویسکوزیته مؤثر سیّال $\mu_{eb} = 0$، نسبت ابعاد میکرولوله $\beta = 0.096$ و $\eta = 100$، پارامتر مقیاس طول $e_n = 0.00282$ [23]، تحریک مغناطیسی $H = 200$، چگالی بدون بعد $\rho_b = 0.435$ و نسبت سطح مقطع گذر سیّال به سطح مقطع عرضی میکرو لوله مغناطیس شونده $f = 5.205$، معادلهٔ مشخصّهٔ متناظر با (۲۲) حل گردید و در شکل‌های (۲ و ۳) منحنی‌های تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه (فرکانس‌های طبیعی) Ω_1 و Ω_2 مربوط به شکل مودهای ارتعاشی اوّل و دوم میکرو لوله مغناطیس شونده بر حسب سرعت جریان نشان داده شده است. با توجّه به شکل (۲)، با افزایش سرعت جریان، منحنی مشخصّهٔ مربوط به مود اوّل به سمت مقدار صفر متناظر با سرعت $V_A \simeq 1.815$ نزدیک می‌شود به‌طوری‌که در این نقطهٔ به سبب دوشاخگی منحنی مشخصّه $Re(\Omega_1)$ در شکل (۳)،

سیستم دچار ناپایداری واگرایی می‌شود. حال‌آنکه در این سرعت مودهای بالاتر پایدار باقی می‌مانند. از نقطهٔ نظر فیزیکی می‌توان گفت که مود اوّل در مقادیر بالاتر از سرعت V_A دچار ناپایداری از نوع واگرایی می‌شود. در بازهٔ $V_A \le V \le V_B$ میکرو لوله هم‌زمان با جذب انرژی سیّال و با تمایل به حفظ پایداری خود، انرژی جذب شده را به‌منظور تحریک شکل مودهای بالاتر بکار می‌گیرد.

مطابق شکل (۲) با افزایش سرعت از مقدار V_A به سمت مقادیر بالاتر در بازه $V_A \le V \le V_B$ بخش موهومی مود اوّل تا مقداری از سرعت که در آن مقدار هر دو بخش حقیقی $Re(\Omega_1)$ (مثبت و منفی) غیر صفر می‌باشند، در مقدار صفر باقی می‌ماند درحالی‌که مود دوم در سرعت‌های پایین‌تر از سرعت V_B پایدار است. در سرعت V_B و سرعت‌های بالاتر، مود دوم نیز دچار ناپایداری واگرایی می‌گردد. ازاین‌رو مطابق شکل (۲)، سرعت‌های $V_A \simeq 1.815$ و $V_B \simeq 4.045$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ سرعت‌های متناظر با وقوع ناپایداری واگرایی مودهای اوّل و دوم می‌باشند. قسمت حقیقی $Re(\Omega_1)$ و $Re(\Omega_2)$ در بازهٔ سرعت $V_B \le V \le V_C$ صفر است (شکل ۳). در سرعت‌های $V \le V_C$، مقادیر ویژه مربوط به مودهای اوّل و دوم مجزا هستند اما با افزایش سرعت جریان از V_C به سمت سرعت‌های بالاتر، قسمت‌های موهومی مقادیر ویژه مودهای اوّل و دوم $Im(\Omega_1)$ و $Im(\Omega_2)$ با هم یکی شده و از مقدار صفر به سمت مقادیر مثبت افزایش می‌یابد، درحالی‌که قسمت‌های حقیقی آنها به سمت مقادیر غیر صفر مثبت و منفی دو شاخه می‌شوند. به‌عبارت‌دیگر، در سرعت‌های بالاتر از مقدار V_C مودهای طبیعی اوّل و دوم به‌صورت کامل به هم‌آمیخته شده و یک شکل مود کوپله شده ناپایدار را تشکیل می‌دهند که نشان‌دهندهٔ ناپایداری فلاتر است. سرعتی که در آن ترکیب (انعقاد) شکل مودهای اوّل و دوم رخ می‌دهد، سرعت بحرانی آستانه فلاتر نامیده می‌شود. بنابراین در محدودهٔ سرعت‌های $V_C > V_B$ به علت کوپلینگ مودهای اوّل و دوم و به‌تبع آن بروز پدیده فلاتر، دینامیک حاکم بر نوسانات سیّال انگیخته میکرو لوله با دو درجهٔ آزادی دارای فرکانس‌های طبیعی تکراری خواهد بود.



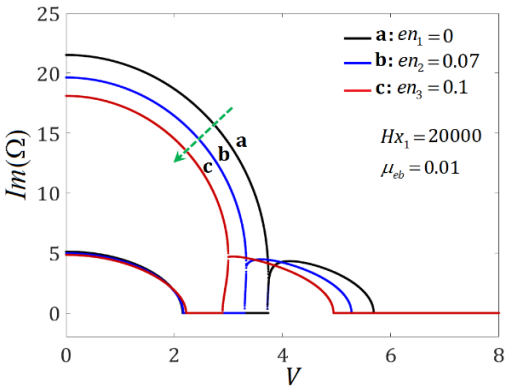
شکل«۲»: تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت بدون بعد سیّال تحت شرط مرزی ساده نامتحرک



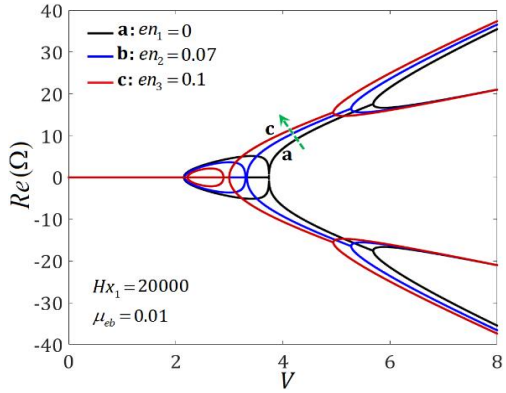
شکل «۳»: تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه شکل مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت بدون بعد تحت شرط مرزی ساده نامتحرک

شکل‌های (٤ و ٥) به ترتیب نشان‌دهندهٔ منحنی‌های تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه متناظر با مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت جریان سیّال برای مقدار خاصی از ویسکوزیته سیّال $\mu_{eb} = 0.01$ می‌باشند. با توجّه به این شکل‌ها پیداست افزایش پارامتر مشخصّه غیرمحلی تنش یا پارامتر مشخصّه مقیاس (en)، تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای روی

سرعت بحرانی مربوط به واگرائی شکل مود قابل‌قبول ندارد اما سبب می‌شود ناپایداری مربوط به مود دوم ارتعاشی در مقادیر پایین‌تر از سرعت جریان اتفاق بیفتد. به‌عبارت‌دیگر، افزایش دامنهٔ تحریک مغناطیسی سبب تعجیل در شروع ناپایداری مربوط به شکل مود دوم می‌گردد. همچنین با توجّه به این شکل‌ها مشاهده می‌شود که افزایش این پارامتر اثر ناپایدار ساز داشته و سبب می‌شود که ناپایداری فلاتر حاصل از کوپلینگ شکل مودها در مقادیر پایین‌تر از سرعت جریان اتفاق بیفتد. از طرف دیگر، در سرعت‌های بالاتر از سرعت کوپلینگ یا فلاتر مودها با افزایش این پارامتر، ناپایداری مود ترکیبی (متناظر با مود فلاتر) نیز به‌تعجیل افتاده و در سرعت‌های پائین‌تر اتفاق می‌افتد.

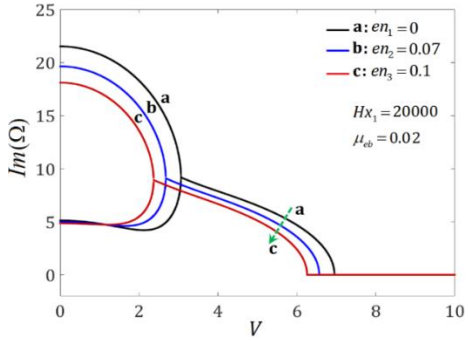


شکل «٤»: تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت جریان برای سه مقدار مختلف از پارامتر غیرمحلی تنش

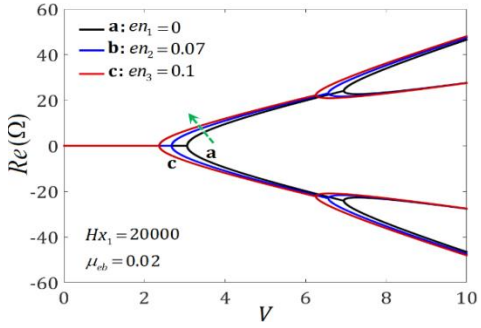


شکل «٥»: تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه شکل مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت جریان برای سه مقدار مختلف از پارامتر غیرمحلی تنش

شکل‌های (٦ و ٧) نشان‌دهندهٔ منحنی‌های تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه متناظر با مود های اوّل و دوم بر حسب سرعت جریان سیّال برای $\mu_{eb}=0.02$ می‌باشند. با توجّه به این شکل‌ها نیز دیده می‌شود به علّت بزرگ بودن ویسکوزیته سیّال و به‌تبع آن میرایی سیستم (در مقایسه با حالت قبل) هیچ‌کدام از شکل مودها قبل از فلاتر دچار ناپایداری نمی‌شوند. علاوه بر این با افزایش ویسکوزیته از درجهٔ ناپایداری سیستم کاسته و محدوده فلاتر (سیکل حدی نوسانی پایدار با مود ترکیبی) را در مقایسه با ناپایداری محض بهبود می‌یابد. از طرف دیگر پیداست که پارامتر مشخصّه غیرمحلی تنش اثر ناپایدار کننده داشته و با افزایش آن، سرعت شروع ناپایداری فلاتر (سرعت ترکیب مودهای اوّل و دوم) و واگرائی مود ترکیبی به‌تعجیل افتاده و در سرعت‌های پائین تر اتفاق می‌افتد.

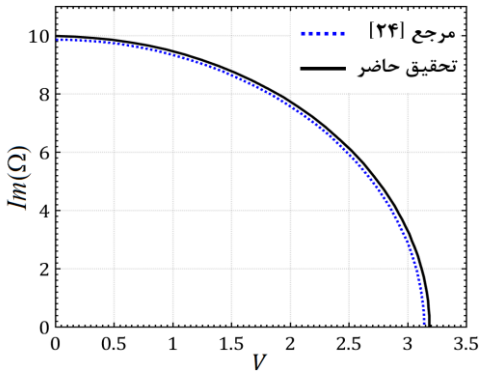


شکل «٦»: تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت جریان برای سه مقدار مختلف از پارامتر غیرمحلی تنش



شکل «٧»: تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه مودهای اوّل و دوم بر حسب سرعت جریان برای سه مقدار مختلف از پارامتر غیرمحلی تنش

اعتبارسنجی. به منظور مقایسه و اعتبارسنجی مدل ارائه شده در تحقیق اخیر، همانند مرجع [24] و در غیاب اثر تحریک پیزوالکتریک، فلاتر خطی و غیرمحلی میکرو لوله حاوی سیّال (با مدل تیر کلاسیک غیرمحلی) در حضور جریان محوری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور با فرض شرایط مرزی تکیه‌گاهی دوسرگیردار حاکم بر ابتدا و انتهای میکرو لوله، منحنی های تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد مربوط به شکل مود خمشی اوّل ارتعاشی میکرو لوله بر حسب سرعت جریان و متناظر با ولتاژ بدون بعد $V_{dc}=0$ استخراج گردید و مطابق شکل (۸) نتایج مدل عددی حاضر با نتایج مرجع [24] مورد مقایسه قرار گرفت. با توجّه به این شکل می توان دریافت که سازگاری و تطابق خوبی مابین نتایج دیده می‌شود.



شکل «۸»: صحت سنجی نتایج تحقیق حاضر در مقایسه با نتایج مرجع [24] برای تغییرات فرکانس طبیعی شکل مود قابل‌قبول بر حسب تغییرات سرعت

تحلیل غیرخطی مسئله و مطالعه کمی پایداری

برای تحلیل رفتار غیرخطی میکرو لوله مغناطیس شونده حاوی سیّال تحت تحریک پارامتریک مغناطیسی در شکل مود قابل‌قبول ارتعاشی، با فرض $w(x,t)=w_1(t)sin\pi x$ با استفاده از اوّلین معادله از معادلات دیفرانسیل (۱۸)، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکات جانبی میکرو لوله در شکل مود ارتعاشی اوّل در حضور تحریک مغناطیسی محوری $H(t)=Hcos\frac{\Omega t}{2}$ قابل استخراج است که دربرگیرنده اثرات میدان مغناطیسی محوری و اثرات غیرخطی حرکات جانبی میکرو لوله است. با فرض اینکه دامنهٔ جمله هارمونیک مغناطیسی (H)، میرایی ناشی از ویسکوزیته سیّال و جملات غیرخطی در مقایسه با جملات خطی از مرتبهٔ پایین‌تر هستند می‌توان با وارد کردن پارامتر کوچک و بدون بعد ε که نشان‌دهندهٔ مرتبهٔ دامنهٔ حرکات جانبی میکرو لوله است و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و روابط مثلثاتی، معادله مذکور را به شکل زیر نوشت:

$$\ddot{w}_1+\omega_1^2 w_1=-\varepsilon\lambda_1\mu_{eb}\dot{w}_1-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_2H^2 -\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_2H^2\cos\frac{\Omega t}{2}-\varepsilon\lambda_3w_1^3-\varepsilon\lambda_4k_3w_1^3 \quad (۲۳)$$

می‌توان برای سادگی و آنالیز رفتار غیرخطی ورای ناپایداری فلاتر $(\lambda>\lambda_{cr})$ توأم با تشدید پارامتریک مغناطیسی از دو شکل مود قابل‌قبول $(m=1,2)$ در جهت جریان و اوّلین شکل مود $(n=1)$ در جهت عمود بر جریان برای تقریب تغییر مکان‌های عرضی میکرو لوله استفاده کرده و معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم را به‌صورت زیر تقلیل داد [25,26]:

$$\begin{aligned}&\ddot{w}_1+\omega_1^2w_1+\alpha_{12}\lambda w_2+g_a\dot{w}_1\\&+\eta_{11}Hw_1\cos\Omega t+g_{11}w_1^3+g_{12}w_1w_2^2\\&=0\\&\ddot{w}_2+\omega_2^2w_2+\alpha_{21}\lambda w_1+g_a\dot{w}_2\\&+\eta_{22}Hw_2\cos\Omega t+g_{21}w_1^2w_2+g_{22}w_2^3\\&=0\end{aligned} \quad (۲٤)$$

در معادلات اخیر $w_1(t)$ و $w_2(t)$ نشان‌دهندهٔ دامنه‌های ارتعاشی وابسته به زمان میکرو لوله در شکل مود (1,1) و (2,1) می‌باشند اگر جملات غیرخطی و جملات غیر خودگردان موجود در (۲٤)، در مقایسه با جملات خطی کوچک فرض شوند؛ سیستم به یک سیستم غیر خودگردان با جملات غیرخطی ضعیف تبدیل می‌گردد. می‌توان برای به دست آوردن حل تقریبی این معادلات از روش اغتشاشات استفاده کرد. با توجّه به اینکه در برخی از مسائل تأثیر و اهمّیّت

جملات غیرخطی، میرایی و تحریک پارامتریک می‌تواند نسبت به هم متفاوت باشد؛ لذا می‌توان با وارد کردن پارامتر کوچک و بدون بعد ε که به‌نوعی نشان‌دهندهٔ مرتبهٔ دامنهٔ حرکات جانبی است، مرتبهٔ بزرگی جملات موجود در مدل غیرخطی (۲٤) را در مقایسه با هم متفاوت و به ترتیب به‌صورت ε^{β_N}، $\varepsilon^{\beta_{ga}}$ و ε^{β_F} در نظر گرفت. با در نظر گرفتن فرضیّات فوق می‌توان معادلات (۲٤) را به شکل ماتریسی زیر بیان کرد:

$$[I]\{\ddot{w}\}+[A]\{w\}+\varepsilon^{\beta_{ga}}[g_a]\{\dot{w}\} +\varepsilon^{\beta_F}H\cos\Omega t\,[\eta]\{w\}+\varepsilon^{\beta_N}[\Gamma]\{w\}=0 \quad (۲۵)$$

که در آن $[\eta]$ ماتریس ضرایب نیروی محوری، $[g_a]$ ماتریس ضرایب میرایی ناشی از اثر ویسکوزیته جریان و $[\Gamma]$ ماتریسی است که عناصر آن توابعی مرتبهٔ دوم از w_1 و w_2 می‌باشند:

$$[A]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}0 & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & 0\end{bmatrix},\quad [\eta]=\begin{bmatrix}\tilde{\eta}_{11} & 0\\ 0 & \tilde{\eta}_{22}\end{bmatrix},\ [g_a]=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{a11} & 0\\ 0 & \tilde{g}_{a22}\end{bmatrix},\quad [\Gamma]=\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}_{11}w_1^2 & \tilde{\Gamma}_{12}w_2^2\\ \tilde{\Gamma}_{21}w_1^2 & \tilde{\Gamma}_{22}w_2^2\end{bmatrix} \quad (۲٦\text{-الف})$$

که در آن،

$$\tilde{\eta}_{ij}=\varepsilon^{-\beta_F}\eta_{ij},\ \tilde{g}_{aij}=\varepsilon^{-\beta_{ga}}g_{aij},\ \tilde{\Gamma}_{ij}=\varepsilon^{-\beta_N}\Gamma_{ij} \quad (۲٦\text{-ب})$$

برای بررسی رفتار غیرخطی میکرو لوله ورای فلاتر (ناپایداری سیّال انگیخته) و در نزدیکی فشار دینامیکی بحرانی، رابطهٔ اغتشاشی به‌صورت $\lambda=\lambda_{cr}+\Lambda\varepsilon^{\beta_\Lambda}$ بیان می‌شود که در آن Λ نشان‌دهندهٔ پارامتر تنظیم فشار دینامیکی (فشار دینامیکی اغتشاشی) و ε^{β_N} بیانگر مرتبهٔ جمله جریان است. با استفاده از این فرض خواهیم داشت:

$$[A]=[A_{cr}]+(\lambda-\lambda_{cr})[\alpha_{nm}] =[A_{cr}]+\Lambda\varepsilon^{\beta_\Lambda}[\alpha_{nm}] \quad (۲۷\text{-الف})$$

که در آن،

$$[A_{cr}]=[\omega_n^2]+\lambda_{cr}[\alpha_{nm}] \quad (۲۷\text{-ب})$$

در آستانهٔ فلاتر (به ازای فشار دینامیکی بحرانی λ_{cr}) مقادیر ویژه ماتریس ضرایب سیستم خطی با کوپلینگ ناشی از ویسکوزیته جریان، تکراری می‌شوند که در این حالت با استفاده از تبدیل همانندی مستخرج از بردارهای ویژه نرمالیزه ماتریس $[A_{cr}]$ به‌صورت $\{w\}=[Z]\{u\}$ می‌توان ماتریس $[A_{cr}]$ را به فرم کانونیکال جردن تبدیل کرده و معادلهٔ ماتریسی (۲۵) را به شکل زیر نوشت:

$$[I]\{\ddot{u}\}+[J_c]\{u\}+\varepsilon^{\beta_\Lambda}\Lambda[\hat{\alpha}]\{u\} +\varepsilon^{\beta_{ga}}[\hat{g}_a]\{\dot{u}\}+\varepsilon^{\beta_F}H\cos\Omega t\,[\hat{\eta}]\{u\} +\varepsilon^{\beta_N}[\hat{\Gamma}]\{u\}=0 \quad (۲۸\text{- الف})$$

که در آن،

$$[\hat{\alpha}]=[Z]^{-1}[\alpha][Z],\ [\hat{g}_a]=[Z]^{-1}[\tilde{g}_a][Z],\ [\hat{\Gamma}]=[Z]^{-1}[\tilde{\Gamma}][Z],\ [\hat{\eta}]=[Z]^{-1}[\tilde{\eta}][Z] \quad (۲۸\text{-ب})$$

هنگامی‌که فرکانس تحریک نیروی درون صفحه‌ای Ω در محدوده دو برابر اوّلین فرکانس طبیعی تکراری سیستم ω باشد، کوچک‌ترین تغییر در پارامترهای سیستم می‌تواند منجر به وجود آمدن پاسخ‌هایی با دامنه‌هایی بسیار بزرگ شود. لذا جهت بررسی و مطالعه رفتار غیرخطی سیستم هنگام رزونانس پارامتریک، با وارد کردن پارامتر تنظیم‌کننده σ می‌توان رابطهٔ تشدید پارامتریک فرکانس را به‌صورت $\Omega=2\omega+\sigma\varepsilon^{\beta}$ بیان کرد. β پارامتری است که بایستی تعیین شود. حل تقریبی و مرتبهٔ اوّل معادله (۲۸-الف) را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$u_n(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-\beta_n}\left(u_{n_0}(T_0,T_1)+\varepsilon^{\beta_0}u_{n_1}(T_0,T_1)+\ldots\right),\quad T_n=\varepsilon^{n\beta_0}t,\ n=0,1 \quad (۲۹)$$

با انجام یک سِری عملیات ریاضی و ساده‌سازی‌ها معادلات پاسخ سیستم در شرایط ماندگار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&2\omega_1\hat{g}_a a_1+\hat{\eta}_{12}F_x a_2\sin\gamma_2\\&+\left(\frac{3}{4}\hat{\Gamma}_{1222}a_2^3+\Lambda\hat{\alpha}_{12}a_2\right)\sin\gamma_1=0\\&2\omega_1\hat{g}_a a_2+a_1\sin\gamma_1=0\\&\sigma\omega_1 a_1+\hat{\eta}_{12}F_x a_2\cos\gamma_2\\&+\left(\frac{3}{4}\hat{\Gamma}_{1222}a_2^3+\Lambda\hat{\alpha}_{12}a_2\right)\cos\gamma_1=0\\&\sigma\omega_1 a_2+a_1\cos\gamma_1=0\end{aligned}\qquad(۳۰)$$

که در آن، $\gamma_1=\theta_1-\theta_2$ و $\gamma_2=\sigma T_1-\theta_1-\theta_2$ است. با حل معادلات اخیر می‌توان حل‌های بدیهی/ غیر بدیهی سیستم در شرایط ماندگار را به دست آورد.

برای بررسی پایداری حل‌های ماندگار غیر بدیهی، فرض می‌کنیم که a_1^s، a_2^s، γ_1^s و γ_2^s به ترتیب نشان‌دهندهٔ حل‌های غیر بدیهی معادلات (۳۰) در شرایط ماندگار برای دامنهٔ و فاز سیستم در شکل مود های اوّل و دوم ارتعاشی باشند. ازاین‌رو، می‌توان حل کلی را به‌صورت مجموع حل‌های پایا و اغتشاشی به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}a_1(t)&=a_1^s+C_1e^{rt}\\a_2(t)&=a_2^s+C_2e^{rt}\\\gamma_1(t)&=\gamma_1^s+C_3e^{rt}\\\gamma_2(t)&=\gamma_2^s+C_4e^{rt}\end{aligned}\qquad(۳۱)$$

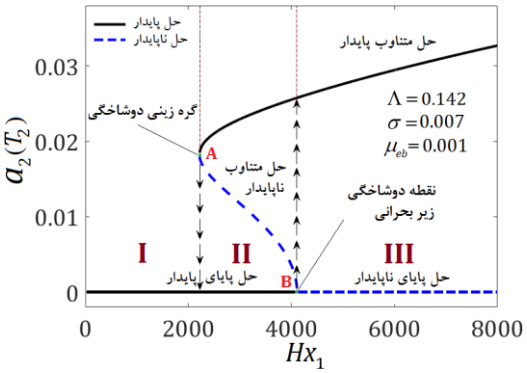
که در آن $C_ie^{rt}(t)$ بیانگر اغتشاشات جزئی نسبت به وضعیت پایا است. با استفاده از روابط (۳۱) و معادلات (۳۰) معادله مشخصّه زیر که توصیف‌کننده وضعیت پایداری یا ناپایداری حل‌های اغتشاشی است، به دست می‌آید:

$$\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4=0\qquad(۳۲)$$

مطابق معیار راث-هوریتز اگر به‌صورت هم‌زمان، بخش حقیقی تمامی ریشه‌های معادله (۳۲) که نشانگر مقادیر ویژه ماتریس ضرایب سیستم خطی شده است؛ منفی باشند، حل غیر بدیهی سیستم پایدار خواهد بود [27].

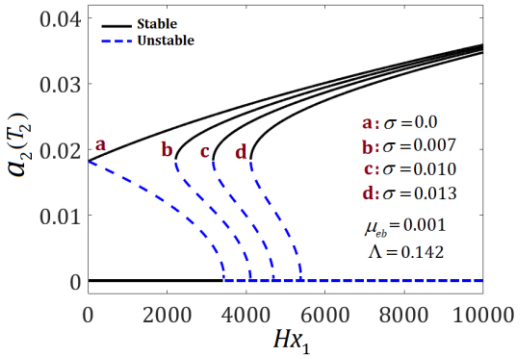
تحلیل تشدید پارامتریک مغناطیسی. در این قسمت به بررسی عددی رفتار میکرو لوله که به‌صورت هم‌زمان تحت تحریک مغناطیسی پارامتریک (در محدوده اوّلین فرکانس طبیعی) و در حضور جریان محوری سیّال پرداخته می‌شود. در این راستا با فرض $\mu_{eb}=0.001$ و $\sigma=0.001$ در شکل (۹) تغییرات دامنهٔ تشدید میکرو لوله با نسبت ابعاد $\eta=L/R=100$ و $\beta=h/R=0.1$ بر حسب دامنهٔ ترم هارمونیک تحریک مغناطیسی H_{x_1} بعد از نقطهٔ شروع فلاتر (متناظر با سرعت بحرانی V_{cr}) با سرعت اغتشاشی $\Lambda=0.142$ نشان داده شده است. مطابق این شکل، منحنی‌های مشخصّه دامنهٔ تشدید دربرگیرنده حل‌های بدیهی (صفر) و غیر بدیهی (غیر صفر) است. در این شکل منحنی‌های پیوسته بیانگر حل پایدار و منحنی‌های منقطع بیانگر حل ناپایدار هستند. در ناحیهٔ I اثر ویسکوزیته جریان سیّال که نقش میرایی سیستم را دارا است غالب بر اثر دامنهٔ تحریک مغناطیسی است و در این ناحیهٔ فقط یک حل صفر بدیهی پایدار برای دامنهٔ تشدید وجود دارد و بیان‌کنندهٔ این واقعیت است که در این ناحیهٔ تشدید میکرو لوله تحریک نخواهد شد. با افزایش دامنهٔ نیروی تحریک بدون بعد، اوّلین گره زینی دوشاخگی (Saddle-Node Hopf bifurcation) یعنی نقطهٔ A ظاهر می‌شود. بعد از گذر از این نقطهٔ و در ناحیهٔ II با توجّه به تعامل بین اثرات جمله میرایی ناشی از ویسکوزیته و تحریک مغناطیسی، ابتدا یک حل غیر بدیهی غیر صفر پریودیک ناپایدار (سیکل حدی نوسانی ناپایدار) و یک حل غیر بدیهی غیر صفر پریودیک پایدار (سیکل حدی نوسانی پایدار) برای دامنهٔ تشدید a_2 وجود دارد. در ادامه و با افزایش دامنهٔ نیروی تحریک حل ناپایدار از بین رفته و دومین نقطهٔ دوشاخگی از نوع زیر بحرانی (نقطهٔ B)

نیز ظاهر می‌شود. بعد از گذر از نقطهٔ دوشاخگی دوم، سیستم فقط دارای یک حل غیر بدیهی پایدار متناظر با وجود سیکل حدی نوسانی پایدار خواهد بود (ناحیهٔ III) که بیانگر این واقعیت است که در ناحیهٔ III اثر دامنهٔ ترم هارمونیک تحریک مغناطیس غالب بر اثر ویسکوزیته بوده و همواره یک حل پریودیک غیر بدیهی غیر صفر پایدار وجود داشته و تشدید میکرو لوله اتفاق می‌افتد. با توجّه به شکل (۹)، در نقاط A و B پدیده جهش دامنهٔ اتفاق می‌افتد به‌نحوی‌که در مقادیر دامنهٔ تحریک متناظر با این جهش‌ها، پاسخ‌های سیستم به ترتیب از حل‌های غیر بدیهی پریودیک و بدیهی صفر سریعاً به سمت حل‌های بدیهی صفر و غیر بدیهی پریودیک جذب می‌شوند.



شکل «۹»: منحنی‌های تغییرات دامنهٔ تشدید بر حسب پارامتر دامنهٔ تحریک مغناطیسی میکرو لوله

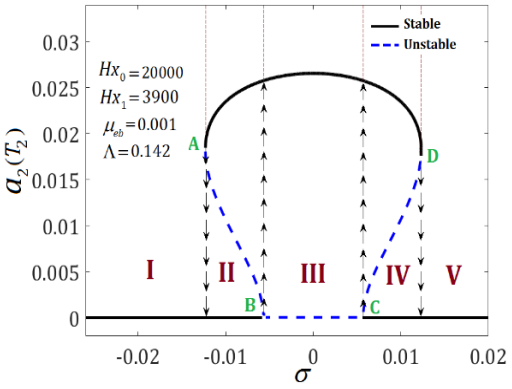
در شکل (۱۰) منحنی‌های تغییرات دامنهٔ تشدید بر حسب پارامتر دامنهٔ تحریک مغناطیسی برای چهار مقدار مختلف از پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس $\sigma = 0, 0.007, 0.01, 0.013$ ترسیم شده است. از روی این شکل می‌توان دریافت در حضور جریان محوری سیّال از داخل میکرو لوله با سرعت اغتشاشی $\Lambda = 15$ تشدید میکرو لوله همواره تحریک شده و افزایش پارامتر تنظیم σ باعث انتقال نقاط دو شاخگی زینی و زیربحرانی منحنی‌ها به سمت راست شده و سبب کاهش عرض منطقه تشدید می‌شود. در نتیجهٔ افزایش مقدار پارامتر تنظیم فرکانس، اثر پایدارکننده روی منحنی‌های پاسخ می‌گذارد. از طرف دیگر مطابق این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس دامنهٔ تشدید کاهش می‌یابد.



شکل «۱۰»: منحنی‌های تغییرات دامنهٔ تشدید بر حسب پارامتر دامنهٔ تحریک مغناطیسی به ازای چهار مقدار مختلف پارامتر تنظیم‌کننده فرکانس

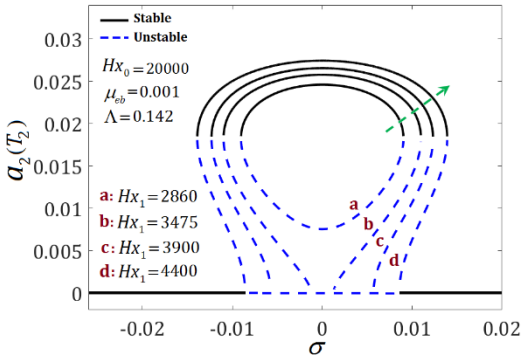
آنالیز پاسخ فرکانسی. در شکل (۱۱) منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای مقادیر $H_{x0} = 20000$، $H_{x1} = 3900$ و $\mu_{eb} = 0.001$ نشان $\Lambda = 0.142$ داده شده است. با توجّه به این شکل دیده می‌شود که در ناحیهٔ I با افزایش پارامتر تنظیم σ در بازه فرکانسی داده شده فقط یک حل بدیهی صفر پایدار برای دامنهٔ تشدید وجود خواهد داشت. به‌عبارت‌دیگر در این ناحیه، تشدید میکرو لوله تحریک نخواهد شد. با افزایش تدریجی پارامتر σ اوّلین نقطهٔ دوشاخگی زینی (متناظر با نقطهٔ A) ظاهر می‌شود چنین دوشاخگی زینی‌مانند منجر به بروز پدیده جهش دامنهٔ می‌شود که در ضمن این جهش، پاسخ سیستم از نقطهٔ A به‌صورت ناگهانی به سمت حل بدیهی صفر پایدار جذب می‌شود. بعد از گذر از این نقطهٔ دوشاخگی یعنی در ناحیهٔ II، ابتدا یک حل پریودیک غیر بدیهی غیر صفر ناپایدار (متناظر با سیکل حدی نوسانی ناپایدار) و یک حل پریودیک غیر بدیهی غیر صفر پایدار (متناظر با سیکل حدی نوسانی پایدار) برای دامنهٔ تشدید وجود خواهد داشت. در این ناحیهٔ، پدیده تشدید اتفاق

می‌افتد. با ادامهٔ افزایش پارامتر تنظیم نقطهٔ دوشاخگی دوم از نوع زیر بحرانی نیز ظاهر می‌شود (نقطهٔ B). بعد از عبور از نقطهٔ دوشاخگی دوم در ناحیهٔ III، ابتدا یک حل پریودیک غیر بدیهی ناپایدار و یک حل پریودیک غیر بدیهی پایدار برای دامنهٔ تشدید وجود خواهد داشت. در این ناحیهٔ مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار پارامتر تنظیم فرکانس تا نقطهٔ صفر ابتدا دامنهٔ تشدید افزایش و سپس بعد از گذر از نقطهٔ صفر دامنهٔ تشدید کاهش می‌یابد. در ناحیهٔ III بعد از گذر از نقطهٔ صفر و با ادامه افزایش تدریجی پارامتر تنظیم، نقطهٔ دوشاخگی سوم نیز ظاهر می‌شود که در این ناحیهٔ نیز مشابه ناحیهٔ II، ابتدا یک حل پریودیک غیر بدیهی ناپایدار و یک حل پریودیک غیر بدیهی پایدار برای دامنهٔ پاسخ وجود خواهد داشت. با افزایش پارامتر تنظیم در این ناحیهٔ و بعد از گذر از این نقطهٔ دوشاخگی زینی (نقطهD)، منحنی که نشان‌دهندهٔ حل غیر بدیهی پایدار است به سمت عقب دو شاخه می‌شود. چنین دوشاخگی زینی–مانند منجر به اتفاق افتادن پدیده جهش دامنهٔ می‌شود که در ضمن این جهش، پاسخ سیستم از نقطهٔ D سریعاً به سمت حل بدیهی پایدار جذب می‌شود. بعد از عبور از این نقطهٔ دوشاخگی حل‌های غیر بدیهی ناپدید شده و سیستم فقط یک حل بدیهی پایدار خواهد داشت.



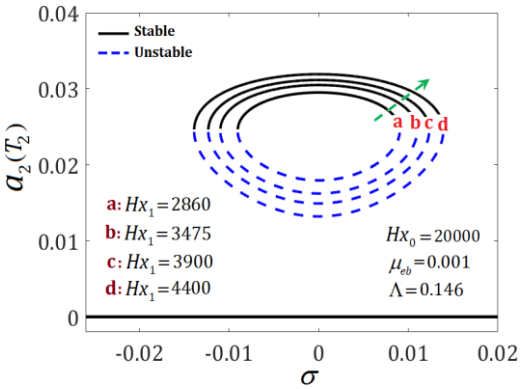
شکل «۱۱»: منحنی‌های پاسخ فرکانسی میکرو لوله

شکل (۱۲) نشان‌دهندهٔ منحنی‌های مشخصّه پاسخ فرکانسی برای چهار مقدار مختلف دامنهٔ تحریک مغناطیسی محوری میکرو لوله $H_{x1} = 2860, 3475, 3900, 4400$ ورای نقطهٔ شروع فلاتر (متناظر باسرعت بحرانی V_{cr}) با سرعت اغتشاشی $\Lambda = 0.142$ است. مطابق این شکل می‌توان دریافت که افزایش اندازه دامنهٔ تحریک مغناطیسی اثر ناپایدار کننده دارد به‌نحوی‌که سبب افزایش عرض منطقه وقوع تشدید پارامتریک مغناطیسی می‌شود. به‌خوبی پیداست که افزایش دامنهٔ تحریک باعث افزایش دامنهٔ پاسخ غیرخطی یا همان دامنهٔ تشدید می‌گردد.

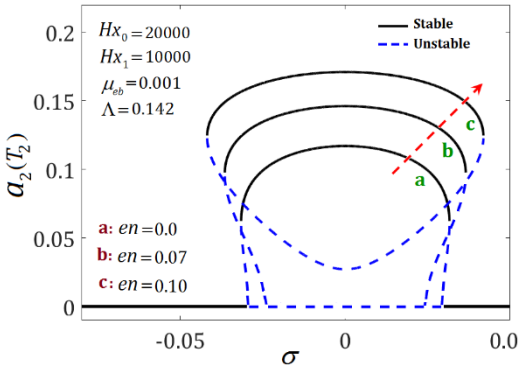


شکل «۱۲»: منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای چهار مقدار مختلف دامنهٔ تحریک مغناطیسی میکرو لوله

شکل (۱۳) نشان‌دهندهٔ منحنی‌های مشخصّه پاسخ فرکانسی برای چهار مقدار مختلف از ترم هارمونیک دامنهٔ تحریک مغناطیسی $H_{x1} = 2860, 3475, 3900, 4400$ با سرعت اغتشاشی $\Lambda = 0.146$ است. مطابق این شکل می‌توان دریافت که افزایش دامنهٔ تحریک مغناطیسی از حالت a به سمت حالت d اثر ناپایدار کننده داشته و باعث عریض‌تر شدن منطقه وقوع رزونانس می‌شود. در ضمن به‌خوبی پیداست که افزایش دامنهٔ تحریک موجب افزایش دامنهٔ رزونانس می‌گردد.



شکل «۱۳»: منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای چهار مقدار از دامنهٔ تحریک مغناطیسی



شکل «۱٤»: مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای سه مقدار مختلف از پارامتر غیرمحلی تنش

مطالعهٔ اثر پارامتر مشخصّه غیرمحلی تنش روی منحنی پاسخ- فرکانس میکرو لوله. شکل (۱٤) نشان‌دهندهٔ منحنی‌های مشخصّه پاسخ-فرکانس برای سه مقدار مختلف از پارامتر بی‌بعد مشخصّه غیرمحلی تنش (پارامتر مشخصّه مقیاس) $en = 0, 0.07, 0.1$ با ثابت نگه‌داشتن پارامترهای دیگر مسئله به‌صورت $H_{x0} = 20000$، $H_{x1} = 20000$، $\mu_{eb} = 0.001$ و $\Lambda = 0.142$ است. مطابق این شکل پیداست که افزایش مقدار پارامتر مشخصّه غیرمحلی تنش اثر ناپایدارساز داشته و سبب افزایش عرض منطقه وقوع رزونانس پارامتریک مغناطیسی می‌شود. از طرف دیگر با افزایش پارامتر مشخصّه غیرمحلی تنش، دامنهٔ پاسخ غیرخطی یا همان دامنهٔ رزونانس افزایش می‌یابد.

نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر مسئله ناپایداری ارتعاشات غیرخطی غیرمحلی میکرو لوله حاوی سیّال با خواص مغناطیس شونده تحت تحریک مغناطیسی پارامتریک در حضور جریان محوری سیّال ورای ناپایداری فلاتر مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکات محوری، دورانی و جانبی میکرو لوله با مدل تیر مرتبهٔ اوّل ردی با احتساب اثر جملات غیرخطی هندسی، اثر ویسکوزیته سیّال و اثر شتاب جانب مرکز سیّال استخراج گردید.

نشان داده شد که در غیاب اثر میرایی، در سرعت‌های جریان $V \le 1.815$ سیستم خطی به‌صورت نوسانی پایدار بوده حال‌آنکه با افزایش سرعت جریان در بازه $1.815 \le V \le 4.045$ نوسانات سیستم دچار ناپایداری می‌گردد حال‌آنکه در بازه $4.045 \le V \le 4.185$ سیستم پایداری نوسانی خود را بازمی‌یابد. ؛ در بازه سرعت‌های $V \ge 4.185$ به سبب کوپلینگ دینامیکی مودها، پدیده فلاتر رخ می‌دهد به‌نحوی‌که در این محدوده دینامیک حاکم بر نوسانات میکرو لوله حامل سیّال دارای فرکانس‌های طبیعی تکراری خواهد بود. لذا به منظور ممانعت از بروز هرگونه ناپایداری اعم از نوع واگرائی و فلاتر بایستی محدوده انتخاب سرعت جریان در بازه‌های $V \le 1.815$ و $4.045 \le V \le 4.185$ واقع گردد زیرا در این محدوده رفتار سیستم به‌صورت نوسانی پایدار (نامیرا با دامنهٔ ثابت) خواهد بود که به‌نوبه خود می‌توان ماهیّت این رفتار نوسانی را نیز با افزودن میرایی به رفتار نوسانی میرا تغییر ماهیت داد. حال‌آنکه خارج از محدوده‌های سرعت یاد شده، ماهیّت نوسانات سیستم دچار ناپایداری دینامیکی (با دامنهٔ افزایشی نسبت به زمان) یا فلاتر (سیکل حدی نوسانی) می‌شود که در طراحی‌های مهندسی نیز شناسایی محدوده‌های این نوع رفتار جهت ممانعت از بروز صدمات فیزیکی و خستگی ضروری می‌نماید.

همچنین نتایج آنالیز عددی ناپایداری فلاتر نشان داد که افزایش مقادیر پارامتر های مشخصهٔ غیرمحلی ارینگن (پارامتر مشخصّه مقیاس) اثر ناپایدار ساز دارد به‌طوری‌که با افزایش آنها ناپایداری فلاتر در فرکانس‌های پائین تر اتفاق می‌افتد.

برای تحلیل رفتار سیستم غیرخطی در ورای نقطهٔ ناپایداری فلاتر با استفاده از روش مقیاس های چندگانه و تحت شرایط تشدید پارامتریک مغناطیسی معادلات پاسخ فرکانسی و مغناطیسی استخراج گردید و پایداری حل های صفر و غیر صفر این معادلات در شرایط ماندگار تحلیل شد. در بازه‌های پارامتر تنظیم فرکانسی $0.0057 \le \sigma \le 0.0123$ و $-0.0123 \le \sigma \le -0.0057$، تشدید میکرو لوله تحریک می شود طوری که با تغییر پارامتر تنظیم فرکانس در بخشی از این محدوده، دو حل غیر صفر پریودیک ناپایدار و پایدار به ترتیب متناظر با سیکل حدی نوسانی ناپایدار و پایدار برای دامنهٔ تشدید وجود خواهد داشت. طوری که با انتخاب $\sigma = 0.01$ از این بازه، سیستم غیرخطی دچار تشدید متناظر با سیکل حدی نوسانی ناپایدار و پایدار به ترتیب با دامنه‌های $a_2 = 0.0106$ و $a_2 = 0.0234$ خواهد شد. از طرف دیگر در محدوده $|\sigma| \le 0.0057$، سیستم فقط یک حل غیر صفر پریودیک پایدار خواهد داشت. اما در خارج از بازه‌های فرکانسی فوق‌الذکر یعنی $|\sigma| \ge 0.0057$ تشدید سیستم غیرخطی تحریک نخواهد شد.

لذا در طراحی‌های مهندسی و تحت شرایط عملکردی خاص سیستم غیرخطی تحت تحریک پارامتریک مغناطیسی، اگر سرعت جریان از داخل میکرو لوله آن‌سوی و در نزدیکی سرعت بحرانی فلاتر، واقع گردد، شناسایی تنوع رفتاری سیستم اعم از بروز تشدید یا عدم بروز تشدید، نسبت به تغییر پارامتر تنظیم فرکانس تحریک، جهت ممانعت از رشد ناخواسته دامنهٔ نوسانات لوله حامل سیّال ضروری است.

علاوه بر این نشان داده شد که افزایش پارامتر مشخصّه غیرمحلی تنش و دامنهٔ تحریک مغناطیسی، اثرات ناپایدار کننده داشته و سبب عریض‌تر شدن منطقه وقوع رزونانس پارامتریک و افزایش دامنهٔ پاسخ غیرخطی می‌گردند. همچنین افزایش پارامتر تنظیم فرکانس، اثر پایدارکننده داشته و سبب کاهش عرض منطقهٔ تشدید و دامنهٔ تشدید می‌شود.

واژه‌نامه

میکرو لوله	Microtube
حاوی سیّال	Fluid Conveying
ارتعاشات غیرخطی	Nonlinear Vibration
تشدید پارامتریک	Parametric Resonance
الاستیسیته غیرمحلی	Nonlocal Elastisity
بی‌بعد سازی	Nondimensionalization
سرعت بحرانی فلاتر	Flutter critical velocity
شکل مود کوپله شده	Coupled mode shape
پارامتر تنظیم فرکانسی	Frequency regulator parameter
ناپایداری فلاتر	Flutter instability
دوشاخگی	Bifurcation
دامنهٔ تشدید	Resonant amplitude
تحریک مغناطیسی	Magnetic excitation
پارامتر مشخصّه مقیاس	Scale characteristic parameter

مراجع

1. Paidoussis, M.P., Price, S.J. and De Langre, E., "F*luid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities*", Cambridge University Press, (2010).
2. Paidoussis, M.P. and Li, G.X., "Pipes conveying fluid: a model dynamical problem", *Journal of Fluids and Structures*, 7(2), pp. 137-204, (1993).
3. Sinha, J.K., Singh, S. and Rao, A.R., "Finite element simulation of dynamic behaviour of open-ended cantilever pipe conveying fluid", *Journal of Sound and Vibration*, 1(240): pp. 189-194, (2001).
4. Ansari, R., Norouzzadeh, A., Gholami, R., Shojaei, M. Faghih and Darabi, M. A. "Geometrically nonlinear free vibration and instability of fluid-conveying nanoscale pipes including surface stress effects", *Microfluidics and Nanofluidics*, 20(1), pp. 28, (2016).
5. Ansari, R., Norouzzadeh, A., Gholami, R., Shojaei, M. Faghih and Hosseinzadeh, M., "Size-dependent nonlinear vibration and instability of embedded fluid-conveying SWBNNTs in thermal environment", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructure*s, 61, pp. 148-157, (2014).
6. Ghazavi, M.R. and Molki, H., "Nonlinear analysis of the micro/nanotube conveying fluid based on second strain gradient theory", *Applied Mathematical Modelling*, 60: pp. 77-93, (2018).
7. Ghazavi, M.-R., Rezazadeh, G. and Azizi, S., "Pure parametric excitation of a micro cantilever beam actuated by piezoelectric layers", *Applied Mathematical Modelling*, 34(12): pp. 4196-4207, (2010).
8. Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B., "On nonlocal elasticity", *International Journal of Engineering Science*, 10(3), pp. 233-248, (1972).
9. Eringen, A.C., "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *Journal of Applied Physics*, 54(9), pp. 4703-4710, (1983).
10. Lei, Y., Adhikari, S. and Friswell, M.I., "Vibration of nonlocal Kelvinâ€“Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams", *International Journal of Engineering Science*, 66, pp. 1-13, (2013).
11. Kiani, K., "Nanofluidic flow-induced longitudinal and transverse vibrations of inclined stocky single-walled carbon nanotubes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276, pp. 691-723, (2014).
12. Arani, A.G., Haghparast, E., Maraghi, Z. Khoddami and Amir, S., "Nonlocal vibration and instability analysis of embedded DWCNT conveying fluid under magnetic field with slip conditions consideration", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 229(2), pp. 349-363, (2015).
13. Sadeghi-Goughari, M., Jeon, S. and Kwon, H.-J., "Flutter instability of cantilevered carbon nanotubes caused by magnetic fluid flow subjected to a longitudinal magnetic field", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 98, pp. 184-190, (2018).
14. Bahaadini, R. and Hosseini, M., "Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration and stability analysis of viscoelastic cantilever carbon nanotubes conveying fluid", *Computational Materials Science*, 114, pp. 151-159, (2016).
15. Bahaadini, R., Hosseini, M. and Jamali, B., "Flutter and divergence instability of supported piezoelectric nanotubes conveying fluid", *Physica B: Condensed Matter*, 529: pp. 57-65, (2018).
16. Yang, T.-Z., Ji, Sh., Yang, X.-D. and Fang, B., "Microfluid-induced nonlinear free vibration of microtubes", *International Journal of Engineering Science*, 76, pp. 47-55, (2014).
17. Saadatnia, Z. and Esmailzadeh, E. "Nonlinear harmonic vibration analysis of fluid-conveying piezoelectric-layered nanotubes", *Composites Part B: Engineering*, 123, pp. 193-209, (2017).
18. Yang, X., Yang, T. and Jin, J., "Dynamic stability of a beam-model viscoelastic pipe for conveying pulsative fluid", *Acta Mechanica Solida Sinica*, 20(4): pp. 350-356, (2007).

19. Arani, A.G., Amir, S., Dashti, P. and Yousefi, M., "Flow-induced vibration of double bonded visco-CNTs under magnetic fields considering surface effect", *Computational Materials Science*, 86, pp. 144-154, (2014).
20. Zhang, W., Yang, J. and Hao, Y., "Chaotic vibrations of an orthotropic FGM rectangular plate based on third-order shear deformation theory", *Nonlinear Dynamics*, 59(4), pp. 619-660, (2010).
21. Amabili, M. and Farhadi, S., "Shear deformable versus classical theories for nonlinear vibrations of rectangular isotropic and laminated composite plates", *Journal of Sound and Vibration*, 320(3), pp. 649-667, (2009).
22. Fu, Y.-m. and Ruan, J.-l., "Nonlinear active control of damaged piezoelectric smart laminated plates and damage detection", *Applied Mathematics and Mechanics*, 29(4): pp. 421-436, (2008).
23. Ghorbanpour Arani, A., Amir, S. and Karamali Ravandia, A. "Nonlinear flow-induced flutter instability of double CNTs using Reddy beam theory", *Journal of Computational Applied Mechanics*, 46(1): pp. 1-12, (2015).
24. Wang, L., "A modified nonlocal beam model for vibration and stability of nanotubes conveying fluid", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(1), pp. 25-28, (2011).
25. Eslami, H., "*Nonlinear flutter and forced oscillations of rectangular symmetric cross-ply and orthotropic panels using harmonic balance and perturbation methods*", Old Dominion University, (1987).
26. Onawola, O.O. and Sinha, S.C., "A feedback linearization approach for panel flutter suppression with piezoelectric actuation", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6(3), pp. 031006, (2011).
27. Guo, X.Y., Zhang, W. and Yao, M., "Nonlinear dynamics of angle-ply composite laminated thin plate with third-order shear deformation", *Science China Technological Sciences*, 53(3), pp. 612-622, (2010).

(مقالهٔ پژوهشی)

مطالعهٔ پدیده‌شناسی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی*

علی اسدی[۱] مجید ملک جعفریان[۲] علیرضا تیمورتاش[۳]

چکیده *یکی از پدیده‌های مورد مطالعهٔ دانشمندان در سال‌های اخیر، پدیدهٔ پرش هیدرولیکی چندضلعی است. حدود دو دهه از مشاهدهٔ این پدیده می‌گذرد، اما هنوز علّت ایجاد و شکل‌گیری این پدیده نامعلوم است. هدف اصلی در این تحقیق مطالعهٔ پدیده‌شناسی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی است. به همین منظور، این پدیده به روش آزمایشگاهی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که علّت شکل‌گیری پرش هیدرولیکی چندضلعی، حضور اغتشاشات و ناپایداری‌های موجود در جریان، سیستم و یا محیط است. این ناپایداری‌ها بر اساس پدیدهٔ رایلی-پلاتو و در حضور اثرات کشش سطحی و لزجت، پرش هیدرولیکی دایروی پایدار را ناپایدار کرده و آن را به یک پرش چندضلعی تبدیل می‌کند. با حذف ناپایداری‌ها، پرش دایروی پایدار ایجاد گردید. این پرش بر خلاف نتایج محقّقان در کارهای قبلی از اعداد رینولدز کم تا اعداد رینولدز بالا پایدار است. همچنین در این تحقیق، رفتار پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی که در کارهای قبلی و در حضور ناپایداری‌ها شکل گرفته‌اند، بررسی شد. در یک دبی ثابت، مساحت داخل پرش، برای همهٔ پرش‌های ممکن، تقریباً با خطای کمتر از حدود ۱۰ درصد، برابر است. از بین چندضلعی‌های با تعداد اضلاع برابر که برای یک دبی خاص محتمل است، پرش به شکل چندضلعی منتظم درمی‌آید؛ زیرا به‌طور طبیعی، کشش سطحی تلاش می‌کند تا کمترین سطح رویهٔ ممکن را برای پرش ایجاد کند.*

واژه‌های کلیدی پدیده‌شناسی؛ پدیدهٔ رایلی-پلاتو؛ پرش چندضلعی؛ چندضلعی منتظم؛ پرش دایروی پایدار.

A Phenomenological Study of Polygonal Hydraulic Jumps

A. Asadi M. Malek Jafarian A.R. Teymourtash

Abstract *Polygonal hydraulic jump is among the subjects widely studied by scientists in recent years. Although this phenomenon was discovered nearly two decades ago, many of the probable reasons behind it remain unknown. Accordingly, the main goal of the present study is to conduct a laboratory-scale phenomenological investigation on polygonal hydraulic jumps. The results indicated that the main cause of polygonal hydraulic jumps is the presence of disturbances and instabilities in flows, systems, or environments. Given the Plateau–Rayleigh instability, in the presence of surface tension and viscosity effects, the disturbances and instabilities create stable circular jumps unstable and then turn them into polygonal jumps. A stable circular jump was created with the elimination of instabilities, and the jump, unlike what observed in previous studies, was stable at a low to high range of Reynolds number. In addition, the behavior of polygonal hydraulic jumps formed in previous studies in the presence of instabilities was investigated. In a constant flow rate, the area inside the jump was equal for all the possible jumps at an error level of less than 10%. Among the polygons with an equal number of sides, which are possibly observed in a particular flow rate, the jump changes into a regular polygon, as the surface tension naturally tends to create the minimum possible surface area for the jump.*

Key Words Phenomenology, Plateau–Rayleigh Instability, Polygonal Jump, Regular Polygon, Stable Circular Jump

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۷/٦ و تاریخ پذیرش آن ۹۸/۹/۲٤ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.83280

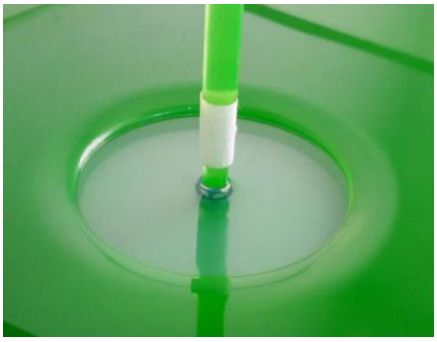
(۱) دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک – تبدیل انرژی، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه بیرجند، ایران

(۲) نویسنده‌ی مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک – تبدیل انرژی، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه بیرجند، ایران. mmjafarian@birjand.ac.ir

(۳) استاد، گروه مهندسی مکانیک – تبدیل انرژی، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

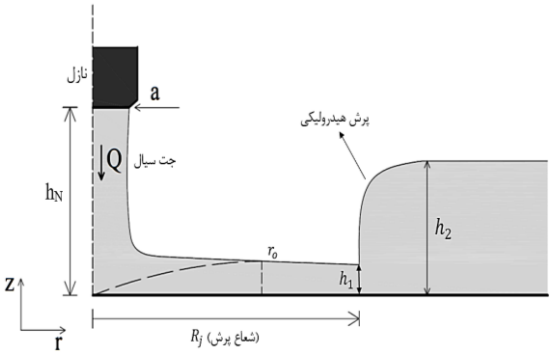
مقدّمه

از دیدگاه علم مکانیک سیّالات، هنگامی‌که یک جت عمودی سیّال به یک صفحهٔ افقی برخورد می‌کند، سیّال به‌صورت شعاعی و در همهٔ جهات پخش می‌شود. در یک فاصلهٔ خاص از محل برخورد جت سیّال که به آن شعاع پرش هیدرولیکی گفته می‌شود، به‌طور ناگهان ضخامت سیّال افزایش یافته، جریان از حالت فوق بحرانی به حالت زیربحرانی تبدیل می‌شود و اصطلاحاً یک پرش هیدرولیکی دایروی شکل می‌گیرد (شکل ۱). جریان فوق بحرانی بالادست دارای انرژی بسیار زیادی است که رفته‌رفته به دلیل اصطکاک و دیگر عوامل کاهندهٔ سرعت، در پایین‌دست پرش به حالت زیربحرانی تبدیل می‌شود. جریان زیربحرانی پایین‌دست دارای محتوی انرژی کمتری است. جریان برای تبدیل از حالت فوق بحرانی به زیربحرانی به‌ناچار در یک محل خاص، انرژی خود را تخلیه می‌کند که این تخلیهٔ انرژی به‌صورت یک پرش هیدرولیکی ظاهر می‌شود. هدف اصلی در تحقیقات علمی در این زمینه یافتن محل ایجاد پرش هیدرولیکی دایروی، یا به عبارتی شعاع پرش هیدرولیکی است.



شکل «۱»: پرش هیدرولیکی دایروی

شکل (۲) شماتیک پرش هیدرولیکی دایروی را نشان می‌دهد. با توجّه به تقارن محوری پرش هیدرولیکی دایروی، نیمی از برش مقطعی پرش نشان داده شده است. در این شکل شعاع نازل (a)، فاصلهٔ نازل از سطح افقی (h_N) شعاع پرش (R_j)، ارتفاع پایین‌دست پرش (h_2) و سایر پارامترهای پرش هیدرولیکی دایروی نشان داده شده است. ازجمله کاربردهای این پدیده می‌توان به خنک‌کاری در فرایندهای صنعتی اشاره کرد [1,2].



شکل «۲»: شماتیک جت عمودی برخوردکننده به صفحه افقی و ایجاد پرش هیدرولیکی دایروی

اوّلین شخصی که پرش هیدرولیکی را به‌صورت علمی مورد مطالعه و بررسی قرار داد، فیزیکدان بریتانیایی، لرد رایلی، بود. وی در سال ۱۹۱٤ جریان در یک کانال روباز با عرض ثابت را با فرض جریان غیر لزج مورد مطالعه قرار داد و تئوری خود را بیان کرد [3]. او با فرض اینکه جرم و مومنتم در عرض پرش بقا دارند ولی انرژی بقا ندارد، اظهار داشت که می‌توان از این تئوری برای موج سیّالی که ارتفاع سیّال در دو طرف آن اختلاف سطح دارد، استفاده کرد.

بیرخوف و زارانتونلو [4] در سال ۱۹۵۷ تئوری کاملی از پرش‌های هیدرولیکی دایروی غیر لزج ارائه کردند. از دیدگاه تئوری غیر لزج، توازنی بین نیروی فشار و مومنتم در موقعیت پرش وجود دارد. بااین‌وجود، به خاطر نازکی لایه‌ی مایع، به‌ویژه قبل از پرش، واضح است که جریان در چنین مسائلی دارای لزجت است و تئوری غیر لزج برای پیش‌بینی شعاع پرش هیدرولیکی دایروی مناسب نیست.

واتسون در سال ۱۹٦٤ برای اوّلین بار اثر لزجت را در پرش هیدرولیکی دایروی در نظر گرفت [5]. او این پدیده را با فرض لایهٔ مرزی برای بالادست پرش که از جت توسعه می‌یابد، به‌صورت تئوری درآورد. واتسون از کشش سطحی در تئوری خود صرف‌نظر کرد که نقص این تئوری نیز به حساب می‌آید. او با فرض جریان آرام، صرف‌نظر از تغییرات شعاعی فشار هیدرواستاتیک در مقایسه با تنش‌های لزج، همچنین صرف‌نظر از ساختار پرش و معرفی یک پارامتر تشابهی، سعی کرد تا معادلات حاکم را به روش تشابهی حل کند.

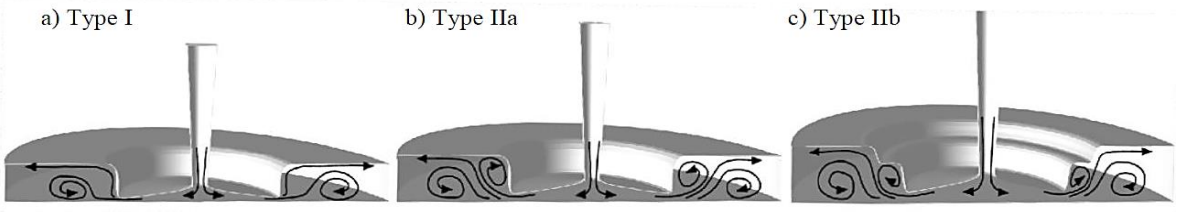
محقّقان مختلف دیگری در سراسر جهان در چهار دهه‌ی اخیر مانند خود واتسون [5]، کریک و همکاران [6]، اریکو [7] و لیو و لینهارد [8] به‌طور آزمایشگاهی تئوری واتسون را بررسی کردند و نشان دادند که تئوری واتسون در برخی از شرایط مطابقت کمی با نتایج آزمایشگاهی دارد.

هیگوئرا [9] پرش هیدرولیکی ظاهر شده در جریان آرام و لزج روی یک صفحهٔ افقی محدود را به‌صورت عددی مطالعه کرد و از تقریب‌های لایهٔ مرزی برای جریان داخلی و ناحیهٔ اطراف پرش استفاده کرد. وی در نظر گرفتن اثر کشش سطحی و تغییرات فشار و استفاده از تقریب لایهٔ مرزی را به‌عنوان گامی روبه‌جلو برای توصیف جریان در همهٔ پرش‌های هیدرولیکی مسطح در محدودهٔ اعداد رینولدز بی‌نهایت در نظر گرفت.

در سال ۲۰۰۳ بوش و اریستوف [10] نقص اصلی تئوری واتسون را برطرف کردند. آنها با در نظر گرفتن اثر پارامتر کلیدی کشش سطحی در مسئلهٔ پرش هیدرولیکی دایروی توانستند به‌صورت تحلیلی و آزمایشگاهی تئوری واتسون را اصلاح و نتایج آن را بهبود بخشند. آنها اثر کشش سطحی را با اعمال نیروی انحنای شعاعی (مؤلفه‌ی شعاعی نیروی کشش سطحی مربوط به انحنای پرش) در ناحیهٔ پرش در نظر گرفته و با حل معادلهٔ بقای مومنتم به حل مسئله پرداختند.

بوش و همکاران [11] یک تقسیم‌بندی منظم برای ساختار پرش هیدرولیکی دایروی ارائه کردند. بر اساس تقسیم‌بندی آنها، انواع ساختار پرش هیدرولیکی دایروی در شکل (۳) نشان داده شده است.

یوکویی و ژائو [12] انتقال در پرش هیدرولیکی دایروی را در نظر گرفتند و آن را به‌صورت عددی مطالعه کردند. آنها تغییر پرش از نوع I به نوع II که در آزمایش‌ها بررسی شده بود و علّت آن تغییر ارتفاع سیّال در پایین‌دست پرش بود را به‌صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند و اظهار داشتند که این انتقال با افزایش فشار در زیر سطح جریان، بلافاصله بعد از پرش ارتباط دارد. پس‌ازآن، آنها ساختار تشکیل پرش‌های هیدرولیکی دایروی را با اعداد رینولدز متوسط به‌صورت عددی بررسی کردند [13]. نتایج عددی آنها نشان داد که افزایش فشار زیر سطح در پرش، نقش مهمی در تولید جریان برگشتی ایفا می‌کند که برای ایجاد و بقای گردابه نیاز است. همچنین یک وابستگی میان میدان فشار و نیروی کشش سطحی وجود دارد.

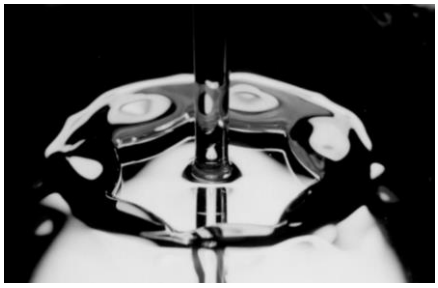


شکل «۳»: شماتیک انواع ساختار پرش هیدرولیکی دایروی پایدار [11].

میکلویچ و میکلویچ [14] یک مدل سادهٔ پخشی برای پرش‌های هیدرولیکی دایروی پیشنهاد دادند. مدل آنها از تحلیل معادلهٔ برنولی استخراج شد. آنها یک تحلیل مقدّماتی روی پرش‌های نوع I و نوع II، یعنی شکل‌گیری یک یا دو گردابه، نیز انجام دادند و نتایج خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند که رضایت‌بخش بود.

پسندیده‌فرد و همکارانش [15] یک مطالعهٔ پارامتری به منظور تأثیر پارامترهای مختلف، شامل نرخ حجمی جریان، ارتفاع پایین‌دست، لزجت و جاذبه روی شعاع پرش هیدرولیکی دایروی و ویژگی‌های آن انجام دادند. آنها مطالعهٔ عددی خود را به کمک روش حجم سیّال [16] و با در نظر گرفتن کشش سطحی انجام داده و نتایج عددی حاصل را با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند.

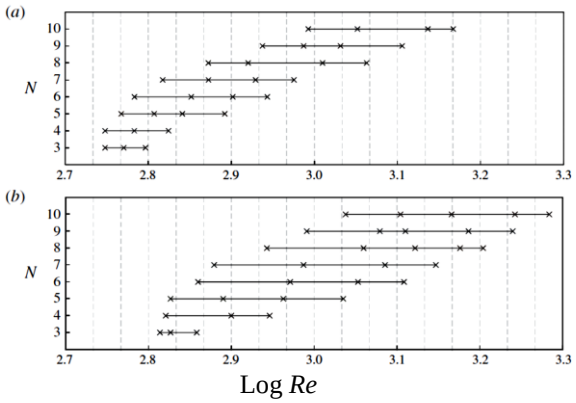
الگارد و همکاران [17] در سال ۱۹۹۹ که به‌طور تجربی در حال بررسی پرش دایروی بودند برای اوّلین بار با پدیدهٔ جالبی مواجه شدند و آن پرش‌های هیدرولیکی غیر دایروی یا چندضلعی (Polygonal Hydraulic Jump) بود. شکل (٤) تصویر یک پرش هیدرولیکی هفت‌ضلعی را نشان می‌دهد. آنها دریافتند که شکل‌های چندضلعی ثابت (پایدار) وقتی می‌توانند تشکیل شوند که لزجت سیّال زیاد باشد (تقریباً ۱۱ برابر لزجت آب) و یک مانع پایین‌دست با ارتفاع مشخص برای جریان در نظر گرفته شود. این مانع، یک دایرهٔ مسطح توخالی هم‌مرکز با صفحه هدف و جت عمودی است که از جنس شیشه یا پلکس گلس ساخته شده و بر روی صفحهٔ هدف قرار می‌گیرد. آنها همچنین وابستگی تعداد گوشه‌ها را به نرخ جریان، ارتفاع نازل و ارتفاع پایین‌دست برای یک نازل با شعاع داخلی ۰/۵cm در پرش‌های چندضلعی نشان دادند.



شکل «٤»: پرش هیدرولیکی غیر دایروی [17]

چند پایایی (Hysteresis) پرش‌های چندضلعی به‌وسیلهٔ الگلارد و همکاران [17] گزارش شد. آنها اشاره کردند که در یک رژیم پارامتری ثابت، چندین چندضلعی می‌تواند پایدار باشد. به‌عنوان‌مثال در یک عدد رینولدز خاص، می‌توان پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی با ٤، ٥، ٦، ٧ و یا حتی ٨ ضلع مشاهده کرد [18]. بر این اساس تیمورتاش و مخلصی [18] برای پرش‌های چندضلعی پایا، ناحیهٔ پایداری معرفی کردند و به ترسیم نمودارهای پایداری پرداختند. آنها اظهار داشتند که مزیّت این نمودارها نسبت به نمودارهای الگارد و همکارانش [17] و بوش و همکارانش [11] این است که امکان شکل‌گیری چندین پرش چندضلعی با تعداد گوشه‌های مختلف در یک پارامتر ثابت را نشان می‌دهد. شکل (٥) دو نمونه از این نمودارها برای دو ارتفاع مانع پایین‌دست $H_{obstacle}$=0.22,0.30cm را نشان می‌دهد. N در نمودارهای این شکل معرف تعداد اضلاع پرش چندضلعی است.

این پدیده مشابه پدیدهٔ بازماند در الکترومغناطیس است که با افزایش دبی در مرحلهٔ رفت و کاهش دبی در مرحلهٔ برگشت، هم‌پوشانی در محدودهٔ پایداری چندضلعی‌ها و در نتیجه در تعداد اضلاع حاصل می‌شود.



شکل «۵»: ناحیهٔ پایداری پرش‌های چندضلعی پایا
a) $H_{obstacle}$=0.22 و b) $H_{obstacle}$=0.30 [18]

مارتنز و همکاران [19] در سال ۲۰۱۲ برای اوّلین بار یک تئوری برای پرش‌های نوع II بر اساس موازنهٔ مومنتم در راستای شعاعی و مماسی پرش ارائه کردند. آنها این موازنه را برای غلتک (Roller) زیرسطحی به‌عنوان یک شیء مجزا انجام داده و با صرف‌نظر از کشش سطحی توانستند به‌صورت تحلیلی، تعداد گوشه‌های چندضلعی را پیش‌بینی کنند.

روجاس و تیراپگیو [20] با استفاده از تئوری روانکاری اینرسی [21] به بررسی پرش‌های هیدرولیکی دایروی و چندضلعی پرداختند. آنها با در نظر گرفتن تقارن مماسی و اغتشاشات کوچکی در پرش دایروی، یک معادلهٔ غیر خطی برای حالت چندضلعی به دست آوردند و نشان دادند که از نظر تئوری وقتی عدد موج بی‌بعد خیلی بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، یا به عبارتی کشش سطحی خیلی کم باشد، حل چندضلعی به یک پرش دایروی نوع II همگرا می‌شود.

بوش و همکاران [11] و مارتنز و همکاران [17] دریافتند که ناپایداری در پرش‌های دایروی و تشکیل غیر دایروی‌ها می‌تواند به ناپایداری رایلی-پلاتو مربوط باشد. بوش و همکاران [11] یک رابطهٔ تجربی برای طول موج ناپایداری پرش‌های غیر دایروی پایدار بر اساس کشش سطحی، چگالی و سرعت شعاعی خروجی از پرش پیشنهاد دادند. آنها همچنین نشان دادند که در محلول گلیسرین-آب، با کاهش کشش سطحی از طریق یک افزودنی به سیّال، پرش هیدرولیکی چندضلعی به پرش هیدرولیکی دایروی تبدیل می‌شود و شعاع آن حدود ۲۰٪ افزایش می‌یابد.

تیمورتاش و مخلصی [18] موج‌های ایجاد شده در سطح پرش دایروی، درست قبل از تبدیل شدن به یک پرش چندضلعی را به‌عنوان ناپایداری معرفی کردند که البته علّت پدیدار شدن این موج، خود یک سؤال است.

با مطالعهٔ تحقیقات محقّقان درمی‌یابیم که هرگاه یک مانع پایین‌دست برای پرش هیدرولیکی دایروی پایدار در نظر گرفته می‌شود، این پرش ناپایدار شده و به یک پرش هیدرولیکی چندضلعی تبدیل می‌شود.

اما تاکنون و پس از گذشت نزدیک به دو دهه از مشاهدهٔ پدیدهٔ پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی علّت ناپایداری، شکل‌گیری و نحوهٔ رفتار این پرش‌ها شناخته نشده است و همچنان به‌عنوان یک سؤال مطرح است.

در این تحقیق علاوه بر شناسایی علّت ناپایداری و شکل‌گیری پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی، به تحلیل رفتار این پرش‌ها و پارامترهای مهم و مؤثر بر آن پرداخته می‌شود. در ادامه به این سؤال نیز پاسخ داده خواهد شد که چرا پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی به‌صورت چندضلعی منتظم شکل می‌گیرند؟

تئوری

مهم‌ترین و معتبرترین تئوری در زمینهٔ پرش‌های هیدرولیکی دایروی، تئوری واتسون است که توسط بوش و اریستوف [10] با اعمال اثر ضریب کشش سطحی اصلاح شد. آنها در نهایت معادلات زیر را برای پیش‌بینی شعاع پرش هیدرولیکی دایروی پیشنهاد دادند:

$$\frac{R_j h_2^2 g a^2}{Q^2}\left(1+\frac{2}{Bo}\right)+\frac{a^2}{2\pi^2 R_j h_2}=0.10132$$
$$-0.1297\left(\frac{R_j}{a}\right)^{3/2} Re^{-1/2} \quad , \quad R_j < r_o \qquad (۱)$$

$$\frac{R_j h_2^2 g a^2}{Q^2}\left(1+\frac{2}{Bo}\right)+\frac{a^2}{2\pi^2 R_j h_2}=0.01676\left[\left(\frac{R_j}{a}\right)^3 Re^{-1}+0.1826\right]^{-1}, R_j \geq r_o \quad (۲)$$

که در آن R_j شعاع پرش، h_2 ارتفاع سیّال در پایین‌دست پرش، g شتاب جاذبه، a شعاع دهانهٔ جت، Q دبی جریان، Bo عدد باند و Re عدد رینولدز است. اعداد رینولدز و باند طبق رابطه‌های (۳ و ٤) تعریف می‌شوند:

$$Bo=\frac{\rho g R_j \Delta H}{\sigma} \quad (۳)$$

$$Re=\frac{Q}{a\nu} \quad (٤)$$

که در آن ρ چگالی سیّال، ΔH اختلاف ارتفاع سیّال در بالا و پایین‌دست پرش، σ کشش سطحی و ν لزجت سینماتیکی است. از دیگر اعداد بی‌بعد مهم و مؤثر در زمینهٔ پرش‌های هیدرولیکی عدد فرود (Fr) و وبر (We) هستند که مطابق رابطه‌های (۵ و ٦) تعریف می‌شوند:

$$Fr=\frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (۵)$$

$$We=\frac{\rho Q^2}{\sigma h_2^3} \quad (٦)$$

V در رابطهٔ (۵) سرعت سیّال در محل پرش است. در این رابطه اگر h ارتفاع سیّال در بالادست پرش (h_1) و سرعت سیّال در بالادست پرش (V_1) باشد، Fr_1 عدد فرود بالادست پرش و اگر h ارتفاع سیّال در پایین‌دست پرش (h_2) و سرعت سیّال در پایین‌دست پرش (V_2) باشد، Fr_2 عدد فرود پایین‌دست پرش است.

پایداری یک مشخصّهٔ مهم برای طبقه‌بندی پرش‌های هیدرولیکی دایروی و غیر دایروی است. برخی فاکتورها از قبیل ارتفاع پایین‌دست پرش، نرخ جریان، لزجت، کشش سطحی و جاذبه، بر پایداری پرش اثر می‌گذارند. افزایش ارتفاع پایین‌دست پرش، ساختار پرش پایدار را به یک جریان وابسته به زمان یا حتی یک جریان مغشوش تغییر می‌دهد [22]. بالا رفتن کشش سطحی، پرش را ناپایدار می‌کند [10]. از دیدگاه تئوری یک حد کشش سطحی بحرانی بالا وجود دارد که پرش دایروی پایدار نمی‌تواند وجود داشته باشد و این یعنی این‌که یک حالت گذرا به یک پرش دایروی ناپایدار یا یک پرش غیر دایروی موجود هست. این کشش سطحی بحرانی به لزجت، نرخ جریان و پارامترهای دیگر بستگی داشته و با افزایش لزجت کاهش می‌یابد [23].

می‌توان گفت یکی از پارامترهای مهم در بحث پایداری، کشش سطحی است. در توضیح این پارامتر می‌توان گفت که در داخل مایع، به هر مولکول، از سوی مولکول‌های دیگر نیرویی وارد می‌شود و برآیند نیروی وارد بر هر مولکول صفر است. در سطح مایع، به مولکول‌ها تنها از یک جهت، توسط دیگر مولکول‌ها نیرو وارد می‌شود و در جهت دیگر (مثلاً از طرف هوا) نیرو ناچیز است؛ بنابراین، نیرویی به طرف داخل، به مولکول‌هایی که در سطح مایع قرار دارند وارد می‌شود و تلاش در کاهش سطح انرژی و سطح رویهٔ سیّال را دارد؛ بنابراین سطح مایع آن‌قدر جمع می‌شود تا کمترین مساحت و سطح انرژی را داشته باشد.

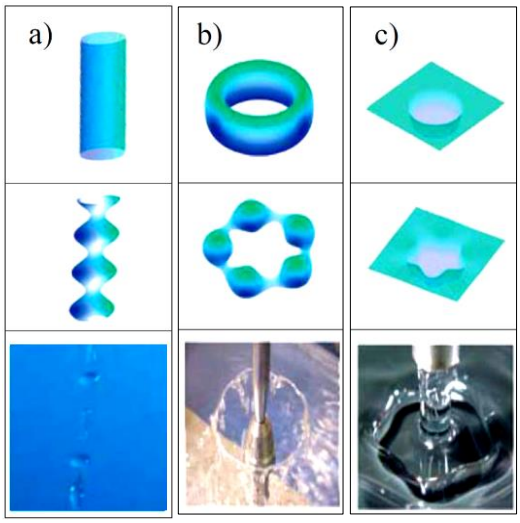
پلاتو [24] و رایلی [25]، دریافتند که در یک باریکهٔ سیّال که از دهانه نازل خارج و به سمت پایین می‌ریزد، هر چه قدر هم باریکهٔ سیّال یکنواخت باشد، کشش سطحی می‌تواند با رشد آشفتگی‌ها در راستای شعاعی باعث ایجاد انحنا در سطح باریکه و در نهایت به قطره‌قطره شدن باریکهٔ سیّال منجر شود. با توجّه به اینکه کشش سطحی همواره سعی در ایجاد کمترین سطح رویه در سیّال دارد و کمترین سطح رویه برای قطره یا شکل کروی سیّال است، هرچقدر کشش سطحی بیشتر باشد، رشد آشفتگی‌ها و ناپایداری‌ها بیشتر است و باریکه سیّال سریع‌تر دچار انحنا و قطره‌قطره شدن می‌شود.

به هنگام جاری شدن باریکهٔ آب از شیر، تقریباً بعد از ۱۰ سانتی‌متر، باریکه دچار انحنا و قطره‌قطره شدن می‌شود. این در حالی است که در مورد باریکهٔ عسل این طول می‌تواند به حدود ۱۰ متر برسد. جوادی و همکاران [26] به کمک روش آزمایشگاهی و همچنین آنالیز ریاضیِ رشد آشفتگی‌ها در امتداد باریکهٔ سیّال نشان دادند که طول کشیدگی باریکهٔ سیّال قبل از قطره‌قطره شدن، طبق رابطهٔ (۷) به دبی جریان (Q)، لزجت سیّال (μ) و ضریب کشش سطحی (σ) بستگی دارد:

$$l_b \sim (gQ^2\mu^4/\sigma^4)^{1/3} \qquad (۷)$$

طبق این رابطه، هرچقدر لزجت بیشتر و کشش سطحی کمتر باشد، باریکهٔ سیّال توانایی بیشتری در خنثی کردن آشفتگی‌ها و حفظ پایداری دارد. برعکس هرچه کشش سطحی بیشتر و لزجت کمتر باشد، رشد آشفتگی‌ها و ناپایداری‌ها بیشتر بوده و استوانه‌ی سیّال به سمت ایجاد انحنا و قطره‌قطره شدن پیش می‌رود. به همین دلیل است که در سیّال آب که دارای کشش سطحی بالاتر و لزجت کمتری نسبت به اتیلن گلیکول است، آشفتگی‌ها به‌سرعت و به‌شدّت رشد کرده و پرش هیدرولیکی شکل منظمی را نشان نمی‌دهد. برعکس در سیّال اتیلن گلیکول که دارای لزجت بالاتر و کشش سطحی کمتری است، سیّال تا حدی توانایی کنترل آشفتگی را دارد و به سمت قطره‌قطره شدن پیش نمی‌رود و در نتیجه کشش سطحی با ایجاد منحنی‌هایی در سطح پرش، به حداقل سطح رویه و انرژی می‌رسد. این منحنی‌ها همان اضلاع و گوشه‌های پرش هیدرولیکی چندضلعی می‌باشند که با تغییر دبی، تعداد و طول آنها تغییر می‌کند.

شکل (٦-a) باریکهٔ استوانه‌ای که به دلیل کشش سطحی و رشد آشفتگی‌ها دارای انحنا در سطح خود شده است را نشان می‌دهد. این باریکه در نهایت به قطره‌قطره شدن می‌انجامد. اگر غلتک زیرسطحی مدور در ساختار نوع IIb پرش هیدرولیکی دایروی که در شکل (۳-c) نشان داده شد (مارتنز و همکاران [19] از آن برای ارائه تئوری پرش چندضلعی استفاده کردند) را به‌عنوان یک باریکهٔ تیوب شکل در نظر بگیریم، شکل (٦-b) نحوهٔ اثر آشفتگی‌ها بر آن و ناپایدار شدن پرش دایروی را نشان می‌دهد. اما همان‌طور که در شکل (٦-c) مشاهده می‌شود، اگر لزجت سیّال زیاد (حدوداً ۱۰ برابر آب) و کشش سطحی آن کم باشد، کشش سطحی قدرت کافی برای قطره‌قطره کردن غلتک را نداشته و پرش دایروی به یک چندضلعی تبدیل می‌شود.



شکل «٦»: اثر کشش سطحی بر باریکهٔ سیّال در حضور آشفتگی‌های موجود در سیّال [11]

این سؤال همچنان قابل طرح است که آشفتگی‌هایی که در حضور کشش سطحی و لزجت بر اساس پدیدهٔ رایلی-پلاتو علّت شکل‌گیری پدیدهٔ پرش هیدرولیکی چندضلعی هستند، چگونه وارد سیستم می‌شوند و آیا با کاهش یا حذف آنها می‌توان به جای پرش چندضلعی همچنان پرش دایروی پایدار داشت؟ در ادامه با شناسایی این آشفتگی‌ها و نوسانات به مطالعهٔ علّت شکل‌گیری پرش هیدرولیکی چندضلعی

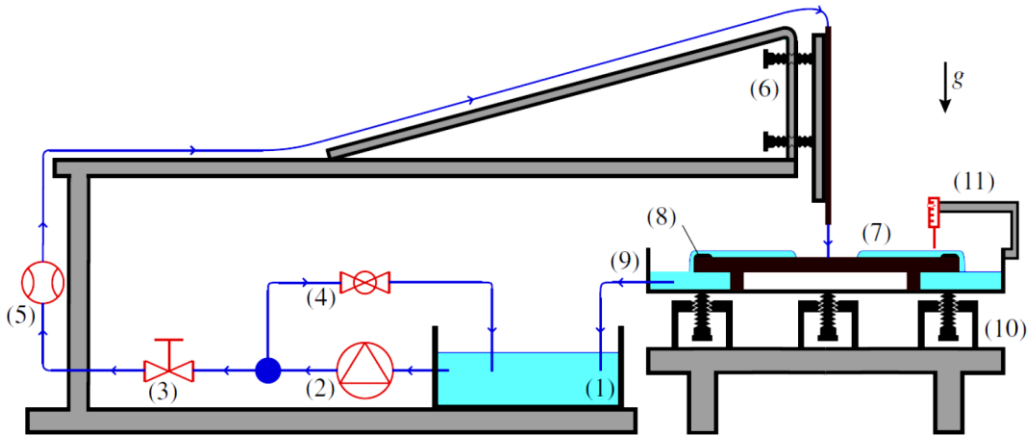
پرداخته می‌شود. همچنین علّت شکل‌گیری پرش‌های چندضلعی به شکل منتظم مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

آزمایش

شکل (۷) شماتیک دستگاه آزمایش مورد استفاده در این تحقیق را نشان می‌دهد. به‌طور اجمالی می‌توان گفت دستگاه آزمایش شامل یک مخزن اصلی برای نگهداری سیّال (۱)، پمپ برای پمپاژ سیّال (۲)، پایه‌های نگه‌دارنده، لوله‌هایی با قطرهای مختلف برای تنظیم اندازه قطر جت سیّال، صفحهٔ هدف دایروی (۷)، مخزن سرریز (۹)، مکانیزم‌های ترازبندی افقی و عمودی، مکانیزم‌های نوردهی و تصویربرداری، دبی‌سنج (۵)، ابزار اندازه‌گیری ارتفاع سیّال (ارتفاع سنج سوزنی) (۱۱)، کولیس دیجیتال و دماسنج است.

برای ایجاد یک جت سیّال متقارن محوری و کاملاً توسعه‌یافته، از لوله‌های عمودی با طول ثابت ۱۲۰ سانتی‌متر استفاده شده است. طول لوله‌ها آن‌قدر بلند انتخاب شده تا مسیر حرکت عمودی سیّال به اندازهٔ کافی طولانی شود و از توسعه‌یافتگی جریان کاملاً اطمینان حاصل شود.

سیّال پس از خروج از لولهٔ شیشه‌ای به‌صورت کاملاً عمودی به صفحهٔ هدف (۷) برخورد می‌کند. صفحهٔ هدف یک صفحهٔ شیشه‌ای دایروی با قطر ٤٥cm و ضخامت ٦mm است. صفحهٔ هدف درون یک ظرف سرریز (۹) ساخته شده از پلکسی گلس با ابعاد ۱۵cm×۵۵cm×۴۵cm و به فاصلهٔ حدوداً ۳cm بالاتر از کف این ظرف قرار می‌گیرد. به‌این‌ترتیب سیّال از روی صفحهٔ هدف به این مخزن سرازیر شده و از خروجی آن به سمت مخزن اصلی (۱) و یا در صورت نیاز به سمت دبی سنج (۵) هدایت می‌شود تا در نهایت یک سیکل آزمایش کامل گردد. موانع پایین‌دست که برای تبدیل پرش هیدرولیکی دایروی به پرش هیدرولیکی چندضلعی لازم است، از جنس شیشه یا پلکسی گلس هستند. فاصلهٔ دهانهٔ جت تا صفحهٔ هدف در تمام آزمایش‌ها ۱cm در نظر گرفته شد.

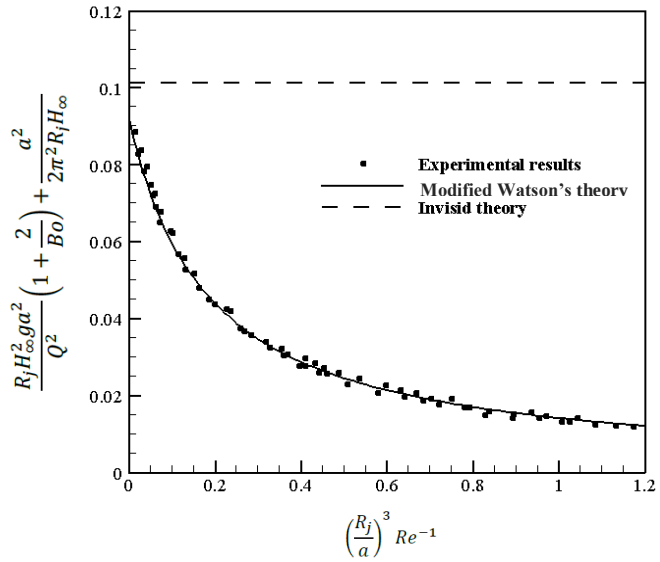


شکل «۷»: شماتیک دستگاه آزمایش مورد استفاده در این تحقیق. ۱) مخزن نگهداری سیّال، ۲) پمپ، ۳) شیر تنظیم دبی ٤) شیر مسیر فرعی، ٥) دبی سنج، ٦) مکانیزم ترازبندی عمودی، ۷) صفحه هدف شیشه‌ای، ۸) مانع پایین‌دست، ۹) مخزن سرریز، ۱۰) مکانیزم ترازبندی افقی و ۱۱) سیستم اندازه‌گیری ضخامت سیّال [18]

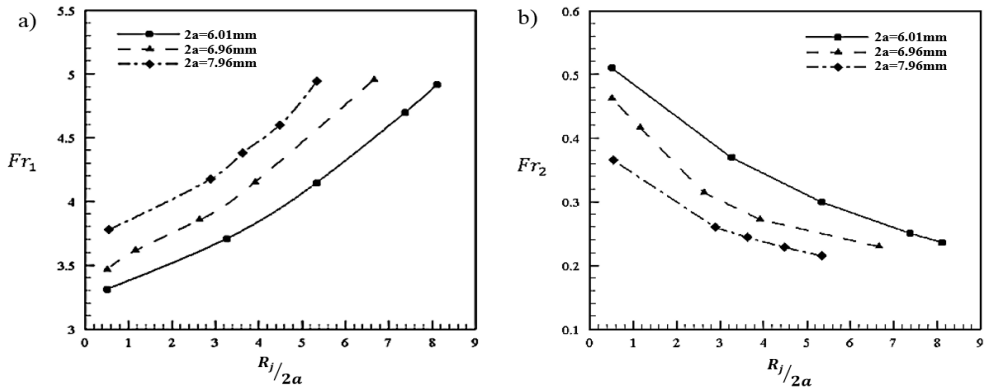
نتایج

برای بررسی دقّت نتایج آزمایشگاهی و صحّه‌گذاری بر عملکرد دستگاه آزمایش، در شکل (۸) نتایج پرش هیدرولیکی دایروی نوع I که با استفاده از یک جت شیشه‌ای به قطر $2a$=6.01mm به‌دست‌آمده است، با نتایج تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، عملکرد دستگاه مناسب بوده و نتایج آزمایشگاهی با دقّت خوبی بر نتایج تئوری منطبق هستند.

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، واتسون [5] تئوری خود را بدون در نظر گرفتن ساختار پرش (شکل ۳) ارائه کرد و این تئوری برای پرش‌های نوع یک که دارای یک گردابه زیرسطحی هستند، از دقّت بالایی برخوردار است. افزایش فشار زیر سطح در پرش باعث ایجاد جریان برگشتی (گردابه) می‌شود. شکل (۹) نمودار تغییرات عدد فرود در برابر شعاع بی‌بعد پرش را نشان می‌دهد.



شکل «۸»: مقایسهٔ نتایج پرش هیدرولیکی دایروی نوع I با تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون



شکل «۹»: a) تغییرات عدد فرود بالادست پرش در برابر شعاع بی‌بعد پرش و b) تغییرات عدد فرود پایین‌دست پرش در برابر شعاع بی‌بعد پرش

همان‌طور که انتظار می‌رود و در شکل (۹) نیز مشاهده می‌شود، عدد فرود در بالادست پرش (شکل ۹–a) بزرگ‌تر از یک (جریان فوق بحرانی) و در پایین‌دست پرش (شکل ۹–b) کمتر از یک (جریان زیربحرانی) است. نکتهٔ قابل توجّه در شکل (۹) این است که در شعاع‌های بی‌بعد بزرگ‌تر پرش، عدد فرود بالادست جریان (Fr_1) بیشتر و عدد فرود پایین‌دست جریان (Fr_2) کمتر است. به عبارتی هرچقدر شعاع بی‌بعد پرش افزایش یابد، اختلاف میان مقادیر Fr_1 و Fr_2 افزایش یافته و این به معنی افزایش اتلافات و در نتیجه افزایش فشار زیرسطحی است.

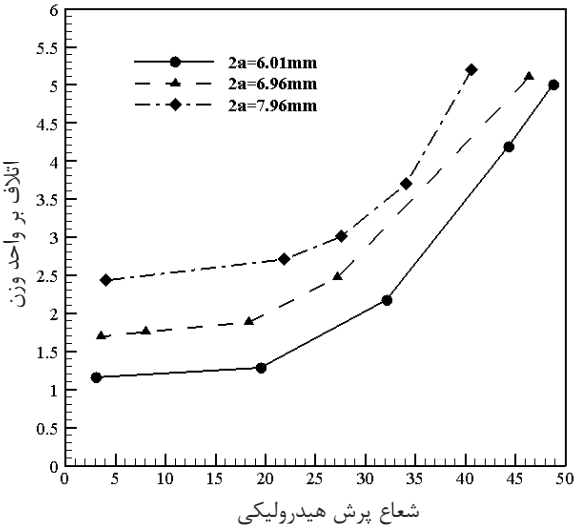
میزان اتلافات بر اساس قانون اول ترمودینامیک از طریق رابطهٔ (۸) محاسبه می‌شود [27]:

$$\frac{V_1}{2g} + h_1 = \frac{V_2}{2g} + h_2 + \left[(u_2 - u_1) - \frac{dQ_T}{dm}\right]\frac{1}{g} \quad (۸)$$

که در آن Q_T انتقال حرارت و u_1 و u_2 به ترتیب انرژی داخلی سیّال در قبل و بعد از پرش هستند. عبارت داخل کروشه در این معادله را می‌توان به‌عنوان افت انرژی بر واحد وزن در نظر گرفت. این رابطه با جایگزینی عدد فرود به شکل رابطهٔ (۹) در می‌آید:

$$\text{اتلاف بر واحد وزن} = h_1\left(\frac{Fr_1^2}{2}+1\right) - h_2\left(\frac{Fr_2^2}{2}+1\right) \quad (۹)$$

با توجّه به اینکه میزان تغییرات h_1 و h_2 کم است و از طرفی اعداد فرود دارای توان ۲ هستند، این رابطه وابستگی زیادی به اعداد فرود بالادست و پایین‌دست پرش دارد. شکل (۱۰) میزان اتلافات بر حسب شعاع پرش را نشان می‌دهد. با افزایش شعاع پرش میزان اتلافات افزایش می‌یابد. همان‌طور که گفته شد، افزایش فشار زیرسطحی منجر به ایجاد یک گردابه زیرسطحی و در نتیجه ایجاد ساختار پرش نوع I می‌شود (شکل ۳–a). اگر اختلاف میان دو عدد فرود بیشتر شود، فشار زیرسطحی بیشتر شده و باعث ایجاد یک گردابه دیگر در زیر سطح جریان می‌شود و به‌این‌ترتیب ساختار نوع IIa شکل می‌گیرد (شکل ۳–b). افزایش بیشتر اختلاف میان اعداد فرود می‌تواند پرش را به نوع IIb نیز تبدیل کند (شکل ۳–c). پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی در این نوع ساختار شکل می‌گیرند. به‌این‌ترتیب نحوهٔ شکل‌گیری ساختارهای پرش هیدرولیکی بر اساس اختلاف میان اعداد فرود بالادست و پایین‌دست پرش قابل توجیه است.



شکل «۱۰»: تغییرات اتلاف بر واحد وزن در مقابل شعاع پرش

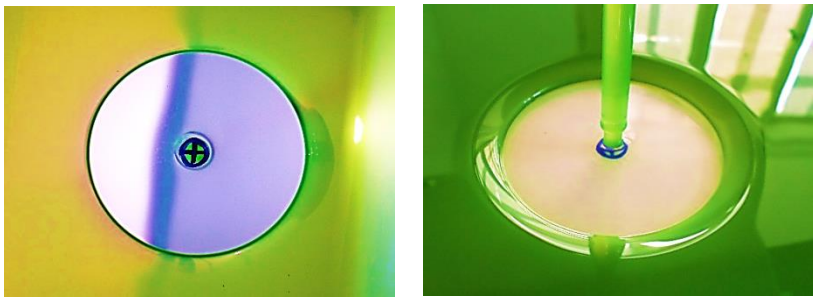
با توجّه به کارهای آزمایشگاهی قبلی که توسط دانشمندان انجام شده، در حضور یک مانع پایین‌دست با ارتفاع مشخص بر روی صفحه هدف، پرش هیدرولیکی به شکل چندضلعی ظاهر می‌شود. همان‌طور که در بخش تئوری شرح داده شد، آشفتگی‌ها باعث ایجاد ناپایداری و چندضلعی شدن پرش می‌شوند. این آشفتگی‌ها را می‌توان به چند دسته تقسیم‌بندی کرد که در جدول (۱) لیست شده‌اند. در این تحقیق، پیش‌بینی می‌شود که اگر بتوان به طریقی این آشفتگی‌ها و نوسانات را کاهش داد یا به حداقل رساند، پرش هیدرولیکی همچنان به‌صورت پایدار و دایروی باقی بماند. در جدول (۱)، روش حذف و یا کاهش ناپایداری‌ها نیز ذکر شده است. باید دقّت داشت

که پنجمین مورد اغتشاشات در این جدول را می‌توان با کاهش دبی جریان کاهش داد؛ اما اگر دبی جریان بیشتر شود، تقویت ناپایداری‌ها، باعث ناپایداری پرش دایروی می‌شوند. به کمک آزمایش‌ها می‌توان میزان دبی که در آن پرش دایروی ناپایدار می‌شود را اندازه‌گیری کرد.

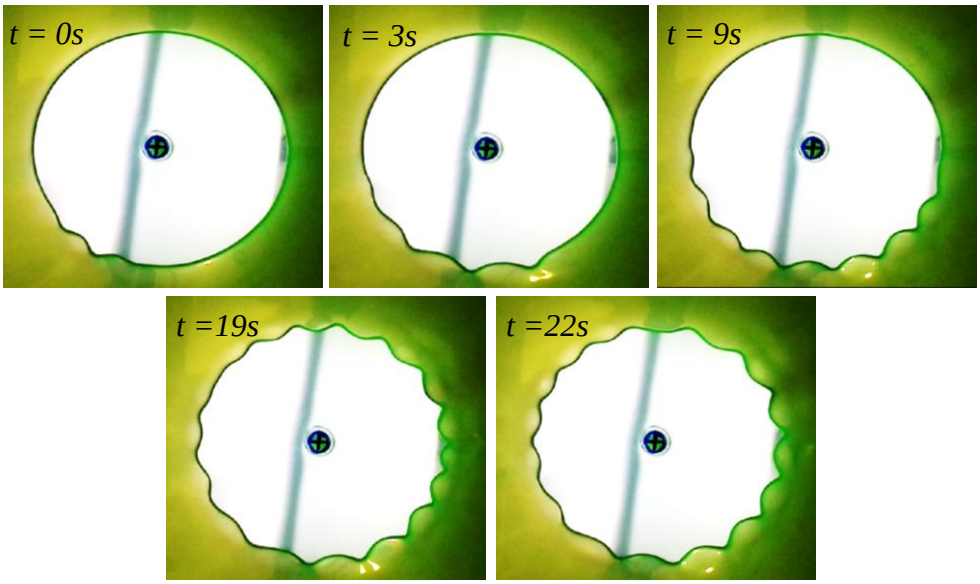
انجام آزمایش‌های متعدّد در این تحقیق نشان می‌دهد که پیش‌بینی نویسندگان این مقاله صحیح بوده و می‌توان با حذف یا کاهش انواع مختلف اغتشاشاتی که در جدول (۱) معرفی شدند، حتی در حضور یک مانع پایین‌دست، پرش هیدرولیکی دایروی پایدار ایجاد کرد. شکل (۱۱) نمای بالایی و پایینی یک پرش هیدرولیکی دایروی پایدار را در حضور یک مانع پایین‌دست متقارن دایروی به ارتفاع h=2.10mm نشان می‌دهد. شعاع این پرش با افزایش دبی افزایش می‌یابد تا اینکه بالاخره در یک دبی خاص، پرش هیدرولیکی دایروی، ناپایدار شده و از محلی بر روی محیط آن یک‌گوشه متولد می‌شود. در این حالت در عین ثابت ماندن دبی، تولید گوشه‌های جدید و بیشتر ادامه می‌یابد و گوشه‌ها بر روی محیط پرش دایروی حرکت می‌کنند تا همهٔ محیط پرش را فرامی‌گیرند و یک پرش هیدرولیکی چندضلعی شکل می‌گیرد. شکل (۱۲) روند ناپایداری یک پرش دایروی را در دبی ثابت و در طول زمان نشان می‌دهد. پیداست که با افزایش دبی یا عدد رینولدز که منجر به افزایش مومنتم سیّال می‌شود، حداقل آشفتگی‌ها در پرش تقویت شده و در یک عدد رینولدز خاص موجب ناپایداری پرش دایروی پایدار شده‌اند. این در حالی است که در تحقیقات قبلی در اعداد رینولدز بسیار کم نیز پرش هیدرولیکی چندضلعی پدیدار شده است.

جدول «۱»: انواع ناپایداری‌هایی که باعث ناپایداری یک پرش دایروی پایدار و شکل‌گیری یک پرش چندضلعی می‌شوند:

ردیف	نوع ناپایداری		علّت	روش حذف و یا کاهش ناپایداری
۱	اغتشاشات محیطی		عواملی مانند لرزش در سازه آزمایشگاه یا جریان هوا و ...	استفاده از یک اتاق بدون لرزش و ارتعاش با در و پنجره‌های بسته
۲	اغتشاشات ناشی از قسمت‌های متحرک و لرزاننده		حضور تجهیزات لرزان و ارتعاشی مانند پمپ	جدا کردن صفحه هدف و پایه‌ی نگه‌دارنده از سایر قسمت‌های دستگاه آزمایش
۳	اغتشاشات ناشی از تولید حباب و پدیدهٔ کاویتاسیون	تبخیری	سرعت بالای پره و ایجاد خلأ یا پایین آمدن فشار سیّال	افزایش قطر چشم پمپ، کاهش قطر خروجی و استفاده از شیرهای تنظیم دبی بشقابی
		نارسایی گذر از تیغه	تعویض نامناسب پره پمپ با یک پره بزرگ‌تر از حد استاندارد و گیر افتادن سیّال بین پره و پوسته	استفاده از پمپ مناسب با پره‌ی استاندارد
		مکش هوا از اتصالات	عدم آب‌بندی مناسب اتصالات	استفاده از لوله‌های پلی‌پروپیلن و اتصالات پرسی
٤	اغتشاشات ناشی از درهمی جریان		اصطکاک و زبری سطوح شامل لوله‌های ایجادکنندهٔ جت سیّال و صفحه هدف	استفاده از لوله‌های شیشه‌ای کاملاً صیقلی با دهانه پرداخت شده و صفحه هدف شیشه‌ای
۵	اغتشاشات ناشی از برخورد سیّال به صفحه هدف و تولید امواج سطحی		برخورد سیّال به صفحه هدف و مومنتم سیّال ورودی به محدودهٔ پرش	کاهش مومنتم ورودی به محدودهٔ پرش از طریق کاهش دبی



شکل «۱۱»: پرش هیدرولیکی دایروی پایدار با ساختار نوع IIb در حضور مانع پایین‌دست با ارتفاع h=2.10mm (Q=82.23ml/s)

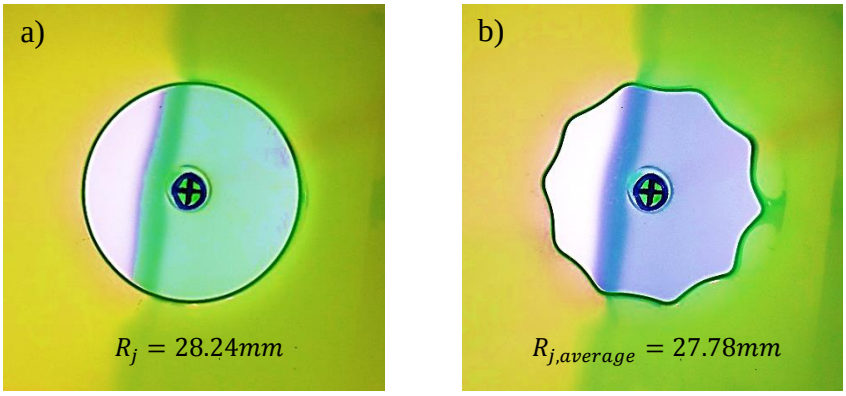


شکل «۱۲»: روند ناپایدار شدن یک پرش هیدرولیکی دایروی پایدار با ساختار نوع IIb در حضور مانع پایین‌دست با ارتفاع h=2.10mm (Q=123.16ml/s)

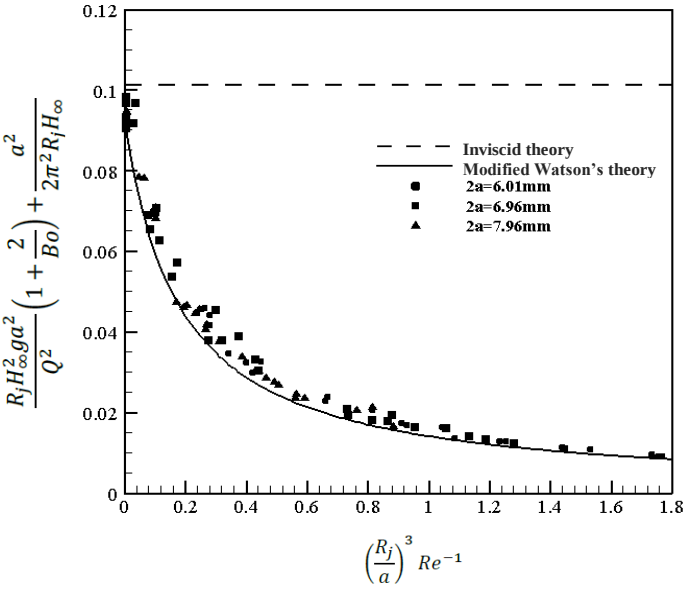
پرش هیدرولیکی دایروی ایجاد شده را می‌توان با ایجاد نوسانات یا اغتشاشاتی، مانند اغتشاشات محیطی یا تغییر ناگهانی دبی، ناپایدار کرده تا به یک پرش هیدرولیکی چندضلعی تبدیل شود. به عبارتی می‌توان در یک دبی ثابت و بدون تغییر در خواص فیزیکی و شیمیایی سیّال (مانند کاهش کشش سطحی سیّال با افزودن یک ماده به آن [11]) و با تولید ناپایداری، یک پرش هیدرولیکی پایدار را به یک پرش هیدرولیکی چندضلعی در همان دبی تبدیل کرد. شکل (۱۳-a) یک پرش دایروی پایدار در دبی Q=56.95 ml/s و شکل (۱۳-b) پرش ۱۰ ضلعی متناظر پرش دایروی در همان دبی را نشان می‌دهد. هر دوی این پرش‌ها با تعبیهٔ یک مانع پایین‌دست به ارتفاع h=2.10mm شکل گرفته‌اند.

ساختار این پرش‌های هیدرولیکی پایدار از نوع IIb است (شکل ۳ و ۹).

شکل (۱٤) مقایسهٔ نتایج پرش‌های دایروی پایدار به‌دست‌آمده در این تحقیق را با تئوری اصلاح شدهٔ واتسون، در سه قطر مختلف جت سیّال، نشان می‌دهد. نتایج به‌دست‌آمده در دبی‌های مختلف با دقّت خوبی با تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون تطابق دارد. این تطابق در شعاع‌های کم‌وزیاد دقّت بیشتری دارد؛ اما در شعاع‌های میانی، اختلاف کمی میان نتایج آزمایشگاهی و نتایج تئوری وجود دارد که احتمالاً به این دلیل است که در تئوری واتسون اثر نوع ساختار پرش دایروی در نظر گرفته نشده است.



شکل «۱۳»: a) پرش هیدرولیکی دایروی پایدار و b) پرش هیدرولیکی چندضلعی ایجادشده بر اثر ایجاد اغتشاش در پرش دایروی a در دبی ثابت (Q=56.95 ml/s)



شکل «۱٤»: مقایسهٔ نتایج پرش‌های دایروی پایدار به‌دست‌آمده در این تحقیق با تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون

بنابراین یکی از دستاوردهای کار حاضر این است که بر خلاف کارهای قبلی و با حذف اغتشاشات و نوسانات از جریان، سیستم و محیط، پرش دایروی پایدار از اعداد رینولدز کم که در آن شعاع پرش تقریباً برابر با شعاع دهانه نازل است تا اعداد رینولدز بالا شکل می‌گیرد. در آزمایش‌های تحقیق حاضر، حداکثر محدودهٔ پایداری پرش دایروی از حدود عدد رینولدز ۳۱۲ تا حدود عدد رینولدز ٤٦٢٤ است. در اعداد رینولدز کمتر از ۳۱۲ پرش هیدرولیکی شکل نمی‌گیرد. به عبارتی در کمتر از این مقدار عدد رینولدز، سیّال انرژی کافی برای ایجاد یک پرش هیدرولیکی را ندارد. این در حالی است که در آزمایش‌های قبلی، وجود نوسانات و اغتشاشات باعث شده است تا پرش هیدرولیکی از حداقل عدد رینولدز ۵۰۰ به بالا به‌صورت چندضلعی باشد [18]. این عدد رینولدز، حداقل مقدار عدد رینولدز مورد نیاز برای شروع شکل‌گیری یک پرش هیدرولیکی است که به‌صورت دو ضلعی یا چشم است؛ اما در اینجا این سؤال مطرح

می‌شود که چرا پس از وارد شدن اغتشاشات و شکل‌گیری پرش چندضلعی، این پرش به‌صورت متقارن و منتظم است؟ با توجّه به اینکه اغتشاشات و نوساناتی که در جدول (۱) به آنها اشاره شد، همگی تصادفی هستند و هیچ نظم یا تقارن خاصی ندارند.

در ادامه ثابت می‌شود که در یک دبی ثابت، مساحت داخل پرش‌های مختلف (اعم از دایروی و غیر دایروی) که ممکن است شکل گیرند، تقریباً برابر است؛ زیرا پارامتر مهم و مؤثر در مساحت داخل پرش هیدرولیکی، دبی است و افزایش یا کاهش دبی به‌طور مستقیم بر مساحت داخل پرش تأثیر می‌گذارد. جدول (۲) مقایسهٔ مساحت داخل دو نوع پرش دایروی و پرش چندضلعی متناظر، در دبی یکسان را نشان می‌دهد. پرش‌های چندضلعی این جدول به‌وسیلهٔ اعمال اغتشاشات محیطی (زدن ضربه با یک جسم خارجی به محیط پرش دایروی پایدار) ایجاد شده‌اند. پرش چندضلعی ایجاد شده پس از گذر مدتی زمان، به آهستگی به یک پرش دایروی پایدار در همان دبی برمی‌گردد.

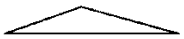
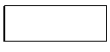
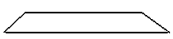
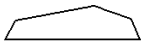
بررسی نتایج مربوط به مساحت داخل پرش در جدول (۲)، نشان می‌دهد که برای یک پرش دایروی و پرش چندضلعی متناظر در دبی ثابت، مساحت داخل پرش با درصد اختلاف نسبی کمتر از ۱۰/٦٦ در دبی‌های مختلف، برابر است. افزایش دبی، درصد اختلاف نسبی را افزایش می‌دهد. دلیل این امر آن است که با افزایش دبی و به‌تبع آن افزایش شعاع پرش هیدرولیکی، اثر مانع پایین‌دست جریان بر پرش هیدرولیکی بیشتر شده و باعث افزایش اختلاف نسبی می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که مساحت داخل پرش‌های مختلفی که ممکن است در یک دبی ثابت شکل گیرند، تقریباً برابر است. پس همهٔ شکل‌های چندضلعی با تعداد اضلاع برابر که ممکن است در یک دبی ثابت اتفاق بیفتند، دارای مساحت داخل پرش برابر خواهند بود؛ اما چرا از بین همهٔ چندضلعی‌های با تعداد اضلاع برابر که ممکن است در یک دبی ثابت ایجاد شوند، پرش به شکل چندضلعی منتظم درمی‌آید؟

به‌عنوان یکی دیگر از دستاوردهای تحقیق حاضر باید گفت که علّت آن است که پرش هیدرولیکی به دلیل حضور کشش سطحی تمایل دارد که کمترین مساحت رویه در پرش را ایجاد کند. کمترین مساحت رویه در بین پرش‌های چندضلعی با تعداد اضلاع و مساحت داخل برابر، مربوط به پرش چندضلعی منتظم است. این ادعا با توجّه به نتایج موجود در جدول (۳) به اثبات می‌رسد. هر چه محیط پرش بزرگ‌تر باشد، مساحت رویهٔ پرش نیز بزرگ‌تر خواهد بود.

جدول «۲»: مقایسهٔ مساحت‌های پرش دایروی پایدار و چندضلعی متناظر آن در دبی ثابت

اختلاف نسبی (٪)	مساحت پرش (cm^2)	تعداد اضلاع پرش	شکل پرش	دبی (ml/s)	شماره آزمایش
۱/۸۷	۹/٦۱	–	دایره	۳۷/٥٤	۱
	۹/٤۳	٤	چندضلعی		
۲/٦۹	۲٥/۳۲	–	دایره	٥۲/٤۸	۲
	۲٤/٦٤	۸	چندضلعی		
۳/۲۰	۳۲/۳۷	–	دایره	٦٤/۸۱	۳
	۳۱/۳٤	۱۱	چندضلعی		
۷/٤۷	٤۰/٦٥	–	دایره	۷۳/۹۱	٤
	۳۷/٦۱	۱۲	چندضلعی		
۱۰/٦٦	٤٦/۹۱	–	دایره	۸۳/۸۲	٥
	٤۱/۹۱	۱۳	چندضلعی		

جدول «۳»: مقایسهٔ محیط چندضلعی‌های با مساحت برابر

چشم یا بیضی	شکل چندضلعی				
	مساحت چندضلعی(mm^2)	۱۰۰۰/۰۷۹			
	محیط چندضلعی (mm)	۱٤٥/۲۱۱			
سه ضلعی	شکل چندضلعی				
	مساحت چندضلعی(mm^2)	۱۰۰۰/۰٤۸	۱۰۰۰/۰۸٤	۱۰۰۰/۰۰٦	۱۰۰۰/۰٥٦
	محیط چندضلعی (mm)	۱٤٤/۱۷۲	۱٤٦/٤۱٦	۱٤٦/٥۱۲	۲٤۸/۳۹۲
چهار ضلعی	شکل چندضلعی				
	مساحت چندضلعی(mm^2)	۱۰۰۰/۰۷٦	۱۰۰۰/۰۷٥	۱۰۰۰/۰۲۳	۱۰۰۰/۰۷۸
	محیط چندضلعی (mm)	۱۲٦/٤۹٦	۱۲۹/۷٤۰	۱٤۸/٥۳۸	۲۱۹/۳۱۱
پنج ضلعی	شکل چندضلعی				
	مساحت چندضلعی(mm^2)	۱۰۰۰/۰۹۳	۱۰۰۰/۰۹۸	۱۰۰۰/۰٤۹	۱۰۰۰/۰۱٥
	محیط چندضلعی (mm)	۱۲۰/٥٥۰	۱۲۱/۷۸۳	۱۲۷/٥۸۰	۱۷۱/۷٤۳
دایره	شکل چندضلعی				
	مساحت چندضلعی(mm^2)	۱۰۰۰/۰٥۰			
	محیط چندضلعی (mm)	۱۱۲/۱۰۳			

اگر محیط پرش را نماینده‌ی مساحت رویهٔ پرش در نظر بگیریم، جدول (۳) نشان می‌دهد که کمترین محیط چندضلعی (و بنابراین کمترین مساحت رویهٔ پرش) در بین چندضلعی‌های با تعداد اضلاع و مساحت داخل برابر، مربوط به چندضلعی منتظم است. توجّه به این نکته مهم است که در شکل‌گیری پرش هیدرولیکی چندضلعی، صفحهٔ هدف باید کاملاً افقی و جت سیّال باید کاملاً عمودی باشد. در این شرایط، همواره کشش سطحی سعی دارد تا پرش هیدرولیکی چندضلعی را به شکل منتظم درآورد.

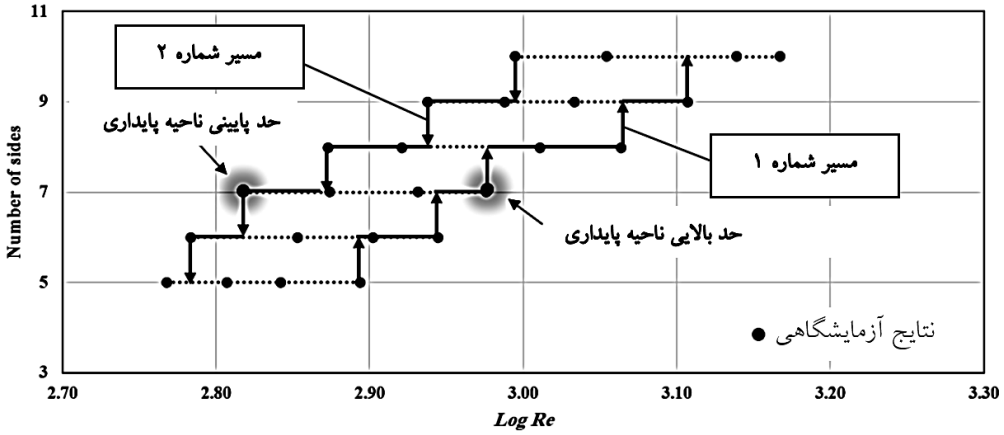
با دقّت در جدول (۳) همچنین می‌توان علّت رفتار پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی و شکل‌گیری محدودهٔ پایداری که در شکل (۵) نشان داده شده را تفسیر کرد. در حضور اغتشاشات، پرش هیدرولیکی به شکل یک چندضلعی منتظم درمی‌آید. در دبی‌های کم (نیروی مومنتم کم)، شکل پرش به‌صورت بیضی یا چشم خواهد بود. با افزایش دبی که منجر به افزایش نیروی مومنتم نیز می‌شود، اندازهٔ پرش رشد کرده و مساحت داخل و رویهٔ آن بیشتر می‌شود. هم‌زمان نیروی کشش سطحی به‌عنوان یک نیروی مقاوم سعی در ایجاد کمترین مساحت رویه را دارد؛ بنابراین با اضافه کردن یک‌گوشه و یک ضلع مساحت رویه را کاهش می‌دهد و شکل پرش، به یک مثلث تبدیل می‌شود؛ زیرا در این دبی، مساحت رویه برای پرش مثلثی کمتر از مساحت رویهٔ بیضی نهایی است. مجدداً با افزایش دبی، سطح داخل و رویهٔ پرش افزایش می‌یابد تا اینکه مجدداً

کشش سطحی با اضافه کردن یک‌گوشه و ضلع جدید، افزایش مساحت رویه را کاهش داده و پرش تبدیل به یک مربع می‌شود. به همین ترتیب با افزایش دبی، روند افزایش گوشه‌ها و اضلاع در پرش ادامه می‌یابد و در واقع کشش سطحی با اضافه کردن گوشه‌ها و اضلاع جدید در پرش، سعی می‌کند تا شکل پرش را به شکل یک پرش دایروی نزدیک کند و به کمترین مساحت رویه برسد؛ اما به دلیل حضور اغتشاشات، هیچ‌گاه این پرش به یک پرش دایروی پایدار تبدیل نخواهد شد. به‌این‌ترتیب حد بالای پایداری حاصل می‌شود (مسیر شماره یک در شکل (۱۵)).

همان‌طور که در شکل (۱۵) مشاهده می‌شود با افزایش $\log Re$ پرش هیدرولیکی ۵ ضلعی پایدار خواهد بود تا اینکه بالاخره با افزایش یک ضلع و یک‌گوشه به یک ٦ ضلعی تبدیل می‌شود. اکنون پرش ٦ ضلعی با افزایش $\log Re$ پایدار خواهد بود تا اینکه بالاخره با افزایش یک ضلع و یک‌گوشه به یک ۷ ضلعی تبدیل شود. روند افزایش گوشه و ضلع به همین ترتیب ادامه خواهد داشت. این مشاهدهٔ تجربی با حل چندضلعی تئوری مرجع [20] که برای اعداد موج بی‌بعد خیلی بزرگ‌تر از ۱۰، پرش چندضلعی به یک دایره همگرا می‌شود، مغایرت دارد.

مسیر شمارهٔ ۲ در شکل (۱۵) حد پایین پایداری را نشان می‌دهد که با کاهش دبی (کاهش مومنتم) حاصل می‌شود. اگر از نیروهای اصطکاک و فشار هیدرواستاتیک صرف‌نظر کنیم، نیروی کشش سطحی و مومنتم در هر لحظه با یکدیگر موازنه می‌شوند. با کاهش دبی (کاهش نیروی مومنتم) پرش هیدرولیکی کوچک می‌شود. به‌عنوان‌مثال اگر یک پرش ۹ ضلعی داشته باشیم، با کاهش دبی، اندازه پرش کوچک می‌شود. به‌طور هم‌زمان با کاهش نیروی مومنتم، نیروی کشش سطحی نیز کاهش یافته و در یک‌لحظه سیّال افزایش سطح رویه می‌دهد. این افزایش سطح رویه با کاهش یک ضلع و یک‌گوشه انجام می‌شود و پرش ۹ ضلعی به یک پرش ۸ ضلعی تبدیل می‌شود. در ادامه با کاهش دبی پرش ۸ ضلعی کوچک شده و نیروی کشش سطحی نیز کاهش می‌یابد تا اینکه در یک‌لحظه پرش ۸ ضلعی با کاهش یک ضلع و یک‌گوشه، به یک پرش ۷ ضلعی تبدیل می‌شود. این روند با کاهش دبی ادامه می‌یابد.

به‌این‌ترتیب و با دقّت در شکل (۱۵) می‌توان دریافت که در یک رژیم پارامتری ثابت (به‌عنوان‌مثال $\log Re=3$) می‌توان پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی با تعداد ۸، ۹ و ۱۰ ضلع داشت. رژیم پارامتری ثابت به این معنی است که تمام پارامترهای حاکم بر آزمایش ازجمله دبی حجمی، ارتفاع پایین‌دست، قطر جت، نوع سیّال و... ثابت و بدون تغییر باشد.



شکل «۱۵»: نمودار پایداری پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی ($2a$=1.03cm و $H_{obstacle}$=0.22cm)

نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک مطالعهٔ پدیده‌شناسی بر روی پرش‌های هیدرولیکی چندضلعی و علّت شکل‌گیری آن انجام شد. علّت شکل‌گیری پرش‌های چندضلعی به‌صورت منتظم، مورد بررسی قرار گرفت. همچنین نوع رفتار پرش‌های چندضلعی که با کاهش یا افزایش دبی به ترتیب به‌صورت کاهش یا افزایش تعداد اضلاع و گوشه‌های چندضلعی ظاهر می‌شود، مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج زیر به دست آمد:

- نشان داده شد که علّت واقعی پدیدهٔ پرش هیدرولیکی چندضلعی، حضور اغتشاشات و نوساناتی در جریان، محیط و یا سیستم دستگاه آزمایش است که بر اساس پدیدهٔ رایلی-پلاتو و در حضور کشش سطحی و لزجت منجر به ایجاد این پدیده می‌شود.
- بر خلاف تحقیقات قبلی، با شناسایی و کاهش اغتشاشات جریان، محیط و سیستم، در شرایط فیزیکی و هندسی کار حاضر، پرش هیدرولیکی تا حدود عدد رینولدز ٤٦٠٠ به شکل دایروی و پایدار باقی می‌ماند.
- افزایش دبی جریان، باعث تقویت ناپایداری‌ها و در نتیجه ناپایداری پرش دایروی می‌شود.
- پرش‌های هیدرولیکی دایروی پایدار این تحقیق، همگی از نوع IIb هستند و مطابقت نسبتاً خوبی با تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون دارند. دقّت نتایج در شعاع‌های پرش کم‌وزیاد، بسیار خوب است؛ اما در شعاع‌های میانی، کمی اختلاف میان نتایج آزمایشگاهی و تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون به چشم می‌خورد. علّت اختلاف میان نتایج آزمایشگاهی و تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون این است که در تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون اثر نوع ساختار پرش در نظر گرفته نشده است. تئوری اصلاح‌شدهٔ واتسون دقّت بسیار خوبی برای پرش‌های دایروی نوع I دارد.
- کشش سطحی سیّال سعی می‌کند تا کمترین مساحت رویهٔ ممکن را در پرش ایجاد کند. چون کمترین مساحت رویه در بین چندضلعی‌های مختلف با تعداد اضلاع برابر مربوط به چندضلعی منتظم است، پرش هیدرولیکی چندضلعی به‌صورت متقارن و منتظم شکل می‌گیرد.

واژه‌نامه

پرش هیدرولیکی	Hydraulic jump
پرش چند ضلعی	Polygonal jump
چند پایایی	Hysteresis
غلتک	Roller
گوشه	Corner
مانع پایین دست	Downstream obstacle
پرش منتظم	Regular jump
رژیم پارامتری ثابت	Fixed parametric regime

مراجع

1. Avedisian, C. and Zhao, Z., "The circular hydraulic jump in low gravity", *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society*, pp. 2127-2151, (2000).
2. Kate, R., Das, P. and Chakraborty, S., "An Investigation on non-circular hydraulic jumps formed due to obliquely impinging circular liquid jets", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 32, pp. 1429-1439, (2008).
3. Rayleigh, L., "On the theory of long waves and bores", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, pp. 324-328, (1914).
4. Birkhoff, G. and Zarantonello, E., "*Jets, Wakes, and Cavities*", Academic Press, New York, (1957).

5. Watson, E., "The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 20, pp. 481-499, (1964).
6. Craik, A., Latham, R., Fawkes, M. and Gribbon, P., "The circular hydraulic jump", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 112, pp. 347-362, (1981).
7. Errico, M., "*A study of the interaction of liquid jets with solid surfaces*", University of California, San Diego, (1986).
8. Liu, X. and Lienhard, J. H., "The hydraulic jump in circular jet impingement and in other thin liquid films", *Experiments in Fluids*, Vol. 15, pp. 108-116, (1993).
9. Higuera, F., "The hydraulic jump in a viscous laminar flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 274, pp. 69-92, (1994).
10. Bush, J.W. and Aristoff, J.M., "The influence of surface tension on the circular hydraulic jump", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 489, pp. 229-238, (2003).
11. Bush, J.W., Aristoff, J.M. and Hosoi, A., "An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 558, pp. 33-52, (2006).
12. Yokoi, K. and Xiao, F., "A numerical study of the transition in the circular hydraulic jump", *Physics Letters A*, Vol. 257, pp. 153-157, (1999).
13. Yokoi, K. and Xiao, F., "Mechanism of structure formation in circular hydraulic jumps: Numerical studies of strongly deformed free-surface shallow flows", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 161, pp. 202-219, (2002).
14. Mikielewicz, J. and Mikielewicz, D., "A simple dissipation model of circular hydraulic jump", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 17-21, (2009).
15. Passandideh-Fard, M., Teymourtash A. R. and Khavari, M., "Numerical study of circular hydraulic jump using Volume-of-fluid method", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 133, p. 011401, (2011).
16. Hirt, C. W. and Nichols, B. D. "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", *Journal of Computational Physics*, Vol. 39, pp. 201-225, (1981).
17. Ellegaard, C., Hansen, A. E., Haaning, A., Hansen, K., Marcussen, A., Bohr, T., Hansen, J. L. and Watanabe, S., "Cover illustration: Polygonal hydraulic jumps", *Nonlinearity*, Vol. 12, p. 1, (1999).
18. Teymourtash, A.R. and Mokhlesi, M., "Experimental investigation of stationary and rotational structures in non-circular hydraulic jumps", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 762, pp. 344-360, (2015).
19. Martens, E.A., Watanabe, S. and Bohr, T., "Model for polygonal hydraulic jumps", *Physical Review E*, Vol. 85, p. 036316, (2012).
20. Rojas, N. and Tirapegui, E., "Harmonic solutions for polygonal hydraulic jumps in thin fluid films", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 780, pp. 99-119, (2015).
21. Rojas, N.O., Argentina, M., Cerda, E. and Tirapegui, E., "Inertial Lubrication Theory", *Physical Review Letters*, Vol. 104, p. 187801, (2010).
22. Ellegaard, C., Hansen, A.E., Haaning, A. and Bohr, T., "Experimental results on flow separation and transitions in the circular hydraulic jump", *Physica Scripta*, Vol. 105, (1996).
23. Kasimov, A.R., "A stationary circular hydraulic jump, the limits of its existence and its gasdynamic analogue", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 601, pp. 189-198, (2008).
24. Plateau, J., "*Statique Expe´rimentale et The´orique des Liquides*", Gauthier-Villars, Paris, (1873).
25. Rayleigh, L., "On the Instability of Jets", *Proceeding London Mathematical Society*, Vol. 10, pp. 4-13, (1878).
26. Javadi, A., Eggers, J., Bonn, D., Habibi, M. and Ribe, N.M., "Delayed Capillary Breakup of Falling Viscous Jets", *Physical Review Letters*, Vol. 110, pp. 144501-144504, (2013).
27. Shames, I.H., "*Mechanics of Fluid*", 4th Edition, McGraw-Hill, (2003).

(مقالهٔ پژوهشی)

ضریب اصطکاک جریان مغشوش سیّال پایه و نانوسیّال از دیدگاه آماری*

فرهاد وحیدی نیا[۱] قنبرعلی شیخ‌زاده[۲]

چکیده *در این مقاله، روابط ارائه شده در متون علمی برای ضریب اصطکاک جریان مغشوش سیّال پایه و نانوسیّال به‌صورت آماری بررسی و تحلیل شده است. به‌منظور تحلیل آماری و انتخاب بهترین تابع توزیع احتمال برای پارامتر ضریب اصطکاک، از ٤٨ تابع توزیع احتمالاتی و ۳ آمارهٔ کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای استفاده شده است. پس از تجزیه‌وتحلیل نتایج، مشخص گردید که بر اساس هر سه آماره، تابع توزیع احتمال ضریب اصطکاک در سیّال پایه و نانوسیّال، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است. همچنین مشاهده گردید که تابع توزیع احتمال ضریب اصطکاک سیّال پایه و نانوسیّال نسبت به تابع توزیع نرمال پهن‌تر است. از طرفی دیگر، چولگی تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی به طرف راست است.*

واژه‌های کلیدی ضریب اصطکاک؛ تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی؛ جریان مغشوش؛ آماره‌های کولموگروف-اسمیرنوف؛ اندرسون-دارلینگ و مربع کای.

The Friction Factor of Turbulent Flow of the Base Fluid and Nanofluid in the Statistical Approach

F. Vahidinia G.A. Sheikhzadeh

Abstract *In this paper, the presented correlations in scientific literature for friction factor of turbulent flow in the base fluid and nanofluid has been analyzed statistically. In order to perform the statistical analysis and select the best probability distribution function for the friction factor, from 48 probability distribution functions and 3 statistic of Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling and chi squared has been used. The results show that, based on all three statistics, the probability distribution function of the friction factor in the base fluid and nanofluid is the Johnson SB probability distribution function. Furthermore, it was observed that the probability distribution function of the friction factor of the base fluid and nanofluid is wider than the normal distribution function. On the other side, the probability distribution function of Johnson SB has a right skewness.*

Key Words Friction Factor, Johnson SB Probability Distribution Function, Turbulent Flow, The Statistics of Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling and Chi Squared.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/٤/۲۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۱/۲۵ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.81926

(۱) دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

(۲) نویسندهٔ مسئول: استاد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران sheikhz@kashanu.ac.ir

مقدّمه

یکی از پارامترهای مهمی که در انتقال سیّالات همواره مورد توجّه قرار می‌گیرد ضریب اصطکاک دیواره است. ضریب اصطکاک در جریان سیّال به متغیرهای مختلفی وابسته است. این متغیرها در سیّال پایه عبارت‌اند از عدد رینولدز و ساختار جریان از لحاظ آرام یا مغشوش بودن و در جریان نانوسیّال علاوه بر دو متغیر عدد رینولدز و ساختار جریان به متغیرهای دیگری از قبیل کسر حجمی نانوذرات، اندازه و شکل نانوذرات نیز وابسته است [1]. متغیرهای مستقل دیگری نیز در توسعه روابط ضریب اصطکاک مشاهده می‌شود که شامل ابعاد کانال و عدد پرانتل می‌باشند [2]. بعضی از روابط نیز فقط بر حسب فشار جریان سیّال و نسبت منظری کانال ارائه شده‌اند [3]. هدف از مطالعهٔ حاضر بررسی روابط ضریب اصطکاک در جریان مغشوش سیّال پایه و نانوسیّال و تحلیل آماری این پارامتر است. به همین دلیل در این مقاله از روابط ارائه شده برای ضریب اصطکاک سیّال پایه و نانوسیّال در جریان مغشوش استفاده می‌شود.

نانوسیّالات دسته‌ای از سیّالات انتقال حرارت هستند که ذرات فلزی و نافلزی در ابعاد کمتر از ۱۰۰ نانومتر در آن معلق بوده و به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای پتانسیل انتقال حرارت را افزایش می‌دهند [4]. از نانوسیّالات با هدف بهبود و افزایش انتقال حرارت بجای سیّالات پایه‌ای چون آب و اتیلن گلیکول استفاده می‌شود. در حوزهٔ نانوسیّالات در سال‌های اخیر پژوهش‌های زیادی انجام شده است که اغلب از نانوذرات مختلفی از جمله Al_2O_3، TiO_2، CuO، SiO_2، Cu، $CNTs$، ZnO، $GNPs$، Fe_3O_4 و Ag و سیّالات پایه‌ای چون آب، روغن، اتیلن گلیکول، پروپیلن گلیکول و مخلوط آب و اتیلن گلیکول استفاده شده است [5]. دانشمندان در مطالعات نانوسیّالات معمولاً دو موضوع را مورد بررسی قرار می‌دهند. موضوع اوّل اینکه با استفاده از نانوسیّال مقدار افزایش انتقال حرارت چقدر است و موضوع دوم، افزایش افت فشار ناشی از استفاده از نانوسیّال چه مقدار است. در پایان مطالعه نیز بر اساس داده‌های آزمایشگاهی و یا عددی روابطی جهت عدد ناسلت و ضریب اصطکاک ارائه می‌نمایند [6, 7]. شرما و همکاران [8] با قرار دادن نوارهای پیچشی با نسبت پیچش مختلف در داخل یک لولهٔ دایره‌ای شکل، به‌طور تجربی جریان مغشوش سیّال نانوی اکسید آلومینیوم-آب را مطالعه نمودند. آنها رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز، کسر حجمی ذرات نانو و نسبت پیچش نوار توسعه دادند. مطالعهٔ آزمایشگاهی انتقال حرارت و افت فشار نانوسیّال نانولوله‌های کربنی چند دیواره و سیّال پایه آب در یک لوله افقی حاوی کوئل سیمی توسط اخوان بهابادی و همکاران [9] انجام شد. آنها بر اساس متغیرهای مستقل عدد رینولدز، کسر حجمی ذرات نانو، نسبت ارتفاع کوئل به قطر لوله و نسبت گام کوئل به قطر لوله رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک ارائه کردند. بر اساس روابط توسعه داده شده ضریب اصطکاک، مشاهده می‌شود که سیستم‌های انتقال سیّالات و تأسیسات انتقال حرارت شامل عدم قطعیّت‌هایی می‌باشند. این عدم قطعیّت‌ها در واقع همان متغیرهای مستقل شامل عدد رینولدز، کسر حجمی و قطر نانوذرات، هندسه جریان، نسبت پیچش نوارهای داخل کانال و نسبت منظری می‌باشند؛ بنابراین تغییر هر متغیر منجر به تغییر ضریب اصطکاک و افت فشار جریان می‌شود؛ لذا، جهت کارایی مناسب سیستم‌ها، تحلیل آماری متغیرهای وابسته‌ای همانند ضریب اصطکاک ضرورت دارد. وحیدی‌نیا و همکاران [10] بر اساس تحلیل آماری، اثر کسر حجمی نانوذرات را در انتقال حرارت جابجایی جریان مغشوش در یک لولهٔ دایره‌ای شکل مطالعه نمودند. آنها نتیجه گرفتند مناسب‌ترین تابع توزیع دو پارامتری برای ضریب انتقال حرارت، تابع توزیع گمبل ماکزیمم است. آنها در مطالعه‌ای دیگر [۱۱] اثر قطر نانوذرات را بر خواص

آماری جریان مغشوش نانوسیّال بررسی کردند و دریافتند که تابع توزیع احتمال فسچر مناسب‌ترین تابع توزیع برای عدد ناسلت است.

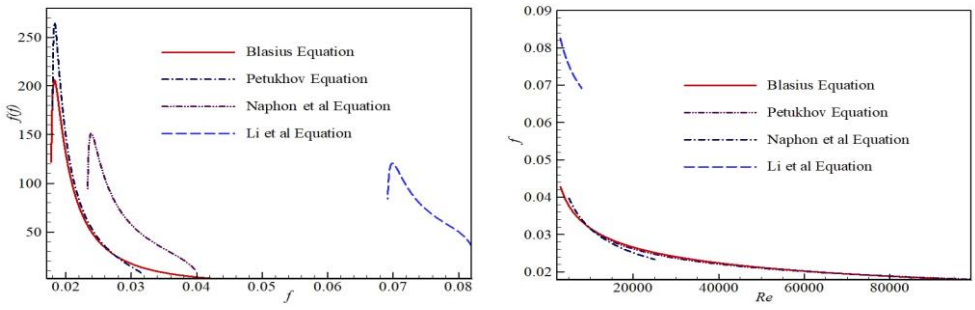
در مقالهٔ حاضر، ابتدا روابط ضریب اصطکاک ارائه شده برای سیّال پایه و نانوسیّال در جریان مغشوش مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با عنایت به اهمّیّت عدد رینولدز در جریان مغشوش بر اساس تغییر این متغیر، تحلیل آماری صورت گرفته است. جهت تحلیل آماری از نرم‌افزار ایزی‌فیت استفاده شده است. بر اساس داده‌های ضریب اصطکاک، از ٤٨ تابع توزیع احتمال مختلف با استفاده از تست‌های کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای، بهترین تابع توزیع احتمال متغیر وابسته ضریب اصطکاک گزینش شده است.

روابط ارائه شده برای سیّال پایه و تحلیل آماری آنها

پس از بررسی پژوهش‌های مختلف در حوزهٔ نانوسیّال مشاهده گردید که اکثر محقّقان جهت مقایسهٔ نتایج عددی و آزمایشگاهی ضریب اصطکاک و اطمینان از صحت مطالعهٔ انجام شده اغلب از دو رابطهٔ بلازیوس [12] و پتوخوف [13] استفاده می‌نمایند. این روابط در جدول (١) آورده شده است. همچنین نیفون و همکاران [14] انتقال حرارت و افت فشار جریان سیّال را در یک مبدل حرارتی با لوله‌های صاف و شیاردار مارپیچی بررسی نمودند. آنها رابطه‌ای برای محاسبه ضریب اصطکاک سیّال پایه در یک لولهٔ صاف ارائه کردند. از طرفی دیگر لی و همکاران [15] با مطالعهٔ آزمایشگاهی و عددی انتقال حرارت در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای با لوله‌های زبر روابط متعدّدی برای ضریب اصطکاک ارائه کردند که رابطهٔ (٤) جهت تحلیل آماری انتخاب شده است. آنان در مطالعهٔ عددی جهت حل معادلات حاکم و ارتباط تنش رینولدز و میدان سرعت از مدل دو معادله‌ای Realizable k - ε استفاده نمودند. با بررسی روابط جدول (١) مشاهده می‌شود که پارامتر عدد رینولدز متغیری مهم برای ضریب اصطکاک است و با افزایش عدد رینولدز، ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد. بر اساس جدول (١) روابطی که ارائه شده است فقط به یک متغیر که عدد رینولدز است وابسته می‌باشند. تغییرات ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز مطابق روابط جدول (١) در شکل (١- الف) ترسیم شده است. در این شکل نیز مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز در هر دو نوع لولهٔ صاف و زبر ضریب اصطکاک سطحی کاهش می‌یابد. از سوی دیگر ضریب اصطکاک سطحی در لوله زبر خیلی بیشتر از لولهٔ صاف است که این موضوع باعث افت فشار در جریان سیّال می‌شود. به همین دلیل در مبحث انتقال سیّالات استفاده از لوله‌های صاف نسبت به لوله‌های زبر مناسب‌تر است. برای تعیین بهترین تابع توزیع احتمال برای پارامتر ضریب اصطکاک از ٤٨ تابع توزیع مختلف چند پارامتری استفاده شده است.

جدول «١»: روابط ارائه شده ضریب اصطکاک برای سیّال پایه در جریان مغشوش

	رابطهٔ ارائه شده	نویسندگان
(١)	$f = 0.316Re^{-0.25} \quad , \quad \left(3000 \le Re \le 10^5\right)$	بلازیوس [12]
(٢)	$f = \left(0.79\ln Re - 1.64\right)^{-2} \quad , \quad \left(10^4 \le Re \le 5\times10^6\right)$	پتوخوف [13]
(٣)	$f = 0.66Re^{-0.33} \quad , \quad \left(5000 \le Re \le 25000\right)$	نیفون و همکاران [14]
(٤)	$f = 0.3486Re^{-0.18} \quad , \quad \left(3000 \le Re \le 8000\right)$	لی و همکاران [15]



الف ب

شکل «۱»: الف- تغییرات ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز مراجع [15-12]،
ب- تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی ضریب اصطکاک برای روابط مراجع [15-12]

جدول «۲»: مقدار آماره‌های کولموگرف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی

آماره	بلازیوس [12]	پتوخوف [13]	نیفون و همکاران [14]	لی و همکاران [15]
کولموگروف- اسمیرنوف	۰/۰۱٤۷٦	۰/۰۱۱٦٤	۰/۰۰۷۷۲	۰/۰۱۱۷۵
اندرسون- دارلینگ	۰/۰۳٤٦۷	۰/۰۲۳۹۷	۰/۰۳۰۷٤	۰/۰۲۵٦۵
مربع کای	۰/۰٦۹۳۱	۰/۰۹۲۱۷	۰/۱٦٦۰۷	۰/۰۷۱۰٤

پس از بررسی نتایج بر اساس آماره‌های کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای مشخص گردید که بهترین تابع توزیع احتمال برای پارامتر ضریب اصطکاک سیّال پایه با تغییر متغیر عدد رینولدز ($Re < 2\times10^5$) بر اساس هر سه آماره مذکور، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است. این تابع توزیع احتمال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(f)=\frac{\delta}{\lambda\sqrt{2\pi}z(1-z)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma+\delta\ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)^2\right) \quad (۵)$$

در رابطهٔ (۵)، $z=(f-\xi)/\lambda$ ، γ و δ ضریب شکل، λ ضریب مقیاس و ξ ضریب مکان است. همچنین رابطهٔ بین پارامتر مکان و ضریب مقیاس با ضریب اصطکاک به‌صورت $\xi \le f \le \xi+\lambda$ است.

از طرفی دیگر پس از بررسی نتایج آماری مشاهده گردید که بهترین آماره برای تحلیل داده‌های ضریب اصطکاک، آماره کولموگروف-اسمیرنوف است که این موضوع در جدول (۲) منعکس گردیده است. هرچه مقدار آماره کمتر باشد، آن آماره مناسب‌تر است.

تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی برای داده‌های ضریب اصطکاک روابط بلازیوس، پتوخوف، نیفون و همکاران و لی و همکاران در شکل (۱- ب) ترسیم گردیده است.

در شکل (۱- ب) مشاهده می‌شود که تابع توزیع احتمال ضریب اصطکاک همه روابط، چولگی به طرف راست دارد. همان‌طور که در شکل (۱- ب) مشاهده می‌شود تجمع داده‌ها در سمت چپ هر نمودار بیشتر است یا در واقع تغییرات داده‌ها در این منطقه کم است. در سمت راست نمودار نیز مشاهده می‌شود که ضریب اصطکاک تغییرات زیادی نموده است، به همین دلیل نمودار به سمت راست کج شده و یا در واقع چولگی راست پیدا کرده است؛ بنابراین این موضوع را می‌توان به این صورت بیان کرد که اگر نمودار تابع توزیع ضریب اصطکاک چولگی راست داشته باشد با افزایش عدد رینولدز، تغییرات ضریب اصطکاک کمتر می‌شود و یا در واقع وابستگی ضریب اصطکاک به عدد رینولدز کمتر می‌شود. چنین نتیجه‌ای در متون علمی و نمودار مودی نیز مشاهده می‌شود.

جدول «۳»: مقدار چولگی داده‌های ضریب اصطکاک برای سیّال پایه در جریان مغشوش

	بلازیوس [12]	پتوخوف [13]	نیفون و همکاران [14]	لی و همکاران [15]
چولگی	۱/٦۹۵۱	۱/۱۸۱	۰/۷٦٦۲	۰/٤۱۲۳

بر اساس محاسبات آماری ضریب اصطکاک روابط بلازیوس، پتوخوف، نیفون و همکاران و لی و همکاران، با استفاده از نرم‌افزار ایزی‌فیت، جدول (۳) تنظیم شده است.

بر اساس مقادیر جدول (۳) مشاهده می‌شود که چولگی داده‌های روابط بلازیوس، پتوخوف، نیفون و همکاران و لی و همکاران، مثبت و در واقع نمودار تابع توزیع احتمال آنها دارای چولگی راست است.

همان‌طور که در مطالب بالا بیان گردید روابط تحلیل شده، روابطی یک‌متغیره هستند. نویسندگان مرجع [14] رابطهٔ دیگری نیز برای ضریب اصطکاک در یک لوله‌ی شیاردار بر حسب متغیرهای عدد رینولدز، نسبت ارتفاع شیار به قطر لوله (χ/d_i) و نسبت گام شیار به قطر لوله (p/d_i) توسعه دادند:

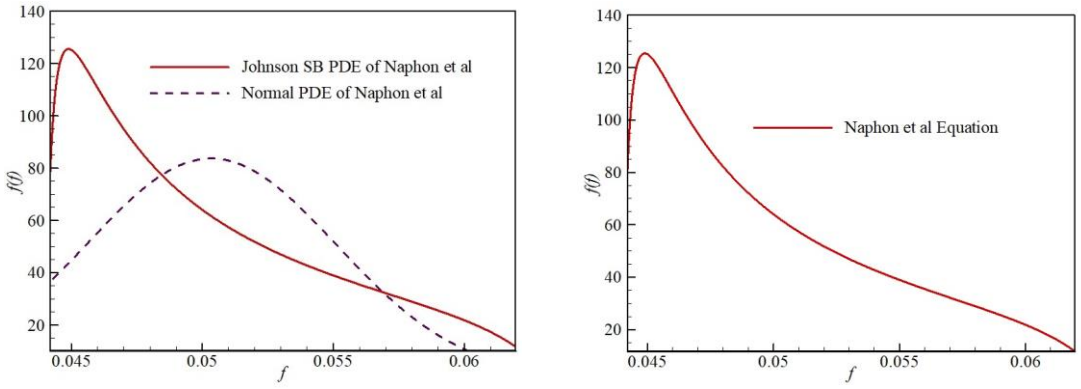
$$f = 7.85\left(\chi/d_i\right)^{1.68}\left(p/d_i\right)^{-0.54} Re^{-0.21} \qquad (٦)$$

در رابطهٔ (٦) عدد رینولدز به‌صورت $5000 \le Re \le 25000$، $0.12 \le \chi/d_i \le 0.19$ و $0.63 \le p/d_i \le 1.05$ است. در تحلیل آماری ضریب اصطکاک از $\chi/d_i = 0.15$ و $p/d_i = 0.78$ استفاده شده است.

برای رابطهٔ (٦) پس از تحلیل نتایج، مشخص گردید که بر اساس آماره‌های یادشدهٔ بالا، بهترین تابع توزیعی که بتواند تمامی داده‌های ضریب اصطکاک سیّال پایه را تحلیل نماید تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است که در شکل (۲- الف) ترسیم گردیده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود تجمع داده‌ها در سمت چپ نمودار بیشتر است که در واقع داده‌های ضریب اصطکاک نزدیک به هم در سمت چپ نمودار مجتمع گردیده‌اند. در حقیقت تغییرات در ضریب اصطکاک کوچک‌تر، کمتر است. این موضوع به این نتیجه ختم می‌شود که با افزایش عدد رینولدز و ثابت بودن سایر شرایط از قبیل کسر حجمی، نسبت ارتفاع شیار به قطر لوله و نسبت گام شیار به قطر لوله، تغییرات ضریب اصطکاک کمتر می‌شود. بر اساس جدول داده‌های آمار توصیفی رابطهٔ (٦)، مقدار چولگی داده‌ها برابر ۰/٦۸۹۷۸ است. در واقع تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی داده‌ها، چولگی راست دارد و یا تجمع داده‌ها در سمت چپ نمودار بیشتر است. موضوع بعدی که بر اساس شکل (۲- ب) می‌توان به آن اشاره کرد کشیدگی یا برجستگی یا میزان تیزی تابع توزیع احتمال داده‌ها یعنی جانسون اس‌بی نسبت به تابع توزیع احتمال نرمال است. تابع توزیع احتمال نرمال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f\,(f\,) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{f\,-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \Big/ \sigma\sqrt{2\pi} \qquad (٧)$$

در رابطهٔ (٧) پارامترهای σ و μ به ترتیب ضریب مکان و پارامتر مقیاس تابع توزیع احتمال نرمال است. اگر داده‌های ضریب اصطکاک به‌طور یکسانی توزیع شوند، در این حالت کشیدگی آنها برابر صفر می‌شود و تابع توزیع آنها نرمال خواهد بود. بر اساس شکل (۲- ب) تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی نسبت به تابع توزیع احتمال نرمال پهن‌تر است.



ب الف

شکل «۲ الف»: تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی ضریب اصطکاک رابطهٔ (٦) مرجع [14]،
«ب»: مقایسهٔ تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی و نرمال ضریب اصطکاک رابطهٔ (٦) مرجع [14]

از طرفی دیگر، با استفاده از محاسبات نرم‌افزار ایزی‌فیت، میزان برجستگی داده‌های ضریب اصطکاک برای رابطهٔ (٦) نیفون و همکاران برابر مقدار (۰/۵۵۳٥٤-) است. با عنایت به منفی بودن مقدار برجستگی، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی نسبت به تابع توزیع احتمال نرمال پهن‌تر است. برای روشن شدن این مطلب دوباره به شکل (۱- الف) مراجعه می‌شود. همان‌طور که در شکل (۱- الف) مشاهده می‌شود، در ابتدای نمودار هنگامی‌که عدد رینولدز از مقدار ۵۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ افزایش می‌یابد، تغییرات کاهشی ضریب اصطکاک بسیار زیاد است. از ۲۰۰۰۰ تا ٤۰۰۰۰ این تغییرات کاهشی کم و در نهایت در اعداد رینولدز بالا تغییرات بسیار اندک است؛ یعنی در اعداد رینولدز بالا مقادیر ضریب اصطکاک به یکدیگر نزدیک و در واقع تجمع داده‌های ضریب اصطکاک در این محدوده از اعداد رینولدز زیاد است. تغییرات زیاد ضریب اصطکاک در اعداد رینولدز کم و تغییرات کم آن در اعداد رینولدز بالا باعث پراکندگی داده‌ها گردیده است. به‌منظور توضیحات بیشتر، از شکل (۲- ب) استفاده می‌شود. میانگین داده‌های ضریب اصطکاک بر اساس رابطهٔ نیفون و همکاران برابر ۰/۰۵۰۳٤ است. با عنایت به تجمع داده‌ها در اعداد رینولدز بالا، مقدار ماکزیمم نمودار در سمت چپ مقدار میانگین قرار دارد. از طرفی دیگر با توجّه به تغییرات کم ضریب اصطکاک در اعداد رینولدز بالا و تغییرات بسیار زیاد ضریب اصطکاک در اعداد رینولدز کم، پراکندگی داده‌ها نسبت به حالت نرمال بیشتر است و یا در واقع نمودار توزیع احتمال نسبت به حالت نرمال پهن‌تر است. از طرفی دیگر مقدار آماره‌های کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی به ترتیب برابر ۰/۰۰۸۲۳، ۰/۰۳۰٦۱ و ۰/۱٥٤۲٥ است. بر این اساس بهترین آماره داده‌های ضریب اصطکاک رابطهٔ (٦)، آمارهٔ کولموگروف-اسمیرنوف است.

روابط ارائه شده ضریب اصطکاک در جریان نانوسیّال و تحلیل آماری آنها

نانوسیّالات مبردهای جدید انتقال حرارت هستند که در دو دههٔ اخیر مطالعات زیادی در مورد کاربرد آنها در مبدل‌های حرارتی صورت گرفته است. وجود ذرات فلزی و یا نافلزی در سیّال عامل باعث شده است که بررسی ضریب اصطکاک از اهمّیّت زیادی برخوردار باشد. در این راستا در اغلب مطالعات، روابطی جهت پارامتر ضریب اصطکاک نیز ارائه شده است. با توجّه به

گستردگی و تنوع روابط ارائه شده برای ضریب اصطکاک نانوسیّال، این روابط به‌صورت سه دستهٔ مجزّای یک‌متغیره، دومتغیره و سه‌متغیره و بیشتر بررسی می‌گردند.

تحلیل آماری روابط یک‌متغیره ضریب اصطکاک در جریان نانوسیّال

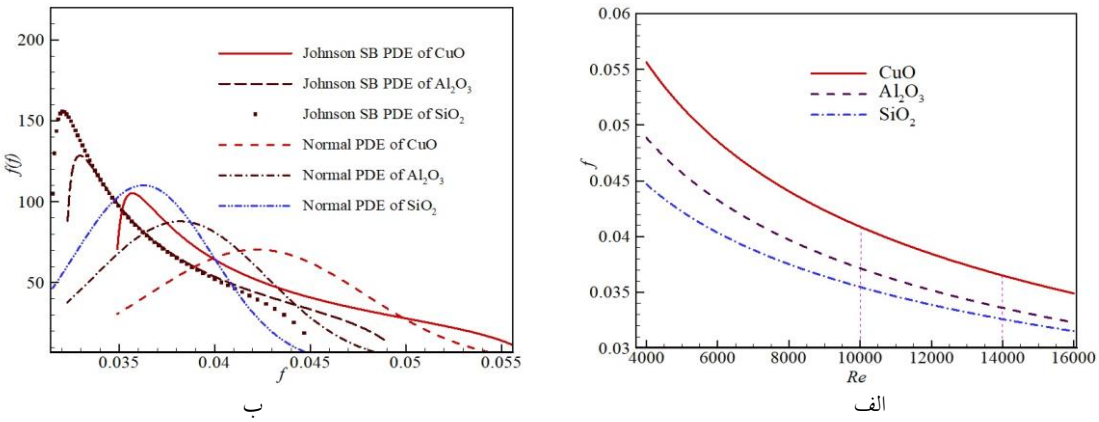
روابط یک‌متغیره ضریب اصطکاک در واقع روابطی فقط بر حسب عدد رینولدز می‌باشند. این روابط با ثابت بودن دیگر متغیرها همانند کسر حجمی ذرات نانو استخراج و توسعه داده شده‌اند. مطالعهٔ تجربی انتقال حرارت جریان کاملاً مغشوش نانوسیّال در ناحیهٔ توسعه‌یافته یک لولهٔ دایره‌ای شکل توسط وجها و همکاران [16] صورت گرفت. آنها از سه نانوذره CuO، Al_2O_3 و SiO_2 با کسر حجمی‌های مختلف و سیّالات پایه اتیلن گلیکول- آب با نسبت جرمی ٦٠ به ٤٠ استفاده نمودند. آنها مشاهده نمودند که با افزایش عدد رینولدز ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد. در جدول (٤) روابط توسعه داده شدهٔ ضریب اصطکاک سه نانوسیّال مرجع [16] آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روابط (١٠-٨) فقط بر اساس یک متغیر یعنی عدد رینولدز توسعه داده شده است و با افزایش عدد رینولدز ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد.

در شکل (٣- الف) تغییرات ضریب اصطکاک بر حسب تغییر عدد رینولدز برای این سه نانوسیّال ترسیم گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات ضریب اصطکاک در اعداد رینولدز بالا نسبت به اعداد رینولدز پایین، کمتر است. با بررسی نتایج آماری سه نانوسیّال بر اساس آماره های کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای جداول (٧-٥) ترسیم شده است. جداول (٧-٥) بیانگر بهترین توابع توزیع احتمال و مقادیر آنها برای ضریب اصطکاک سه نانوسیّال اکسید مس/آب، اکسید آلومینیوم/آب و دی‌اکسید سیلیسیم/آب به ترتیب برای آماره‌های کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای تمامی آماره ها، جهت هر سه نانوسیّال بهترین تابع توزیع احتمال، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است. در واقع هرچه مقدار آمارهٔ یک تابع توزیع احتمال کمتر باشد، آن تابع توزیع مناسب تر است. همچنین دو تابع توزیع احتمال ویک بای و پارتو تعمیم‌یافته در رده‌های بعدی قرار دارند. در شکل (٣- ب) نمودار تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی ضریب اصطکاک سه نانوسیّال ترسیم گردیده است. در این شکل نیز مشاهده می‌شود که تجمع داده‌ها در سمت چپ نمودارها بیشتر است و در حقیقت در اعداد رینولدز بالا تغییرات ضریب اصطکاک کمتر است.

جدول «٤»: روابط یک‌متغیره ارائه شده ضریب اصطکاک برای نانوسیّال در جریان مغشوش

	رابطهٔ ارائه شده	نانوذره	نویسندگان
(٨)	$f = 0.9027Re^{-0.336}$, $\begin{cases}4000 \le Re \le 16000\\ 0 \le \phi \le 0.06\end{cases}$	CuO	وجها و همکاران [16]
(٩)	$f = 0.5814Re^{-0.2986}$, $\begin{cases}4000 \le Re \le 16000\\ 0 \le \phi \le 0.1\end{cases}$	Al_2O_3	
(١٠)	$f = 0.3607Re^{-0.2518}$, $\begin{cases}4000 \le Re \le 16000\\ 0 \le \phi \le 0.06\end{cases}$	SiO_2	

موضوع بعدی که باید بررسی گردد مناسب‌ترین آماره برای داده‌های ضریب اصطکاک است. بر اساس جداول (۷-۵) مشاهده می‌شود که برای هر سه نانوسیّال، مقدار آمارهٔ مربع کای تابع توزیع جانسون اس‌بی کمترین مقدار است؛ بنابراین آمارهٔ مربع کای مناسب‌ترین آماره است. از طرفی دیگر با تحلیل آمار توصیفی داده ها مشاهده می شود که مقدار چولگی برای داده‌های ضریب اصطکاک نانوسیّالات اکسید مس/آب، اکسید آلومینیوم/آب و دی‌اکسید سیلیسیم/آب به ترتیب برابر ۰/٦٦٥٩٣، ۰/٦٤٥٧٤ و ۰/٦٢٠٥٧ است. همان‌طور که ملاحظه می شود مقدار چولگی داده های ضریب اصطکاک نانوسیّال دی‌اکسید سیلیسیم/آب از بقیه کمتر است. از طرفی دیگر بر اساس شکل (۳- الف) مشاهده می شود که با تغییر عدد رینولدز از 10^4 تا 14×10^3 تغییر ضریب اصطکاک برای سه نانوسیّال به ترتیب برابر ۰/۰۰٤۳۷، ۰/۰۰۳٥٥۲ و ۰/۰۰۲۸۸۲ است. بر این اساس نتیجه گرفته می شود که هر چه چولگی داده های ضریب اصطکاک کمتر باشد تغییرات ضریب اصطکاک داده‌ها کمتر خواهد بود. موضوع بعدی مورد بررسی برجستگی داده‌های ضریب اصطکاک است که برای سه نانوسیّال به ترتیب برابر (۰/٦۰٥۸۱-)، (۰/٦۳۸٥۳-) و (۰/٦۷۸۰٤-) است که در واقع تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی نسبت به تابع توزیع احتمال نرمال پهن‌تر است. این موضوع در شکل (۳- ب) نیز نمایان است.



الف ب

شکل «۳ الف»: تغییرات ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز [16]،

«ب»: تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی و نرمال ضریب اصطکاک برای روابط ارائه شده توسط وجها و همکاران [16]

جدول ۵ توابع توزیع احتمال روابط ضریب اصطکاک مرجع [16] بر اساس آمارهٔ کولموگروف-اسمیرنوف

نانوسیّال	نوع و مقدار تابع توزیع احتمال				
اکسید مس/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	گامای تعمیم‌یافته	بتا
	۰/۰۰۹۹	۰/۰۲۹۱۸	۰/۰۲۹۱۸	۰/۰۳۱۸۲	۰/۰۳۸۳٥
اکسید آلومینیوم/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	بتا	مثلثی
	۰/۰۰۹۹٦	۰/۰۲۸۳	۰/۰۲۸۳	۰/۰۳٥۹٥	۰/۰٤۱۹۲
دی‌اکسید سیلیسیم/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	مثلثی	کوماراسوآمی
	۰/۰۱۰۲٤	۰/۰۲۷۲۲	۰/۰۲۷۲۲	۰/۰۳٤۲۹	۰/۰۳۸۹٤

جدول «٦»: توابع توزیع احتمال روابط ضریب اصطکاک مرجع [16] بر اساس آمارهٔ اندرسون-دارلینگ

نانوسیّال	نوع و مقدار تابع توزیع احتمال				
اکسید مس/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	بتا	کوماراسوآمی
	۰/۰۲٤۰۱	۰/۱۹۸۸۵	۰/۱۹۸۸۵	۰/۳٥٤۲۷	۰/٤٦۰۸٤
اکسید آلومینیوم/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	پرت	مثلثی
	۰/۰۲٤۲۸	۰/۱۹۰۰۹	۰/۱۹۰۰۹	۰/٤۸٦۳	۰/٥٤۰۹۹
دی‌اکسید سیلیسیم/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	مثلثی	پرت
	۰/۰۲٤٦٤	۰/۱۷۹٦۲	۰/۱۷۹٦۲	۰/٤٤۱٥۱	۰/٥۱۹۰۲

جدول «۷»: توابع توزیع احتمال روابط ضریب اصطکاک مرجع [16] بر اساس آمارهٔ مربع کای

نانوسیّال	نوع و مقدار تابع توزیع احتمال				
اکسید مس/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	بتا	پرت
	۰/۰۰۲۸۳	۰/٤۷۲۸۱	۰/٤۷۲۸۱	۱/۱۲۹۳	۱/۷۸۳۱
اکسید آلومینیوم/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	گامای تعمیم‌یافته	پرت
	۰/۰۰۳۳۹	۰/٦٤۲۰۳	۰/٦٤۲۰۳	۰/۷۱٦٥۹	۱/۷٥۰۲
دی‌اکسید سیلیسیم/آب	جانسون اس‌بی	ویک بای	پارتو تعمیم‌یافته	پرت	مثلثی
	۰/۰۰٤۱٥	۰/٦۳۳۲۷	۰/٦۳۳۲۷	۱/۷۰۷۳	۱/۸٦۷٤

تحلیل آماری روابط دومتغیره ضریب اصطکاک در جریان نانوسیّال

در این بخش روابط دومتغیره ضریب اصطکاک سیّال نانو تحلیل می‌شود. این روابط در متون علمی بر حسب دو متغیر عدد رینولدز و کسر حجمی ذرات نانو توسعه داده شده است. در جدول (۸) روابط ضریب اصطکاک دومتغیره ارائه شده است. دانگ سانگ سوک و ونگ وایزز [4] با به‌کارگیری یک مبدل حرارتی دولوله‌ای جریان متقاطع به بررسی تجربی انتقال حرارت و افت فشار جریان مغشوش نانوسیّال TiO_2/آب پرداختند. آنها برای ضریب اصطکاک رابطه‌ای بر حسب کسر حجمی ذرات نانو و عدد رینولدز توسعه دادند. حجازیان و همکاران [17] انتقال حرارت مغشوش نانوسیّال دی اکسید تیتانیوم-آب را در یک کانال دوبعدی به صورت عددی مطالعهٔ کردند. آنها جهت شبیه سازی جریان سیّال از سه مدل دوفازی VOF، مخلوط و اولرین و جهت مدل سازی جریان مغشوش از مدل دو معادله‌ای Realizable k–ε و به‌منظور ارتباط بین سرعت و فشار از الگوریتم سیمپل سی استفاده نمودند. آنان در مطالعهٔ دیگری [18] با استفاده از نانوسیّال Al_2O_3/آب به بررسی انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان مغشوش در یک لوله‌ی دایره‌ای شکل پرداختند و برای ضریب اصطکاک رابطه ای ارائه کردند. مروجی و حجازیان [19] انتقال حرارت مغشوش نانوسیّال اکسید آهن مغناطیسی-آب را در یک لولهٔ دایره‌ای شکل به‌صورت عددی مطالعهٔ کردند. به منظور خنک‌کاری وسایل الکترونیکی، مروجی و همکاران [20] به‌طور عددی اثر نانوسیّالات دی‌اکسید تیتانیم/آب و کاربید سیلیسیم/آب را در یک چاه حرارتی میکروکانال مطالعه کردند و رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک توسعه دادند. نانوسیّال هیبریدی SiO_2–TiO_2 در مخلوط اتیلن گلیکول-آب با نسبت ٤۰

به ۶۰ جهت بررسی تجربی انتقال حرارت جریان مغشوش و ضریب اصطکاک در یک لولهٔ دایره‌ای شکل توسط نبیل و همکاران [21] بکار گرفته شد. این پژوهش منجر به توسعه رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک گردید. نایک و همکاران [22] با استفاده از نانوسیّال اکسید مس-آب/پروپیلن گلیکول، به بررسی آزمایشگاهی انتقال حرارت مغشوش نانوسیّال در یک لوله دارای نوارهای پیچشی پرداختند. این نویسندگان روابط متعددی برای ضریب اصطکاک توسعه دادند. استفاده از نانوسیّال هیبریدی گرافن/نقره-آب جهت بررسی آزمایشگاهی انتقال حرارت جریان مغشوش در ناحیهٔ کاملاً توسعه یافته در یک لولهٔ دایره‌ای شکل تحت شار حرارتی یکنواخت بر روی دیواره به وسیله یارمند و همکاران [23] صورت گرفت.

توسعه رابطه ای دومتغیره برای ضریب اصطکاک در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای انحنادار با استفاده از نانوسیّال Fe_3O_4/آب به‌وسیله کومار و همکاران [24] انجام شد. ساندر و همکاران [25] به طور آزمایشگاهی انتقال حرارت و ضریب اصطکاک نانوسیّال نیکل مغناطیسی در سیّال پایه آب را در یک لولهٔ دایره‌ای شکل مطالعهٔ کردند و رابطه ای دومتغیره برای ضریب اصطکاک ارائه کردند. مطالعهٔ تجربی جریان مغشوش نانوسیّال هیبریدی نانو الماس/نیکل-آب با کسر حجمی‌های مختلف در یک لوله توسط ساندر و همکاران [26] منجر به استخراج رابطه‌ای دومتغیره برای ضریب اصطکاک گردید.

جدول «۸»: روابط ارائه شده دومتغیره ضریب اصطکاک برای نانوسیّالات مختلف در جریان مغشوش

	رابطهٔ ارائه شده	نویسندگان
(۱۱)	$f = 0.961\phi^{0.052}Re^{-0.375}$, $\begin{cases}4000 \le Re \le 14000\\ 0.2 \le \phi \le 2\%\end{cases}$	دانگ سانگ سوک و وانگ وایزز [4]
(۱۲)	$f = 0.31017Re^{-0.256}(1+\phi)^{0.00129}$, $\begin{cases}6738 \le Re \le 14596\\ 0 \le \phi \le 0.02\end{cases}$	حجازیان و همکاران [17]
(۱۳)	$f = 0.14332Re^{-0.1615}(1+\phi)^{0.1709}$, $3000 \le Re \le 13200$	حجازیان و همکاران [18]
(۱۴)	$f = 0.33139Re^{-0.25}(1+\phi)^{1.38}$, $\begin{cases}3000 \le Re \le 22000\\ 0 \le \phi \le 0.6\end{cases}$	مروجی و حجازیان [19]
(۱۵)	$f = (1.882404\log \mathrm{Re} - 1.64)^{-2}(1+\phi)^{0.0010775}$ $(2500 \le Re \le 8200)$	مروجی و همکاران [20]
(۱۶)	$f = 0.3164Re^{-0.25}\left(1+\frac{\phi}{100}\right)^{2.8}$, $\begin{cases}3000 \le Re \le 25000\\ 0 \le \phi \le 3\%\end{cases}$	نبیل و همکاران [21]
(۱۷)	$f = 0.2753Re^{-0.2279}(1+\phi)^{0.2129}$, $\begin{cases}2500 \le Re \le 10000\\ 0 \le \phi \le 0.5\%\end{cases}$	نایک و همکاران [22]
(۱۸)	$f = 0.567322Re^{-0.285869}\phi^{0.0271605}$, $\begin{cases}5000 \le Re \le 17500\\ 0 < \phi < 0.1\%\end{cases}$	یارمند و همکاران [23]
(۱۹)	$f = 0.3216Re^{-0.25}(1+\phi)^{1.319}$, $\begin{cases}16000 \le Re \le 30000\\ 0 < \phi < 0.06\%\end{cases}$	کومار و همکاران [24]
(۲۰)	$f = 0.295Re^{-0.241}(1+\phi)^{0.3097}$, $\begin{cases}3000 \le Re \le 22000\\ 0 < \phi < 0.3\%\end{cases}$	ساندر و همکاران [25]
(۲۱)	$f = 0.35662Re^{-0.25}(1+\phi)^{0.2375}$, $\begin{cases}3000 \le Re \le 22000\\ 0 < \phi < 0.6\%\end{cases}$	ساندر و همکاران [26]

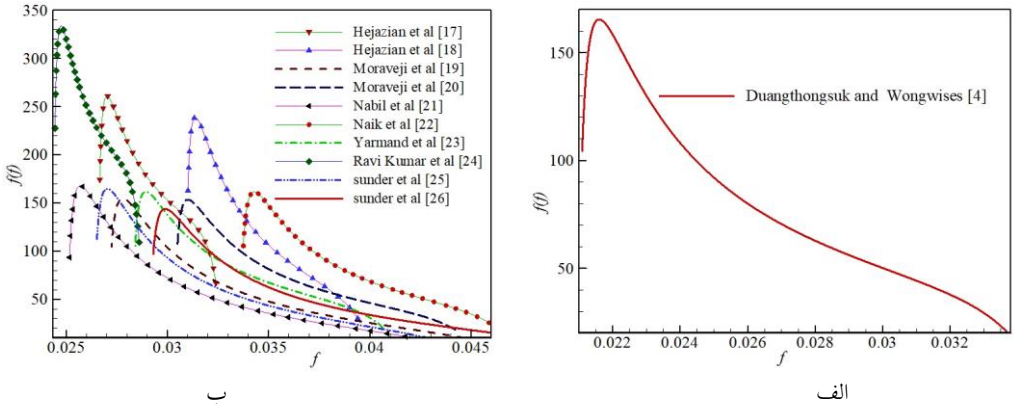
بر اساس روابط جدول (۸) مشاهده می‌شود که مقدار کسر حجمی در یک بازه بوده و یا در کار آزمایشگاهی و مطالعهٔ عددی گهگاه از کسر حجمی‌های مختلفی استفاده شده است. با توجّه به اینکه در مطالعهٔ حاضر، تحلیل آماری بر اساس تغییر عدد رینولدز و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها انجام شده است، لذا برای تحلیل هر رابطه از یک کسر حجمی استفاده گردیده است که برای مراجع [14,17-26] به ترتیب از کسر حجمی‌های ۱، ۱/۵، ۱، ۰/۱، ۲/٤، ۱، ۰/۱، ۰/۰٦، ۰/۰۳، ۰/۲ و ۰/۳ درصد استفاده شده است. همچنین مقادیر عدد رینولدز جهت تحلیل آماری بر اساس بازه تعریف شده هر رابطه در نظر گرفته شده است.

تحلیل آماری داده های روابط دومتغیره ضریب اصطکاک جریان نانوسیّال نتایجی مشابه با بخش قبل یعنی تحلیل آماری روابط یک‌متغیره را نشان می‌دهد. با توجّه به تشابه نتایج از آوردن جدول توابع توزیع احتمال آماره‌ها صرف‌نظر شده است. پس از بررسی نتایج مشاهده می‌شود که بهترین تابع توزیع احتمال داده های ضریب اصطکاک روابط دومتغیره نیز همانند روابط یک‌متغیره، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است، اما مناسب‌ترین آماره در این حالت، آمارهٔ کولموگروف-اسمیرنوف نتیجه گردید. در شکل (٤) تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی روابط دومتغیره مطابق با جدول (۸) ترسیم شده است. در شکل (٤) نیز همانند تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی شکل‌های قبل، مشاهده می‌شود که تراکم داده‌های ضریب اصطکاک هر نمودار در سمت چپ آن یعنی نزدیک مقادیر کوچک تر واقع شده است و در حقیقت تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی چولگی راست دارد.

تحلیل آماری روابط سه‌متغیره و بیشتر ضریب اصطکاک در جریان نانوسیّال

روابط سه‌متغیره و بالاتر ضریب اصطکاک نانوسیّال در این بخش تحلیل می شود. این روابط بر حسب متغیرهای عدد رینولدز، کسر حجمی ذرات نانو، نسبت قطر نانوذرات به قطر ذرات سیّال پایه، کسرحجمی هر یک از ذرات در نانوسیّالات هیبریدی، نسبت منظری یا نسبت عرض به ارتفاع کانال، نسبت قطر هیدرولیکی به قطر داخلی کانال در کانال های حاوی نوار و نسبت چرخش نوار توسعه داده شده است. در جدول (۹) روابط ضریب اصطکاک چند متغیره ارائه شده توسط محققین آورده شده است.

دورگا پراساد و همکاران [27] انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان مغشوش نانوسیّال اکسید آلومینیوم-آب را در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای انحنادار به‌طور آزمایشگاهی مطالعهٔ کردند. آنها از نوارهای مارپیچی با نسبت p/d مختلف و کسر حجمی‌های متفاوت استفاده کردند.



الف ب

شکل «٤»: تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی ضریب اصطکاک الف- مرجع [4] ب- مراجع [17-26]

جدول «۹»: روابط ارائه شده سه‌متغیره و بیشتر ضریب اصطکاک برای نانوسیّالات مختلف در جریان مغشوش

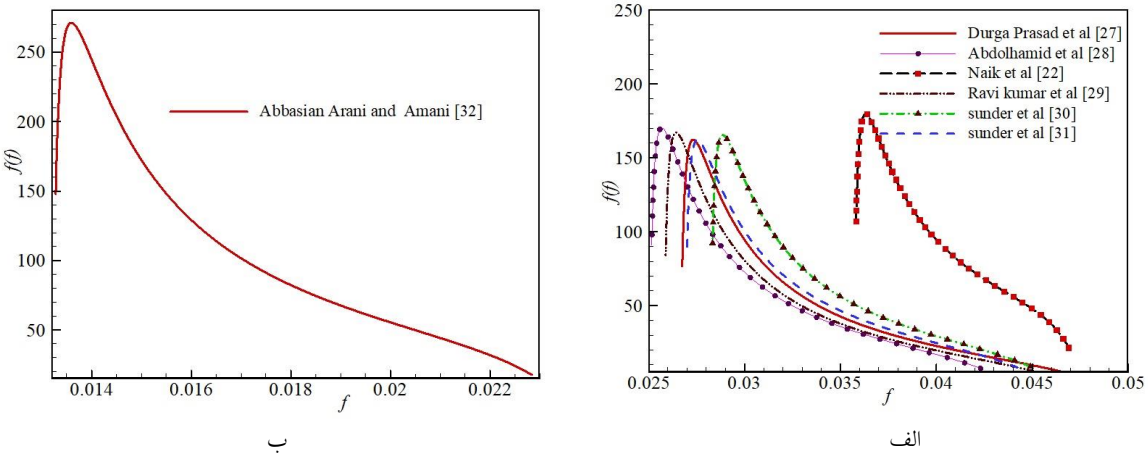
	رابطهٔ ارائه شده	نویسندگان
(۲۲)	$f = 0.284Re^{-0.24}(1+\phi)^{2.46}\left(1+\frac{p}{d}\right)^{0.04}$, $\begin{cases}3000 \le Re \le 30000\\ 0<\phi<0.03\%\\ 0<p/d<20\end{cases}$	دورگا پراساد و همکاران [27]
(۲۳)	$f = 0.3164Re^{-0.25}\left(1+\frac{\phi}{100}\right)^{3.1}(1+\mathrm{R})^{-0.032}$, $\begin{cases}3000 \le Re \le 24000\\ 0 \le \phi \le 0.01\\ 0 \le R \le 0.8\end{cases}$	عبدالحمید و همکاران [28]
(۲۴)	$f = 0.2086Re^{-0.1946}(1+\phi)^{0.2507}\left(1+\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{D}}\right)^{0.01251}$, $\begin{cases}2500 \le Re \le 10000\\ 0<\phi<0.5\%\\ 5<H/D<15\end{cases}$	نایک و همکاران [22]
(۲۵)	$f = 0.2902Re^{-0.2409}(1+AR)^{0.0039}(1+\phi)^{1.95}\left(\frac{\mathrm{D}_h}{\mathrm{D}_i}\right)^{-0.081}$ $3000<Re<30000,\quad 0<\phi<0.03\%,\quad 0<AR<12$	راوی کومار و همکاران [29]
(۲۶)	$f = 0.351Re^{-0.2427}(1+\phi)^{0.4039}(1+AR)^{-0.0045}\left(1+\frac{\mathrm{D}_h}{\mathrm{D}_i}\right)^{-0.22}$ $3000 \le Re \le 22000,\quad 0<\phi<0.3\%,\quad 0<AR<12$	ساندر و همکاران [30]
(۲۷)	$f = 0.2689Re^{-0.2312}(1+\phi)^{0.3556}(1+AR)^{-0.0024}\left(\frac{\mathrm{D}_h}{\mathrm{D}_i}\right)^{-0.083}$ $3000 \le Re \le 22000,\quad 0<\phi<0.3\%,\quad 0<AR<4$	ساندر و همکاران [31]
(۲۸)	$f = 0.73\phi^{0.15}Re^{-0.32}\left(\frac{d_p}{d_f}\right)^{0.02}$, $\begin{cases}9000 \le Re \le 49000\\ 0.01 \le \phi \le 0.02\\ d_p = 10,20,30,50(nm)\end{cases}$	عباسیان آرانی و امانی [32]
(۲۹)	$f = 1.184Re^{-0.3840}(0.001+AR)^{-0.001}(0.001+\phi)^{0.004593}\left(\frac{\mathrm{D}_h}{\mathrm{D}_i}\right)^{-1.6420}$ $3000 \le Re \le 22000,\quad 0<\phi<0.5\%,\quad 0<AR<18$	ساندر و شرما [33]

در تحلیل آماری ضریب اصطکاک مرجع [27] از کسر حجمی ۰/۰۲ درصد و نسبت p/d برابر ۱۵ استفاده شده است. مطالعهٔ آزمایشگاهی انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان مغشوش نانوسیّال ترکیبی TiO_2-SiO_2 در سیّال پایه آب- اتیلن گلیکول در یک مبدل حرارتی دو لوله ای توسط عبدالحمید و همکاران [28] انجام شد. نتایج آنها بهترین عملکرد نانوسیّال مخلوط را در نسبت ۴۰ (TiO_2) به ۶۰ (SiO_2) نشان داد. به همین دلیل در مطالعهٔ حاضر از این نسبت جهت بحث آماری استفاده می شود. محققین مرجع [22] رابطهٔ دیگری برای ضریب اصطکاک بر اساس سه متغیر عدد رینولدز، کسر حجمی ذرات نانو و نسبت پیچش نوار توسعه دادند. به منظور گزینش بهترین تابع توزیع ضریب اصطکاک نسبت H/D در مرجع [22] برابر ۱۰ در نظر گرفته شده است. راوی کومار و همکاران [29] با استفاده از نانوسیّال Fe_3O_4/آب انتقال حرارت و ضریب اصطکاک را در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای U شکل به همراه نوارهای طولی در لوله داخلی به‌صورت آزمایشگاهی مطالعهٔ نمودند. آنها از کسر حجمی های ۰/۰۰۵، ۰/۰۱، ۰/۰۳ و ۰/۰۶ و نسبت پیچش‌های نوار ۱، ۲ و ۴ استفاده نمودند که در تحلیل آماری، کسر حجمی برابر ۰/۰۱ و AR=۲ انتخاب گردیده است. ساندر و همکاران [30] با استفاده از نانولوله های کربنی چند دیواره نانوکامپوزیت اکسید

آهن و سیّال پایه آب، انتقال حرارت و ضریب اصطکاک را در یک لوله به همراه نوارهای طولی به‌طور تجربی مطالعهٔ نمودند. ساندر و همکاران [31] با استفاده از نانوسیّال هیبریدی نانوالماس-نیکل و سیّال پایه آب، انتقال حرارت و ضریب اصطکاک را در یک لوله به همراه نوارهای طولی به‌طور تجربی مطالعهٔ نمودند. عبّاسیان آرانی و امانی [32] با مطالعهٔ تجربی انتقال حرارت کاملاً توسعه یافته جریان مغشوش نانوسیّال دی‌اکسید تیتانیوم-آب در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای جریان متقاطع، رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز، کسر حجمی نانوذرات و نسبت قطر نانوذرات به قطر ذرات سیّال پایه ارائه نمودند. آنها کسر حجمی ذرات نانو را در بازه ۰/۰۱ تا ۰/۰۲ و عدد رینولدز را در بازه ۹۰۰۰ تا ٤۹۰۰۰ انتخاب کردند. جهت تحلیل آماری رابطهٔ ضریب اصطکاک مرجع [32]، عدد رینولدز در همان بازهٔ مذکور و کسر حجمی برابر ۰/۰۱۵ انتخاب شده است. ساندر و شرما [33] با قرار دادن نوارهای طولی با نسبت منظری‌های مختلف در داخل یک لولهٔ دایره‌ای شکل به مطالعهٔ تجربی جریان مغشوش سیّال نانوی اکسید آلومینیوم-آب با کسر حجمی‌های مختلف پرداختند. در تحلیل آماری روابط توسعه داده شده ضریب اصطکاک مراجع [30,31,33] مقدار (D_h/D_i) برابر با ۰/٤٦٥۲، مقدار (AR) برابر ۲ و کسر حجمی ذرات نانو برابر ۰/۱ درصد فرض شده است.

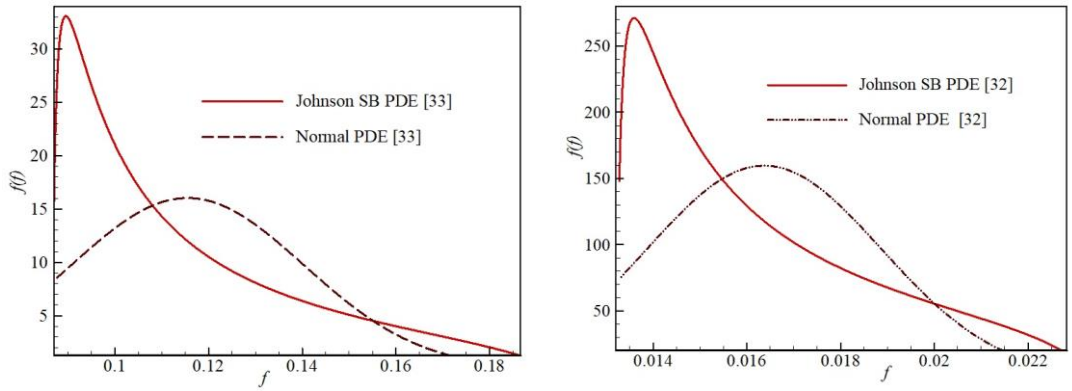
به منظور تحلیل آماری و گزینش بهترین تابع توزیع ضریب اصطکاک بر اساس سه آماره کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای با ثابت نگه داشتن متغیرهای دیگر، متغیر عدد رینولدز تغییر داده می‌شود. همانند نتایج بخش‌های قبل، در اینجا نیز پس از تحلیل نتایج مشاهده می‌شود که بهترین تابع توزیع احتمال ضریب اصطکاک بر اساس هر ۳ آماره، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است و مناسب‌ترین آماره نیز آمارهٔ کولموگروف-اسمیرنوف نتیجه گردید. در شکل (۵) تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی روابط ضریب اصطکاک چند متغیره توسعه داده شده محققین ترسیم شده است. از طرفی دیگر، همانند نتایج بخش‌های قبلی، همان‌طور که در شکل (۵) نیز مشاهده می‌شود تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی چولگی راست دارد.

شکل (٦) مقایسهٔ تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی روابط مراجع [32, 33] را با تابع توزیع نرمال نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل نیز مشخص است تابع توزیع جانسون اس‌بی نسبت به تابع توزیع نرمال پهن‌تر است.



الف ب

شکل «۵»: تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی ضریب اصطکاک الف- مراجع [31-22, 27] ب- مرجع [32]



ب الف

شکل «٦»: تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی و نرمال ضریب اصطکاک برای روابط ارائه شده الف- مرجع [32] ب- مرجع [33]

نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر روابط ضریب اصطکاک ارائه شده توسط محققین در سیّال پایه و نانوسیّالات مختلف تجزیه‌وتحلیل آماری شده است. روابط در نظر گرفته شده بر اساس جریان مغشوش سیّال انتخاب گردیده‌اند. در تحلیل آماری از ٤٨ تابع توزیع احتمال استفاده شده است. برای مشخص نمودن بهترین تابع توزیع احتمال جهت داده‌های ضریب اصطکاک از آماره‌های کولموگرف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و مربع کای استفاده شده است. پس از بررسی و تحلیل نتایج مشخص گردید که بهترین تابع توزیع احتمال داده‌های مستخرج از روابط ارائه شده ضریب اصطکاک، هم در سیّال پایه و هم در نانوسیّال، بر اساس هر سه آماره، تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی است. همچنین مناسب‌ترین آماره برای سیّال پایه، آماره کولموگروف- اسمیرنوف، برای نانوسیّال یک‌متغیره، آماره مربع کای و برای نانوسیّال چند متغیره، آماره کولموگروف-اسمیرنوف نتیجه گردید. از طرفی دیگر، در بررسی آماری مشخص گردید تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی نسبت به تابع توزیع نرمال پهن‌تر یا در واقع کشیدگی داده‌های ضریب اصطکاک منفی است و همچنین نتیجه گردید که تابع توزیع احتمال جانسون اس‌بی چولگی راست دارد. از سوی دیگر نشان داده شد که هر چه چولگی داده‌های ضریب اصطکاک کمتر باشد، تغییرات ضریب اصطکاک داده‌ها کمتر خواهد بود.

فهرست علائم

D, d	قطر لوله
f	ضریب اصطکاک، تابع توزیع احتمال
H	عرض نوار پیچشی
p	گام شیار
Re	عدد رینولدز

علائم یونانی

γ	ضریب شکل
δ	ضریب شکل
λ	پارامتر مقیاس
μ	پارامتر مقیاس
ξ	ضریب مکان
σ	ضریب مکان
ϕ	کسر حجمی نانوذرات
χ	ارتفاع شیار

واژه‌نامه

ضریب اصطکاک	Friction factor	کشیدگی	Kurtosis
چولگی	Skewness	آماری	Statistical

مراجع

1. Syam Sundar, L. and Singh, M.K., "Convective Heat Transfer and Friction Factor Correlations of Nanofluid in a Tube and with Inserts: A Review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 20, pp. 23-35, (2013).
2. Khoshvaght-Aliabadi, M. and Sahamiyan, M., "Performance of Nanofluid Flow in Corrugated Minichannels Heat Sink (Cmchs)", *Energy Conversion and Management*, Vol. 108, pp. 297-308, (2016).
3. Ghazvini, M. and Shokouhmand, H., "Investigation of a Nanofluid-Cooled Microchannel Heat Sink Using Fin and Porous Media Approaches", *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, No. 9, pp. 2373-80, (2009).
4. Duangthongsuk, W. and Wongwises, S., "An Experimental Study on the Heat Transfer Performance and Pressure Drop of TiO_2-Water Nanofluids Flowing under a Turbulent Flow Regime" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 1-3, pp. 334-44, (2010).
5. Sajid, M. U. and Hafiz M. A., "Recent Advances in Application of Nanofluids in Heat Transfer Devices: A Critical Review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 103, pp. 556-92, (2019).
6. Hamzah, M. H., Sidik, N. A. C., Ken, T. L., Mamat, R. and Najafi, G., "Factors Affecting the Performance of Hybrid Nanofluids: A Comprehensive Review", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 115, pp. 630-46, (2017).
7. Ambreen, T. and Kim, M. H., "Heat Transfer and Pressure Drop Correlations of Nanofluids: A State of Art Review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 91, pp. 564-83, (2018).
8. Sharma, K. V., Syam Sundar, L. and Sarma, P. K., "Estimation of Heat Transfer Coefficient and Friction Factor in the Transition Flow with Low Volume Concentration of Al_2O_3 Nanofluid Flowing in a Circular Tube and with Twisted Tape Insert", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, No. 5, pp. 503-07, (2009).
9. Akhavan-Behabadi, M. A., Shahidi, M. and Aligoodarz, M. R., "An Experimental Study on Heat Transfer and Pressure Drop of Mwcnt–Water Nano-Fluid inside Horizontal Coiled Wire Inserted Tube", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 63, pp. 62-72, (2015).
10. Vahidinia, F., Keshtegar, B. and Miri, M., "Statistical Analysis of the Effect of Nanoparticles Volume Fraction on Turbulent Forced Convective Heat Transfer Coefficient of Nanofluid in a Circular Tube", *Ciência e Natura*, Vol. 37, pp. 141-52, (2015).
11. وحیدی نیا، فرهاد، میری، محدثه و کشته گر، بهروز، "مطالعهٔ تولید آنتروپی و ارزیابی خواص آماری انتقال حرارت در جریان مغشوش"، *مجله علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک*، سال ۲۹، شماره ۱، ص ۶۸-۶۳، (۱۳۹۶).
12. Blasius, H., *Grenzschichten in Flüssigkeiten Mit Kleiner Reibung*, Druck von BG Teubner, (1907).
13. Petukhov, B. S., "Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties", *In Advances in Heat Transfer*, Vol. 6, pp. 503-64, (1970).

14. Naphon, P., Nuchjapo, M. and Kurujareon, J., "Tube Side Heat Transfer Coefficient and Friction Factor Characteristics of Horizontal Tubes with Helical Rib", *Energy Conversion and Management*, Vol. 47, No. 18-19, pp. 3031-44, (2006).
15. Li, M., Khan, T. S., Al-Hajri, E. and Ayub, Z. H., "Single Phase Heat Transfer and Pressure Drop Analysis of a Dimpled Enhanced Tube", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 101, pp. 38-46, (2016).
16. Vajjha, R. S., Das, D. K. and Kulkarni, D. P., "Development of New Correlations for Convective Heat Transfer and Friction Factor in Turbulent Regime for Nanofluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 21-22, pp. 4607-18, (2010).
17. Hejazian, M., Keshavarz Moraveji, M. and Beheshti, A., "Comparative Numerical Investigation on TiO_2/Water Nanofluid Turbulent Flow by Implementation of Single Phase and Two Phase Approaches", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 66, No. 3, pp. 330-48, (2014).
18. Hejazian, M., Keshavarz Moraveji M. and Beheshti A., "Comparative Study of Euler and Mixture Models for Turbulent Flow of Al_2O_3 Nanofluid inside a Horizontal Tube", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 152-58, (2014).
19. Keshavarz Moraveji, M. and Hejazian M., "Modeling of Turbulent Forced Convective Heat Transfer and Friction Factor in a Tube for Fe_3O_4 Magnetic Nanofluid with Computational Fluid Dynamics", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 8, pp. 1293-96, (2012).
20. Keshavarz Moraveji, M., Ardehali, R. M. and Ijam A., "CFD Investigation of Nanofluid Effects (Cooling Performance and Pressure Drop) in Mini-Channel Heat Sink", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, pp. 58-66, (2013).
21. Nabil, M. F., Azmi W. H., Hamid, K. A. and Mamat R., "Experimental Investigation of Heat Transfer and Friction Factor of TiO_2-SiO_2 Nanofluids in Water: Ethylene Glycol Mixture", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pp. 124, pp. 1361-69, (2018).
22. Naik, M. T., Janardana, G. R. and Syam Sundar, L., "Experimental Investigation of Heat Transfer and Friction Factor with Water–Propylene Glycol Based Cuo Nanofluid in a Tube with Twisted Tape Inserts", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 13-21, (2013).
23. Yarmand, H. Gharehkhani, S., Ahmadi, G., Seyed Shirazi, S. F., Baradaran, S., Montazer, E., Mohd Zubir, M. N., Alehashem, M. S., Kazi, S. N. and Dahari, M., "Graphene Nanoplatelets–Silver Hybrid Nanofluids for Enhanced Heat Transfer", *Energy Conversion and Management*, Vol. 100, pp. 419-28, (2015).
24. Ravi Kumar, N. T., Bhramara, P., Addis, B. M., Syam Sundar, L., Singh, M. K. and Sousa, A. C. M., "Heat Transfer, Friction Factor and Effectiveness Analysis of Fe_3O_4/Water Nanofluid Flow in a Double Pipe Heat Exchanger with Return Bend", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 81, pp. 155-63, (2017).
25. Syam Sundar, L., Singh, M.K. and Sousa, A.C.M., "Turbulent Heat Transfer and Friction Factor of Nanodiamond-Nickel Hybrid Nanofluids Flow in a Tube: An Experimental Study", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 117, pp. 223-34, (2018).
26. Syam Sundar, L. Singh, M.K., Bidkin, I. and Sousa, A.C.M., "Experimental Investigations in Heat Transfer and Friction Factor of Magnetic Ni Nanofluid Flowing in a Tube", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 70, pp. 224-34, (2014).
27. Durga Prasad, P.V., Gupta, A.V.S.S.K.S., Sreeramulu, M., Syam Sundar, L., Singh, M.K. and Sousa, A.C.M., "Experimental Study of Heat Transfer and Friction Factor of Al_2O_3 Nanofluid in U-Tube

Heat Exchanger with Helical Tape Inserts", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 62, pp. 141-50, (2015).

28. Abdul Hamid, K., Azmi, W. H., Nabil, M. F. and Mamat, R. "Experimental Investigation of Nanoparticle Mixture Ratios on TiO_2–SiO_2 Nanofluids Heat Transfer Performance under Turbulent Flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 118, pp. 617-27, (2018).
29. Ravi Kumar, N. T., Bhramara, P., Syam Sundar, L., Singh, M. K. and Sousa, A. C. M., "Heat Transfer, Friction Factor and Effectiveness of Fe_3O_4 Nanofluid Flow in an Inner Tube of Double Pipe U-Bend Heat Exchanger with and without Longitudinal Strip Inserts", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 85, pp. 331-43, (2017).
30. Syam Sundar, L., Otero-Irurueta, G., Singh, M. K. and Sousa, A. C. M., "Heat Transfer and Friction Factor of Multi-Walled Carbon Nanotubes–Fe_3O_4 Nanocomposite Nanofluids Flow in a Tube with/without Longitudinal Strip Inserts." *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 100, pp. 691-703, (2016).
31. Syam Sundar, L., Singh, M.K. and Sousa, A.C.M., "Heat Transfer and Friction Factor of Nanodiamond-Nickel Hybrid Nanofluids Flow in a Tube with Longitudinal Strip Inserts", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 121, pp. 390-401, (2018).
32. Abbasian Arani, A.A. and Amani, J., "Experimental Investigation of Diameter Effect on Heat Transfer Performance and Pressure Drop of TiO_2–Water Nanofluid", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 44, pp. 520-33, (2013).
33. Syam Sundar, L. and Sharma, K.V., "Heat Transfer Enhancements of Low Volume Concentration Al_2O_3 Nanofluid and with Longitudinal Strip Inserts in a Circular Tube", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 19-20, pp. 4280-86, (2010).

(مقالهٔ پژوهشی)

روش پرتابی بهبودیافته برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار*

فریبا وحیدی‌فر[۱] محمدعلی مهرپویا[۲]

چکیده *امروزه کنترل بهینه کاربردهای وسیعی در علوم مختلف پیدا کرده است. دراین‌بین، دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه تحت عنوان مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار، ظهور پیدا نموده‌اند که در آنها تابع کنترل، شامل یک پرش ناپیوسته از یک مقدار اکسترمم به مقدار اکسترمم بعدی است و به‌طور خطی در تابع هدف و معادلات دینامیکی ظاهر می‌گردد. این مسائل در عمل بسیار دیده‌شده و به‌طور ویژه دارای کاربردهای فراوانی در مهندسی هوافضا، جرثقیل‌ها و ربات‌های صنعتی هستند. آنچه در حل این دسته از مسائل کنترل بهینه حائز اهمّیت است، پیدا کردن نقاط سوییچ با دقّت بالا است. در این مقاله، یک روش پرتابی بهبودیافته جهت حل کارای این دسته از مسائل کنترل بهینه ارائه می‌گردد. به این منظور، ابتدا روش پرتابی مرسوم برای حل عددی این مسائل بازگو و نقاط ضعف آن در یافتن نقاط سوییچ گوشزد می‌شود. سپس با بازطراحی روش با استفاده از تابع کنترل پارامتری شده، مسئله را به یافتن جواب معادله پرتابی طوری هدایت می‌کنیم که در آن، نقاط سوییچ و مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی، پارامترهای مجهول مسئله باشند. بدین ترتیب، نقاط سوییچ و طبعاً جواب مسئله کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار، با دقّت بالایی به دست خواهد آمد. برای نشان دادن دقّت روش پیشنهادی، نتایج روش روی پنج مسئله معیارسنج گزارش گردیده و کارایی روش نشان داده خواهد شد.*

واژه‌های کلیدی کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار؛ اصل مینیمم پونتریاگین؛ روش پرتابی؛ کنترل پارامتری شده.

An Improved Shooting Method for a Class of Switching Optimal Control Problems

F. Vahidifar M.A. Mehrpouya

Abstract *Optimal control appears in some of the well-known areas of science in recent decades. In optimal control field, a classical subject is the switching optimal control problems which arise in some well-known application areas, such as aerospace engineering, cranes and industrial robots. In these problems, the input control jumps from one boundary to another and appears linearly in the objective function and the dynamical equations. What's important in solving these problems, is finding the switching points with high accuracy. In this paper, an improved shooting method for solving these problems is investigated. For this purpose, the well-known indirect shooting method for numerical solution of this class of optimal control problems is first reviewed and it's deficiency in obtaining the switching points accurately, is expressed. Then, with redesigning the method by applying a control parameterization, we transform the problem to the solution of the shooting equation, in which, the values of the switching points and the initial values of the costate variables are unknown parameters. This leads the switching points are captured accurately and thereby accurate solution of the problem is obtained. Numerical results of five benchmark examples are presented and efficiency of the method is reported.*

Key Words Switching Optimal Control, Pontryagin's Minimum Principle, Shooting Method, Control Parameterization

*تاریخ دریافت مقاله ۹۷/۱۰/۶ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۱/۲۹ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.77967

(۱) کارشناسی ارشد، ریاضی کاربردی، دانشگاه تفرش

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تفرش. mehrpouya@tafreshu.ac.ir

مقدّمه

مسائل کنترل بهینه امروزه نقش به‌سزایی در توسعه و پیشرفت فناوری‌های جدید یافته‌اند. در واقع هر یک از جنبه‌های فعّالیت روزمره ما عملاً نوعی سیستم کنترلی است. به‌عنوان نمونه، کنترل‌کننده‌های خودکار در سیستم‌های تهویه‌ای، دما و رطوبت هوای ساختمان‌ها را در حد مطلوب نگه می‌دارند. ترموستات و تایمر به ترتیب دیگ‌های حرارتی و ماشین‌های لباس‌شویی را کنترل می‌کنند. یک رانندهٔ اتومبیل، مسیر حرکتی را با پدال‌های پایی و فرمان اتومبیل کنترل می‌نماید. قوانینی که رفتار همه این سیستم‌ها به کمک آن تعیین می‌شود، باید شامل متغیرهایی باشند که مقادیرشان بتوانند به‌وسیلهٔ کسی خارج و مستقل از خود دستگاه تغییر داده شوند؛ بنابراین متغیرهایی تحت عنوان متغیرهای حالت یا متغیرهای مکانی داریم که دقیقاً مشخص می‌کنند دستگاه در زمان چه کاری را باید انجام دهد. در عوض متغیرهایی نیز داریم که متغیرهای کنترلی نامیده شده و می‌توانند برای اصلاح نتایج حاصل‌شده از رفتار دستگاه مورد استفاده قرار بگیرند. اکنون سیستم دینامیکی را در نظر بگیرید که رفتار آن به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شود. سیستم در یک‌لحظه در موضعی خاص است و می‌خواهیم آن را طوری کنترل کنیم تا به موضع داده شده دیگری برسد. اگر این کار به طرق مختلفی قابل انجام باشد، آنگاه این حق وجود دارد که هر یک از آنها انتخاب شوند. بعضی از این انتخاب‌ها به‌منزلهٔ این است که سیستم زمان خیلی زیادی را تا رسیدن به موضع داده شده هدر می‌دهد. بقیه ممکن است در انرژی مصرفی پرهزینه باشند؛ بنابراین، به اندازه‌گیری هزینه متحمل شده در انتقال نیاز است. یک روش طبیعی برای اندازه‌گیری این هزینه، طرح انتگرالی است که بر حسب متغیرهای مکانی و متغیرهای کنترلی باشد و این همان تابع هدف مسئله کنترل بهینه است. لازم به یادآوری است که در بین مسائل کنترل بهینه، دسته‌ای خاص از مسائل تحت عنوان مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار وجود دارد که ماهیّت آنها به‌گونه‌ای است که تابع کنترل هم در تابع هدف و هم در سیستم دینامیکی به‌صورت خطی ظاهر شده و مقادیر خود را از یک مجموعه گسسته می‌گیرد. حل این مسائل علی‌رغم ساختار ساده‌شان، با مشکلات عدیده‌ای همراه است. منشأ این مشکلات در ناپیوستگی و ناهمواری توابع کنترل نهفته است. در این مسائل، علاوه بر زمان‌های سوییچ، به مقادیر کنترل نیز در بین این زمان‌ها نیاز است. لذا، اگر ساختار کنترل بهینه و تعداد نقاط سوییچ از پیش معلوم نباشند، آنگاه حل این‌گونه مسائل بسیار دشوار خواهد بود. برای یافتن کنترل بهینه در این دسته از مسائل، از اصلی به نام اصل مینیمم پونتریاگین استفاده می‌شود که بنا بر آن، کنترل بهینه حتماً می‌بایست تابع همیلتونی را نسبت به توابع کنترل مینیمم نماید. بدین ترتیب، متغیرهایی تحت عنوان متغیرهای الحاقی به کار گرفته می‌شوند که به کمک آنها معادلات دینامیکی مسئلهٔ کنترل بهینه به تابع هدف الحاق شده تا در تشکیل تابع همیلتونی در استخراج شرایط لازم بهینگی برای حل مسئله مورد استفاده قرار گیرند. این متغیرهای الحاقی، صرفاً، چنین نقشی را داشته و دارای تعبیر فیزیکی خاصی نیستند.

کاربرد این نوع از مسائل کنترل بهینه را در بسیاری از سیستم‌ها از قبیل سیستم‌های بیولوژیک [1]، طراحی سیستم قدرت هایبریدی [2]، شبکه‌های بی‌سیم [3]، مهندسی هوافضا و ربات‌های صنعتی می‌توان مشاهده نمود. به‌عنوان‌مثال، در ربات‌های صنعتی سیستم‌های دینامیکی کنترل‌شده دارای طیف گسترده‌ای از حرکات ممکن هستند. با استفاده از روش‌های کنترل بهینه به نظر طبیعی می‌رسد که یک حرکت مشخص از رباتی را برای یک وظیفه معلوم در نظر بگیریم. رایج‌ترین معیارهای عملکرد ربات‌ها، بهره‌وری، دقّت در تعیین موقعیت دسته (چنگک) یا گرفتن وسیله‌ای با چنگک و مصرف انرژی آنهاست. انتخاب معیار برای بهینه‌سازی

به اهداف تکنولوژیکی یک ربات بستگی دارد. برای مثال، اگر عملیات انجام‌شده توسط ربات در آغاز گام بعدی برخی فرایندهای تولید با تأخیر مواجه شود (تجهیزات تکنولوژیکی برای ربات"منتظر بماند")، آنگاه وجود برنامه‌های کنترل زمان بهینه ضروری می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، اگر یک ربات بتواند عملیاتش را سریع‌تر از آنچه برای گام بعدی پروسه تکنولوژیکی لازم است انجام دهد، آنگاه طبیعی است که عملیات رباتیک در یک زمان معیّن با کمترین هزینه انرژی انجام شود.

به دلیل مشکلاتی که در یافتن نقاط سوییچ و جواب بهینه وجود دارد، محاسبات کنترل‌های بهینه در این نوع از مسائل به‌طور ویژه‌ای مورد توجّه قرار گرفته است؛ بنابراین، روش‌های عددی مستقیم و غیرمستقیم که در آن اولی بر اساس گسسته‌سازی و برنامه‌ریزی غیرخطی و دومی متناظر با استفاده از اصل مینیمم پونتریاگین است، به‌طور گسترده‌ای در بسیاری از مسائل کنترل بهینه ازجمله کنترل‌های سوییچ‌دار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش‌های مستقیم به دلیل قابلیّت‌ها و امکاناتشان مشهور هستند. این روش‌ها به حدس اوّلیّه برای متغیرهای الحاقی و استخراج شرایط لازم بهینگی نیاز ندارند. به همین دلیل انواع الگوریتم‌های مستقیم برای مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار گزارش شده است. به‌عنوان‌مثال کایا و نوایکس [4]، روش محاسبات زمان سوییچ را توسعه دادند. این روش، روشی برای کنترل تک متغیره است که یک ترکیب کمان‌های ثابت ورودی شدنی اما نه لزوماً بهینه را از یک نقطه اوّلیّه به سمت نقطه هدف برای تعداد سوییچ‌های معلوم پیدا می‌کند. نویسندگان [4]، الگوریتم سوییچ‌های بهینه را در [5]، برای کنترل سوییچ‌های بهینه دستگاه‌های غیرخطی با یک کنترل تک متغیره توسعه دادند. در [6] مشابه با [4, 5]، طول کمان‌ها به‌عنوان متغیرهای بهینه‌سازی استفاده شده اما روش آنها برای کلاس عمومی‌تری از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار به کار رفته است که علاوه بر این، شرایط کافی مرتبه دوم بهینگی برای تضمین اینکه قانون کنترل بهینه باشد، استفاده گردیده است. لین و همکاران [7]، روش محاسباتی که بر پایهٔ تقریب تکّه‌ای ثابت کنترل است را به کار بردند. این طرح تقریبی دقیق است، اما مسئله را به سمت یک برنامه‌ریزی غیرخطی تقریبی هدایت می‌کند که حل عددی آن بسیار دشوار است. نویسندگان [7] تکنیکی جدید برای حل مشکلات این روش، با معرفی یک روش جدید برای تبدیل مسئلهٔ تقریبی به یک مسئلهٔ بهینه‌سازی جدید که حل آن آسان‌تر است، در [8] ارائه دادند. در [9] روش شبه‌طیفی اصلاح‌شده ارائه شده است. این روش، جواب دقیق مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار را ارائه می‌دهد و می‌تواند نقاط سوییچ را با دقّت به دست آورد. علاقه‌مندان برای مطالعهٔ بیشتر به حل مستقیم این دسته از مسائل کنترل بهینه می‌توانند به مراجع [16-10] مراجعه نمایند.

از طرف دیگر، روش‌های غیرمستقیم، متناظر با استفاده از اصل مینیمم پونتریاگین هستند [17] و منجر به حل یک مسئلهٔ مقدار مرزی همیلتونی می‌شوند. مزایای اصلی این روش‌ها، دقّت بالای آنها در جواب و تضمین اینکه جواب به‌دست‌آمده در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کند، است [18].

هدف این مقاله ارائه یک روش پرتابی غیرمستقیم برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار است. به دلیل ناپیوستگی کنترل‌ها، روش پرتابی مرسوم در حل آنها، باعث خراب شدن دقّت روش، مخصوصاً در یافتن نقاط سوییچ می‌شود. در نتیجه برای رفع این مشکل، یک روش پرتابی بهبودیافته با کنترل پارامتری شده ارائه می‌گردد. به همین منظور، ابتدا، بر اساس اصل مینیمم پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی که منجر به تشکیل یک مسئله مقدار مرزی همیلتونی (HBVP) می‌شود، استخراج شده، سپس با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینهٔ به‌دست‌آمده از

روش پرتابی مرسوم، توابع کنترل با توابع تکه‌ای ثابت جایگزین می‌شود. لذا، حل مسئله به حل معادله پرتابی تبدیل شده [19]، که در آن مقادیر نقاط سوییچ و مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی، پارامترهای مجهول هستند.

این مقاله در چند بخش طراحی شده است: بخش بیان مسئله، به فرموله کردن مسئله هدف، معرفی اصل مینیمم پونتریاگین و روش پرتابی اختصاص دارد. در بخش معرفی روش، روش پرتابی بهبودیافته با کنترل پارامتری‌شده ارائه می‌گردد. در بخش مثال‌های عددی، روش پیشنهادی بر روی پنج مسئله کنترل بهینه معیارسنج پیاده‌سازی شده و مزایای روش نشان داده خواهد شد.

بیان مسئله، اصل مینیمم و روش پرتابی

بیان مسئله اصلی. مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار که در آن کنترل‌ها به‌صورت خطی ظاهر می‌شوند را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathbf{x}(t)=\left[x_1(t),\ x_2(t),...,x_p(t)\right]^T$ بردار حالت و $\mathrm{u}(t)=\left[u_1(t),\ u_2(t),...,u_q(t)\right]^T$ بردار کنترل در بازهٔ $t\in\left[0,t_f\right]$ با زمان انتهایی آزاد t_f باشند که تابعی

$$J=\int_0^{t_f}1dt=t_f \qquad (۱)$$

را نسبت به محدودیت‌های

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{x}}(t)&=\mathrm{h}(\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t),t)\\&=f_1(\mathrm{x}(t),t)+f_2(\mathrm{x}(t),t)\mathrm{u}(t)\end{aligned} \qquad (۲)$$

$$\mathrm{x}(0)=\mathrm{x}_0 \qquad (۳)$$

$$\mathrm{x}(t_f)=\mathrm{x}_f \qquad (۴)$$

$$u_j(t)\in\{-1,+1\},\quad j=1,2,...,q \qquad (۵)$$

در بازهٔ $\left[0,t_f\right]$ مینیمم می‌کند.

در اینجا بردار حالت x پیوسته است و کنترل‌ها دارای تعداد متناهی نقاط سوییچ می‌باشند که در این نقاط از یک مقدار به مقدار دیگر سوییچ می‌کنند. همچنین فرض شده که تابع $\mathrm{h}:\mathbb{R}^{p+q+1}\to\mathbb{R}^p$ تابعی هموار از متغیرهای $(\mathrm{x},\mathrm{u},t)$ باشد.

اصل مینیمم و روش پرتابی. به‌منظور فرموله کردن شرایط لازم بهینگی، تابع همیلتونی به‌صورت:

$$\begin{aligned}H(\mathrm{x}(t),\lambda(t),\mathrm{u}(t))&=1+\lambda^T(t)\mathrm{h}(\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t),t)\\&=1+\lambda(t)\,f_1(\mathrm{x}(t),t)+\lambda(t)\,f_2(\mathrm{x}(t),t)\mathrm{u}(t)\end{aligned} \qquad (۶)$$

معرفی شده که $\lambda(t)=\left[\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),...,\lambda_p(t)\right]^T$ متغیر الحاقی نامیده می‌شود. همچنین ضریب تابع کنترل $\mathrm{u}(\mathrm{t})$ در تابع همیلتونی، تابع سوییچ نامیده شده و با

$$\begin{aligned}\sigma(\mathrm{x},\lambda,t)&=\left[\sigma_1(\mathrm{x},\lambda,t),...,\sigma_q(\mathrm{x},\lambda,t)\right]\\&=\lambda^T f_2(\mathrm{x},t)\end{aligned} \qquad (۷)$$

نشان داده می‌شود.

توجّه شود که جواب مسئله کنترل بهینه در شرایط لازم،

$$\dot{\mathrm{x}}=\left[\partial H/\partial\lambda\right]^T, \qquad (۸)$$

$$\dot{\lambda}=-\left[\partial H/\partial\mathrm{x}\right]^T, \qquad (۹)$$

صدق می‌کند و بر اساس اصل مینیمم پونتریاگین، کنترل بهینه بایستی تابع همیلتونی را نسبت به توابع کنترل مینیمم کند [17] که به‌سادگی قانون کنترل

$$u_j(t)=\begin{cases}-1 & \text{if}\quad \sigma_j(x(t),\lambda,t)>0\\ +1 & \text{if}\quad \sigma_j(x(t),\lambda,t)<0\\ \text{undefined} & \text{if}\quad \sigma_j(x(t),\lambda,t)=0\end{cases} \qquad (۱۰)$$

برای $j=1,2,...,q$ نتیجه می‌شود.

بنابراین تابع سوییچ $\sigma(t)$ تابع کنترل را با

$$u(t) = -\text{sign}(\sigma(t)), \qquad (11)$$

روی بازهٔ $\left[0, t_f\right]$ به‌جز بر روی نقاط سوییچ مشخص می‌کند. توجّه شود وقتی زمان نهایی t_f آزاد است، شرط ترانسورسالیتی

$$H(x(t_f), \lambda(t_f), u(t_f)) = 0 \qquad (12)$$

بایستی در کنار شرایط اوّلیّه و مرزی، یعنی معادلات (۳ و ٤) قرار بگیرد [17]. حال با جایگذاری تابع کنترل (۱۱) در معادلات (۸، ۹ و ۱۲) و در نظر گرفتن شرایط (۳ و ٤) یک HBVP به‌عنوان شرایط لازم بهینگی به دست می‌آید. این HBVP را به‌صورت:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) & 0 \le t \le t_f \\ y(0) = y_0 \\ \Psi(y(t_f), t_f) = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

نشان می‌دهیم که $y(t) = \left[x(t), \lambda(t)\right]^T \in \mathbb{R}^{2p}$، $f : \mathbb{R}^{2p+1} \to \mathbb{R}^{2p}$ و $\Psi : \mathbb{R}^{2p+1} \to \mathbb{R}^{p+1}$ تابع مرزی مسئله است که مجموع شرایط در معادلات (٤ و ۱۲) را بیان می‌کند. به‌منظور استفاده از روش پرتابی برای حل HBVP (۱۳) ابتدا، مسئله مقدار اوّلیّه متناظر آن را به‌صورت:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) & 0 \le t \le t_f \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (14)$$

در نظر می‌گیریم. حال بردار $v = (\lambda_1(0), ..., \lambda_p(0), t_f)^T$ را به‌گونه‌ای می‌یابیم که سیستم معادلات جبری غیرخطی

$$F(v) = \Psi(y(t_f), t_f) = \begin{pmatrix} x(t_f) - x_f \\ H(x(t_f), \lambda(t_f), -\text{sign}(\sigma(t_f))) \end{pmatrix} = 0 \qquad (15)$$

به‌عنوان معادلهٔ پرتابی، برقرار باشد. همچنین فرض می‌کنیم که *IVP* (١٤) دارای یک جواب منحصربه‌فرد باشد. باید توجّه داشت که به دلیل وجود تابع انتگرالده ناپیوسته در سمت راست سیستم معادلات دیفرانسیل در *IVP* (١٤)، حل معادله پرتابی (۱۵) سبب از دست رفتن دقّت در جواب *HBVP* (۱۳) مخصوصاً در یافتن نقاط سوییچ، می‌گردد [20]. بخش بعد به راه‌حل دقیق و کارآمد این *HBVP* اختصاص داده شده است.

معرفی روش پرتابی بهبودیافته با کنترل پارامتری شده

در این بخش با دانستن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل به‌دست‌آمده از روش پرتابی مرسوم که در بخش قبل توضیح داده شد، فرض می‌کنیم هر تابع کنترل $u_j(t)$ دارای n_j نقطهٔ سوییچ باشد؛ بنابراین تقریب زیر برای هر کنترل $u_j(t)$، $j=1,...,q$ در نظر گرفته خواهد شد:

$$u_j(t) = \begin{cases} b_j^0, & s_j^0 \le t \le s_j^1 \\ b_j^1, & s_j^1 < t \le s_j^2 \\ \vdots \\ b_j^{n_j}, & s_j^{n_j} < t \le s_j^{n_j+1} \end{cases} \qquad (16)$$

که $0 = s_j^0 < s_j^1 < ... < s_j^{n_j} < s_j^{n_j+1} = t_f$ به‌عنوان نقاط سوییچ و انتهایی در نظر گرفته شده‌اند که $u_j(t)$ روی هر زیردامنه، پارامتر معلوم b_j^k برای $k = 0,1,...,n_j$ را اختیار می‌کند. طبق (۵)،

$b_j^{k+1} = -b_j^k$ که $b_j^k \in \{-1,+1\}$ است؛ بنابراین طبق (۱۰) داریم:

$$b_j^k = -\text{sign}(\sigma_j(t)), \quad s_j^k < t \le s_j^{k+1} \tag{۱۷}$$

و $b_j^{n_j} = (-1)^{n_j} b_j^0$. این ساختار کنترل، شرایط سوییچ

$$\sigma_j(s_j^i) = 0, \quad i = 1,...,n_j \tag{۱۸}$$

را نتیجه می‌دهد.

باید توجّه داشت، بر اساس این تقریب هر کنترل $u_j(t)$ را با پارامتری $s_j = (s_j^1,...,s_j^{n_j}, t_f)$ می‌کنیم. در نتیجه هر تابع کنترل $u_j(t)$ در معادله (۱۶) را می‌توانیم به‌صورت $u_j(t;s_j)$ نشان دهیم. حال با جایگذاری تابع کنترل

$$\mathrm{u}(t;s) = \left[u_1(t;s_1),...,u_q(t;s_q)\right]^T \tag{۱۹}$$

در معادلات (۸ و ۹)، یک سیستم از معادلات دیفرانسیل با $\mathrm{u}(t;s)$ در سمت راست معادله که بر اساس $\mathrm{x}(t)$ و $\lambda(t)$ است، به دست می‌آید. این سیستم از معادلات دیفرانسیل در کنار شرایط اوّلیّه و مرزی (۳ و ٤) و شرط ترانسورسالیتی (۱۲) و شرایط سوییچی (۱۸)، تشکیل یک HBVP به‌صورت:

$$\begin{cases} \dot{y} = \mathrm{f}(t,\mathrm{y},\mathrm{u}(t;s)), \quad 0 \le t \le t_f \\ \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0 \\ \Psi(\mathrm{y}(t_f), s_1,...,s_q,t_f) = 0 \end{cases} \tag{۲۰}$$

را می‌دهد.

به‌منظور استفاده از روش پرتابی برای حل HBVP (۲۰)، معادلهٔ پرتابی به‌صورت:

$$\Psi(.) = \begin{pmatrix} \mathrm{x}(t_f) - \mathrm{x}_f \\ H(\mathrm{x}(t_f), \lambda(t_f), -\text{sign}(\sigma(t_f))) \\ \sigma_j(s_j^1) \\ \vdots \\ \sigma_j(s_j^{n_j}) \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,...,q \tag{۲۱}$$

تشکیل می‌شود که به‌جای $\Psi(\mathrm{y}(t_f), s_1,...,s_q,t_f)$ برای راحتی از $\Psi(.)$ استفاده می‌کنیم. هدف، حل معادله پرتابی

$$\mathrm{S}(\mathrm{z}) = \Psi(.) = 0 \tag{۲۲}$$

است که درواقع بردار z، بردار پارامترهای مجهول و به‌صورت

$$\mathrm{z} = (\mathrm{s}, \lambda_1(0),...,\lambda_p(0))^T \tag{۲۳}$$

در نظر گرفته شده است که در آن

$$s = (s_1,...,s_q) \tag{۲٤}$$

است. مجدداً یادآور می‌شویم که معادله پرتابی (۲۲) سیستمی از معادلات غیرخطی برای یافتن z مورد نظر است که $\mathrm{y}(t_f;\mathrm{z})$ تقریبی از $\mathrm{y}(t_f)$ است و برای محاسبه آن در یک z معلوم، نیاز به حل IVP زیر داریم:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{y}} = \mathrm{f}(t,\mathrm{y},\mathrm{u}(t;s)), \quad 0 \le t \le t_f \\ \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0 \end{cases} \tag{۲۵}$$

فرض کنیم، IVP (۲۵) یک جواب منحصربه‌فرد داشته باشد که آن را با $\mathrm{y}(t;\mathrm{z})$ نشان می‌دهیم. برای یافتن جواب IVP (۲۵) با z معلوم، ابتدا بازه $\left[0,t_f\right]$ را به $(n_1+...+n_q)+1$ قسمت تقسیم می‌کنیم. سپس معادله دینامیکی با شرط اوّلیّه y_0 در زیربازهٔ اوّل را حل می‌نماییم. مقدار مشاهده شده در انتهای هر زیربازه به‌عنوان شرط اوّلیّه معادلات دینامیکی در زیربازه بعدی در نظر گرفته می‌شود و این روند ادامه پیدا می‌کند تا به زیربازه آخر برسیم. علاوه بر این، اگر هر شرطی در

معادله پرتابی نقض شود، بایستی بردار جدید z محاسبه و روند فوق از سر گرفته شود تا زمانی که معادله پرتابی برقرار گردد.

توجّه شود IVP (۲۵) می‌تواند با یک حل‌کننده معادلات دیفرانسیل عادی با دقّتی از مرتبه بالا حل شود که خاصیت کنترل خطا دارد. در این مقاله، جدا از روش‌ها و نرم‌افزارهایی که برای حل IVP (۲۵) توسعه یافته‌اند، از تابع ode45 در نرم‌افزار متلب استفاده شده است. این تابع روندی بر اساس فرمول رانگ-کوتا صریح با گام زمانی متغیر برای کارایی محاسبات عددی معادلات دیفرانسیل دارد. علاوه بر این، تابع ode45 خطا را با استفاده از دو پارامتر RelTol و AbsTol کنترل می‌کند. با استفاده از این پارامترها می‌توانیم تلورانس خطای نسبی و مطلق را تنظیم کنیم. همچنین، تابع fsolve برای حل دستگاه معادلات غیرخطی (۲۲) استفاده شده است. توجّه شود در این حل‌کننده دقّت جواب مشاهده‌شده را می‌توانیم به کمک دو پارامتر TolFun و TolX تنظیم کنیم که پارامتر اوّل تلورانس روی مقدار تابع و پارامتر دوم تلورانس روی مقدار طول گام را تعیین می‌کند.

مثال‌های عددی

در این بخش پنج مثال برای نشان دادن کاربرد و دقّت روش بیان‌شده ارائه خواهد گردید.

مثال ۱: **نوسانگر واندرپول.** یک مدار نوسانگر واندرپول که با استفاده از دیود تونل ساخته می‌شود را به‌عنوان نوسانگر دیود تونل واندرپول می‌شناسند. دیود تونل‌ها به تولید سیگنال‌هایی با فرکانس بسیار بالا کمک شایانی می‌نمایند. اکنون فرض کنیم در یک مدار نوسانگر دیود تونل واندرپول، هدف مینیمم کردن زمان نهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (۲۶)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (x_1^2 - 1)x_2 + u \qquad (۲۷)$$

$$u(t) \in \{-1, 1\} \qquad (۲۸)$$

و شرایط اوّلیّه و مرزی

$$\mathrm{x}(0) = [1,1]^T \qquad (۲۹)$$

$$\mathrm{x}(t_f) = [0,0]^T \qquad (۳۰)$$

باشد [21]. در این مسئله، تابع کنترل u، ولتاژ این مدار الکتریکی در نظر گفته می‌شود. حال، تابع همیلتونی در (۶) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x}, \lambda, u) = [1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 - (x_1^2 - 1)x_2 + u)] \qquad (۳۱)$$

تشکیل می‌شود.

بدین ترتیب، معادلات الحاقی (۹) به شکل

$$d\lambda_1 / dt = (2x_1 x_2 + 1)\lambda_2 \qquad (۳۲)$$

$$d\lambda_2 / dt = -\lambda_1 - \lambda_2(1 - x_1^2) \qquad (۳۳)$$

به دست می‌آیند.

تابع سوییچ $\sigma(t) = \lambda_2(t)$ کنترل بهینه را با $u(t) = -\mathrm{sign}(\lambda_2(t))$ مشخص می‌کند. توجّه شود، با استفاده از روش پرتابی مرسوم روی این مسئله، جواب سیستم کنترل در نقطه سوییچ $s = 0.719087$ به‌دست‌آمده است. حال با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه، این مسئله با روش پیشنهادی حل می‌شود؛ بنابراین، تابع پرتابی به‌صورت:

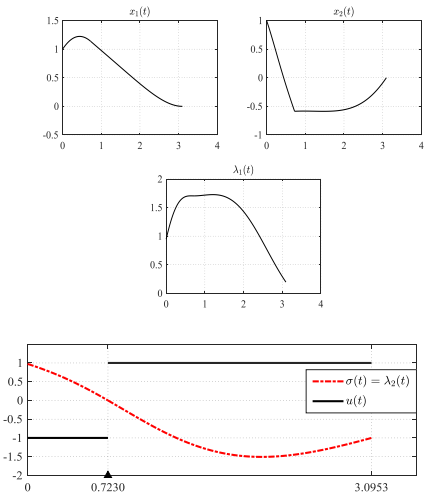
$$\Psi(.) = \begin{pmatrix} \mathrm{x}(t_f) \\ 1 + \lambda_2(t_f)u(t_f) \\ \lambda_2(s) \end{pmatrix} \qquad (۳۴)$$

است که بردار مجهولات z به شکل

$$\mathrm{z} = (s, t_f, \lambda_1(0), \lambda_2(0))^T \quad (۳۵)$$

در نظر گرفته شده‌اند.

در شکل (۱)، توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی نشان داده شده است. در جدول (۱)، مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ با جواب تقریبی کد BNDSCO پرتابی چندگانه در [22] مقایسه شده است. علاوه براین، برای نشان دادن دقّت و همگرایی روش، مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی در جدول (۲) گزارش شده‌اند.



شکل «۱»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۱

مثال ۲: سیستم غیرخطی مرتبه سوم. کنترل بهینهٔ سیستم‌های غیرخطی، امروزه یکی از دشوارترین و چالش‌زاترین موضوعات در نظریّه کنترل است. اکنون فرض کنیم با مسئلهٔ زمان انتهایی آزاد یک سیستم غیرخطی مرتبه سوم که در [5] آمده، روبرو هستیم. مسئله، مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۳۶)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (۳۷)$$

$$\dot{x}_3 = \sin(x_1) + u \quad (۳۸)$$

$$u(t) \in \{-1, 1\} \quad (۳۹)$$

و شرایط اوّلیّه و مرزی

$$\mathrm{x}(0) = [1,1,1]^T \quad (۴۰)$$

$$\mathrm{x}(t_f) = [0,0,0]^T \quad (۴۱)$$

است.

در اینجا تابع همیلتونی (۶) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x}, \lambda, u) = [1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3(\sin(x_1) + u)] \quad (۴۲)$$

تشکیل می‌شود. در نتیجه، معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1 / dt = -\lambda_3 \cos(x_1) \quad (۴۳)$$

$$d\lambda_2 / dt = -\lambda_1 \quad (۴۴)$$

$$d\lambda_3 / dt = -\lambda_2 \quad (۴۵)$$

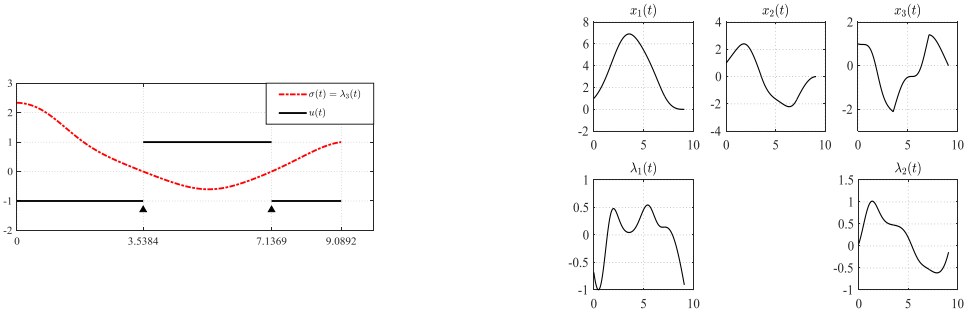
به دست می‌آیند.

جدول «۱»: (مسئلهٔ واندرپول): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	0.72301562789	3.09527251197
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	0.72300371861	3.09520238575
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	0.72300374210	3.09520234037
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	0.72300374213	3.09520234047
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				0.72300373	3.09520234

جدول «۲»: (مسئلهٔ واندرپول): مقادیر محاسبه شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\boldsymbol{\lambda_1(0)}$	$\boldsymbol{\lambda_2(0)}$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	0.94734017185	0.97368164537
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	0.94728445696	0.97364215977
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	0.94728448864	0.97364224421
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	0.94728448872	0.97364224436
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				0.94728449	0.97364224



شکل «۲»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۲

جدول «۳»: (سیستم غیرخطی مرتبه سوم): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{t_f}$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	3.53834896131	7.13686556868	9.08924534920
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	3.53835661840	7.13686397456	9.08924139329
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	3.53835630091	7.13686367859	9.08924079250
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	3.53835630094	7.13686367861	9.08924079213
نتایج به‌دست‌آمده از[5]				3.53835	7.13686	9.08924

جدول «٤»: (سیستم غیرخطی مرتبه سوم): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\boldsymbol{\lambda_1(0)}$	$\boldsymbol{\lambda_2(0)}$	$\boldsymbol{\lambda_3(0)}$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	-0.68007349291	0.05064547984	2.33692283359
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	-0.68012157240	0.05060297981	2.33697211250
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	-0.68012348175	0.05060181910	2.33697493063
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	-0.68012348372	0.05060181876	2.33697493536

تابع سوییچ $\sigma(t)=\lambda_3(t)$ کنترل بهینه را با $u(t)=-\text{sign}\lambda_3(t)$ مشخص می‌کند. با استفاده از روش پرتابی مرسوم روی این مسئله، جواب سیستم کنترل در نقاط سوییچ $s_1=3.4887$، $s_2=7.0694$ و $t_f=9.892$ به‌دست‌آمده است. حال با معلوم بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه، این مسئله با روش پیشنهادی حل شده است. در شکل (۲)، توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۳)، مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. علاوه براین، برای نشان دادن دقّت و همگرایی روش، مقادیر اولیهٔ متغیرهای الحاقی در جدول (٤)، گزارش شده‌اند.

مثال ۳: بازوهای یک روباتی. مسئله کنترل بهینه بازوهای یک روبات با دو لینک که توسط محققین مختلف به آن پرداخته شده است را در نظر بگیرید [23, 24, 6].

در این مسئله، هدف مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (٤٦)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (٤٧)$$

$$\dot{x}_3 = [(50/3)\sin(x_2)(x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + (10/3)(2u_1 - u_2) - 5u_2\cos(x_2) + (25/2)\sin(2x_2)x_3^2]/[(400/9) - 25\cos^2(x_2)] \quad (٤٨)$$

$$\dot{x}_4 = [-(50/3)\sin(x_2)(5x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + (10/3)(5u_2 - 2u_1) + 10(u_2 - u_1)\cos(x_2) - (25/2)\sin(2x_2)(2x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2]/[(400/9) - 25\cos^2(x_2)] \quad (٤٩)$$

$$u_j(t) \in \{-1,1\},\ j = 1,2 \quad (٥٠)$$

بـــا $x(0) = [0,0,0,0,]^T$ و حالـــت نهـــایی $x(t_f) = [-0.44,1.83,0,0]^T$ اســت. لازم بـه ذکـر است که در ایـن مسـئله، متغیرهـای حالـت x_1 و x_2 موقعیت زاویه‌ای نقطه اتصال و x_3 و x_4 نیـز طبیعتـاً سرعت‌های زاویه‌ای را بیـان مـی‌نماینـد. در ضـمن، از گشتاورهای ایـن دو لینـک یعنـی u_1 و u_2 بـه‌عنـوان متغیرهای کنترلی به‌منظور هـدایت روبـات در کمتـرین زمان ممکن از موقعیت اوّلیّه به موقعیت پایانی، استفاده شده است.

بنابراین معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1/dt = 0 \quad (٥١)$$

$$d\lambda_2/dt = -(3/5)[M(x_2,x_3,x_4,\lambda_3,\lambda_4,u_1,u_2)]/[256 - 288\cos^2(x_2) + 81\cos^4(x_2)] \quad (٥٢)$$

$$d\lambda_3/dt = [\lambda_1(16 - 9\cos^2(x_2)) + 12\sin(x_2) \times(\lambda_3(x_3 + x_4) - \lambda_4(5x_3 + x_4)) + \sin(2x + 2) \times(9x_3(\lambda_3 - 2\lambda_4) - 9x_4\lambda_4)]/[-16 + 9\cos^2(x_2)] \quad (٥٣)$$

$$d\lambda_4/dt = [\lambda_2(16 - 9\cos^2(x_2)) + (x_3 + x_4) \times(12\lambda_3\sin(x_2) - 12\lambda_4\sin(x_2) - 9\lambda_4\sin(2x_2))]/[-16 + 9\cos^2(x_2)] \quad (٥٤)$$

به دست می‌آیند که در آن

$$M(.) = \cos^3(x_2)(180\lambda_3x_3x_4 + 90\lambda_3x_3^2 + 90\lambda_3x_4^2 - 90\lambda_4x_4^2 - 450\lambda_4x_3^2 - 180\lambda_4x_3x_4) + \cos^2(x_2) \times(-690\lambda_4x_3^2 - 345\lambda_4x_4^2 + 345\lambda_3x_3^2 - 690\lambda_4x_3x_4) + 27\sin(x_2)\cos^2(x_2)(\lambda_3u_2 - 2\lambda_4u_2 + 2\lambda_4u_1) + \cos(x_2)(-20\lambda_3x_3^2 - 20\lambda_3x_4^2 + 20\lambda_4x_4^2 + 100\lambda_4x_3^2 - 40\lambda_3x_3x_4 + 40\lambda_4x_3x_4) + \sin(x_2) (48\lambda_3u_2 - 96\lambda_4u_2 + 96\lambda_4u_1 + \sin(2x_2)(-36\lambda_3u_1 + 18\lambda_3u_2 - 90\lambda_4u_2 + 36\lambda_4u_1) + 480\lambda_4x_3x_4 - 240\lambda_3x_3^2 + 480\lambda - 4x_3^2 + 240\lambda_4x_4^2 \quad (٥٥)$$

اســـت و بـــرای ســـادگی بـــه‌جـــای $M(x_2,x_3,x_4,\lambda_3,\lambda_4,u_1,u_2)$ از $M(.)$ اســتفاده شده است. همچنین توابع سوییچ به‌صورت:

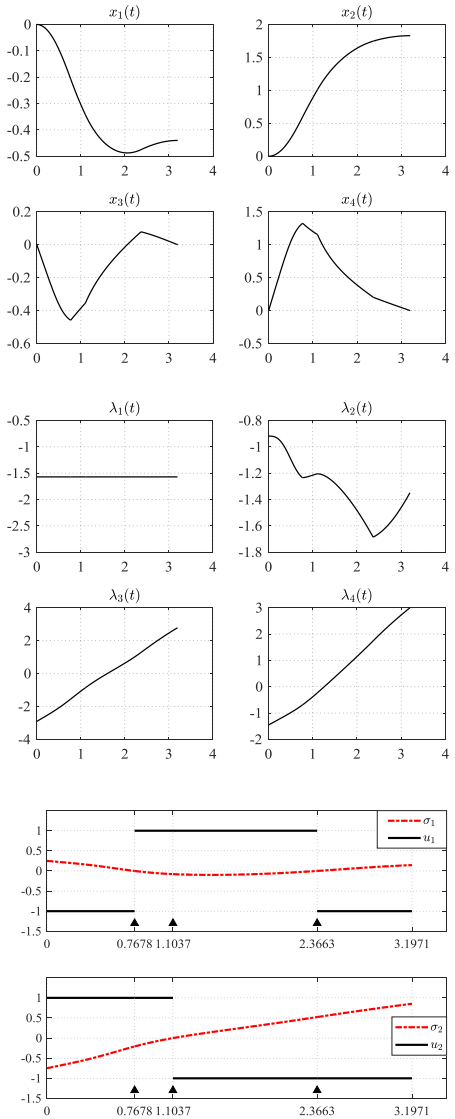
$$\sigma_1(t) = \frac{(20/3)(\lambda_3 - \lambda_4) - 10\lambda_4\cos(x_2)}{(400/9) - 25\cos^2(x_2)} \quad (٥٦)$$

$$\sigma_2(t) = \frac{(50/3)\lambda_4 + 10\lambda_4\cos(x_2) - (10/3)\lambda_3 - 5\lambda_3\cos(x_2)}{(400/9) - 25\cos^2(x_2)} \quad (٥٧)$$

خواهند بود.

حال با معلوم بودن تعداد نقاط سـوییچ و سـاختار کنترل بهینـه، ایـن مسـئله را بـا روش پیشـنهادی حـل می‌کنیم. در شکل (۳)، توابع کنتـرل، سـوییچ، حالـت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده اسـت و در جـدول (۵)، مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌انـد. علاوه براین، برای نشان دادن دقّت و همگرایـی روش، مقادیر اولیهٔ متغیرهای الحاقی در جـدول (٦)، گـزارش شده‌اند. توجّه شود که روش بیان‌شـده، راه‌حلـی دقیـق

ارائه می‌دهد و می‌تواند نقاط سوییچ را با دقّت بسیار مناسب به دست آورد.



شکل «۳»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۳

مثال ٤: جرثقیل پل. مسئله زمان انتهایی آزاد جرثقیل پل که در [9] آمده است را در نظر بگیرید. در این مسئله فرض بر این است که جرثقیل روی ریل‌های مستقیم و بدون اصطکاک قرار داشته و بار آن در طناب‌هایی دایمی و غیرقابل‌تحمل از مرکز ثقل خود معلق باشد. در این سیستم، هدف حرکت جرثقیل از یک موقعیت به موقعیت دیگر در حداقل زمان ممکن است به‌نحوی‌که بار آن در موقعیتی ثابت از جایی شروع و به پایان برسد. طبیعتاً تابع کنترل در این مسئله همان نیروی کنترل جرثقیل یعنی پدال گاز یا احیاناً ترمز جرثقیل است. لذا در این مسئله، هدف مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (٥٨)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (٥٩)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (٦٠)$$

$$\dot{x}_4 = -0.98x_3 + 0.1u \quad (٦١)$$

$$u(t) \in \{-1,1\} \quad (٦٢)$$

و شرایط اوّلیّه و مرزی

$$\mathrm{x}(0) = [0,0,0,0]^T \quad (٦٣)$$

$$\mathrm{x}(t_f) = [15,0,0,0]^T \quad (٦٤)$$

می‌باشند. در اینجا تابع همیلتونی (٦) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x},\lambda,u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 x_4 - \lambda_4(0.98x_3 - 0.1u) \quad (٦٥)$$

خواهد بود که منجر به تشکیل معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1 / dt = 0 \quad (٦٦)$$

$$d\lambda_2 / dt = -\lambda_1 \quad (٦٧)$$

$$d\lambda_3 / dt = 0.98\lambda_4 \quad (٦٨)$$

$$d\lambda_4 / dt = -\lambda_3 \quad (٦٩)$$

خواهد گشت. در این مسئله تابع سوییچ $\sigma(t) = \lambda_2(t) + 0.1\lambda_4(t)$، کنترل بهینه را به‌صورت $u(t) = -\mathrm{sign}(\lambda_2(t) + 0.1\lambda_4(t))$ مشخص می‌نماید.

جدول «۵»: (مسئلهٔ بازوهای یک روبات): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	s_3	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	0.76778603056	1.10366985024	2.36634282018	3.19710629592
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	0.76778926545	1.10367124281	2.36634527742	3.19711194006
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	0.76778927125	1.10367129913	2.36634521474	3.19711188693
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	0.76778927118	1.10367129908	2.36634521457	3.19711188678
نتایج به‌دست‌آمده از[6]				0.7677893	1.1036713	2.3663452	3.197119

جدول «٦»: (مسئلهٔ بازوهای یک روبات): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$	$\lambda_4(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	-1.56900143800	-0.91771498374	-2.90427738607	-1.45400686594
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	-1.56971944709	-0.91794327412	-2.90687926979	-1.45494529907
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	-1.56971965077	-0.91794340778	-2.90687990183	-1.45494560686
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	-1.56971965087	-0.91794340811	-2.90687990192	-1.45494560707
نتایج به‌دست‌آمده از[6]				-1.5697236	-0.9179555	-2.9053665	-1.4543976

اکنون با مشخص بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه که از روش پرتابی مرسوم حاصل آمده است، این مسئله را با روش پیشنهادی حل می‌کنیم. در شکل (٤) توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۷) مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. همچنین برای نمایش دقّت و همگرایی روش، مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی نیز در جدول (۸) گزارش شده است.

مثال ۵: رآکتور شیمیایی. مسئلهٔ زمان انتهایی آزاد رآکتور شیمیایی که در [21] آمده است را در نظر بگیرید. در این مسئله، متغیرهای حالت x_1، x_2 و x_3 به ترتیب چگالی، تأخیر در غلظت و واکنش‌پذیری را در یک سیستم نشان می‌دهند، درحالی‌که متغیر u که همان متغیر کنترلی در این سیستم است، بیانگر دما در لحظه t است. در این سیستم، مسئله مینیمم کردن زمان انتهایی t_f نسبت به محدودیّت‌های

$$\dot{x}_1 = 5x_1(x_3 - 1) + 0.1x_2 \quad (۷۰)$$

$$\dot{x}_2 = 5x_1 - 0.1x_2 \quad (۷۱)$$

$$\dot{x}_3 = 0.2u \quad (۷۲)$$

$$u(t) \in \{-1, 1\} \quad (۷۳)$$

و شرایط اوّلیّه و مرزی

$$\mathrm{x}(0) = [0.04, 2, 0]^T \quad (۷٤)$$

$$\mathrm{x}(t_f) = [0.06, 3, 0]^T \quad (۷۵)$$

می‌باشند. در اینجا تابع همیلتونی (٦) به‌صورت:

$$H(\mathrm{x}, \lambda, u) = 1 + 5\lambda_1 x_1(x_3 - 1) + 0.1\lambda_1 x_2 + 5\lambda_2 x_1 - 0.1\lambda_2 x_2 + 0.2\lambda_3 u \quad (۷٦)$$

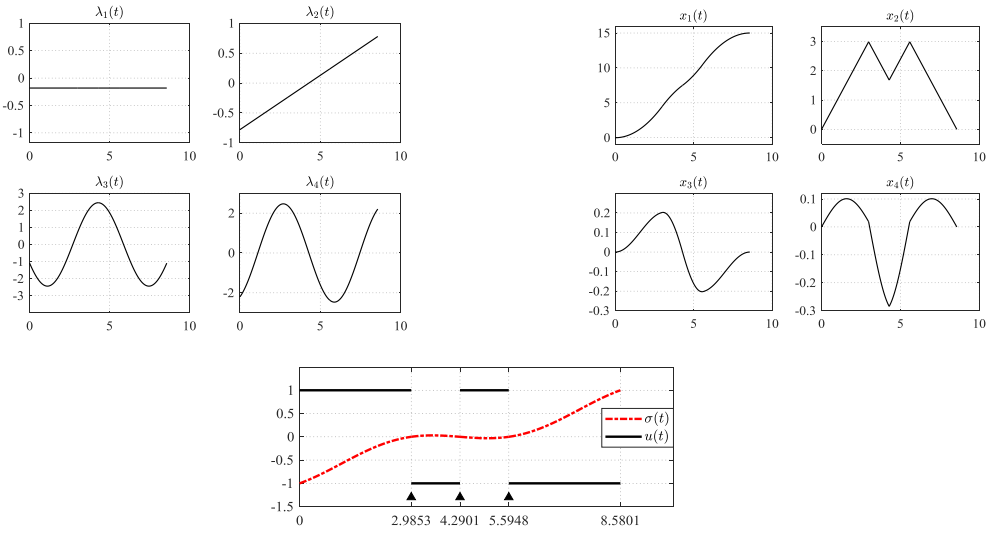
خواهد بود که منجر به تشکیل معادلات الحاقی (۹) به‌صورت:

$$d\lambda_1 / dt = 5\lambda_1(1 - x_3) - 5\lambda_2 \quad (۷۷)$$

$$d\lambda_2 / dt = 0.1\lambda_2 - 0.1\lambda_1 \quad (۷۸)$$

$$d\lambda_3 / dt = -5\lambda_1 x_1 \quad (۷۹)$$

خواهد گشت. در این مسئله تابع سوییچ $\sigma(t) = 0.2\lambda_3(t)$، کنترل بهینه را به‌صورت $u(t) = -\mathrm{sign}(0.2\lambda_3(t))$ مشخص می‌نماید.



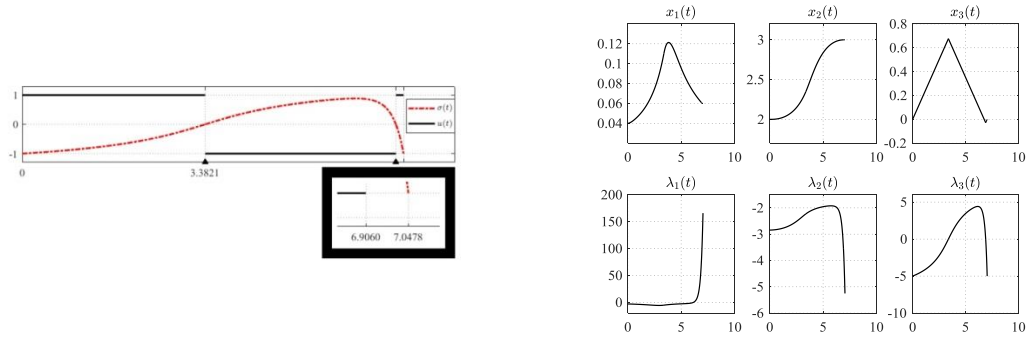
شکل «٤»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ٤

جدول «۷»: (مسئلهٔ جرثقیل پل): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	s_3	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	2.98534164389	4.29005305228	5.59476254024	8.58010226372
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	2.98534070890	4.29005156830	5.59476216189	8.58010260154
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	2.98534056243	4.29005131910	5.59476207521	8.58010263708
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	2.98534056214	4.29005131855	5.59476207495	8.58010263709
نتایج به‌دست‌آمده از[9]				2.98534056214	4.290051311855	5.59476207495	8.58010263709

جدول «۸»: (مسئلهٔ جرثقیل پل): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اولیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$	$\lambda_4(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	-0.18172142222	-0.77959432782	-1.09588674992	-2.20406817424
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	-0.18172131824	-0.77959374522	-1.09588850188	-2.20406239144
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	-0.18172135778	-0.77959395064	-1.09588779157	-2.20406049756
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	-0.18172135774	-0.77959395040	-1.09588779215	-2.20406049599



شکل «۵»: توابع سوییچ، کنترل، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی در مثال ۵

جدول «۹»: (مسئلهٔ رآکتور شیمیایی): مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ محاسبه‌شده برای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	s_1	s_2	t_f
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	3.38209879138	6.90661504664	7.04903251040
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	3.38208953564	6.90599293791	7.04780686215
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	3.38208954823	6.90599297159	7.04780684672
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	3.38208954822	6.90599297157	7.04780684669
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				3.38208957	6.90599299	7.04780685

جدول «۱۰»: (مسئلهٔ رآکتور شیمیایی): مقادیر محاسبه‌شده مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای fsolve و ode45

TolFun	TolX	RelTol	AbsTol	$\lambda_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_3(0)$
1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	1.0e-03	- 2.95496305447	- 2.83091449952	- 4.97444752966
1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06	- 2.97015514326	- 2.84546902458	- 4.99999998975
1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	1.0e-09	- 2.97015518504	- 2.84546909658	- 4.99999999921
1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	1.0e-12	- 2.97015518582	- 2.84546909698	- 5.00000000000
نتایج به‌دست‌آمده از[21]				- 2.97015515	- 2.84546900	-5

اکنون با مشخص بودن تعداد نقاط سوییچ و ساختار کنترل بهینه که از روش پرتابی مرسوم حاصل آمده است، این مسئله را با روش پیشنهادی حل می‌کنیم. در شکل (۵) توابع کنترل، سوییچ، حالت و الحاقی به‌دست‌آمده نشان داده شده است و در جدول (۹) مقادیر زمان‌های نهایی و سوییچ گزارش شده‌اند. همچنین برای نمایش دقّت و همگرایی روش، مقادیر اوّلیّه متغیرهای الحاقی نیز در جدول (۱۰) گزارش شده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله از یک روش پرتابی با کنترل پارامتری شده برای حل غیرمستقیم دسته‌ای از مسائل کنترل بهینهٔ سوییچ‌دار استفاده شد و نتایج کار روی پنج مسئله نوسانگر واندرپل، سیستم غیرخطی مرتبه سوم، بازوهای یک روبات، جرثقیل پل و رآکتور شیمیایی که همگی جزو مسائل معیارسنج در نظریه کنترل بهینه محسوب می‌گردند مشاهده گردید. در مقایسه با روش‌های موجود برای حل این دسته از مسائل کنترل بهینه می‌توان گفت که روش پیشنهادی کارایی مناسبی داشته، به‌خوبی می‌تواند نقاط سوییچ مسئله را با دقّت بالا به دست آورد و همچنین پیاده‌سازی کامپیوتری ساده‌ای دارد. همچنین برآورده کردن شرایط لازم بهینگی از دیگر نقاط قوت این روش محسوب می‌گردد. ولی در عوض، همانند همه روش‌های غیرمستقیم، این روش نیز گستره همگرایی پایینی دارد و به انتخاب حدس اوّلیّه بسیار حساس است. همچنین روش نیازمند مقادیر اوّلیّه مناسب برای متغیرهای الحاقی است که با توجّه به عدم تعبیر فیزیکی از این متغیرها، خود عاملی تأثیرگذار بر همگرایی روش خواهد بود.

واژه‌نامه

کنترل بهینه سوییچ دار	Switching optimal control problem
متغیر مکانی	State variable
متغیر کنترلی	Control variable
سیستم دینامیکی	Dynamical system
تابع هدف	Objective function
اصل مینیمم پونتریاگین	Pontryagin’s minimum principle
تابع همیلتونی	Hamiltonian function

متغیر الحاقی	Costate variables
مسأله مقدار مرزی همیلتونی	Hamiltonian boundary value problem (HBVP)
روش پرتابی بهبودیافته	Improved shooting method
معادله‌ی پرتابی	Shooting equation
تابع سوییچ	Switching function
شرط ترانسورسالیتی	Transversality condition
مسأله مقدار اولیه	Initial Value Problem (IVP)
فرمول رانگ کوتا	Runge-Kutta formula
خطای نسبی	Relative error
خطای مطلق	Absolute error
نوسانگر واندرپول	Van der Pol oscillator
سیستم غیرخطی مرتبه سوم	Third-order nonlinear system
بازوهای یک ربات	Two-link robot
مسأله جرثقیل پل	Bridge-Crane Problem
مسأله رآکتور شیمیایی	Nuclear Reactor

مراجع

1. Ledzewicz, U. and Schttler, H., "Analysis of a cell-cycle specific model for cancer chemotherapy", *Journal of Biological Systems*, Vol. 10, pp. 183–206, (2002).
2. Woon, S. Rehbock, V. and Loxton, R. "Towards global solutions of optimal discrete-valued control problems", *Optimal Control Applications and Methods*, 33, pp. 576–594, (2012).
3. Xia, L. and Shihada, B. "Power and delay optimisation in multi-hop wireless networks", *International Journal of Control*, 87, pp. 1252–1265, (2014).
4. Kaya, C. and Noakes, J. "Computations and time-optimal controls", *Optimal Control Applications and Methods*, 17, pp. 171–185, (1996).
5. Kaya, C. and Noakes, J. "Computational method for time-op timal switching control", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 117, pp. 69–92, (2003)
6. Maurer, H. Buskens, C.Kim, J.-H and Kaya, C. "Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang-bang controls", *Optimal Control Applications and Methods*, 26, pp. 129–156, (2005).
7. Lin, Q. Loxton, R. Teo, K. and Wu, Y. "A new computational method for a class of free terminal time optimal control problems", *Pacific Journal of Optimization*, 7, pp. 63–81, (2011).
8. Lin, Q. Loxton, R. Teo, K. and Wu, Y "Optimal control computation for nonlinear systems with state-dependent stopping criteria", *Automatica*, 48, pp. 2116–2129, (2012).
9. Shamsi, M. "A modified pseudospectral scheme for accurate solution of bang-bang optimal control problems", *Optimal Control Applications and Methods*, 32, pp. 668–680, (2011).
10. Gerdts, M. "A nonsmooth newton's method for control-state constrained optimal control problems", *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, pp. 925–936, (2008).
11. Riedinger, P. and Morarescu, I.-C., "A numerical framework for optimal control of switched input affine nonlinear systems subject to path constraint", *Mathematics and Computers in Simulation*, 95, pp. 63–77, (2014).
12. Yu, C. Li, B. Loxton, R. and Teo, K. "Optimal discrete-valued control computation", *Journal of Global Optimization*, 56, pp. 503–518, (2013).

13. Lee, H. Teo, K. Rehbock, V. and Jennings, L., "Control parametrization enhancing technique for optimal discrete-valued control problems", *Automatica*, 35, pp. 1401–1407, (1999).
14. Li, R. Feng, Z. Teo, K. and Duan, G., "Tracking control of linear switched systems", *ANZIAM Journal*, 49, pp. 187–203, (2008).
15. Loxton, R. Teo, K. Rehbock, V. and Yiu, K., "Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control", *Automatica*, 45, pp. 2250–2257, (2009).
16. Wong, K. and Tang, W., "Optimal control of switched impulsive systems with time delay", *ANZIAM Journal*, 53, 292–307, (2012).
17. Kirk, D., "*Optimal Control Theory*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1970).
18. Bryson Jr., A.E. and Ho, Y.C., "*Applied optimal control: Optimization, estimation, and control*", Hemisphere Publishing Corp. Washington, D. C., (1975).
19. Betts, J., "Survey of numerical methods for trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21, pp. 193–207, (1998).
20. Betts, J. T. "*Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*", 2nd edition, Cambridge University Press, New York, NY, USA, (2009).
21. Maurer, H. and Osmolovskii, N., "Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42, pp. 2239–2263, (2004).
22. Oberle. H. and Grimm, W., "BNDSCO -A program for the numerical solution of optimal control problems", Technical Report 515-89/22, Institute for Flight Systems Dynamics, DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, (1989).
23. Chernousko, F., Akulenko, L. and Bolotnik, N., "Time-optimal control for robotic manipulators", *Optimal Control Applications and Methods*, 10, pp. 293–311, (1989).
24. Geering, H., Guzzella, L., Hepner, S. and Onder, C., "Time-optimal motions of robots in assembly tasks", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, pp. 512–518, (1986).
25. Mezzadri, F and Galligani, E., "A chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods", *Mathematics and Computers in Simulation*, 121, pp. 95–108, (2016).
26. Teo, K., Goh, C.J. and Wong, K.H., "A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems", Longman Scientific and Technical, (1991).
27. Woon, S., Rehbock, V. and Loxton, R., "Global optimization method for continuous-time sensor scheduling", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 10, pp. 175–188, (2010).

(مقالهٔ پژوهشی)

بررسی تجربی تأثیر چیدمان عرضی برآمدگی‌های دوگانه بر بردار پیشرانش در نازل مافوق صوت همگرا-واگرا*

محمدرضا بابائیان[۱] محمد حججی[۲و۳]

چکیده *در این پژوهش اثرات برآمدگی‌های دوگانه به‌عنوان یک روش جدید، کم‌هزینه و ساده در کنترل بردار پیشرانش در یک نازل همگرا-واگرا در رژیم مافوق صوت که عدد ماخ اسمی آن ۲ است، به‌صورت تجربی بررسی می‌شود. برآمدگی‌های مورد استفاده دو قطعه استوانه‌ای شکل است که جلوی جریان در قسمت واگرای نازل قرار داده می‌شود. این برآمدگی‌ها در موقعیت‌های ۸۰ درصد طول قسمت واگرای نازل از گلوگاه نازل به‌صورت عرضی و با زاویهٔ ۴۵ درجه نسبت به یکدیگر نصب شده و به‌صورت هم‌زمان در مسیر جریان اعمال می‌شود. میدان جریان به‌وسیله تصویربرداری شلرین همراه با اندازه‌گیری تغییرات فشار روی دیواره‌های نازل انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد چیدمان عرضی برآمدگی‌های دوگانه در نازل می‌تواند زاویهٔ بردار پیشرانش را تا ۳.۵ درجه در شرایط بررسی شده افزایش دهد. همچنین ضمن دستیابی به زاویهٔ انحراف مشخص با نسبت نفوذ کمتر در مقایسه با استفاده از یک برآمدگی تا ۵.۵ درصد افت پیشرانش محوری را کم نمود.*

واژه‌های کلیدی کنترل بردار پیشرانش؛ مافوق صوت؛ نازل همگرا- واگرا؛ برآمدگی؛ آیرودینامیک تجربی.

Experimental Investigation of the Influence of Transverse Dual protuberances on the Thrust Vector of a Supersonic C-D nozzle

M.R. Babaeyan M. Hojaji

Abstract *In this study, effects of the use of dual transverse protuberances (DTP) as a new, low cost and simple method in controlling the thrust vector in a C-D nozzle, whose nominal Mach number is 2, was investigated. The protuberances used are two cylindrical shapes that are placed in front of the flow in the divergence part of nozzle. Protuberances are installed in 80% of the length of the nozzle divergence section from nozzle throat, transversely and at a 45° angle to each other. The flow field was investigated by schlieren imaging, along with measuring the pressure distributions on the nozzle walls. The results show that using the DTP in the nozzle can increase the angle of the thrust vector to 3.5 degrees in the examined conditions. Also,it can be achived in compare to using a single protobrance with lower thrust loss up to 5.5%.*

Key Words TVC, C-D Nozzle, Supersonic Flow, Protuberance, Experimental Aerodynamics.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۵/۱۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۲/۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v31i1.82370

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

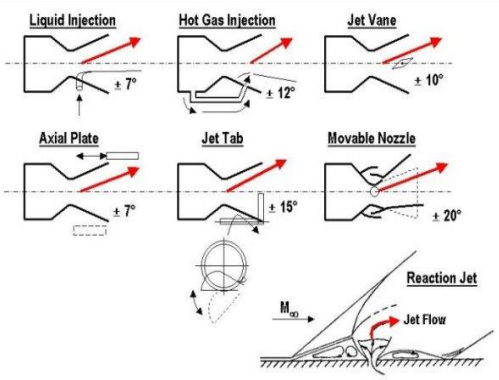
Hojaji_m@pmc.iaun.ac.ir

(۳) استادیار، مرکز تحقیقات هوافضا و تبدیل انرژی، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

مقدّمه

جهت کنترل کردن اشیاء پرنده از روش‌های کنترل نامتعارف و کنترل متعارف استفاده می‌شود. در روش کنترل متعارف، دم، بال و کانارد به کار برده می‌شود. برای کنترل غیرمتعارف، از روش تزریق ثانویه، نازل متحرک، پره کنترل متحرک استفاده می شود. این روش‌ها، ازجمله روش‌هایی هستند که برای کنترل بهتر در زمان ناچیز بودن نیروهای آیرودینامیکی استفاده می شود. بعلاوه، پاسخ به فرمان ها در سیستم هایی که از روش کنترل بردار پیشرانش استفاده می کنند، سریع‌تر است. لذا، استفاده از این روش ها مورد توجّه افراد زیادی قرار گرفته است. همان طور که اشاره شد، از روش های غیرمتعارف مختلفی تاکنون استفاده شده که می‌توان به روش‌های همچون نازل‌های متحرک، استفاده از چند نازل، تزریق ثانویّه و روش های تداخلی اشاره نمود. در شکل (۱) بعضی از این روش‌ها نشان داده شده است [1].

در سال ۱۹٦۵ اوّلین تحقیقات تجربی در مورد کنترل بردار پیشرانش توسط ریچارد گوس انجام شد [2] که نشان داد با افزایش فشار سکون جریان ثانویّه موج ضربه‌ای، جدایش جریان را به سمت بالادست هدایت کرده و باعث تغییر در بردار پیشرانش می‌شود.



شکل «۱»: شمایی کلی از روش‌های کنترل بردار پیشرانش [1]

در سال ۱۹۹٦ دیناگاران و همکارانش به مقایسه بین حل معادلات اویلر و معادلات ناویر استوکس برای تحلیل جریان درون نازل با پاشش ثانویه پرداختند [3]. در این پژوهش میدان جریان پاشش گاز از یک جت صوتی به درون قسمت واگرای یک نازل همگرا-واگرای دوبعدی به صورت عددی بررسی شده است. نتایج نشان داد که حل معادلات ناویر استوکس، ساختار جریان و توزیع فشار را در نزدیکی مجرای پاشش در مقایسه با نتایج تجربی به‌خوبی نشان می‌دهد.

در سال ۲۰۰٦ لی درباره ویژگی‌های یک سیستم تزریق دوگانه در یک توربوشارژر، روند کلی ویژگی‌های مخلوط کردن سیستم تزریق دوگانه و یگانه را به روش عددی مورد بررسی قرار داد [4]. نتایج نشان داد خصوصیات یک سیستم تزریق دوگانه بسیار متفاوت از تزریق یگانه است. جریان ورودی عقب به‌شدّت تحت تأثیر انسداد قرار گرفته و به علّت شتاب جریان تزریق جلو، گسترش و نفوذ زیادتری نسبت به جریان تزریق از جلو دارد.

در سال ۲۰۰۷ آنانتشا و همکارانش به تحقیق در مورد پارامتری کنترل بردار موج ضربه‌ای برای بردار پیشرانش به‌صورت عددی پرداختند [5]. در این پژوهش، مطالعه پارامتری روی عرض شکاف و محل شکاف در ناحیهٔ واگرای نازل انجام شد. با جابجا کردن محل تزریق به نزدیک خروجی نازل در بخش واگرا، زاویهٔ بردار افزایش یافته که این نتیجه برای محدودهٔ نسبت دبی (دبی تزریقی به دبی اصلی) بین۰/۳۵ تا ٦ درصد حاصل شده است. با افزایش دبی تزریق هم در حالت سه‌بعدی و هم در حالت دوبعدی انحراف بردار پیشرانش افزایش می‌یابد و در یک نرخ تزریق ثابت با افزایش پهنای شکاف به خاطر کاهش مومنتم، زاویهٔ پیشرانش کم می‌شود.

در سال ۲۰۱۰ شین و همکارانش محاسبات کنترل بردار پیشرانش را با استفاده از نازل دو گلوگاه مورد بررسی قرار دادند [6]. همچنین، با ایجاد یک سوراخ در گلوگاه بالادست برای تزریق جریان ثانویّه به‌صورت دوبعدی شبیه‌سازی عددی شده است. بر اساس نتایج

اثر کنترل بردار پیشرانش از نظر ضریب پیشرانش و ضریب تخلیه مورد پژوهش قرار گرفته است.

شبیه‌سازی عددی بردار پیشرانش سیّال در نازل مافوق صوت متقارن در سال ۲۰۱٤ توسط دنگ و همکارانش مورد پژوهش قرار گرفت [7]. در آن تزریق گاز ثانویّه به یک نازل مافوق صوت متقارن تحت فشار اتمسفر استاندارد برای به دست آوردن عملکرد کنترل بردار پیشرانش بررسی شد. یک مدل تحلیلی بر اساس جریان تزریق ثانویّه عرضی ایجاد و عددهای ماخ متفاوت در موقعیت‌های مختلف تزریق به دست آمد. عامل کنترل بردار موج ضربه‌ای نسبت فشار داخل نازل است.

کنترل بردار پیشرانش موج ضربه‌ای در یک نازل مافوق صوت مخروطی متقارن از طریق تزریق گاز ثانویّه عرضی [8] توسط زدمیجانویک و همکارانش در سال ۲۰۱٤ مورد بررسی قرار گرفته است که در آن تزریق گاز ثانویّه عرضی به جریان مافوق صوت در یک نازل متقارن همگرا-واگرا مورد مطالعه قرار داده شده است. نتایج نشان داده است که نسبت تزریق ثانویّه به نسبت دبی جرمی اوّلیّه حدود ۵ درصد تغییر بردار پیشرانش ممکن مربوط به نیروهای جانبی باشد. موقعیت تزریق ثانویّه و ایجاد یک هندسه قوی، بر روی کنترل بردار موج ضربه‌ای تأثیرگذار است.

دنگ و همکارانش در سال ۲۰۱٦ شبیه‌سازی گردابه بزرگ برای کنترل بردار موج ضربه‌ای را با استفاده از عبور جریان بای پس [9] مورد بررسی قرار دادند که در آن از پدیده‌های ناپایدار برای کنترل برداری موج ضربه‌ای در فضای سه‌بعدی بهره گرفته شده است. خصوصیات ناپایدار از روش کنترل بردار موج ضربه‌ای در نسبت فشارهای مختلف نازل بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد برای رسیدن به کنترل بردار موج ضربه‌ای با طیف وسیع از نسبت جریان بای پس کمتر از ۷% مورد نیاز است.

در سال ۲۰۱٦ کنگ و همکارانش به مطالعه عددی در نازل نامتقارن با یک صفحه فوقانی متحرک پرداختند [10]. این پژوهش بر اساس پدیده گذرا از یک جت مافوق صوت است. جریان اصلی خروجی از نازل همگرا- واگرا توسط دیوارهٔ فوقانی نازل که با حرکات خاص به عقب و جلو جابجا می‌کند انحراف پیدا کرده است. نتایج حاصل شده انحراف زاویهٔ بردار پیشرانش را نشان می‌دهد که با داده‌های تجربی اعتبار سنجی شد و مطابقت قابل قبولی داشتند.

بررسی تجربی اثرات تزریق ثانویّه بر بردار پیشرانش در یک میکرو نازل همگرا-واگرا در سال ۲۰۱٦ توسط سالمی و همکارانش انجام شد [11]. در این پژوهش به بررسی اثرات تزریق ثانویّه بر بردار پیشرانش دریک میکرو نازلِ همگرا-واگرا به‌صورت تجربی پرداخته شده است. به این منظور نیروی جانبی، زاویهٔ بردار پیشرانش، نیروی پیشرانش و میدان جریان در پشت نازل در فشارهای تزریق مختلف و در حالت بدون تزریق بررسی شده است. نتایج به‌دست‌آمده، با تزریق ثانویّه در فشارهای مختلف، نیروی پیشرانش تغییر قابل‌توجّهی نداشته ولی نیروی جانبی به میزان چشمگیری تغییر کرده است.

در سال ۲۰۱٦ صالحی‌فر و همکارانش به بررسی عددی تزریق ثانویّه گاز داغ بر کنترل بردار پیشرانش و بر مشخصات میدان جریان پرداختند [12]. نتایج این شبیه‌سازی با نتایج آزمایشگاهی صحت سنجی شده است بررسی‌ها نشان می‌دهد که افزایش قدرت تزریق منجر به کاهش ضریب تقویت می‌شود. همچنین، نشان داده شده که در تزریق گاز داغ با افزایش قدرت تزریق در محدودهٔ مجاز تزریق، راندمان کاهش می‌یابد. در نتیجه تزریق دوگانه نمی‌تواند راندمان این روش را افزایش دهد و فقط کمک می‌کند که گاز بیشتری بدون موج ضربه‌ای تزریق کند و نیروی پیشرانش را افزایش دهد.

در سال ۲۰۱۷ مختاری و همکارانش به بررسی تجربی تأثیر برآمدگی بر بردار پیشرانش در میکرو نازل همگرا- واگرا پرداختند [13]. در این پژوهش میدان جریان در پایین‌دست جت خروجی از نازل در چند مقطع در دو حالت با و بدون برآمدگی اندازه‌گیری شده است. نتایج نشان می‌دهد که برآمدگی زاویهٔ بردار تراست را به مقدار ۲/۳ درجه تغییر داده است.

لای و همکارانش در سال ۲۰۱۷ به بررسی بردار پیشرانش سیّال در نازل با زاویهٔ پیچ و گشتاور پرداختند [14]. عملکرد بردار پیشرانش سیّال با زاویهٔ پیچ بسیار وابسته به مکان تزریق است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که نیروی گشتاور وارده، پارامتری است که مستقل از مکان است.

مختاری و همکارانش در سال ۲۰۱۹ اثر یک برآمدگی استوانه‌ای شکل بر بردار پیشرانش را در یک جت مافوق صوت به‌عنوان یک روش جدید در کنترل بردار پیشرانش مورد بررسی قرار دادند [15, 16]. نتایج نشان داد که هر چه میزان ارتفاع برآمدگی‌ها بیشتر باشد موج ضربه‌ای‌های قوی‌تری ایجاد شده و به دیوارهٔ مقابل برخورد می‌کند. با افزایش میزان ارتفاع برآمدگی‌ها، برخورد موج ضربه‌ای با دیواره، باعث انحراف مسیر جت می‌شود.

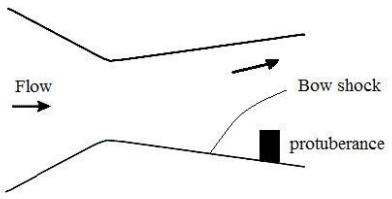
بابائیان و همکاران در سال به بررسی تجربی اثرات میزان نفوذ برآمدگی‌های دوگانه متقابل بر بردار پیشرانش یک نازل همگرا-واگرا در رژیم مافوق صوت پرداختند [17]. در این پژوهش برآمدگی‌ها در موقعیت‌های ۶۰ و ۹۰ درصد طول قسمت واگرای نازل از گلوگاه نازل نصب شده‌اند و به‌صورت هم‌زمان در مسیر جریان اصلی اعمال می‌شود. برآمدگی‌ها در حالت متقابل و روبروی هم بر دیوارهٔ نصب شده و اثرات تغییر نسبت میزان نفوذ برآمدگی‌ها بر زاویهٔ بردار پیشرانش و مؤلفه‌های بردار پیشرانش با اندازه‌گیری نیروهای وارد بر نازل به‌دست‌آمده است. همچنین، میدان جریان نیز به‌وسیله تصویربرداری شلرین و اندازه‌گیری تغییرات فشار روی دیواره‌های نازل اندازه‌گیری شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که استفاده از برآمدگی‌های دوگانه متقابل می‌تواند بر زاویهٔ بردار پیشرانش تأثیر چشمگیری داشته باشد و زاویهٔ بردار پیشرانش را تا ٤/۳۵ درجه نیز در شرایط بررسی شده افزایش دهد.

شرفی و همکاران در سال ۲۰۲۰ به بررسی تجربی اثر حضور و هندسه مانع در میکرونازل همگرا-واگرا بر روی بردار پیشران و جت خروجی پرداختند [18]. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد بیشترین مقدار انحراف، مربوط به مانع با هندسه مکعبی شکل است که برابر ۲/۱ درجه است. همچنین در هندسه‌هایی که دارای گوشه‌های تیز هستند، موج ضربه‌ای شکل گرفته قوی‌تر بوده و به دیوارهٔ مقابل برخورد می‌کند. در این تحقیق، موج ضربه‌ای شکل گرفته با مانع مکعبی و استوانه‌ای به دیوارهٔ مقابل برخورد کرده اما برای موانع کروی و مخروطی شکل، موج ضربه‌ای از دهانه نازل خارج می‌شود.

مرور پژوهش‌های قبلی در زمینه کنترل بردار پیشرانش، نشان می‌دهد که بیشتر این بررسی‌ها با استفاده از روش تزریق ثانویّه در قسمت واگرای نازل صورت گرفته است. مزیت این روش کاربرد آسان آن نسبت به سایر روش‌های دیگر ارائه شده در شکل (۱) است. در این تحقیق تلاش شده تا از برآمدگی‌های استوانه‌ای شکل که در قسمت واگرای نازل در مسیر جریان اعمال شده است، جهت کنترل جت خروجی از نازل استفاده شود. عملکرد این روش همان‌طور که در [15] اشاره شد، مشابه روش تزریق ثانویّه است. با این تفاوت که از نظر اعمال آن بسیار ساده و از نظر هزینه نیز کم است. در این تحقیق اعمال دو برآمدگی به‌طور هم‌زمان مورد بررسی قرار گرفته است. این دو برآمدگی در کنار هم در یک راستا بر روی دیوارهٔ داخلی نازل با فاصله متفاوت از انتهای نازل اعمال شده است. همچنین، در چند مرحله با تغییر میزان ارتفاع

برآمدگی‌ها در جریان، تغییرات توزیع فشار روی دیوارهٔ نازل، نیروهای وارده بر آن و میزان انحراف جریان خروجی آن را از طریق آشکارسازی جریان (شلرین) مورد بررسی شده است.

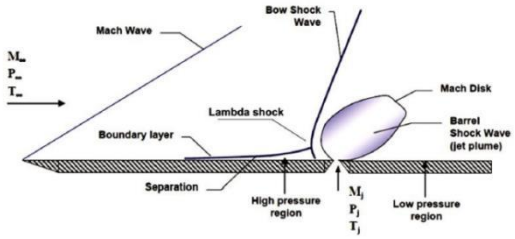
فیزیک جریان در رویکرد کنترل بردار پیشرانش توسط موج ضربه‌ای‌های ایجاد شده. پیشرانش یک جت به دلیل سیّال خروجی است که از نازل با سرعت بالا تخلیه می‌شود. استفاده از برآمدگی‌های استوانه‌ای در روش کنترل بردار پیشرانش توسط برآمدگی، در قسمت واگرای نازل، باعث جدا شدن لایه مرزی از دیواره می‌شود. این موج ضربه‌ای‌ها باعث انحراف جریان اصلی می‌شود. در شکل (۲) به‌طور شماتیک نشان می‌دهد که اعمال برآمدگی در مسیر جریان مافوق صوت به‌عنوان یک مانع عمل کرده و باعث تغییر در حرکت جریان می‌شود.



شکل «۲»: شمایی از موج ضربه‌ای خمیده و انحراف جریان در نازل.

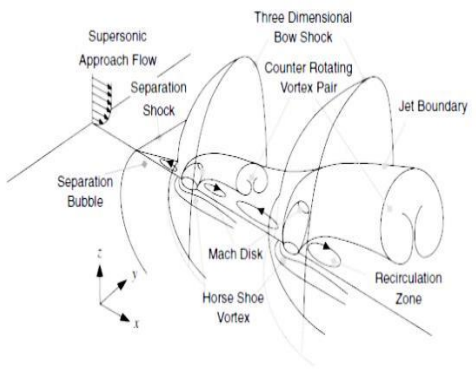
این رفتار همانند رفتار جریان در حالتی است که در نازل تزریق ثانویّه وجود دارد. با تخلیه جریان ثانویّه در جریان اصلی نازل ممکن است موج ضربه‌ای‌هایی در جلوی محل تزریق شکل بگیرد. علّت اصلی تشکیل این موج ضربه‌ای‌ها که به لاندا موج ضربه‌ای و موج ضربه‌ای خمیده معروف هستند، اثرات انسدادی جت و همچنین ماهیت تبعیض‌آمیز جریان مافوق صوت است.

این موج ضربه‌ای‌ها موجب تغییر شدید فشار استاتیک بر روی بدنه می‌شود. این تغییر فشار روی بدنه یکی از عوامل ایجاد نیروی جانبی در نازل است. البته موج ضربه‌ای ایجاد شده باعث تغییر زاویهٔ جریان نیز می‌شود که این می‌تواند به‌عنوان عامل دوم در تغییر زاویهٔ بردار پیشرانش نازل شود [14, 19]. شکل (۳) میدان جریان ناشی از تزریق جت در جریان مافوق صوت را به‌صورت شماتیک نشان می‌دهد.



شکل «۳»: شماتیک الگوی جریان در تزریق ثانویّه [19].

در تزریق دوگانه در نازل، به‌جای یک تزریق جت قوی از دو تزریق جت ضعیف‌تر استفاده شده که باعث می‌شود موج ضربه‌ای‌های قوی شکل گرفته که ممکن است با دیوارهٔ مقابل برخورد کنند و باعث افت پیشرانش اصلی گردد، به موج ضربه‌ای‌های ضعیف‌تر تبدیل شود. در این روش توزیع فشار در دو نقطه از نازل تغییر می‌کند [4]. سیستم تزریق دوگانه افت فشار سکون بیشتری نسبت به تزریق تک‌گانه دارد. شکل (٤) تزریق دوگانه و ایجاد موج ضربه‌ای‌ها در میدان جریان را نشان می‌دهد.

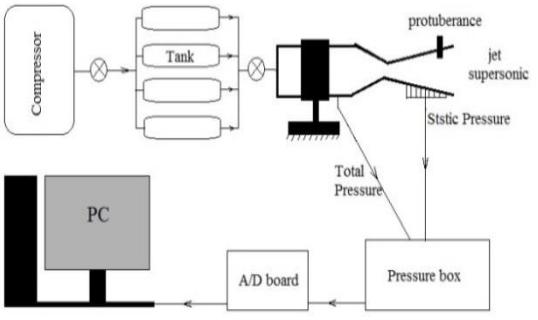


شکل «٤»: میدان جریان در تزریق دوگانه [4]

به نظر می‌رسد با ایجاد دو برآمدگی همانند تزریق دوگانه و ایجاد افزایش فشار در دو نقطه می‌توان به کنترل بهتر بردار پیشرانش که ناشی از توزیع فشار روی سطح است دست یافت. به نظر می‌رسد توزیع فشار در دو نقطه مختلف می‌تواند بردار پیشرانش را بهتر کنترل کند. همچنین می‌توان موج ضربه‌ای‌های خمیده شکل گرفته قوی را، به چند موج ضربه‌ای ضعیف‌تر تبدیل کرد تا نیروی اعمال شده به دیوارهٔ مقابل را کاهش دهد و نیروی پیشرانش مرکزی افت کمتری داشته باشد.

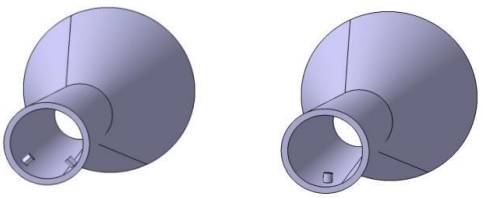
تنظیمات و تجهیزات آزمایشگاهی

در این تحقیق جهت بررسی اثرات چند برآمدگی بر بردار پیشرانش، یک سیستم آزمایشگاهی تهیه شده که در شکل (۵) نشان داده شده است. این سیستم شامل یک مخزن هوای فشرده، کمپرسور، نازل و دیگر تجهیزات اندازه‌گیری و مشاهده جریان است. فشار کل جریان که از محفظه آرامش اندازه‌گیری شده است در همه آزمایش‌ها ثابت در نظر گرفته شده و (NPR=6.6) است. تصاویر شلرین، نیروی پیشرانش، فشار دیوارهٔ نازل، در چند حالت با ارتفاع نفوذ برآمدگی $H/D^* = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ اندازه‌گیری و ثبت می‌شود. H ارتفاع نفوذ برآمدگی و D^* قطر گلوگاه نازل است.

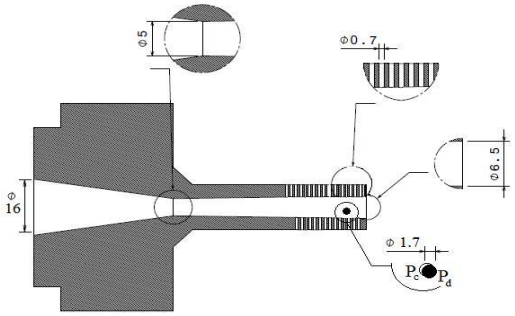


شکل «۵»: شماتیک تجهیزات آزمایش.

نازل. برای ایجاد جریان مافوق صوت از یک نازل همگرا- واگرا با عدد ماخ اسمی ۲ استفاده شده است. نازل طوری طراحی شده که از قسمت انتهایی به محفظه آرامشی که تحمل هوا با فشار ۳۵ بار را دارد، متصل می‌شود. قطر ورودی نازل ۱۶ میلی‌متر، قطر گلوگاه نازل ۵ میلی‌متر، قطر خروجی ۶/۵ میلی‌متر است. طول قسمت واگرای نازل ۵۰ میلی‌متر است. تعدادی سوراخ با قطر ۰/۵ میلی‌متر روی دیوارهٔ نازل برای بررسی فشار در دو طرف دیوارهٔ نازل طراحی شده است که سوراخ‌ها با فواصل ثابت از هم ایجاد شده و با طول واگرای نازل بی‌بعد شده است. برآمدگی‌های مورد استفاده قطعه استوانه‌ای شکل به قطر ۱/۶ میلی‌متر است که جلوی جریان در قسمت واگرای نازل قرار داده می‌شود. این برآمدگی‌ها در حالت دوم به‌صورت هم‌زمان در دو موقعیت مختلف به‌صورت شعاعی با زاویهٔ ۴۵ درجه در مسیر جریان اصلی در چهار میزان نفوذ مختلف در نازل اعمال می‌شود. سوراخ‌های محل نصب برآمدگی‌ها در فاصله ۸۰ درصدی از گلوگاه نازل نصب شده است. در شکل‌های (۶ و ۷) موقعیت سوراخ‌های فشار و محل نصب برآمدگی‌ها نشان داده شده است.



شکل «۶»: موقعیت برآمدگی‌های دوگانه و تکی در نازل.



شکل «۷»: شماتیک برش خورده نازل همگرا-واگرا.

سنسورهای فشار. حسگرهای اندازه‌گیری از نوع ترافاگ است. این سنسورها در ظرفیت‌های مختلفی برای اندازه‌گیری فشار می‌باشند. این سنسورها قادر به اندازه‌گیری فشارهای منفی نیز می‌باشند. قبل از اندازه‌گیری فشار، سنسورها کالیبره می‌شوند.

در جعبه سنسورهای فشار تعداد ۱۰ عدد سنسور با ظرفیت‌های مختلفی تعبیه‌شده که ۵ عدد از سنسورها دارای ظرفیت ۱- تا ۱۰ بار،٤ عدد سنسور با ظرفیت ۱- تا ٤ بار و یک عدد سنسور با ظرفیت ۰ تا ٦ بار مورد استفاده قرار گرفته است (شکل ۸). دقّت سنسورها ۰/۱ درصد مقیاس کلی است.

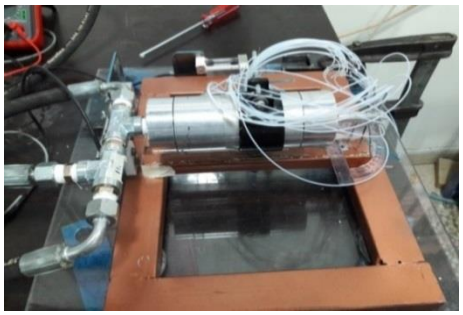
میز نیرو. در این پژوهش برای اندازه‌گیری نیروهای محوری و جانبی وارد بر نازل از یک میز نیروی دومؤلفه‌ای استفاده شده است. بدین منظور یک لودسل ۳۰۰ گرمی در جهت جانبی برای اندازه‌گیری نیروها و یک لودسل ۲۵۰۰ گرمی در جهت محور نازل به میز نیرو متصل شده است. برای اندازه‌گیری نیروی پیشرانش و جانبی، نازل روی پایه نصب شده است. ابتدا میز نیرو با اعمال نیروهای مختلف در زوایای متفاوت کالیبره شده است. در شکل (۹) میز نیرو مشاهده می‌شود. دقّت کلی میز نیرو در جهت X, Y کمتر از ۰/۵ درصد مقیاس کلی است که این افزایش به دلیل وجود اثرات تداخلی و کوپل شدن دو لودسل به یکدیگر است.

کارت داده‌برداری. در این پژوهش یک کارت داده‌برداری Advantech مدل 4711A USB مورد استفاده قرار گرفته است این کارت داده‌برداری دارای ١٦ کانال ١٢ بیتی است که به کامپیوتر وصل شده است.



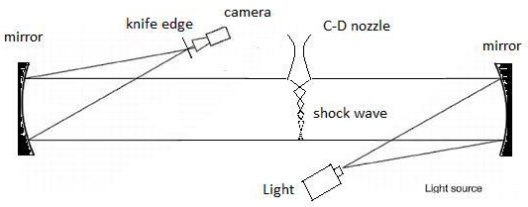
شکل «۸»: تصویر جعبه سنسورهای فشار.

حسگرهای فشار و لودسل‌های به کار رفته در این پژوهش به کارت داده‌برداری متصل شده‌اند. داده‌ها از معدل‌گیری ۱۰۰ نمونه در زمان یک ثانیه استخراج می‌شود.



شکل «۹»: تصویر میز نیروی دومؤلفه‌ای.

شلرین. سیستم شلرین شامل منبع نور، آینه‌های مقعر، تیغه و دوربین تصویربرداری است. در این سیستم از نور سفید استفاده می‌شود و نور انعکاسی توسط دو آینه که از لبه تیغه عبور می‌کند، مستقیماً روی لنز دوربین افتاده تصویربرداری می‌شود. این تصاویر با استفاده از دوربین ثبت می‌شوند. شکل (۱۰) شماتیک تنظیمات تصویربرداری شلرین در آزمایشگاه را نشان می‌دهد.

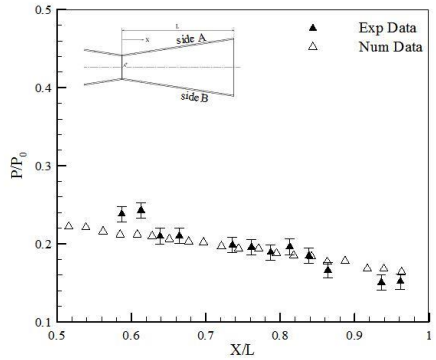


شکل «۱۰»: شماتیک سیستم شلرین.

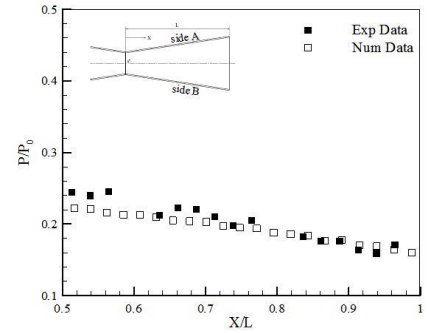
نتایج و بحث

ارزیابی نازل بدون وجود برآمدگی. برای ارزیابی داده‌های تجربی، ابتدا توزیع فشار روی دیوارهٔ نازل مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور سوراخ‌هایی که روی دیوارهٔ نازل است با استفاده از اتصالات هوای فشرده به حسگرهای فشار متصل شده است. در محفظه آرامش فشار ثابت و برابر (NPR=7.8,6.6) است. نازل بدون برآمدگی تست و تغییرات فشار و عدد ماخ در طول نازل بررسی شد. فشار استاتیک روی دیوارهٔ با فشار کل ورود به نازل بی‌بعد شده است (P/P_0). محل نقاط اندازه‌گیری شده فشار روی دیوارهٔ نازل نیز با طول کل قسمت واگرای نازل بی‌بعد شده‌اند (X/L). در شکل (۱۱) تغییرات فشار استاتیک بر روی دیواره‌های نازل را نشان می‌دهد. با توجّه به خطای اندازه‌گیری سنسورهای فشار عدم قطعیت مربوطه محاسبه و بر روی داده‌های تجربی شکل (۱۱) نشان داده شده است. همچنین، در شکل (۱۲) تغییرات عدد ماخ داخل نازل بر روی دیواره‌ها مشاهده می‌شود.

این نتایج با نتایج عددی مقایسه شده است. به این منظور از نرم‌افزار فلوئنت استفاده شد. از فرم کامل معادلات ناویر–استوکس در حالت تقارن محوری با رویکرد چگالی مبنا و پایا برای شبیه‌سازی عددی نازل استفاده شده است. همچنین، از مدل k-ε,RNG برای مدل‌سازی آشفتگی جریان، از روش رو برای تخمین شار ناشی از عبارت جابه‌جایی و از روش تفاضل مرکزی برای تخمین شار پخش معادلات استفاده شده است. دقّت حل عددی نیز مرتبه دو است. میدان داخل نازل مطابق با مدل تجربی به همراه دامنه بیرونی آنکه به‌صورت یک استوانه با شعاع ۱۵۰ میلی‌متر و طول ۳۵۰ میلی‌متر در نظر گرفته شد. شرایط ورودی و خروجی میدان نیز مطابق با آزمایش‌های تجربی (NPR=6.6) در نظر گرفته شد. استقلال حل از شبکه نیز مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، مقدار +y روی دیوارهٔ نازل در شبیه‌سازی بین ۳۰ تا ۳۰۰ به دست آمد. نتایج نشان می‌دهد که تطابق خوبی بین داده‌های تجربی و نتایج عددی وجود دارد.



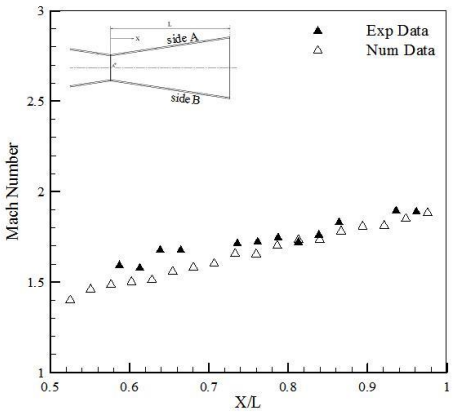
الف) سمت A نازل



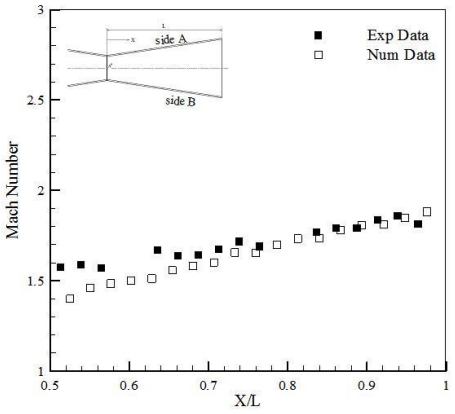
ب) سمت B نازل

شکل «۱۱»: نمودار توزیع فشار استاتیک بر دیوارهٔ نازل.

بررسی اثرات نصب برآمدگی‌های یگانه و دوگانه با چیدمان عرضی. برای بررسی اثرات ناشی از حضور برآمدگی‌های متقابل بر بردار پیشرانش نازل، دو برآمدگی در موقعیت‌های ۸۰ درصد از گلوگاه در قسمت واگرای نازل به‌صورت شعاعی با زاویهٔ ۴۵ درجه نصب و نیروهای جانبی و محوری بر نازل اندازه‌گیری می‌شود. برای بررسی اثرات میزان نفوذ برآمدگی‌ها، برآمدگی‌های مزبور در چهار میزان نفوذ مختلف قرار داده می‌شود. البته، در این حالت‌ها میزان نفوذ هر دو برآمدگی به‌طور یکسان است. مقدار نیروی عرضی و محوری وارد بر نازل در شکل‌های (۱۳ و ۱۴) برای دو حالت مختلف نشان داده شده است.



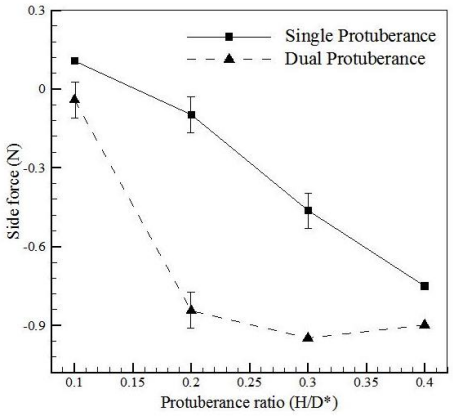
الف) سمت A نازل



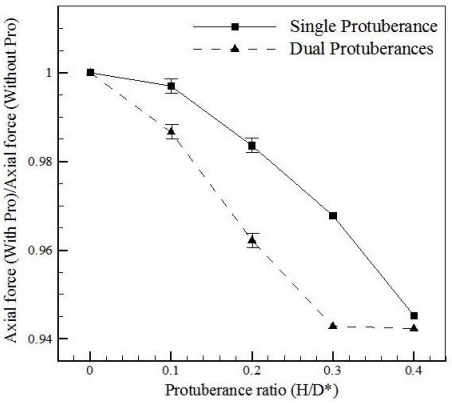
ب) سمت B نازل

شکل «۱۲»: نمودار توزیع عدد ماخ بر دیواره‌های نازل.

در حالت اوّل از یک برآمدگی با میزان نفوذهای مختلف و در حالت دوم از دو برآمدگی با میزان نفوذهای مختلف استفاده شده است. نتایج حاصل در دو نسبت فشار (NPR=7.8,6.6) بار نشان می‌دهد؛ که در هر دو حالت با افزایش میزان نفوذ برآمدگی(ها)، نیروی جانبی وارد بر نازل افزایش یافته است. همچنین، مشاهده می‌شود که در حالت اوّل (در حضور یک برآمدگی) در نسبت نفوذهای (H/D^*) بالاتر از ۰/۱، راستای نیروی جانبی وارد بر نازل تغییر جهت داده است. درحالی‌که در حالت دوم (در حضور دو برآمدگی) در کلیه حالت‌ها، راستای نیروی جانبی تغییر نکرده است. علاوه بر موارد ذکر شده، افزایش شیب تغییرات در حالتی است که از دو برآمدگی استفاده شده است. البتّه، این افزایش شیب تنها در محدوده ایست که نسبت نفوذ دو برآمدگی از ۰/۱ به ۰/۲ افزایش یافته است و در نسبت نفوذهای بالاتر (در حالت دوم) میزان تغییرات چشمگیر نیست.



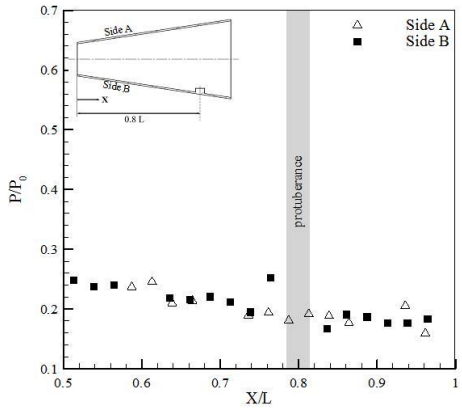
شکل «۱۳»: مقایسه نیروی‌های جانبی با حضور ۲ برآمدگی و یک برآمدگی.



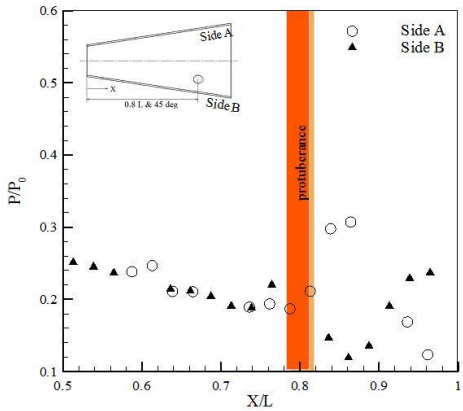
شکل «۱٤»: مقایسه نیروی‌های محوری با حضور ۲ برآمدگی و یک برآمدگی.

روند تغییرات نیروهای محوری وارد بر نازل در شکل (۱٤) نشان می‌دهد که در هر دو حالت با افزایش نسبت نفوذ برآمدگی‌ها، نیروی پیشرانش محوری کاهش یافته است و تقریباً در بدترین شرایط این کاهش به ٤ درصد نیز می‌رسد. البته، میزان کاهش در حالت دوم نسبت به حالت اوّل (در شرایط نسبت نفوذ برآمدگی یکسان) بیشتر است (تقریباً دو برابر). ولی در

حالتی که نسبت نفوذ برآمدگی‌ها به ۰/٤ رسیده، این افزایش به‌صورت تقریباً یکسان بوده است. به نظر می‌رسد در این حالت امواج موج ضربه‌ای خمیده شکل گرفته در بالادست دو برآمدگی (حالت دوم) در شرایطی که نسبت نفوذ برآمدگی‌ها ۰/٤ بوده است، با یکدیگر ترکیب شده‌اند. لذا، از روند کاهش قبلی که شامل دو موج ضربه‌ای خمیده جداگانه بوده، جلوگیری کرده است. برای درک بهتر از فیزیک جریان اثرات ناشی از حضور برآمدگی‌ها در دو حالت مذکور بر توزیع فشار روی دیواره‌های نازل در شکل‌های (۱۵ و ۱٦) نشان داده شده است.



الف) برآمدگی یگانه

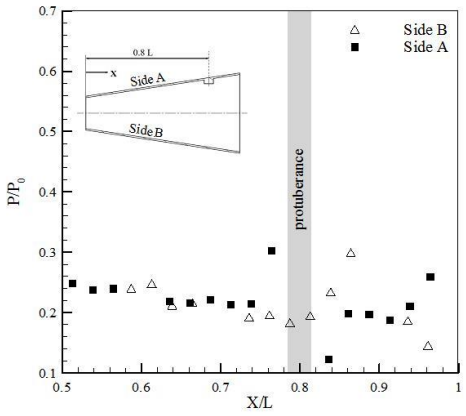


ب) برآمدگی دوگانه

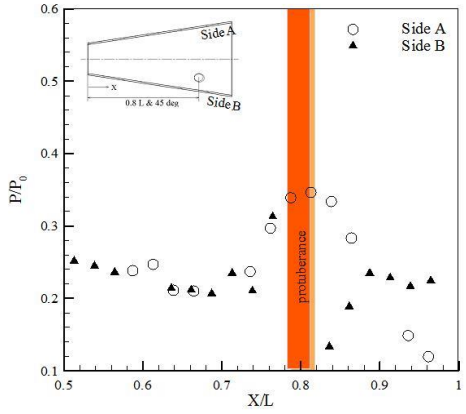
شکل «۱۵»: توزیع فشار بر دیواره‌های نازل در نسبت نفوذ برآمدگی $(H/D^* = 0.1)$

در شکل (۱۵) تغییرات ضریب فشار بر دیوارهٔ نازل در دو حالت مذکور و در نسبت نفوذ ۰/۱ $(H/D^* = 0.1)$ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در حالت با برآمدگی یگانه، در بالادست برآمدگی (در طرف B) ضریب فشار افزایش یافته است. مطابق تحقیقات قبلی [15] این افزایش ناشی از تشکیل یک موج ضربه‌ای خمیده در بالادست برآمدگی است. همچنین، در پایین‌دست برآمدگی نیز کاهش در ضریب فشار مشاهده می‌شود که ناشی از ایجاد دنباله در پایین‌دست برآمدگی است. در ادامه، جریان یک روند کاهشی تدریجی را طی می‌کند که ناشی از افزایش سرعت جریان درون نازل است. این فرآیند در طرف A نازل (طرف مقابل برآمدگی) چندان قابل‌ملاحظه نیست که نشان می‌دهد موج ضربه‌ای خمیده شکل گرفته در بالادست برآمدگی به دیوارهٔ مقابل برخورد نکرده است. در حالت دوم که از دو برآمدگی استفاده شده نیز افزایش فشار و کاهش آن در دو طرف برآمدگی‌ها (طرف B) قابل مشاهده است. البته، در این حالت میزان افت فشار در پایین‌دست برآمدگی‌ها نسبت به حالت قبل بیشتر است.

به نظر می‌رسد علّت این پدیده اثرات انسدادی شدیدتر برآمدگی‌ها در این حالت و افزایش وسعت ناحیهٔ دنباله پشت برآمدگی‌ها باشد. در طرف A رفتار کاملاً متفاوت است. به‌گونه‌ای که افزایش ضریب فشار در سمت A کاملاً مشهود است این نشان می‌دهد که در این حالت موج ضربه‌ای خمیده به دیوارهٔ مقابل (سمت A) برخورد کرده و نهایتاً منعکس شده است. به نظر می‌رسد عامل اصلی اختلاف در جهت نیروی جانبی در نسبت نفوذ (۰/۱) نیز وجود موج ضربه‌ای انعکاسی در حالت دوم (در حضور برآمدگی‌های دوگانه) است که در تصاویر شلرین قابل برداشت است.



الف) برآمدگی یگانه

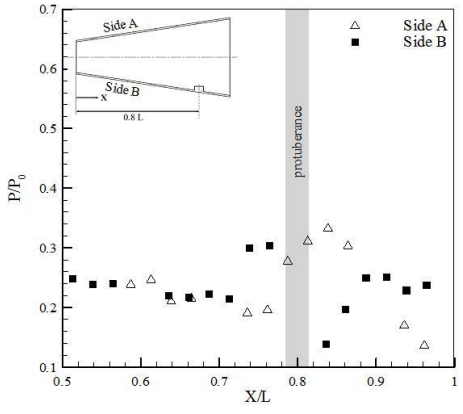


ب) برآمدگی دوگانه

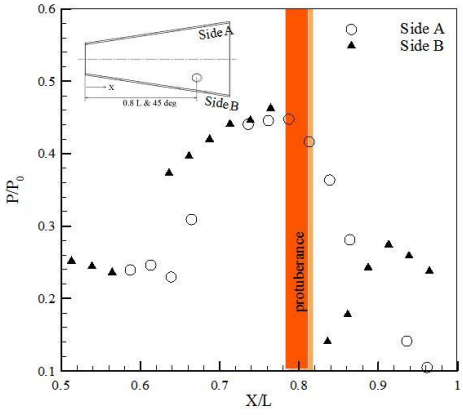
شکل «۱۶»: توزیع فشار بر دیواره‌های نازل در نسبت نفوذ برآمدگی $(H/D^* = 0.2)$

برای این منظور تغییرات ضریب فشار بر روی دیواره‌ها در شکل‌های (۱۸-۱۶) در سایر حالت‌ها با نسبت نفوذ مختلف $(H/D^* = 0.2 - 0.4)$ نشان داده شده است. تصاویر شلرین در نسبت نفوذهای مختلف در حالت‌های اوّل و دوم در شکل‌های (۱۹ و ۲۰) نشان داده شده است. مقایسه شکل (۱۹- الف) با (۲۰ –الف) حضور موج ضربه‌ای انعکاسی خارج شده از نازل را به‌خوبی نشان می‌دهد.

نتایج نشان می‌دهد که همان پدیده‌هایی که در حالت دوم (در حضور دو برآمدگی) با نسبت نفوذ ۰/۱ اتفاق افتاده، در سایر حالت‌ها نیز اتفاق افتاده است؛ یعنی موج ضربه‌ای خمیده از بالادست برآمدگی(ها) بر دیوارهٔ مقابل برخورد کرده و از آنجا به بیرون نازل امتداد یافته است. این موضوع در تصاویر شلرین در شکل‌های (۱۹-ب، ج، د) و (۲۰-ب، ج، د) نیز مشاهده می‌شود. علی‌رغم تشابه میدان جریان در این حالت‌ها، پدیده‌های دیگری نیز در این شکل‌ها قابل مشاهده است. یکی از این پدیده‌ها، پیشروی نقطه تشکیل موج ضربه‌ای خمیده در بالادست برآمدگی(ها) به سمت گلوگاه نازل با افزایش نسبت نفوذ برآمدگی است



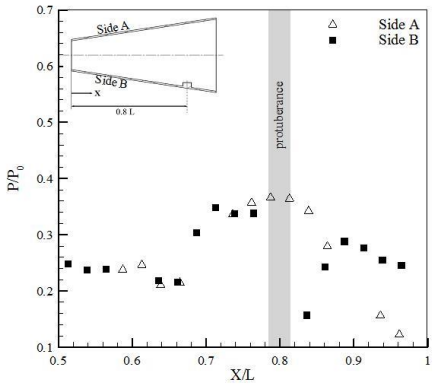
الف) برآمدگی یگانه



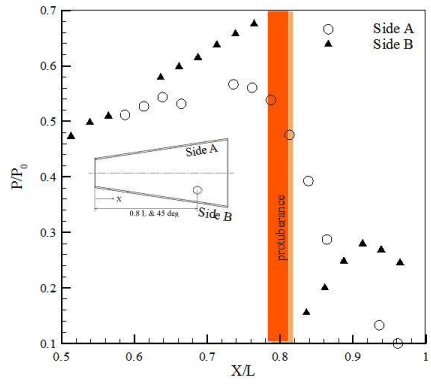
ب) برآمدگی دوگانه

شکل «۱۷»: توزیع فشار بر دیواره‌های نازل در نسبت نفوذ برآمدگی $(H/D^* = 0.3)$

البته، محل تشکیل موج ضربه‌ای در بالادست برآمدگی در حالتی که از دو برآمدگی استفاده شده نسبت به حالتی که از یک برآمدگی استفاده شده (در نسبت نفوذ یکسان) به گلوگاه نازل نزدیک‌تر شده است (شکل الف- ۱۶ و ۱۷ و ۱۸). همچنین، در تمامی حالت‌ها با پیشروی نقطه تشکیل موج ضربه‌ای، موج ضربه‌ای شکل گرفته از قدرت بیشتری برخوردار است.



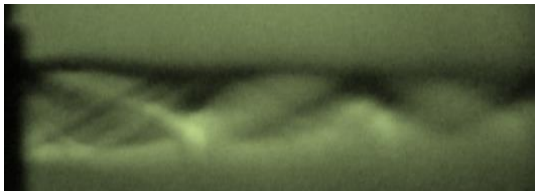
الف) برآمدگی یگانه



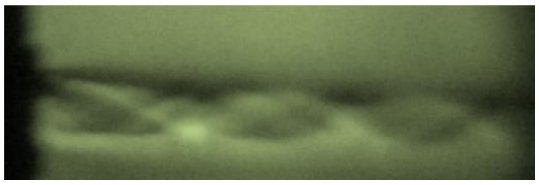
ب) برآمدگی دوگانه

شکل «۱۸»: توزیع فشار بر دیواره‌های نازل در نسبت نفوذ برآمدگی ($H/D^* = 0.4$)

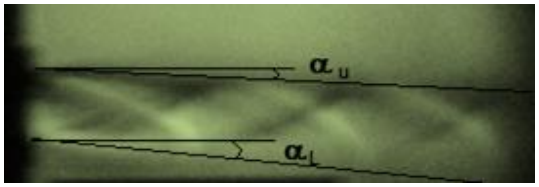
تشکیل یک ناحیهٔ پرفشار در پایین‌دست محل تشکیل موج ضربه‌ای از پدیده‌های دیگر قابل مشاهده است (شکل ۱۷ و ۱۸) که در ادامه (تا محل نصب برآمدگی) یک روند افزایشی در آن قابل مشاهده است. این نشان می‌دهد که رژیم جریان موجود در بین برآمدگی و موج ضربه‌ای خمیده در محدودهٔ مادون صوت قرار دارد. لذا، می‌توان انتظار داشت که این ناحیهٔ خود به‌عنوان یک مانع در درون جریان اثر گذارد. موضوع دیگری است که کاهش سرعت جریان در این ناحیه با افزایش نسبت نفوذ نیز شدّت گرفته است. این را می‌توان در ماکزیمم ضریب فشار در بالادست برآمدگی‌ها نیز مشاهده نمود. این پدیده در حالتی که از دو برآمدگی استفاده شده با شدّت بیشتری مشاهده می‌شود هرچند که در بین دو برآمدگی یک فضای خالی برای عبور جریان وجود دارد. ولی به نظر می‌رسد این فاصله کمکی به کاهش فشار نکرده و موج ضربه‌ای شکل گرفته در بالادست دو برآمدگی با یکدیگر ترکیب شده‌اند.



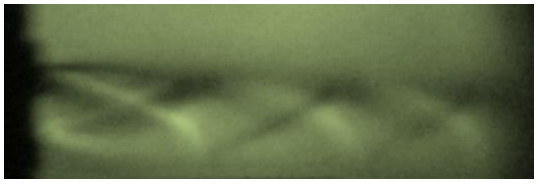
الف) $H/D^* = 0.1$



ب) $H/D^* = 0.2$



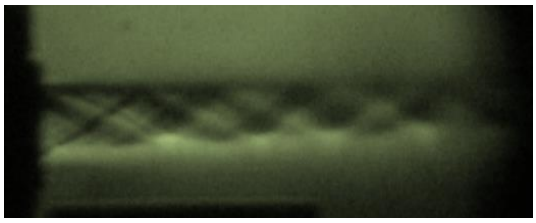
ج) $H/D^* = 0.3$



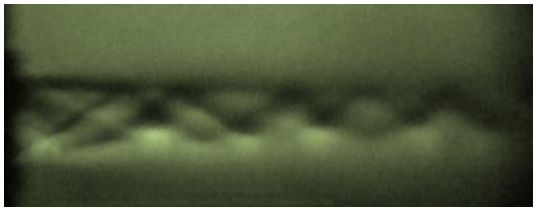
د) $H/D^* = 0.4$

شکل «۱۹»: تصاویر شلرین جت خروجی در میزان نفوذ برآمدگی مختلف در نازل با دو برآمدگی.

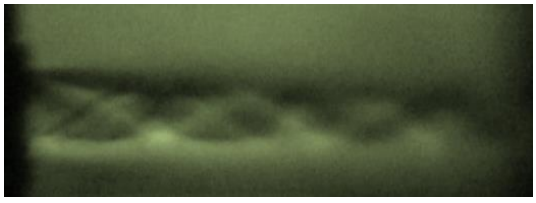
مقایسهٔ تغییرات ضریب فشار در پایین‌دست برآمدگی‌ها نیز نشان می‌دهد که با افزایش نسبت نفوذ برآمدگی‌ها در هر دو حالت (با برآمدگی یگانه و دوگانه) وسعت ناحیهٔ دنباله از افزایش بیشتری برخوردار بوده است. همچنین، کاهش بیشتر ضریب فشار در این ناحیه با افزایش نسبت نفوذ برآمدگی بیانگر شدّت گرفتن اثرات انسدادی برآمدگی‌ها و تقویت ناحیهٔ دنباله است. به‌علاوه، مشاهده می‌شود که استفاده از دو برآمدگی باعث افزایش وسعت ناحیهٔ دنباله بدون تقویت آن نسبت به حالت برآمدگی یگانه شده است (شکل ١٦ و ١٧ و ١٨).



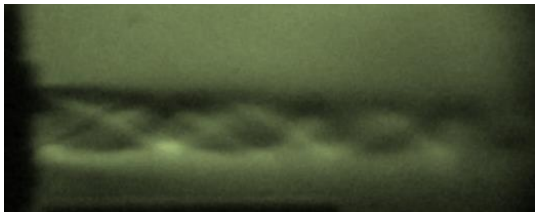
الف) $H/D^* = 0.1$



ب) $H/D^* = 0.2$



ج) $H/D^* = 0.3$



د) $H/D^* = 0.4$

شکل «٢٠»: تصاویر شلرین جت خروجی با یک برآمدگی در میزان نفوذ مختلف.

برای توزیع فشار بر روی دیوارهٔ مقابل (در حالت‌های مورد بحث) نیز نشان می‌دهد که با پیشروی محل تشکیل موج ضربه‌ای، محل برخورد آن بر دیوارهٔ مقابل نیز به سمت گلوگاه نازل پیشروی کرده است. البته، انتظار می‌رود که بعد از موج ضربه‌ای برخورد کرده با دیوارهٔ نازل، به خاطر مافوق صوت بودن جریان، سرعت جریان نیز کاهش یابد. این موضوع دوحالتی که از یک برآمدگی استفاده شده کاملاً قابل مشاهده است.

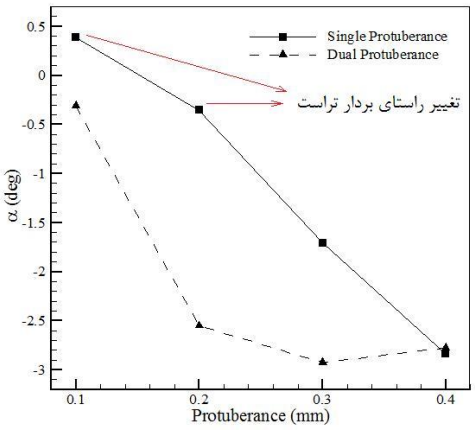
در حالتی که در برآمدگی دوگانه یک روند ثابت و یا گاها افزایشی در توزیع فشار روی دیوارهٔ مقابل (طرف A) تا محل نصب برآمدگی قابل رؤیت است این نشان می‌دهد که ناحیهٔ مادون صوت شکل گرفته در بالادست برآمدگی‌ها (همان‌طور که در قسمت قبل به آن اشاره شد) به‌صورت یک مانع در روبروی جریان اثر کرده و باعث ایجاد یک گلوگاه ثانویّه مجازی در نزدیکی محل نصب برآمدگی‌ها در نازل شده است. گلوگاهی که در ورودی آن جریان مافوق صوت و در خروجی آن نیز جریان مافوق صوت است. لذا، افزایش ضریب فشار در قبل و کاهش آن در بعد از برآمدگی‌ها بر روی دیوارهٔ سمت A قابل مشاهده است. این نشان می‌دهد که افزایش زیاد برآمدگی‌ها (در حالت دوم) چندان مؤثر و مناسب به نظر نمی‌رسد. در شکل (٢١) زاویهٔ انحراف جریان (زاویهٔ بردار پیشرانش) در دو حالت (برآمدگی یگانه و دوگانه) نشان داده شده است. این زاویهٔ مطابق رابطهٔ (١) به‌دست‌آمده است:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_s}{F_a}\right) \qquad (١)$$

این نتایج نشان می‌دهد که در حالت (١) (با یک برآمدگی) با افزایش نسبت نفوذ، زاویهٔ انحراف به‌صورت خطی افزایش یافته است. این در حالی است که در حالت (٢) (با دو برآمدگی) روند خطی شیب تغییرات از نسبت نفوذ ٠/١ تا ٠/٢ بسیار شدیدتر از

نسبت نفوذهای بالاتر است. برای مقایسه بهتر نتایج در این دو حالت می‌توان به این نکته اشاره نمود که در حالت ۲ در نسبت نفوذ ۰/۲ زاویهٔ پیشرانش به نزدیک ۲/۷ درجه رسیده است. این در حالی است که در حالت ۱ برای رسیدن به این زاویهٔ نسبت نفوذ برآمدگی بایستی در حدود ۰/٤ باشد.

از نظر مقدار میزان افت پیشرانش محوری، در حالت (۱) برای رسیدن به زاویهٔ انحراف نزدیک به ۲/۷ درجه در حدود ۵/۵ درصد از پیشرانش محوری کاهش می‌یابد درحالی‌که در حالت (۱) (با استفاده از دو برآمدگی) نزدیک به ۳/۵ درصد از پیشرانش محوری کاسته شده است. برای تأیید بیشتر نتایج به‌دست‌آمده، زاویهٔ بردار پیشرانش از طریق تصاویر شلرین نیز محاسبه و در شکل (۲۲) نشان داده شده است [15].

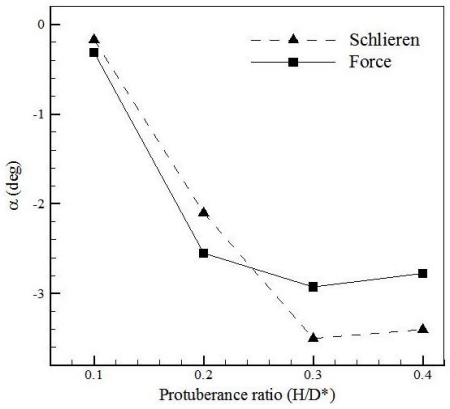


شکل «۲۱»: مقایسه زوایای بردار پیشرانش در حالت برآمدگی یگانه و دوگانه در نسبت نفوذهای مختلف.

نتایج نشان می‌دهد زاویهٔ انحراف جریان خروجی نازل تطابق خوبی با بردار پیشرانش به‌دست‌آمده از نیروهای وارده دارد. برای محاسبه زاویهٔ انحراف جریان از رابطهٔ (۲) استفاده شده است.

$$\alpha_{ave} = \frac{\alpha_l + \alpha_u}{2} \qquad (۲)$$

این نتایج نشان می‌دهد که در حالتی که از دو برآمدگی استفاده می‌شود نیز می‌توان از این تکنیک برای تخمین زاویهٔ بردار پیشرانش استفاده کرد. زاویهٔ بردار پیشرانش نازل با زاویهٔ انحراف جریان خروجی از نازل که از تصاویر شلرین و به‌دست‌آمده است، در شکل (۱۷) مقایسه شده است.



شکل «۲۲»: نمودار مقایسه زاویهٔ انحراف جت خروجی از تصاویر شلرین با زاویهٔ بردار پیشرانش در نسبت برآمدگی‌های مختلف دوگانه.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق اثرات ناشی از اعمال برآمدگی‌های یگانه و دوگانه با چیدمان عرضی بر بردار پیشرانش یک نازل همگرا واگرا در رژیم مافوق صوت به‌صورت تجربی مورد بررسی قرار گرفت. عدد ماخ اسمی نازل ۲ است. در تمامی آزمایش‌ها فشار ثابت در نظر گرفته شده است برآمدگی‌ها در فاصله ۸۰ درصد از قسمت واگرای نازل به‌صورت یگانه و دوگانه نصب شده‌اند. اثرات نسبت نفوذ برآمدگی‌ها بر میدان جریان از طریق مشاهده جریان (تصویربرداری شلرین) اندازه‌گیری فشار روی دیواره‌ها انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد:

۱- با استفاده از برآمدگی‌های دوگانه در نسبت نفوذهای کمتر از ۰/۲ شیب تغییرات زاویهٔ بردار

پیشرانش بسیار بیشتر از حالتی است که از یک برآمدگی استفاده می‌شود. البته در نسبت نفوذهای بالاتر، روند افزایش زاویهٔ پیشرانش در این حالت بسیار کمتر می‌شود.

۲- با اعمال یک برآمدگی یک رفتار خطی بین نسبت نفوذ برآمدگی و زاویهٔ پیشرانش حتی در نسبت نفوذهای بالا مشاهده می‌شود.

۳- در نسبت نفوذ کمتر از ۰/۲ در حالتی که از یک برآمدگی استفاده می‌شود، تغییر جهت در زاویهٔ بردار پیشرانش مشاهده می‌شود. درصورتی‌که در حالت دو برآمدگی این پدیده مشاهده نمی‌شود.

٤- استفاده از دو برآمدگی در نسبت نفوذهای بالای ۰/۳ اثرات مطلوبی بر میدان جریان نداشته و حتی می‌تواند باعث کاهش زاویهٔ بردار پیشرانش نیز شود.

۵- با استفاده از دو برآمدگی می‌توان در نسبت نفوذهای پایین‌تر ضمن دسترسی به زاویهٔ پیشرانش مورد نظر (در مقایسه با نصب یک برآمدگی) اتلاف پیشرانش محوری کمتری را داشت.

فهرست علایم

D^*	قطر گلوگاه (mm)
H	ارتفاع برآمدگی (mm)
L	طول قسمت واگرای نازل (mm)
P	فشار استاتیک (bar)
P_0	فشار کل (bar)
X	فاصله نقطه مورد نظر از گلوگاه (mm)
NPR	نسبت فشار نازل
α	زاویهٔ انحراف جت (degree)
α_s	زاویهٔ شلرین جت خروجی (degree)
F_a	زاویهٔ محوری جت خروجی (degree)

واژه‌نامه

برآمدگی	Protuberance
نازل همگرا-واگرا	C-D nozzle
بردار پیشرانش	Thrust Vector
زاویه انحراف	Deflection Angle
شلرین	Schelirin
نسبت نفوذ	Penetration ratio

مراجع

1. Sutton, G.P. and Biblarz, O., *"Rocket Propulsion Elements*", John Wiley & Sons Inc, New York, (2001).
2. Gubse, R.D. "An experimental investigation of thrust vector control by secondary injection," NASA CR-297, (1965).
3. Dhinagaran, R. and Bose, T.K. "Comparison of Euler and Navier-Stokes solutions for nozzle flows with secondary injection", *AIAA Paper 96-0453, AIAA 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno*, NV Jan 15-18, (1996).
4. Lee, S.H., "Characteristics of dual transverse injection in scramjet combustor, Part 1: Mixing", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 22, No. 5, (2006).
5. Anantesha, S.N. and Vamsidhar, D., "Numerical investigation and parametric study of fluidic thrust vectoring by shock vector control method, " *SASTECH* ,Vol. 6, No. 2, (2007).
6. Shin, C.S., "A computational study of thrust vectoring control using dual throat nozzle," *Journal of Thermal Science*, Vol. 19, No. 6 , pp. 486-490, (2010).

7. Deng, R., Kong, F. and Kim, H.D., "Numerical simulation of fluidic thrust vectoring in an axisymmetric supersonic nozzle," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 12, pp. 4979-4987, (2014).
8. Zmijanovic, V., Lago, V., Sellam, M. and Chpoun, A., "Thrust shock vector control of an axisymmetric conical supersonic nozzle via secondary transverse gas injection," *Shock Waves*, Vol. 24, No. 1, pp. 97-111, (2014).
9. Deng, R., Setoguchi, T. and Kim, H.D., "Large eddy simulation of shock vector control using bypass flow passage," *Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 62, pp. 474-481, (2016).
10. Kong, F., Jin, Y. and Kim, H.D. "Thrust vector control of supersonic nozzle flow using a moving plate," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 30, No. 3, pp. 1209-1216, (2016).
11. Salemi, V.R., Sohrabi, S., Hojaji, M. and Soufivand, M.R., "Experimental study on the effects of secondary injection thrust vector in a Micro-Nozzles", *First National Conference on Advances and Challenges in Engineering and Technology*, Iran, (2016). (In Persian)
12. Salehifar, M., Tahani, M., Hojaji, M. and Dartoomian, A., "CFD modeling for flow field characterization and performance analysis of HGITVC", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 103, pp. 291-304, (2016).
13. Mokhtari, D., Hojaji, M. and Mokhtari, M., "Experimental study of the effect of Protuberance on the thrust vector in convergent-divergent micro nozzle", *16th International Conference of Iranian Aerospace Society*, *Khaje Naseerdin Tousi University of Technology*, Tehran, (2017). (In Persion)
14. Li, L., Hirota, M., Ouchi, K. and Saito, T., "Evaluation of fluidic thrust vectoring nozzle via thrust pitching angle and thrust pitching moment", *Shock Waves*, Vol. 27, No. 1, pp. 53-61, (2017).
15. Mokhtari, D., Hojaji, M. and Afrand, M., "Experimental investigation of the effect of cylindrical protuberance with different penetration the thrust vector a C-D nozzle in supersonic regime", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 5, pp. 1145-1154, (2019).
16. Mokhtari, D., Hojaji, M. and Afrand, M., "Experimental investigation of the effect of location of cylindrical protuberance on the thrust vector of a supersonic C-D nozzle", *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 9, No. 1, pp. 237-249, (2019).
17. Babaeyan, M.R. and Hojaji, M., "Experimental investigation of the penetration effects of opposite dual protuberances on thrust vector of a supersonic C-D nozzle", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 7, pp. 1741-1750, (2019).
18. Sharafi, A. and Mokhtari, D., "Experimental study of effect of obstacle presence and its geometry on thrust vector and outlet jet in a convergent-divergent micro nozzle", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 20, No. 5, pp. 1211-1221, (2020).
19. Tahani, M., Hojaji, M. and Mahmoodi, S.V., "Turbulent jet crossflow analysis with LES approach", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 88, No. 6, pp. 717-728, (2016).

(مقالهٔ پژوهشی)

یک مدل جدید ریاضی برای جریان در خط لوله گاز تراکم پذیر همراه با نشت*

مرجان علی‌یاری[۱] فائزه فرهادی[۲]

چکیده *در این مقاله، یک مدل خط لوله گاز همراه با نشت ارائه می‌شود. این مدل نیازی به ارزیابی ویژگی‌های تجهیزات پایین‌دستی ندارد و به روش‌های عددی پیچیده تکیه نمی‌کند. تغییرات متغیرهای جریان را می‌توان با دقّت مدل پیش‌بینی کرد. در این مدل، یک رویکرد جدید مبتنی بر شباهت بین خط لوله و مدار الکتریکی پیشنهاد می‌شود، به‌طوری‌که، یک مدار معادل با یک ساختار خاص برای شبیه‌سازی خط لوله نشت استفاده می‌شود. این رویکرد نوین را می‌توان برای ارزیابی تلفات ناشی از نشت و راهنمای عملکرد خط لوله و همچنین کمک به تشخیص نشت ارائه کرد. می‌دانیم که عبارات ریاضی متعدّدی در توصیف جریان در خط لوله با نشت فرموله شده است اما حل آنها به‌سادگی امکان‌پذیر نیست. این در حالی است که مدل ریاضی خط لوله با نشت را نیز می‌توان با این روش توسعه داد. این مدل با استفاده از داده‌های حاصل از یک خط لوله گاز واقعی تأیید می‌شود. نتایج شبیه‌سازی به‌خوبی با نتایج تجربی تطابق دارد که این بر صحت مدل و اعتبار و کارایی روش پیشنهادی صحه می‌گذارد.*

واژه‌های کلیدی خط لوله؛ مدل‌سازی ریاضی؛ الگویی هیدرولیکی الکتریکی؛ شبیه‌سازی؛ نشت؛ مدار معادل.

A New Mathematical Model Gas Flows in Pipeline with Leak

M. Aliyari F. Farhadi

Abstract *In this paper, a gas pipeline model with leakage is presented. This model does not need to evaluate the characteristics of downstream equipment and does not rely on sophisticated numerical methods. Changes in the flow variables can be accurately predicted by the model. In this model, a new similarity-based approach is proposed between the pipeline and the electrical circuit, in which a circuit equivalent to a specific structure is used to simulate the leakage pipeline. This new approach can be used to assess leakage losses and guide pipeline operation as well as to help detect leaks. We know that many mathematical expressions have been formulated to describe the flow in a pipeline by leakage, but it is not easy to solve. However, the mathematical model of a leaky pipeline can also be developed with this method. This model is validated using data from a real gas pipeline. The simulation results are in good agreement with the experimental results which confirm the validity of the model and the validity and efficiency of the proposed method.*

Key Words Pipeline; Mathematical Modeling; Hydraulic–Electric Analogy; Simulation; Leakage; Equivalent Circuit.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱/۲۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۸/۷/۳۰ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v31i1.80013

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آیت الله بروجردی، ایران. m.aliyari@abryu.ac.ir

(۲) کارشناس ارشد طراح خطوط لوله، شرکت آذرآب ایران، تهران، ایران

مقدّمه

یکی از مباحث مهم و قابل‌توجّه در صنعت گاز محاسبه گازهای تلف‌شده است و این مسئله همواره به‌عنوان یک معضل مورد توجّه بوده است. عوامل مختلفی در اتلاف گاز نقش دارند که در بسیاری از موارد قابل‌اندازه‌گیری نیستند و باید روش‌هایی برای تخمین و محاسبه آنها پیش‌بینی نمود. برای مثال گازهای خروجی حاصل از نشتِ حاصل از تَرَک و یا نشت در اثر سوراخ شدن خطوط لوله بهنگام برخورد با یک وسیلهٔ مکانیکی و غیره. این نشتی‌ها از کارهای عملیاتی عادی، امور تأسیساتی و توزیع‌کننده‌های سیستم و غیره نتیجه می‌شوند. نشت گاز طبق تعریف عبارت است از خروج ناخواسته گاز که به علل گوناگون و معمولاً به‌طور ناگهانی روی می‌دهد و همواره امکان بروز پدیده نشت گاز در تأسیسات خط لوله، شبکه‌های گازرسانی و منازل وجود دارد.

نشت گاز به علل مختلف در لوله‌های گاز و تأسیسات گازی روی می‌دهد که مهم‌ترین آنها عبارت‌اند از:

۱- خوردگی (corrosion)، در اثر نقص در عایق‌کاری و یا عدم اجرای صحیح حفاظت کاتریک سطوح خارجی لوله‌ها، امکان بروز خوردگی وجود دارد. اگرچه خوردگی‌های عمده در سطوح خارجی لوله‌ها اتفاق می‌افتد ولی امکان بروز خوردگی داخلی چه در لوله‌ها و چه در ظروف عملیاتی به علّت وجود ترکیبات خورنده‌ای مثل هیدروژن سولفوره و آب نیز وجود دارد؛

۲- سایش داخلی (Erosion)، در اثر وجود ناخالصی‌های همراه با گاز پدیدهٔ سایش اتفاق می‌افتد. معمولاً در محل خم لوله‌ها و یا در شیرهای کاهش‌دهنده فشار به علّت افزایش سرعت گاز میزان سایش بیشتر است؛

۳- عوامل خارجی، مانند ضربه‌های مکانیکی و اعمال تنش‌های اضافی؛

٤- نقص در ساختار متالوژیکی لوله‌ها، اتصالات و شیرها و غیره؛

۵- نقص در اجزاء و نصب شیرها و سایر اتصالات فلنجی و رزوه‌ای؛

٦- نقص در جوش لوله‌ها و اتصالات جوشی و.... انجام فرصت‌های مؤثر موجود برای کاهش نشتی در صنعت نفت و گاز می‌تواند به کاهش گم شدن محصول، نشت کمتر متان و منافع بیشتر منجر شود.

مدل‌سازی ریاضی جریان در یک گاز با نشت می‌تواند با در نظر گرفتن تغییرات متغیرهای جریان مانند فشار و سرعت جریان در مجراهای یک خط لوله پس از وقوع یک نشت در نظر گرفته شود، لذا می‌توان از آن برای ارزیابی تلفات ناشی از نشت استفاده کرد. علاوه بر این، مدل‌های ریاضی می‌توانند با استفاده از داده‌های خود مکان وقوع نشت را تشخیص دهد [1-3]. اکثر این مدل‌ها توسط شبیه‌سازی‌های خط لوله مورد تأیید قرار گرفته‌اند، اما دقّت شبیه‌سازی‌های خط لوله توسط موارد واقعی تأیید نشده است.

معادلات حاکم بر رفتار جریان در یک خط لوله، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی است و حل آنها به روش‌های تحلیلی و حتی عددی مانند روش مشخصه‌ها (MOC) و انواع مختلفی از روش‌های اختلاف محدود، صریح و ضمنی نیز دشوار است. در همه این روش‌های عددی، نیازمند اطّلاعاتی از شرایط مرزی خط لوله که وابسته به ویژگی‌های بالادست و پایین‌دست دارد، هستیم. ازاین‌رو، مدل خط لوله نشت کمتر از حد معمول است و این نسبت در هنگامی‌که خط لوله دارای پیچیدگی خاصی باشد، افزایش می‌یابد. اوک و همکاران [4] شبیه‌سازی جریان ناشی از شکستن خط لوله و پس‌ازآن قرار دادن یک دریچهٔ اضطراری را بیان و مورد بررسی قرار دادند.

شین و همکاران [5] از امواج صوتی برای تشخیص ضربه در خطوط لوله استفاده کردند. حس‌گرهای پیزوالکتریک (بار الکتریکی‌ای است که در مواد جامد مشخصی به علّت فشار مکانیکی انباشته می‌شود) به‌طور گسترده‌ای برای نظارت بر سلامت ساختاری خطوط لوله استفاده می‌شوند.

نوری بروجردی [6] مدل‌سازی جریان گاز گذرا از خطوط لوله به دنبال خرابی فاجعه‌بار را موردبررسی قرار داد که در آن به استفاده از روش اختلاف محدود از مرتبه ضمنی برای شرایط همرفت جهت استفاده در مدل جریان گاز بی دررو گذرا در صورت پارگی خط لوله می‌پردازد و هدف خود را کاهش محاسبات و زمان انجام عملیات محاسباتی اعلام کرد و نتیجه‌گیری کردند که در اوایل زمان پس از پارگی، افت فشار قابل‌توجّهی در نقطهٔ شکست رخ می‌دهد و در این مرحله جریان متزلزل وجود دارد. در بخش فشار کم، حداکثر نقطهٔ فشار وجود دارد و وارونگی جریان در پشت جبهه موج انبساط رخ می‌دهد. در بخش فشار بالا، تغذیه گاز ادامه می‌یابد و با همان مقدار اوّلیّه ثابت نگه‌داشته می‌شود و سرعت جریان به یک جریان خفه‌شده حالت پایدار می‌رسد. ابوالفضلی اصفهانی و همکاران [7] نیز مدلی برای بررسی جریان تراکم پذیر گذرا به همراه نشتی در خط لوله گاز به‌صورت بدون بُعد ارائه دادند. در این مدل، با بررسی پارامترهای میزان انتشار گاز بدون بُعد از پارگی خط لوله، یک تابع تخلیه جرم منحصربه‌فرد ارائه گردید. در این مدل معادلات حاکم بر ابعاد با روش صریح مک‌کورمک برای طیف گسترده‌ای از هندسه متفاوت لوله‌ها و شرایط مرزی حاکم بر آنها حل‌وفصل شد. نتایج به‌دست‌آمده در این کار نشان‌دهندهٔ آن بود که میزان رهاسازی مدل سوراخ مستقل از فشار و اصطکاک است، بنابراین تنها پارامتر مؤثر قطر نسبی سوراخ است، درحالی‌که در مدل پارگی کامل میزان رهاسازی تابعی از اصطکاک و قطر رهاسازی است. با توجّه به دقّت کم در مدل‌های رگرسیون چندگانه کلاسیک، یک مدل اتصالی منحنی یک مرحله‌ای یک طرفه در مدل پارگی کامل برای به دست آوردن همبستگی‌های دقیق استفاده شد. همچنین در این مدل با معرفی یک شاخص و معیار آن برای خطوط لوله طولانی می‌توان دریافت که این شاخص نه‌تنها به هندسه وابسته است (نسبت طول به قطر لوله) بلکه به رژیم جریان نیز تعلق دارد (ضریب اصطکاک). به همین ترتیب در سال‌های اخیر، برخی از محققین سرعت انتشار گاز از یک خط لوله، محاسبه فشار و سرعت آزاد شدن در نقطهٔ نشت را پیش‌بینی کرده‌اند [1,3,8-10]؛ اما در اکثریت آنها فرض بر این بود که شار جرم ورودی برابر با جرم شار آزادشده است، لذا خطای محاسباتی قابل‌توجّهی در عمل حاصل گردید. فعّالیّت معمول برای تخمین نشتی‌های گاز در شبکه‌های توزیع استفاده از فاکتورهای نشر است که حجم گاز را به ازای واحد طول یا به ازای فشار گاز در خط بیان می‌کند. این فاکتورها برای مواد و فشارهای مختلف، متفاوت است و انتخاب مناسب‌ترین روش برای یک موقعیت خاص کم‌اهمّیّت نیست و به‌طور ایده‌آل باید بر اساس اطّلاعات پایه‌ای باشد.

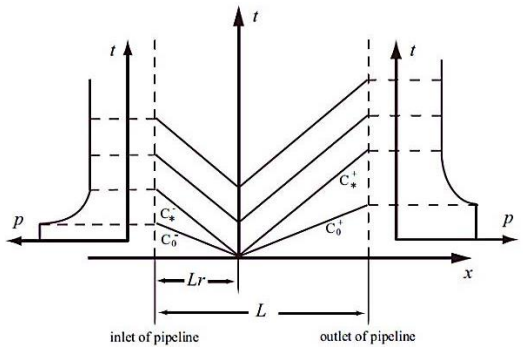
در این مقاله، خط لوله با نشت توسط یک مدار الکتریکی معادل شبیه‌سازی‌شده و انتهای خروجی خط لوله می‌تواند با تقریبی از یک نوع مدار در نظر گرفته شود. ایده اصلی این کار برگرفته از مقالات و تحقیقات ابوالقاسم ذبیح ا... و همکاران در [11] و مرتضی طاهری نژاد و همکاران در [12] است. در ادامه به جزییات این روش پرداخته و مدل پیشنهادی را با داده‌های واقعی در معرض آزمایش و مقایسه قرار می‌دهیم.

مدل‌سازی جریان در خط لوله گاز با نشت

برای ساده‌سازی عبارات ریاضی، دو فرضیه زیر در نظر گرفته می‌شود:

الف) جریانِ هم‌دمایی در یک خط لوله فرض می‌شود و بنابراین معادلهٔ انرژی را می‌توان نادیده گرفت.
ب) با توجّه به آنکه مسیر لوله‌های مد نظر بسیارطولانی است، به‌طور مثال خط لوله گاز آغاجاری از جنوب به شمال، طول لوله نسب به شعاع سطح مقطع آن آن‌قدر زیاد است که می‌توان جریان در این نوع خط لوله را یک‌بعدی در نظر گرفت.

با فرض وجود نشت ناگهانی، تغییرات سریع در فشار و سرعت جریان، موجب انتشار امواج از نقطهٔ نشت به دو انتها خط لوله می‌شود [13]. امواج گسترش‌یافته که به‌عنوان موج فشار منفی (NPW) نامیده می‌شوند و انتشار آنها، در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل «۱»: تولید و پخش یک موج گسترده از نقطهٔ نشت.

L_r در شکل (۱)، فاصله از نقطهٔ نشت به مجرای ورودی خط لوله را نشان می‌دهد، درحالی‌که L طول کل لوله است C^-, C^+ به ترتیب خطوط مثبت و منفی ماخ هستند. C_*, C_0 به ترتیب خطوط ماخ در حالت پایدار قبل و بعد از وقوع نشت هستند. هنگامی‌که NPW به انتهای خط لوله می‌رسد، شرایط مرزی تحت تأثیر قرار می‌گیرد و یک فرآیند تداخلی تسریع می‌شود. مدت‌زمان این گذر تیز خیلی کوتاه است که می‌تواند تنها با فرکانس بسیار بالا نمونه‌برداری شود، به‌عنوان‌مثال ۱۰۰ هرتز.

سیستم نظارت کنترل و اکتساب داده‌ها (SCADA) اغلب برای نظارت بر سیستم خط لوله و اکثر روش‌های تشخیص نشت استفاده می‌شود. بااین‌حال، زمان نمونه‌برداری یک سیستم SCADA از چند ثانیه تا چند دقیقه است؛ بنابراین در این مقاله مطالعه خود را به فرآیند گذرا ملایم محدود کردیم که می‌تواند با معادلات حالت پایدار توصیف شود.

با توجّه به مفروضات فوق و نادیده گرفتن تغییرات ارتفاع در طول خط لوله گاز، معادلات پیوستگی و ممنتم حاکم بر جریان گاز ایده‌آل و هم‌دما در یک خط لوله می‌توانند با توجّه به [14] به‌صورت زیر نوشته شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u A)=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}=-\frac{\lambda \rho u^2}{2D} \qquad (۲)$$

جایی‌که ρ، u و P به ترتیب، چگالی، سرعت و فشار گاز به‌عنوان تابع زمان، t و فاصله x است، μ نشان‌دهندهٔ ضریب اصطکاک، D نشان‌دهندهٔ قطر لوله و A نشان‌دهندهٔ مقطع عرضی است.

با استفاده از روش مشخصّه‌ها (MOC) در [15] و فرض بر اینکه سطح مقطع عرضی در طول خط لوله ثابت باقی می‌ماند، جریان در خط لوله نامحدود می‌تواند به‌صورت زیر به دست می‌آید [15]:

$$\frac{P_Q^2-P_Z^2}{G^2RT}-2\ln\left(\frac{P_Q}{P_Z}\right)=\frac{\bar{\mu}L}{D} \qquad (۳)$$

ضریب اصطکاک متوسط در امتداد طول خط $\bar{\mu}$ جایی‌که G شار جرم در میان خط لوله است و $G=\rho u$، P_Q فشار ورودی، P_Z فشار خروجی، R ثابت گاز جهانی، Tمتوسط دما در طول خط لوله است. در طول C_*^- در شکل (۱)، فرآیند گذرا به‌طور مستقیم به‌وسیله نشت به وجود می‌آید و جریان در آن قسمت از لوله از نقطهٔ نشت به ورودی خط لوله می‌توان

به‌صورت زیر بیان کرد [15]:

$$\frac{P_Q^2 - P_L^2}{Gq^2RT} - 2\ln\left(\frac{P_Q}{P_L}\right) = \frac{\bar{\mu}Lr}{D} \qquad (٤)$$

جایی‌که P_L فشار در نشتی، G_q شار جرم بالادست از نقطهٔ نشت است. به همین ترتیب، در طول C_*^+ داریم [15]:

$$\frac{P_L^2 - P_Z^2}{G_Z^2RT} - 2\ln\left(\frac{P_L}{P_Z}\right) = \frac{\bar{\mu}(L - Lr)}{D} \qquad (٥)$$

جایی‌که G_z شار جرم پایین‌دست از نقطهٔ نشت است.

فرض کنید k نرخ نشت در نقطهٔ نشت باشد. همان‌طور که فرض کردیم سطح مقطع لوله در طول خط لوله ثابت باقی می‌ماند، با این فرض k می‌تواند به‌صورت زیر در نظر گرفته شود [16]:

$$k = \frac{Gq - G_z}{Gq} \qquad (٦)$$

معادلات (٦-٤) جریان در یک خط لوله گاز با نشت نشان می‌دهد. تغییرات فشار و جریان در انتهای خط لوله ناشی از نشت می‌تواند با حل این معادلات پیش‌بینی شود.

حل معادلات مدل بر اساس مدار معادل

توصیف مدل با یک مدار معادل. برای مدل کردن خط لوله نشت، میزان نشت، k و محل نشت، L_r باید در ابتدا معلوم شود، و شارها و نرخ جریان‌ها در انتها با استفاده از معادلات (٦-٤) نیز معلوم می‌گردد. بااین‌حال، ٥ متغیر نامعلوم در معادلهٔ (٦-٤) وجود دارد، مانند P_Q و P_L، P_Z و $G_q \text{ or } u_q$، $G_z \text{ or } u_z$، لذا باید فرض کنیم که یکی از آنها شناخته شده است.

در صورت نشت، میزان نشت در نقطهٔ نشت با فشار اوّلیّه در مجرای ورودی خط لوله همراه است. بنابراین، در محاسبه تغییرات متغیرهای جریان، فشار ورودی ثابت فرض می‌شود. ازآنجایی‌که ٤ متغیر ناشناخته و مجهول وجود دارد، به نظر می‌رسد راه‌حل دقیقی برای معادلات فوق وجود ندارد [17].

یک رویکرد جدید مبتنی بر شباهت بین سیستم خط لوله و مدار الکتریکی برای حل چنین معادلاتی به این منظور پیشنهاد می‌شود.

هدف اصلی برای شبیه‌سازی خط لوله انتقال گاز به‌عنوان مؤثرترین شبکه‌های پویا انتقال و توزیع گاز طبیعی، وضوح و پیش‌بینی سرعت جریان و توزیع فشار در طول لوله است.

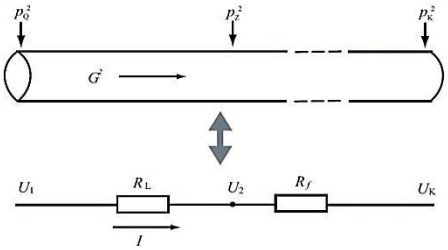
فشار به‌عنوان عامل محرک جریان گاز، در روش قیاس الکتریکی به‌عنوان پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته می‌شود که عامل تبدیل برق است. واضح است که جریان گاز نیز با جریان الکتریسیته شباهت دارد. یک عنصر ساده لوله به‌عنوان عنصر الکتریکی است که سرعت جریان و فشار در ابتدا و انتهای آن ذخیره می‌شود. برای ایجاد ارتباط فیزیکی بین اختلاف‌پتانسیل الکتریکی (افت فشار) و جریان الکتریکی از طریق این عنصر (سرعت جریان)، باید مدلی ارائه شود که نشان‌دهندهٔ فیزیک انتقال گاز از طریق خط لوله است [12].

با مطالعات هیدرولیکی / الکتریکی در این زمینه موفق به ارتباط بین فشار و ولتاژ و نیز جریان سیّال به جریان در مدار بین لوله انتقال و مدار الکتریکی شده‌اند، درحالی‌که تنها رابطهٔ مقاومت در برابر حالت پایدار و شیوه برخورد با ویژگی انتهای خروجی خط لوله در نظر گرفته شده است [17].

ازآنجایی‌که مقاومت حالت پایداری دارد لذا فشار ورودی و فشار خروجی تقریباً یکسان‌اند پس در معادلهٔ (٣)، عبارت $2\ln(P_Q/P_Z)$ عددی نزدیک به صفر است بنابراین در مقایسه با دو عبارت دیگر می‌تواند حذف شود. بنابراین معادلهٔ (٣) می‌تواند بازنویسی شود:

$$\frac{P_Q^2 - P_Z^2}{G^2} = \frac{\bar{\mu}LRT}{D} \quad (۷)$$

طبق معادلهٔ (۷)، اگر با ملاحظه و اغماض به‌صورت تقریبی با توجّه به نزدیک بودن این مقادیر به ۱، لذا می‌توان P_Q^2 و P_Z^2 را به‌عنوان نیروی حرکت جریان از طریق خط لوله در نظر بگیریم، G^2 به جریان و $\bar{\mu}LRT/D$ به‌عنوان مقاومت و ساختار خط لوله شبیه یک مدار الکتریکی می‌شود. با توجّه به ولتاژ مرجع، خط لوله صدمه ندیده و مدار معادل آن در شکل (۲) نشان داده شده است.



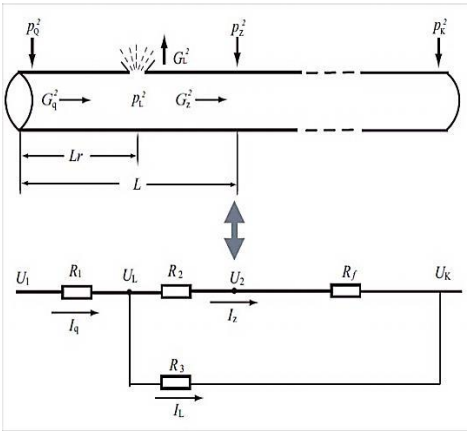
شکل «۲»: خط لولهٔ نامحدود و مدار معادل آن.

در شکل (۲)، P_K فشار مرجع، و $U_K = P_K^2$ ولتاژ متناظر با آن است. R_L متناظر با مقاومت، $\bar{\mu}LRT/D$ است. R_f نشان‌دهندهٔ مقاومت در انتهای پایین‌دست از خط لوله است و می‌تواند به‌صورت زیر محاسبه شود:

$$R_f = \frac{P_Z^2 - P_K^2}{G^2} \quad (۸)$$

جایی‌که G, P_Z, P_K، متغیرهای جریان قبل از وقوع نشت است.

آزاد شدن گاز از خط لوله می‌تواند به‌عنوان شاخه‌ای از خط اصلی در نظر گرفته شود و R_L را به دو بخش تقسیم می‌کند. تخلیهٔ گاز می‌تواند به‌عنوان جریان گاز از طریق مقاومت پنوماتیک به جَو محسوب شود. شکل (۳) خط لوله نشت گاز و مدار معادل آن را نشان می‌دهد. در شکل (۳) با توجّه به معادلات (٦-٤)، $R_1 = \bar{\mu}L_rRT/D$ مقاومت پنوماتیک (پنوماتیک یا نیوماتیک) (نوعی فنّاوری است که به مطالعه و به‌کارگیری گازهای فشرده برای ایجاد نیروی مکانیکی می‌پردازد.) لوله بین ورودی و نقطهٔ نشت است [18].



شکل «۳»: خط لولهٔ نشت و مدار معادل آن.

$R_2 = \bar{\mu}(L - L_r)RT/D$X مقاومت پنوماتیک لوله بین نقطهٔ نشت و انتهای خروجی است، به‌طوری‌که در رابطهٔ $R_L = R_1 + R_2$ صدق می‌کند. R_3 مقاومت پنوماتیک معادل است که از طریق آن گاز به جَو جریان می‌یابد. I_q متناظر با G_q^2 و I_z متناظر با G_z^2 است. G_L جریان شار آزاد و I_L متناظر با G_L^2 و U_L متناظر است با P_L^2. با توجّه به معادلهٔ (٦) و روابط بین I_q و I_z داریم:

$$I_z = I_q(1-k)^2 \quad (۹)$$

راه‌حل مبتنی بر مدار معادل. مدار معادل ارائه شده در بالا نه‌تنها در روابط معادلات (٦-٤) صدق می‌کند، بلکه تقریبی برای مجرای خروجی خط لوله ساخته شده است. از نقطه نظر مدار، یک مقاومت و یک ولتاژ مرجع در مدار برای توضیح جریان در انتهای خروجی خط لوله اضافه می‌شود. ولتاژ مرجع نشان‌دهندهٔ اثربخشی لوله بعدی در این قسمت است و می‌تواند در شرایط عملیاتی ثابت نگه‌داشته شود. این می‌تواند از تطبیق رابطهٔ بین تغییر فشار و تغییر شار جرم در انتها در شرایط عملیاتی خاص برگرفته شده باشد. مقاومت R_f، نشان‌دهندهٔ روابط پایدار بین فشار و نرخ جریان

در انتهای خروجی خط لوله است که می‌تواند در صورت نشت در نظر گرفته شود، زیرا تغییرات R_f نسبت به تغییر مقاومت کل خط لوله به میزان کوچکی تغییر می‌کند که می‌تواند نادیده گرفته شود. از تجزیه‌وتحلیل مدارهای معادل نشان داده شده در شکل‌های (۳ و ۲)، می‌توانیم عبارات زیر را به دست آوریم [19]:

$$P_Z = \sqrt{\frac{(P_Q^2 - P_K^2)(1-K)^2 R_f}{(\bar{\mu}LrRT/D) + (1-K)^2[\bar{\mu}(L-Lr)RT/D + R_f]} + P_K^2} \quad (۱۰)$$

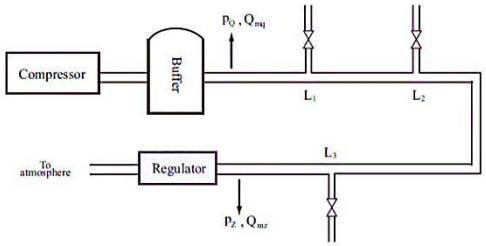
$$G_q = \sqrt{\frac{(P_Q^2 - P_K^2)}{(\bar{\mu}LrRT/D) + (1-K)^2[\bar{\mu}(L-Lr)RT/D + R_f]}} \quad (۱۱)$$

$$G_z = \sqrt{\frac{(P_Q^2 - P_K^2)(1-K)^2}{(\bar{\mu}LrRT/D) + (1-K)^2[\bar{\mu}(L-Lr)RT/D + R_f]}} \quad (۱۲)$$

با توجّه به نرخ نشت k و محل نشت L_r، فشار در انتهای خروجی خط لوله، جریان خروجی و جریان ورودی می‌تواند بر اساس معادلهٔ (۱۲–۱۰) محاسبه شود. این عبارات، ک از تجزیه‌وتحلیل مدار معادل گرفته شده، مدل‌های ریاضی یک نشت گاز را شکل می‌دهند.

نتایج عددی و مقایسه آن با نمونهٔ تجربی

معرفی سیستم خط لوله گاز تجربی. آزمایش‌های تجربی بر روی یک خط لوله گاز واقعی در یک آزمایشگاه در دانشگاه نفت چین و مشابه آن در یکی از آزمایشگاه‌های شرکت آذرآب در ایران انجام شد. این خط لوله ۲۵۲/٤ متر طول و ۲۵ میلی‌متر قطر بود. سیّال آزمون هوا بود. نشتی که به‌عنوان L_1 ، L_2 و L_3 برچسب‌گذاری شده بود در ۳۸/۵ متر، ۱۱۷ متر و ۲۱۱ متر از ورودی خط لوله قرار داشت. دریچه‌های دستی که در هر نقطهٔ نشتی برای تنظیم اندازه نشت، در هر دو انتهای خط لوله نصب شده است. شکل (٤) نمودار طرح آزمایشی را نشان می‌دهد P_Q و P_Z فشار در دو انتها از خط لوله هستند. Q_{mq} و Q_{mz} اندازه‌گیری سرعت جریان ورودی و خروجی لوله است. در شکل (٤) ملاحظه می‌شود پایان خروجی خط لوله از طریق یک دریچه به اتمسفر باز می‌شود؛ بنابراین، فشار جَو به‌عنوان فشار مرجع در مدل گرفته شده است.



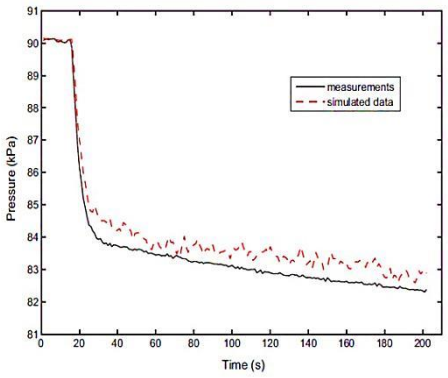
شکل «٤»: نمودار مختصات تست تجربی

تأیید تجربی مدل خط لوله گاز با نشت. با دستکاری سوپاپ‌های دستی در سه نقطهٔ نشت اندازه‌های مختلف نشت اتفاق می‌افتد و تغییرات فشار و جریان در دو انتهای خط لوله ثبت گردید. ضبط فشار خروجی، پایین‌دست و بالادست در ٦۰ ثانیه پس از وقوع نشت با داده‌های واقعی، مقایسه گردید و جدول (۱) نتایج مقایسه را نشان می‌دهد. جدول (۱) نشان می‌دهد که برای همه موارد پیش‌بینی‌های مدل منطبق با اندازه‌گیری‌هاست، به‌ویژه در مورد نشت‌های کوچک، کاملاً منطبق است. خطای محاسبات با افزایش میزان نشت، افزایش می‌یابد و آن به این دلیل است که عبارت $۲\ln(P_Q/P_Z)$ در مدل حذف شده است و ضریب اصطکاک با تغییر سرعت تغییر می‌کند. پارامترهای ناشناخته در معادلهٔ (۱۲–۱۰)، $\bar{\mu}$ و R_f، از طریق شناسایی بر اساس شرایط استاتیک با توجّه به معادلات به ترتیب (۷ و ۸) برآورد می‌شوند. $\bar{\mu}$ نشان‌دهندهٔ نه‌تنها میانگین ضریب فرسایش در طول خط لوله است، بلکه شامل خطای معرفی شده توسط مفروضات درقسمت " حل معادلات بر اساس مدار معادل می‌شود.

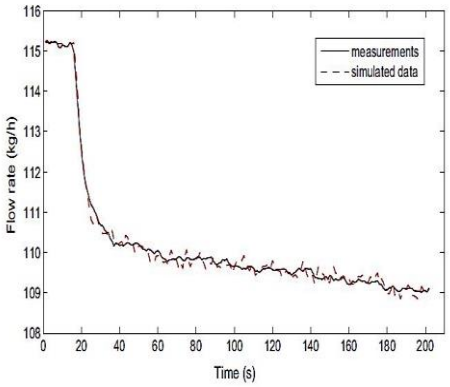
جدول «۱»: مقایسهٔ بین اندازه‌گیری‌ها و مقادیر محاسبه‌شده

نقطهٔ نشت	میزان نشت (%)	P_Z اندازه‌گیری شده (kPa)	P_Z محاسبه‌شده (kPa)	خطای P_Z (%)	Q_{mq} اندازه‌گیری شده (kg/h)	Q_{mq} محاسبه‌شده (kg/h)	خطای Q_{mq} (%)	Q_{mz} محاسبه‌شده (kg/h)	Q_{mz} اندازه‌گیری شده (kg/h)	خطای Q_{mz} (%)
L_1 ۳۸.۵) متری)	۱.٤٤	۹٤.٥	۹٤.۸	−۰.۳۱	۱۲۰.۹	۱۲۱	−۰.۱۲	۱۱۹.۱	۱۱۹.۰	۰.۰۷
	٦.۸٤	۹۲.۷	۹۳.۳	−۰.۵۸	۱۲٦.۳	۱۲٦.٦	−۰.۲۵	۱۱۷.۱	۱۱۸.۰	−۰.۲۵
	۱۱.۸	۸۹.۹	۹۰.۹	−۱.۱۵	۱۳۱.۱	۱۳۱.۵	−۰.۳۷	۱۱۵.٦	۱۱٦.۰	−۰.۳۷
	۲۳.۱	۸۱.۷	۸۳.۲	−۲.٦٦	۱٤۲.۲	۱٤۳.۳	−۰.۷۲	۱۰۹.٤	۱۱۰.۲	−۰.۷۲
L_2 ۱۷۱) متری)	۱.٦۸	۹٤.۰	۹۳.۹	۰.۰۸	۱۲۱.۳	۱۲۱.۲	۰.۰۲	۱۱۹.۲٤	۱۱۹.۲۲	۰.۰۲
	۸.۱۵	۸۳.۱	۸۳.۰	−۰.۰۳	۱۱۹.٤	۱۱۹.۰	۰.۳۷	۱۰۹.٦	۱۹.۲	۰.۳۷
	۱٤.۰	۸۳.۲	۸۳.٤	−۰.۰٤	۱۲۹.٤	۱۲۸.۳	۰.۷۰	۱۱۱.۱	۱۱.۳	۰.۷۰
	۲۱.۳	۷٤.۸	۷۵.۱	−۰.۳٤	۱۳۲.۲	۱۳۱.۰	۰.۹۱	۱۰٤.۰	۱۰۳.۱	۰.۹۲
L_3 ۲۱۱) متری)	۱.۲۷	۹۳.۳	۹٤.۱	−۰.۲۱	۱۱۹.۸	۱۲۰.۰	−۰.۱٦	۱۱۸.۲	۱۱۸.٤	−۰.۱٦
	۷.۸۹	۸۷.٤	۸۸.۱	−۰.۷۳	۱۲۲.۷	۱۲۲.۸	−۰.۱۰	۱۱۳.۰	۱۱۳.۲	−۰.۱۰
	۱۱.۸	۸۰.۳	۸٤.۰	−۱.۲۰	۱۲٤.۵	۱۲٤.۵	−۰.۳۳	۱۰۹.۷	۱۰۹.۸	−۰.۰۳
	۲۲.٦	۷۰.۲	۷۲.۰	−۲.٦۵	۱۲۸.۸	۱۲.٦	۰.۱۲	۹۹.۷	۹۹.۵	۰.۱۲

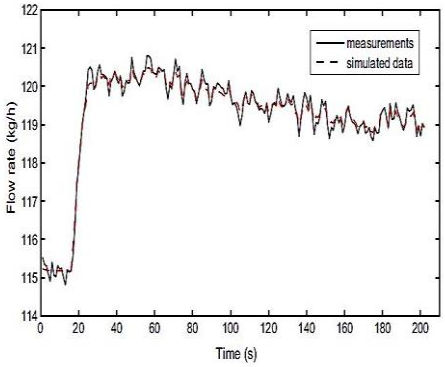
شکل های (۷–۵) مقایسه بین نتایج شبیه سازی و اندازه‌گیری را به‌عنوان یک نشت در L_2 نشان می‌دهد، ه مربوط به موارد ذکر شده در جدول (۱) با میزان نشتی ۸.۱۵٪ است. نرخ نشت در جدول (۱) بر اساس معادلهٔ (٦) برآورد شده است. نتایج تجربی به‌دست‌آمده توانایی مدل در شبیه سازی فرآیند انتشار و همچنین توانایی آن در تولید داده های تست برای بررسی الگوریتم تشخیص نشت را تأیید می‌کند.



شکل «۵»: مقایسه فشار در خروجی خط لوله گاز.



شکل «٦»: مقایسهٔ نرخ جریان خروجی خط لوله گاز.

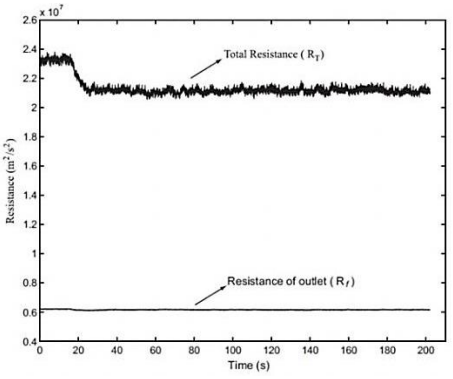


شکل «۷»: مقایسهٔ نرخ جریان ورودی خط لوله گاز.

شکل (۸) تغییرات در مقاومت کل خط لوله و پایان خروجی خط لوله را در هنگام نشت، نشان می‌دهد. در شکل (۸)، R_f ، مقاومت پایان خط لوله، با معادلهٔ (۸) برآورد شده و مقاومت کل خط لوله، R_T به شرح زیر محاسبه می‌شود [19]:

$$R_T = \frac{P_Q^2 - P_0^2}{G_q^2} \qquad (١٤)$$

برای یک خط لوله آزمایشگاهی، R_T تقریباً ثابت است. در صورت نشتی، همان‌طور که در شکل (۸) مشاهده می شود، R_f تغییرات ناچیز در مقایسه با R_T دارد. بناب؛ ین، تغییرات R_f را می‌تواند بدون وقفه در وقوع یک نشت در نظر گرفته شود.



شکل «۸»: تغییر مقاومت یک خط لوله در وقوع یک نشت.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک راه ساده و کارآمد برای توسعه مدل‌های خط لوله نشتی ارائه شد. مدل‌های توسعه‌یافته در این روش می‌توانند برای برآورد تغییرات فشار و جریان در مجرای یک خط لوله پس از وقوع نشت استفاده شوند. عبارات ریاضی توصیف جریان در خط لوله با نشت فرموله شده است. برای حل معادلات مدل، یک رویکرد جدید مبتنی بر شباهت بین خط لوله و مدار الکتریکی پیشنهاد شده است. به‌این‌ترتیب، یک مدار معادل با ساختار خاصی برای شبیه‌سازی خط لوله با نشت استفاده شده است و تقریبی خاص برای بیان دیدگاه پایان خط لوله از نقطه نظر مدار ساخته شده است. بر اساس مدار معادل، مدل ریاضی خط لوله با نشت توسعه‌یافته است. مدل‌ها با داده‌های حاصل از یک سیستم خط لوله گاز تجربی با نشت تأیید شد. از شواهد تجربی می‌توان نتیجه گرفت که برای یک محل مشخص نشت و تغییرات میزان نشت و فشار ورودی به زمان، تغییرات فشار خروجی، جریان خروجی و جریان ورودی با دقّت با مدل ریاضی برآورد می‌شود و فرآیند انتشار نیز می‌تواند شبیه‌سازی شود. موفقیت مدل در شبیه سازی خط لوله نشت همچنین اعتبار روش را تأیید می‌کند.

واژه‌نامه

خط لوله	Pipeline
نشت	Leakage
همدما	Isothermal
مدل‌سازی ریاضی	Mathematical modeling
مدارمعادل	Equivalent circuit
پایین‌دست جریان	Down steam
بالادست جریان	Upstream
نرخ جریان	Flow rate
خوردگی	Corrosion
سایش داخلی	Erosion
ضریب اصطکاک	Friction coefficient

مراجع

1. Benkherouf, A. and Allidina, A.Y., "Leak detection and location in gas pipelines", *IEE, Proceedings, Part D, Control Theory and Applications*, Vol. 135, No. 3, pp. 142–148, June (1988).
2. Billmann, L. and Isermann, R., "Leak detection methods for pipelines", *Automatica*, Vol. 23, No. 1, pp. 381–385, September (1987).
3. Emara-Shabaik, H.E., Khulief, Y.A. and Hussaini, I., "A non-linear multiple-model state estimation scheme for pipeline leak detection and isolation", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I, *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 216, No. 3, pp. 497–512, June (2002).
4. Oke, A., Mahgerefteh, H., Economou, I. and Rykov, Y., "A transient outflow model for pipeline puncture", *Chemical Engineering Science*, Vol. 58 , No. 2, pp. 4591–4604, February (2003.)
5. Shin, Y.W., Kim M.S. and Lee, S.K., "Identification of to detection of impact source location based on signal processing", *Journal of Mechanical Science and Technology*, pp. 2401-2411, December (2010).
6. Nouri-Borujerdi, A., "Transient modeling of gas flow in pipelines following catastrophic failure", *Math. Comput. Model*, 54, 3037e304, (2011).
7. Abolfazli Esfahani, J. and Moloudi, R. "Modeling of gas release following pipeline rupture: Proposing nondimensional correlation", *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, Vol. 32, 207-21, (2014).
8. Huo, C., Dong, Y., Yu, D., Gao, H., Zhou, J. and Feng, Y., "Estimation of accidental gas release flow rate in long transmission pipelines", *Acta Petrolei Sinica*, Vol. 25, No. 4, pp. 101–105, July (2004).
9. Jo, Y.D. and Ahn, B.J., "A simple model for the release rate of hazardous gas from a hole on high-pressure pipelines", *Journal of Hazardous Material*s, Vol. 97, No. 3, pp. 31–46, May (2003).
10. Wylie, E.B. and Streeter, V.L., "*Fluid Transients in Systems*", Prentice Hall Inc., New Jersey, (1993).
11. Kolbadinejad, M., Zabihollah, A., Khayyat, A.A. and Ollah Mahmoud Pour, M. "An equivalent electrical circuit design for pipeline corrosion monitoring based on piezoelectric elements", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, pp. 799-804, March (2013).
12. Taherinejad, M., Hosseinalipour, S.M. and Madoliat, R. "Steady Flow Analysis and Modeling of the Gas Distribution Network using the Electrical Analogy", *International Journal of Engineering (IJE) Transactions B: Applications*, Vol. 27, No. 8, pp. 1269-1276, (2014).
13. Li, W., "One-Dimensional Non-steady Flow and Shock Waves", *National Defense Industry Press, Beijing*, Vol. 15, No. 8, China, (2003).
14. Finnemore, E.J. and Franzini, J.B., "*Fluid Mechanics with Engineering Applications*", 10^{th} ed., McGraw-Hill, New York, (2003).
15. Yao, G., "*The Design and Management of Gas Transmission Line*", China University of Petroleum Press, Dongying, China, (1991).
16. Sun, L. and Wang, J., "Modeling and simulation of leaking gas pipeline", *Journal of System Simulation*, Vol. 23, No. 6, pp. 1310–1314, November (2011) .
17. Lin, K. and Holbert, K.E., "Applying the equivalent pi circuit to the modeling of hydraulic pressurized lines", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, pp. 2064–2075, November (2009).
18. Kamiński, Z., "Mathematical Modeling of Pneumatic Pipes in a Simulation of Heterogeneous Engineering Systems", *Journal of Fluids Engineering*, 133(12): 121401 (7 pages), Dec(2011).
19. Sun, L., "Modeling and simulation of leaking gas pipeline", *Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 82, pp. 2253–2267, June (2012).

(مقالهٔ کوتاه)

بررسی عددی فرآیند کاهش پسا در جریان آرام با استفاده از ریبلت‌های مستطیلی*

امیر حاجی‌خان میرزایی[۱] علیرضا رئوف پناه[۲]

چکیده *هدف اصلی در پژوهش حاضر معرفی روشی کارآمد و بدون نیاز به ابزارهای بیرونی جهت کاهش پسای وارد بر اجسام متحرک در سیّالات است. رژیم جریان سیّال آرام در نظر گرفته شده است. ابزار مورد نظر ریبلت‌های مستطیلی می‌باشند که به‌صورت عمود بر حرکت جریان سیّال قرار گرفته‌اند. میدان جریان روی سطوح ریبلت‌دار با استفاده از دینامیک سیّالات محاسباتی در فضای دوبعدی به‌دست‌آمده است. اثر پارامترهای هندسی ریبلت‌ها شامل عرض و ارتفاع و هم‌چنین اندازه سرعت جریان آزاد بر میزان کاهش پسای وارد بر سطوح ریبلت‌دار نسبت به سطح صاف بدون ریبلت مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به‌دست‌آمده نشان از کارآمدی روش مذکور در کاهش پسای وارد بر سطح در رژیم جریان آرام دارد. حداکثر کاهش پسا در عرض ریبلت ۰٫۱ میلی‌متر و سرعت جریان آزاد ۱۰ متر بر ثانیه برابر با ۸٫۷ درصد محاسبه شده است.*

واژه‌های کلیدی ریبلت؛ آب‌گریز؛ کاهش پسا؛ شبیه‌سازی عددی؛ دینامیک سیّالات محاسباتی.

Numerical Investigation of Drag Reduction Mechanism in Laminar Flow Regime using Rectangular Riblets

A. Haji Khan Mirzaei A. Raoufpanah

Abstract *This paper aims to introduce an efficient and passive method in order to reduce the amount of drag exerted on the surfaces of the objects moving in the water. The flow regime is considered as laminar. The desired method is to use rectangular riblets being perpendicular to the flow direction. Two-dimensional computational fluid dynamics is utilized to resolve the flow field around the ribbed surfaces. The effects of geometrical parameters of riblets including width and height as well as free-stream velocity on the amount of drag reduction are numerically calculated. The numerical results certify the efficiency of rectangular riblets as a drag reduction tool in the laminar flow regime. Maximum amount of the drag reduction is about 8.7% achieved for the riblets width of 0.1 millimeter and at free-stream velocity of 10 m/s.*

Key Words Riblet, Hyrophobic, Drag Reduction, Numerical Simulation, Computational Fluid Dynamics

* تاریخ دریافت مقاله ۹۷/۱۲/۲۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۱/۸ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v31i1.79677

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد واحد یادگار امام خمینی (ره)، تهران

(۲) نویسنده مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره)، تهران raoufpanah@iausr.ac.ir

مقدّمه

با عبور هر سیّالی از روی یک سطح جامد، از سوی سیّال نیروی مقاومی (پسا) به جسم وارد می‌شود. کاهش میزان این نیرو ازجمله مسائلی است که همواره مورد توجّه پژوهشگران و صنعتگران بوده است. با کاهش میزان این نیرو در کاربردهای مختلفی نظیر کشتی‌ها، لوله‌های انتقال سوخت و نیز هواپیماها، می‌توان میزان مصرف انرژی لازم برای غلبه بر این نیرو را کاهش داد. تاکنون راه‌های مختلفی برای کاهش میزان پسا، هم در گسترهٔ پژوهشی و هم صنعتی، ابداع شده است که برخی به تغییر خصوصیات سیّال و برخی دیگر به تغییر خصوصیات سطح وابسته است. بهبود شرایط سیّال با ایجاد تغییرات در آن ازجمله راه‌هایی است که می‌توان در برخی از کاربردها نظیر انتقال سیّالات در لوله‌ها استفاده کرد ولی در کشتی‌ها و سازه‌های دریایی که کنترلی بر روی سیّال نیست استفاده از این روش ازلحاظ عملی غیرممکن است.

یکی از روش‌های کاهش پسا که نیازی به انرژی ورودی و مواد افزودنی به جریان ندارد، استفاده از ریبلت است [1,2]. ریبلت‌ها درواقع شیارهایی در ابعاد میکرو هستند که می‌توانند در راستای جریان یا عمود بر راستای جریان قرار بگیرند. عملکرد ریبلت‌ها در کاهش میزان پسای اصطکاکی بستگی به ابعاد آنها در مقایسه با ابعاد جریان دارد [3]. سطوح آب‌گریز و فراآب‌گریز نیز با ایجاد یک طول لغزش می‌توانند سبب کاهش میزان پسا شوند [4-6]. روش‌های مختلف کاهش نیروی پسا در تجهیزات دریایی توسط فو و همکاران [7] مورد بررسی قرار گرفته است.

مطالعات آزمایشگاهی فراوانی برای بررسی اثر ریبلت‌ها در کاهش پسا انجام شده است. سوزوکی و کاساگی [8] تحقیق جامعی بر روی جریان آشفته در دره ریبلت‌ها انجام داده و مشاهده کردند که انتقال انرژی جنبشی آشفتگی از راستای جریان به راستای عمود بر جریان به دلیل سرکوب گردابه‌های راستای جریان، کاهش می‌یابد. کرامر و همکاران [9] متوجّه شدند که ریبلت‌های موج‌دار می‌توانند اثر بیشتری بر کاهش پسا نسبت به ریبلت‌های مستقیم داشته باشند. سارین و همکاران [10] اثر ریبلت‌ها را بر بال‌واره‌های یک توربین باد بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که اندازه و محل قرارگیری ریبلت‌ها به همراه زاویه حمله بال‌واره و عدد رینولدز بر میزان کاهش پسا اثرگذار هستند. هو و همکاران [11] با استفاده از ابزارهای اپتیکی نظیر تکنیک PIV (Particle Image Velocimetry) و PTV (Particle Tracking Velocimetry) به بررسی ساختارهای سه‌بعدی جریان آشفته بر روی سطح ریبلت‌دار پرداخته و نتایج را با حالت سطح صاف مقایسه کردند. احمد و همکاران [12] با اقتباس از پوست کوسه و برگ سرخس آبی روشی نوین جهت ساخت ریبلت‌های فراآبگریز با استفاده از لیزر ارائه کردند. آنها آزمایش‌ها را برای جریان داخل کانال و در رژیم آشفته انجام دادند. اخیراً روین و همکاران [3] اثر استفاده از ریبلت به همراه پوشش فرا آب‌گریز را در جریان داخل کانال بررسی کردند. آنها سه اندازه مختلف برای ریبلت‌ها در نظر گرفتند که شامل ریبلت کوچک (کمترین کاهش پسا)، ریبلت بهینه (بیشترین کاهش پسا) و ریبلت بزرگ (افزایش پسا) است.

شبیه‌سازی‌های عددی نیز به لطف توسعه ابزارهای محاسباتی و پیشرفت رایانه‌ها، در خدمت محقّقان قرار گرفته است تا اثر ریبلت‌ها بر کاهش پسا را به‌طور جامع‌تری بررسی نمایند. در این میان استفاده از روش «حل عددی مستقیم» به‌عنوان ابزاری قدرتمند مورد توجّه برخی از پژوهشگران قرار گرفته است. چوی و همکاران [13] اثر ریبلت‌ها بر کاهش پسا در یک کانال را با روش «حل عددی مستقیم» بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که ریبلت‌ها باعث کاهش نوسانات سرعت و چرخش و همچنین کاهش تنش‌های رینولدزی می‌شوند. جریان آشفته بر روی شیارهای مستطیلی داخل یک کانال با استفاده از روش حل

عددی مستقیم توسط هانگ و همکاران [14] مورد بررسی قرار گرفته است. آنها حرکت و تغییرات گردابه‌های نزدیک دیوار در راستای جریان را مورد تحلیل قرار دادند. آنها از معیار قدرت چرخش برای مطالعهٔ کمّی گردابه‌ها بهره جستند. آنها به این نتیجه رسیدند که شعاع گردابه‌ها در کانال‌های شیاردار کوچک‌تر از کانال‌های صاف است. هم‌چنین، هانگ و همکاران در پژوهش دیگری [15] اثر محلول فعال سطحی را نیز بر جریان آشفته بر روی شیارهای مستطیلی مورد بررسی قرار دادند. ساساموری و همکاران [16] به مطالعهٔ پارامتری ریبلت‌های سینوسی برای کاهش پسا با استفاده از روش حل عددی مستقیم پرداختند. آنها جریان کاملاً توسعه یافته آشفته داخل کانال را در عدد رینولدز اصطکاکی ۱۱۰ شبیه‌سازی کرده و مشاهده کردند که بیشینه درصد کاهش پسا برابر با ۹٫۸ درصد خواهد بود. هم‌چنین تحقیق دیگری توسط فوآد و پراکاش [17] برای بررسی اثر ساختارهای سینوسی در کاهش پسای جریان آشفته داخل کانال به‌صورت روش حل عددی مستقیم انجام شده است.

علاوه بر روش حل عددی مستقیم، از مدل‌های آشفتگی نیز جهت شبیه‌سازی جریان بر روی ریبلت‌ها استفاده شده است. کلامپ و همکاران [18] با استفاده از روش «شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ» به این نتیجه رسیدند که ریبلت‌ها ابزار کارآمدی در تعدیل ساختارهای آشفتگی سه‌بعدی نظیر گردابه‌های راستای جریان، «گردابه‌های سنجاق‌سری» و «گردابه‌های گاما» هستند. بای و همکاران [19] با استفاده از مدل آشفتگی SST k-ω عملکرد شش نوع ریبلت با هندسه‌های مختلف را در کاهش میزان پسا بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که ریبلت L شکل بهترین عملکرد را داشته و تا ۵٫۶۳۶ درصد می‌تواند پسای اصطکاکی را کاهش دهد. بیون و پارک [20] اثر ریبلت‌ها با اشکال هندسی مختلف (شامل مثلثی و مستطیلی) را در کاهش میزان پسا در رژیم جریان آرام به‌صورت تجربی و عددی بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که با افزایش نسبت ابعادی ریبلت‌ها، ضریب اصطکاک محلی کاهش می‌یابد.

گرچه اکثر پژوهش‌های انجام شده در زمینه اثر ریبلت‌ها مربوط به جریان توبولانس است اما چوی و همکاران [21] اثر ریبلت‌های V شکل طولی را در جریان آرام کاملاً توسعه‌یافته داخل کانال، به‌صورت عددی بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که بر خلاف حالت جریان آشفته، وجود ریبلت‌های طولی باعث کاهش پسا در جریان آرام نمی‌شود. در واقع اگرچه نرخ برش روی دیواره در بیشتر بخش‌های سطح ریبلت‌دار نسبت به کانال صاف کاهش می‌یابد اما در نهایت پسا افزایش خواهد یافت. پژوهش‌های عددی دیگری نیز در زمینه عملکرد ریبلت‌ها در کاهش میزان پسا انجام شده است [22,23].

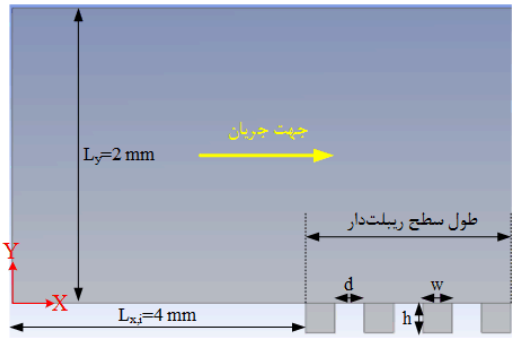
با توجّه به موارد بیان‌شده، اهمّیّت استفاده از ریبلت‌ها در کاهش پسای وارد بر تجهیزات هوایی و دریایی نظیر راکت‌ها، کشتی‌ها، زیردریایی‌ها و اژدرها مشخص گردید. هدف اصلی در این پژوهش بررسی اثر استفاده از سطوح ریبلت‌دار بر کاهش میزان پسای وارد بر یک صفحه مسطح با استفاده از ابزار دینامیک سیّالات محاسباتی است. بر خلاف اکثر پژوهش‌های پیشین که بر جریان آشفته تمرکز داشته‌اند، در این پژوهش کاهش پسا در جریان آرام مد نظر است. هم‌چنین بخش اعظم پژوهش‌های گذشته جریان داخل کانال را بررسی کرده‌اند و پژوهش‌های اندکی به بررسی اثر ریبلت‌ها در کاهش پسای وارد بر سطوح (نظیر جریان روی صفحه تخت) پرداخته‌اند. با توجّه به این موارد، در پژوهش حاضر با استفاده از فرضیّات ساده‌شونده، هندسه‌ای دوبعدی در نظر گرفته شده و سپس اثر استفاده از ریبلت‌های مستطیلی با ابعاد مختلف در کاهش میزان پسای وارد بر سطح در رژیم

جریان آرام (لمینار) بررسی شده است. هم‌چنین اثر سرعت جریان آزاد نیز بر عملکرد ریبلت‌ها در کاهش میزان پسا بررسی شده است. نکته بسیار مهم این است که ابعاد ریبلت‌ها به‌گونه‌ای انتخاب شده است که امکان ساخت آنها با توجّه به تجهیزات امروزی امکان‌پذیر است.

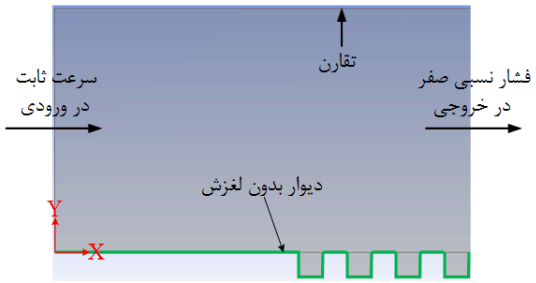
هندسه، شرایط مرزی و معادلات حاکم

صورت‌مسئله در پژوهش حاضر شبیه‌سازی جریان در یک فضای دوبعدی است که در شکل (۱) نشان داده شده است. سطح پایینی فضای محاسباتی در قسمت ابتدایی صاف است تا شبیه اثر جریان روی صفحهٔ تخت را ایجاد نماید. در قسمت انتهایی فضای محاسباتی، ریبلت‌های مستطیلی به‌صورت عمود بر جریان چیده شده‌اند. لازم یادآوری است که به دلیل بهتر دیده شدن ریبلت‌ها مقیاس اندازه‌ها در این شکل رعایت نشده است.

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای جریان نیز در شکل (۲) نشان داده شده است. در ورودی از شرط مرزی سرعت ثابت (۱۰ متر بر ثانیه) استفاده شده است. فشار نسبی در خروجی صفر است. باید توجّه داشت با توجّه به ثابت بودن چگالی سیّال و فرض تراکم‌ناپذیری، مقدار مطلق فشار تأثیری در حل مسئله ندارد. دیواره پایینی فضای محاسباتی دارای شرط عدم لغزش بوده و در سطح بالایی نیز شرط مرزی تقارن استفاده شده است. شایان یادآوری است برای تولید شبکه محاسباتی از نرم‌افزار «انسیس مشینگ (ANSYS Meshing)» استفاده شده و برای حل میدان جریان از نرم‌افزار «انسیس فلوئنت (ANSYS FLUENT)» بهره گرفته شده است.



شکل «۱»: شماتیکی از فضای محاسباتی و ابعاد هندسی ریبلت‌ها شامل w (عرض)، h (ارتفاع) و d (فاصله).



شکل «۲»: شرایط مرزی جریان.

تمامی معادلات حاکم بر مسئله شامل معادلات پایستگی جرم و تکانه به روش حجم محدود گسسته‌سازی شده و حل شده‌اند. معادلات پایستگی جرم و تکانه به ترتیب توسط روابط (۱ و ۲) بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \qquad (۲)$$

که در روابط بالا ρ، u، p و μ به ترتیب چگالی، سرعت، فشار و گرانروی دینامیکی سیّال هستند. برای ارتباط سرعت و فشار در معادلات پایستگی جرم و تکانه از «روند حل کاپلد» استفاده شده است. هم‌چنین تمامی عبارات جابه‌جایی در معادلهٔ تکانه با روش بادسوی مرتبه دوم گسسته‌سازی شده‌اند. معیار همگرایی برای باقیمانده معادلات پایستگی جرم و تکانه برابر با 10^{-6} در نظر گرفته شده است. سیّال

کاری آب با چگالی ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و گرانروی ۰٫۰۰۱ پاسکال‌ثانیه در نظر گرفته شده است.

لازم به یادآوری است که عدد رینولدز برای جریان روی سطح به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Re_x = \frac{\rho U_\infty L_x}{\mu} \qquad (۳)$$

در این رابطه U_∞ سرعت جریان آزاد بوده و L_x نیز فاصله از ابتدای سطح (مبدأ مختصات) است. به‌این‌ترتیب بزرگ‌ترین عدد رینولدز در انتهای سطح رخ خواهد داد. با توجّه به اینکه طولانی‌ترین سطح در پژوهش حاضر ۹٫۹ میلی‌متر است، بنابراین بزرگ‌ترین عدد رینولدز $۹٫۹\times۱۰^{٤}$ خواهد بود که از مقدار ۵×۱۰^{۵} که عدد رینولدز بحرانی (گذار از جریان آرام به آشفته) جریان روی سطح است بسیار کوچک‌تر بوده و می‌توان از برقراری جریان آرام روی سطح اطمینان حاصل کرد. البته باید به این نکته اشاره کرد که به دلیل وجود ریبلت‌ها اغتشاشاتی در میدان جریان به وجود می‌آید (نسبت به سطح صاف بدون ریبلت) که می‌تواند باعث گذار از جریان آرام به آشفته در اعداد رینولدز کوچک‌تری شود. ب؛ براین شرایط جریان و هندسه در پژوهش حاضر به‌گونه‌ای انتخاب شده است تا عدد رینولدز جریان کوچک باشد و گذار به جریان آشفته رخ ندهد. این موضوع مجدد در قسمت نتایج نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

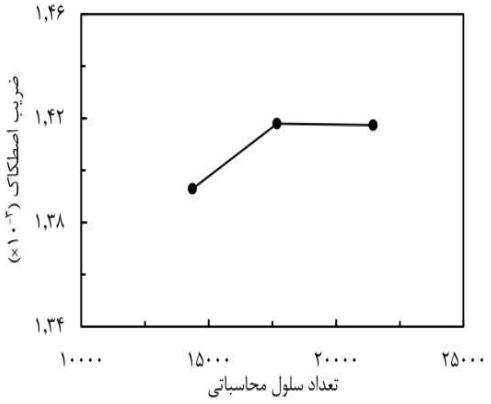
استقلال حل از شبکه و صحت‌سنجی حل عددی

به‌منظور بررسی استقلال حل از شبکه، هندسه دوبعدی مطابق شکل (۱) با عرض، ارتفاع و فاصله ریبلت ۰٫۱ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. سه شبکه محاسباتی مختلف تولید شده و مقادیر ضریب اصطکاک متوسط روی دیوارهٔ ریبلت‌ها برای هرکدام محاسبه شده است. ضریب اصطکاک متوسط مطابق رابطهٔ (٤) تعریف شده است:

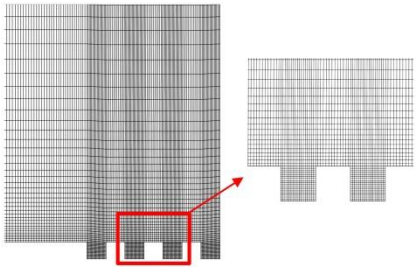
$$\overline{C_f} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \qquad (٤)$$

در این رابطه τ_w مقدار تنش برشی متوسط بر روی دیوارهٔ ریبلت‌دار است. نتایج مربوط به ضریب اصطکاک متوسط روی دیواره ریبلت‌ها در شکل (۳) نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد مش از مش شماره ۲ به مش شماره ۳ مقدار ضریب اصطکاک متوسط تنها ۰٫۰۳ درصد تغییر می‌کند (از ۰٫۰۰۱٤۱۸ به ۰٫۰۰۱٤۱۷ کاهش می‌یابد)؛ بنابراین مش شماره ۲ برای سایر شبیه‌سازی‌ها انتخاب شده است زیرا هم از دقت کافی برخوردار بوده و هم در هزینه محاسباتی صرفه‌جویی می‌کند. شایان یادآوری است که در تمامی هندسه‌ها از مش سازمان‌یافته (چهارضلعی) استفاده شده است. نمایی از شبکه محاسباتی تولید شده در شکل (٤) نشان داده شده است.

به‌منظور اطمینان از صحت نتایج حاصل از حل عددی نیاز است تا ابتدا صحت روش حل عددی سنجیده شود. برای این منظور می‌توان نتایج حاصل از حل عددی را با نتایج تجربی یا تحلیلی موجود مقایسه نمود. در پژوهش حاضر به‌منظور سنجش صحت حل عددی، جریان بر روی سطح صاف مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل «۳»: بررسی استقلال حل از شبکه.

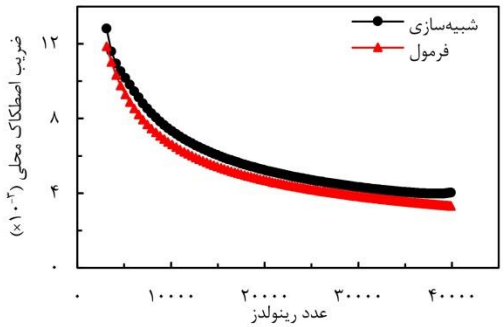


شکل «۱»: نمایی از شبکهٔ محاسباتی تولید شده در مجاورت ریبلت‌ها.

به‌منظور صحت‌سنجی حل عددی مقادیر ضریب اصطکاک بر روی سطح صاف پایینی (قسمت ابتدایی سطح در شکل ۱) از شبیه‌سازی محاسبه شده و با نتایج مربوط به فرمول تحلیلی زیر مقایسه شده است:

$$C_f = 0.664 Re_x^{-0.5} \qquad (۵)$$

نتایج مربوط به شبیه‌سازی و فرمول تحلیلی در شکل (۵) با هم مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق مناسبی میان نتایج برقرار است؛ بنابراین صحت روش عددی انتخاب شده تأیید می‌گردد.



شکل «۵»: صحت‌سنجی حل عددی.

نتایج و بحث

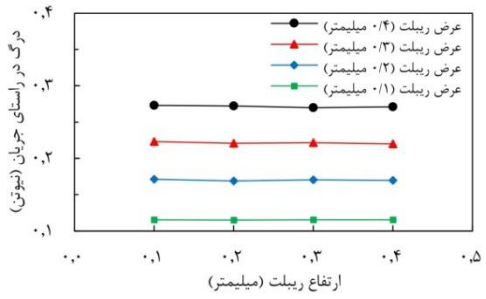
شبیه‌سازی‌ها برای مقادیر مختلف عرض و ارتفاع ریبلت‌ها انجام شده است به‌طوری‌که عرض و ارتفاع ریبلت‌ها از ۰٫۱ تا ۰٫٤ میلی‌متر تغییر داده شده است. فاصله بین ریبلت‌ها (d در شکل ۱) در تمامی شبیه‌سازی‌ها ثابت و برابر با ۰٫۱ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. مشخصات هرکدام از ۱٦ هندسه شبیه‌سازی‌شده در جدول (۱) نشان داده شده است.

در ادامه اثر عرض و ارتفاع ریبلت‌ها در کاهش میزان پسای وارد بر سطح بررسی شده است. لازم به یادآوری است که تمامی مقادیر ارائه شده برای پسای وارد بر سطوح در بخش‌های بعد، مقادیر متوسط پسا است.

اثر ارتفاع ریبلت‌ها. اثر تغییر ارتفاع ریبلت‌ها در کاهش پسای وارد بر سطح در شکل (٦) نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تغییر ارتفاع ریبلت‌ها تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای بر میزان پسای وارد بر سطح ندارد؛ بنابراین نتایج در ادامه تنها برای ارتفاع ریبلت ۰٫۱ میلی‌متر نشان داده شده و از اثر ارتفاع ریبلت صرف‌نظر شده است.

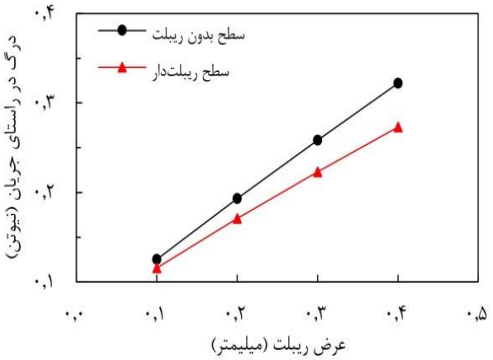
جدول «۱»: مشخصات ابعادی هندسه‌های ریبلت‌ها (ابعاد به میلی‌متر است).

نام	عرض	ارتفاع	نام	عرض	ارتفاع
هندسه ۱	۰٫۱	۰٫۱	هندسه ۹	۰٫۱	۰٫۳
هندسه ۲	۰٫۲	۰٫۱	هندسه ۱۰	۰٫۲	۰٫۳
هندسه ۳	۰٫۳	۰٫۱	هندسه ۱۱	۰٫۳	۰٫۳
هندسه ٤	۰٫٤	۰٫۱	هندسه ۱۲	۰٫٤	۰٫۳
هندسه ٥	۰٫۱	۰٫۲	هندسه ۱۳	۰٫۱	۰٫٤
هندسه ٦	۰٫۲	۰٫۲	هندسه ۱٤	۰٫۲	۰٫٤
هندسه ۷	۰٫۳	۰٫۲	هندسه ۱٥	۰٫۳	۰٫٤
هندسه ۸	۰٫٤	۰٫۲	هندسه ۱٦	۰٫٤	۰٫٤



شکل «۲»: پسای وارد بر سطح در راستای جریان بر حسب ارتفاع ریبلت‌ها.

اثر عرض ریبلت‌ها. اثر تغییر عرض ریبلت‌ها در کاهش پسای وارد بر سطح در شکل (۷) نشان داده شده است. هم‌چنین پسای وارد بر سطح بدون ریبلت متناظر نیز در این شکل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که استفاده از ریبلت اثر قابل قبولی در کاهش میزان پسای وارد بر سطح دارد. نتایج نشان داده شده در شکل (۷) متناظر با هندسه ۱ تا هندسه ٤ است.



شکل «۷»: پسای وارد بر سطح در راستای جریان بر حسب عرض ریبلت‌ها.

پسای وارد بر سطح در حالت بدون ریبلت تنها ناشی از اثر تنش برشی (اصطکاک) در سطح مشترک سیّال و جامد است، اما در حالت سطح ریبلت‌دار بخشی از پسا به دلیل تنش برشی و بخشی دیگر به دلیل نیروی فشاری است. مقایسهٔ میان اندازه هرکدام از این نیروها و درصد کاهش پسا با استفاده از ریبلت مستطیلی در جدول (۲) نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که جمع پسای فشاری و اصطکاکی در حالت سطح ریبلت‌دار کمتر از پسای اصطکاکی در حالت سطح بدون ریبلت متناظر است. کمترین درصد کاهش پسا در هندسه ۱ با ۷٫۸ درصد و بیشترین میزان کاهش پسا در هندسه ٤ با ۱۵٫۲ درصد مشاهده می‌گردد. البتّه باید توجّه داشت که طول سطح ریبلت‌دار در هندسه ۱ تا ٤ مختلف است.

جدول «۲»: مقایسهٔ سهم پسای فشاری و اصطکاکی در سطوح ریبلت‌دار و درصد کاهش پسای سطح ریبلت‌دار نسبت به سطح بدون ریبلت.

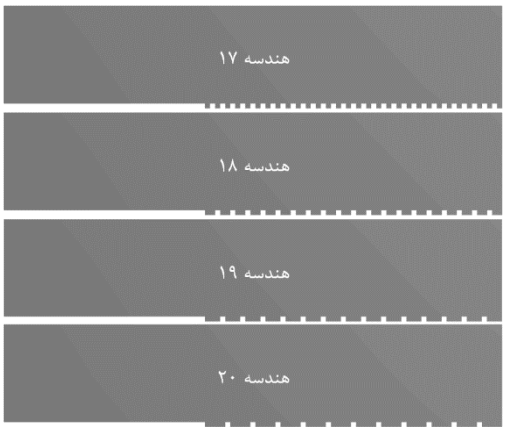
	حالت سطح	پسای فشاری	پسای اصطکاکی	پسای کل	درصد کاهش پسا
هندسه ۱	بدون ریبلت	–	۰٫۱۲۵۳	۰٫۱۲۵۳	–
	با ریبلت	۰٫۰۳۸٤	۰٫۰۷۷۱	۰٫۱۱۵۵	۷٫۸
هندسه ۲	بدون ریبلت	–	۰٫۱۹۳۱	۰٫۱۹۳۱	–
	با ریبلت	۰٫۰۹۱۲	۰٫۰۷۹۹	۰٫۱۷۱۱	۱۱٫٤
هندسه ۳	بدون ریبلت	–	۰٫۲۵۸۵	۰٫۲۵۸۵	–
	با ریبلت	۰٫۱٤٤۷	۰٫۰۷۸۳	۰٫۲۲۲۹	۱۳٫۸
هندسه ٤	بدون ریبلت	–	۰٫۳۲۱۹	۰٫۳۲۱۹	–
	با ریبلت	۰٫۱۹۹۸	۰٫۰۷۳۲	۰٫۲۷۳۰	۱۵٫۲

با توجّه به اینکه در هر شبیه‌سازی تنها ٤ ریبلت در نظر گرفته شده است (نظیر شکل ۱) بنابراین طول سطح ریبلت‌دار در هندسه‌های مختلف متفاوت است. مفهوم طول سطح ریبلت‌دار در شکل (۱) نشان داده شده است. بر این اساس طول سطح ریبلت‌دار در هندسه ۱ تا هندسه ٤ به ترتیب برابر با ۰٫۷، ۱٫۱، ۱٫۵ و ۱٫۹ میلی‌متر است.

به‌منظور مقایسه تأثیر ریبلت‌های با عرض مختلف در کاهش میزان پسا، ٤ هندسه جدید با طول سطح ریبلت‌دار ثابت (برابر با ۵٫۹ میلی‌متر) در نظر گرفته شده است. مشخصات این چهار هندسه و شماتیکی از آنها به ترتیب در جدول (۳) و در شکل (۸) نشان داده شده است. با توجّه به برابر بودن طول سطح ریبلت‌دار در این ٤ هندسه، می‌توان مقایسهٔ بهتری میان عملکرد ریبلت‌ها در کاهش میزان پسا انجام داد.

جدول «۳»: مشخصات هندسه‌های جدید با طول سطح ریبلت‌دار یکسان (تمام ابعاد به میلی‌متر داده شده است).

نام	طول سطح ریبلت‌دار	عرض ریبلت	تعداد ریبلت
هندسه ۱۷	۵٫۹	۰٫۱	۳۰
هندسه ۱۸	۵٫۹	۰٫۲	۲۰
هندسه ۱۹	۵٫۹	۰٫۳	۱۵
هندسه ۲۰	۵٫۹	۰٫٤	۱۲



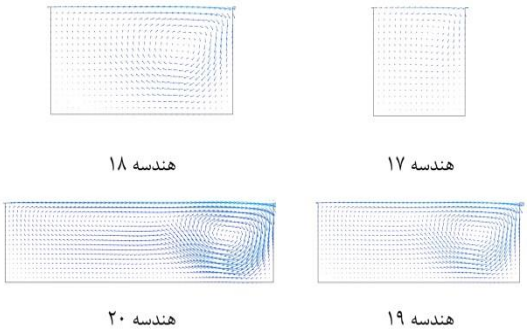
شکل «۳»: شماتیکی از هندسه شماره ۱۷ تا ۲۰.

نتایج مربوط به میزان پسای فشاری، اصطکاکی و کل و هم‌چنین درصد کاهش پسا نسبت به سطح بدون ریبلت متناظر در جدول (٤) آورده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش عرض ریبلت (و در نتیجه کاهش تعداد ریبلت در واحد طول) سهم پسای اصطکاکی کاهش یافته و پسای فشاری افزایش می‌یابد ولی در مجموع پسای وارد بر سطح کاهش می‌یابد.

جدول «٤»: مقایسه سهم پسای فشاری و اصطکاکی در سطوح ریبلت‌دار و درصد کاهش پسای سطح ریبلت‌دار نسبت به سطح بدون ریبلت برای هندسه‌های با طول سطح ریبلت‌دار یکسان.

	پسای فشاری	پسای اصطکاکی	پسای کل	درصد کاهش پسا
بدون ریبلت	–	۰/۸۷۳٤	۰/۸۷۳٤	–
هندسه ۱۷	۰/۲۳۷٦	۰/٦۰۹۹	۰/۸٤۷٥	۳/۰
هندسه ۱۸	۰/۳۸۹۱	۰/٤۳۷٤	۰/۸۲٦٥	٥/٤
هندسه ۱۹	۰/٤۸۰٤	۰/۳۳۰٦	۰/۸۱۱۱	۷/۱
هندسه ۲۰	۰/٥٤٤۲	۰/۲٥۲۸	۰/۷۹۷۰	۸/۷

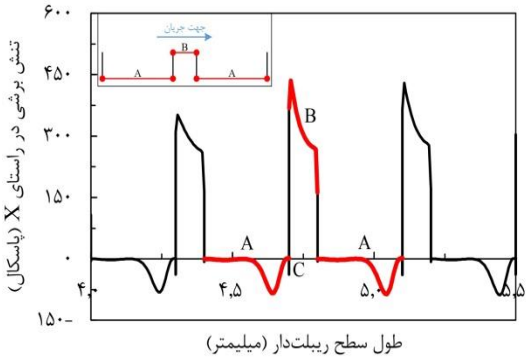
برای بررسی میدان جریان در سطح ریبلت‌دار و فرآیند عملکرد ریبلت مستطیلی در کاهش پسا، بردارهای سرعت در اولین ریبلت برای هندسه شماره ۱۷ تا ۲۰ در شکل (۹) نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که بردارهای سرعت در سایر ریبلت‌ها نیز مشابه ریبلت اوّل است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر ٤ هندسه گردابه‌ای در داخل ریبلت و در قسمت سمت راست آن به وجود می‌آید. اندازه گردابه در تمامی هندسه‌ها تقریباً ثابت بوده و برابر با ارتفاع ریبلت است به‌گونه‌ای که در هندسه ۱۷ که عرض و ارتفاع ریبلت یکسان و برابر با ۰/۱ میلی‌متر است، گردابه تمام فضای داخل ریبلت را پر کرده اما در هندسه ۱۸ گردابه تقریباً نصف فضای داخل ریبلت را اشغال نموده است. کاهش پسای اصطکاکی با افزایش عرض ریبلت‌ها (که در جدول ٤ قابل‌ملاحظه است) را می‌توان با توجّه به بردارهای سرعت رسم شده در شکل (۹) توضیح داد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در قسمت پایینی ریبلت (دره ریبلت) جهت جریان سیّال به سمت چپ (خلاف جهت جریان اصلی که در راستای مثبت محور X است) است؛ بنابراین پسا اصطکاکی در سطح پایینی ریبلت‌ها در جهت منفی محور X بوده و باعث کاهش میزان پسای اصطکاکی کل در راستای X می‌گردد. به همین دلیل با افزایش عرض ریبلت‌ها میزان سهم پسای اصطکاکی از پسای کل وارد بر سطح کاهش پیدا می‌کند.



شکل «٤»: نمایش بردارهای سرعت در اوّلین ریبلت.

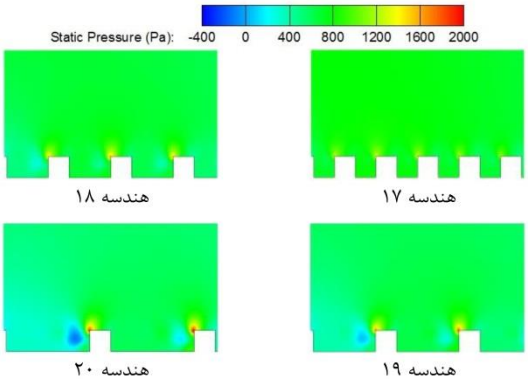
به‌منظور بررسی دقیق‌تر توزیع پسای اصطکاکی، نمودار توزیع مؤلفه تنش برشی در راستای محور X روی سطح ریبلت‌دار در هندسه ۳ (مطابق نام‌گذاری جدول ۱) در شکل (۱۰) رسم شده است. در این شکل

نحوه نام‌گذاری اضلاع ریبلت مشخص شده است. بر این اساس دره ریبلت با حرف A و قلّه آن با حرف B نام‌گذاری شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار تنش برشی بر روی ضلع A منفی بوده و در نتیجه مقدار کل تنش برشی در راستای محور X (راستای جریان) را کاهش می‌دهد. هم‌چنین تنش برشی بر روی ضلع B مثبت است؛ بنابراین می‌توان به این نتیجه رسید که به علت منفی بودن تنش برشی در دره ریبلت‌ها، برآیند تنش برشی وارده بر سطح ریبلت‌دار نسبت به سطح بدون ریبلت کمتر خواهد بود که این موضوع از نتایج نشان داده شده در جدول (۲ و ٤) نیز مشخص است.



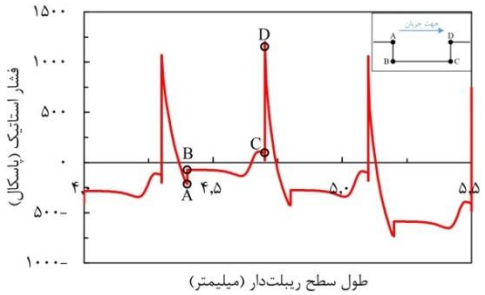
شکل «۱۰»: توزیع تنش برشی در راستای محور X روی سطح ریبلت‌دار در هندسه ۳.

توزیع تغییرات فشار در ابتدای سطح ریبلت‌دار برای هندسه شماره ۱۷ تا ۲۰ در شکل (۱۱) رسم شده است. مشاهده می‌شود که به دلیل برخورد جریان سیّال به نوک ریبلت‌ها نواحی پرفشاری ایجاد می‌شود که در واقع نقطه سکون جریان نیز است. اندازه این فشار به ترتیب از هندسه ۱۷ تا هندسه ۲۰ افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده افزایش فشار با افزایش عرض ریبلت‌ها است. این موضوع در تطابق با نتایج نشان داده شده در جدول (٤) نیز است یعنی با افزایش عرض ریبلت میزان پسای فشاری وارد بر سطح افزایش یافته است.



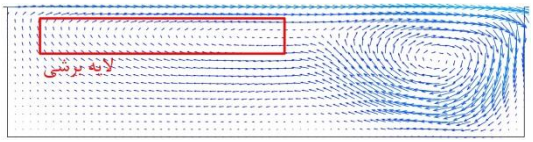
شکل «۱۱»: توزیع فشار روی ریبلت‌ها.

به‌منظور بهتر مشخص شدن نحوه توزیع فشار بر روی ریبلت‌ها، توزیع فشار بر روی سطح ریبلت‌دار در هندسه ۳ (مطابق نام‌گذاری جدول ۱) در شکل (۱۲) رسم شده است. در این شکل نحوه نام‌گذاری چهار رأس ریبلت با حروف A، B، C و D نشان داده شده است. هم‌چنین میزان فشار در این چهار نقطه برای ریبلت دوم بر روی نمودار مشخص شده است. ملاحظه می‌شود که میزان فشار در ضلع میان رئوس A و B (که بر روی ضلع سمت چپ ریبلت قرار دارند) منفی بوده و میزان فشار در ضلع میان رئوس C و D (که در سمت راست ریبلت قرار گرفته‌اند) مثبت است. هم‌چنین فشار در رأس D که نقطه سکون جریان است بسیار بزرگ‌تر از فشار در سایر نقاط است. این روند در سایر ریبلت‌ها نیز مشاهده می‌گردد؛ بنابراین انتظار می‌رود که نیروی فشاری خالصی به سمت راست (در جهت حرکت جریان) به سطح ریبلت‌دار وارد شود که مقدار این نیروی فشاری تحت عنوان پسای فشاری در جدول‌های (۲ و ٤) آورده شده است.



شکل «۱۲»: توزیع فشار روی سطح ریبلت‌دار در هندسه ۳.

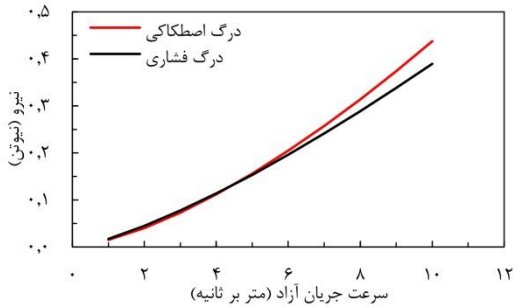
در نهایت می‌توان به این نتیجه رسید که با افزایش عرض ریبلت‌ها مقدار پسای کل وارد بر سطح، در مقایسه با سطح صاف بدون ریبلت متناظر، کاهش می‌یابد. البته باید به این نکته مهم توجّه نمود که در صورت افزایش عرض ریبلت‌ها از حد معیّنی، ناپایداری‌هایی در حل عددی به وجود می‌آید. این ناپایداری‌ها در نهایت سبب عدم همگرایی حل عددی (با استفاده از فرض جریان آرام) می‌شوند. در واقع می‌توان این موضوع را با توجّه به بردارهای سرعت رسم شده در شکل (۹) نیز توجیه نمود. همان‌طور که در این شکل مشخص است با افزایش عرض ریبلت‌ها، یک لایه برشی در سمت چپ قسمت داخلی ریبلت‌ها ایجاد می‌شود. منظور از این لایه برشی فضایی در میدان جریان داخل ریبلت است که جهت جریان در ضخامت اندکی به‌طور کامل عکس شده است. برای بهتر مشخص شدن موضوع، این لایه برشی برای هندسه ۲۰ در شکل (۱۳) نمایش داده شده است.



شکل «۱۳»: نمایش لایه برشی در میدان جریان داخل ریبلت در هندسه ۲۰.

همان‌طور که از بردارهای سرعت نشان داده شده در مشخص است، با افزایش عرض ریبلت‌ها، طول لایه برشی داخل ریبلت مستطیلی افزایش می‌یابد. در نتیجه با افزایش عرض ریبلت‌ها از حد معینی، گسترش این لایه برشی سبب توسعه اغتشاشات در جریان شده و رژیم جریان را از حالت آرام به آشفته تبدیل می‌نماید. این موضوع در حل عددی به‌صورت ایجاد ناپایداری در باقیمانده‌ها و عدم همگرایی حل خود را نشان می‌دهد. در نتیجه در این پژوهش عرض ریبلت‌ها به‌گونه‌ای انتخاب شده است تا از وجود جریان آرام اطمینان حاصل شود.

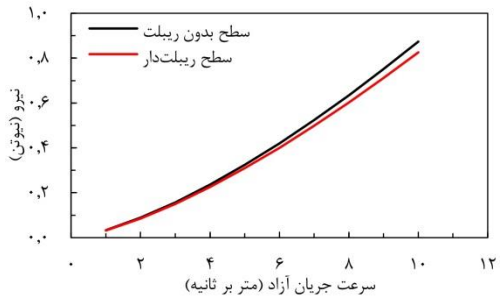
اثر سرعت جریان آزاد. به‌منظور تعیین اثر سرعت جریان آزاد بر روی عملکرد ریبلت‌های مستطیلی در کاهش میزان پسا، شبیه‌سازی‌ها بر روی هندسه ۱۸ و در سرعت‌های مختلف جریان آزاد از ۱ متر بر ثانیه تا ۱۰ متر بر ثانیه انجام شده است. مقایسه میان اندازه پسای اصطکاکی و فشاری وارد بر سطح ریبلت‌دار در سرعت‌های مختلف جریان آزاد در شکل (۱٤) نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد در سرعت‌های پایین (کمتر از ۵ متر بر ثانیه) گرچه اختلاف اندکی میان دو نوع پسا مشاهده می‌شود اما سهم پسای فشاری اندکی بیشتر از پسای اصطکاکی است. در سرعت‌های بالاتر (بزرگ‌تر از ۵ متر بر ثانیه) سهم پسای اصطکاکی نسبت به پسای فشاری بیشتر شده است.



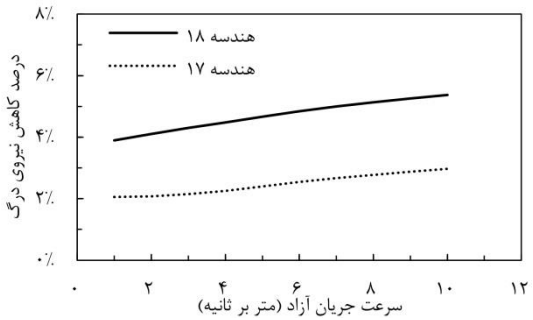
شکل «۱٤»: مقایسه سهم پسای اصطکاکی و فشاری وارد بر سطح ریبلت‌دار در سرعت‌های مختلف جریان آزاد در هندسه ۱۸.

پسای کل وارد بر سطح ریبلت‌دار (هندسه ۱۸) در سرعت‌های مختلف جریان آزاد با پسای وارد بر سطح بدون ریبلت متناظر در شکل (۱۵) مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که پسای وارد بر سطح ریبلت‌دار همواره کمتر از پسای وارد بر سطح بدون ریبلت است که این موضوع به‌خوبی نشان‌دهنده عملکرد موفقیت‌آمیز ریبلت‌های مستطیلی در کاهش پسای وارد بر سطح در محدوده رژیم جریان آرام است. برای مشاهده بهتر درصد کاهش پسای وارد بر سطح ریبلت‌دار نسبت به سطح بدون ریبلت در سرعت‌های مختلف جریان آزاد، نمودار درصد کاهش پسا برای دو هندسه ۱۷ و ۱۸ در شکل (۱٦) رسم شده است.

مشاهده می‌گردد کـه بـا افـزایش سـرعت جریـان آزاد درصد کـاهش پسـا نیـز افـزایش مـی‌یابـد. کمتـرین و بیشترین درصد کاهش پسا در سرعت ۱ و ۱۰ متـر بـر ثانیـه و در هندسـه ۱۸ بـه ترتیـب برابـر بـا ۳٫۹ و ۵٫٤ درصد است. متوسط درصد کاهش پسا در هندسـه ۱۷ و ۱۸ و در محدوده سرعت‌های شبیه‌سازی‌شده نیـز بـه ترتیب ۲٫۵ و ٤٫۷ درصد محاسبه شده است.



شکل «۵»: مقایسه پسای کل وارد بر سطح ریبلت‌دار (هندسه ۱۸) و سطح بدون ریبلت در سرعت‌های مختلف جریان آزاد.



شکل «۱٦»: درصد کاهش پسای کل در سطح ریبلت‌دار نسبت به سطح بدون ریبلت متناظر در هندسه شماره ۱۷ و ۱۸.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی اثـر اسـتفاده از ریبلـت‌هـای مستطیلی بـر کـاهش میـزان پسـای وارد بـر سـطح در جریان آرام پرداخته شد. برای ایـن منظـور از دینامیـک سیّالات محاسباتی در فضای دوبعدی استفاده گردید تـا حرکت جریان آب بر روی سطح شبیه‌سازی شـود. اثـر پارامترهای هندسی ریبلـت مسـتطیلی شـامل عـرض و ارتفاع و هم‌چنین اثر میزان سرعت جریان آزاد بر روی کاهش پسای وارد بر سطح مورد بررسی قـرار گرفـت. خلاصه مهم‌ترین نتایج به‌دست‌آمده به شرح زیر است:

۱- ریبلت‌های مستطیلی می‌توانند میزان پسای وارد بـر سطح را در محدوده رژیم جریان آرام، نسـبت بـه سطح صاف بدون ریبلـت، کـاهش دهنـد. درصـد کاهش میزان پسا به پارامترهای هندسـی ریبلـت و سرعت جریان آزاد بستگی دارد.

۲- درحالی‌که ارتفاع ریبلت‌هـا اثـر نـاچیزی در میـزان کاهش پسای وارد بر سطح دارند، افـزایش عـرض ریبلت‌ها تا حد معینی باعث کـاهش میـزان پسـای کل می‌گردد.

۳- بیشـترین مقـدار کـاهش پسـا در سـطح ریبلـت‌دار نسبت به سطح بدون ریبلت، در ریبلت بـا عـرض ۰٫٤ میلی‌متر و در سرعت جریـان آزاد ۱۰ متـر بـر ثانیه به دست آمد که برابر با ۸٫۷ درصد است.

٤- پسای کل وارد بر سطح بدون ریبلت تنها بـه دلیـل پسای اصطکاکی است امـا پسـای وارد بـر سـطح ریبلـت‌دار مجمـوع پسـای اصـطکاکی و فشـاری است.

۵- در سـرعت‌هـای انـدک جریـان آزاد، سـهم پسـای فشاری اندکی بیشتر از پسـای اصـطکاکی وارد بـر سطح ریبلت‌دار است اما با افزایش سرعت جریـان آزاد به‌تدریج سهم پسای اصطکاکی افزایش‌یافته و بیشتر از پسای فشاری می‌گردد.

٦- با افزایش عرض ریبلـت‌هـای مسـتطیلی یـک لایـه برشی داخل ریبلت به وجـود مـی‌آیـد. ایـن لایـه برشی سبب توسعه اغتشاشـات در میـدان جریـان سـیّال مـی‌شـود. بـا افـزایش بـیش‌ازحـد عـرض ریبلت‌ها و در نتیجه توسعه لایـه برشـی، گـذار از رژیم جریان آرام به جریان آشفته سـریع‌تـر اتفـاق می‌افتد. در این صورت حل عـددی بـا اسـتفاده از فرض جریان آرام ناپایدار شده و سـرانجام واگـرا می‌گردد.

در انتها این نکته لازم به توضیح است که تعیین فرآیند عملکرد ریبلت‌ها در کاهش میزان پسای وارد بر سطح نیاز به بررسی دقیق‌تر دارد. در این پژوهش تلاش شد تا با استفاده از فرضیّات ساده شونده کارآمدی ریبلت‌های مستطیلی در کاهش میزان پسای وارد بر سطح در رژیم جریان آرام مورد بررسی قرار گیرد.

واژه‌نامه

بال‌واره	Airfoil
پسا	Drag
حل عددی مستقیم	Direct Numerical Simulation
شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ	Large Eddy Simulation
فراآبگریز	Superhydrophobic
گردابه‌های سنجاق‌سری	Hairpin vortices
گردابه‌های گاما	ʌ Vortices
محلول فعال سطحی	Surfactant solution
روند حل کاپلد	Coupled algorithm

مراجع

1. Walsh, M.J., "Riblets as a viscous drag reduction technique", *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 485–486, (1983).
2. Walsh, M. and Lindemann, A., "Optimization and application of riblets for turbulent drag reduction", *In: 22nd Aerospace Science Meeting*, p. 347, (1984).
3. Rowin, W.A., Hou, J. and Ghaemi, S., "Turbulent channel flow over riblets with superhydrophobic coating", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 94, pp. 192–204, (2018).
4. Min, T. and Kim, J., "Effects of hydrophobic surface on skin-friction drag", *Physics of Fluids*, Vol. 16, pp. L55–L58, (2004).
5. Raoufpanah, A., Rad, M. and Nouri, B.A., "Effects of slip condition on the characteristic of flow in ice melting process", *International Journal of Engineering*, Vol. 18, pp. 253–261, (2005).
6. Voronov, R.S., Papavassiliou, D.V. and Lee, L.L., "Slip length and contact angle over hydrophobic surfaces", *Chemical Physics Letters*, Vol. 441, pp. 273–276, (2007).
7. Fu, Y.F., Yuan, C.Q. and Bai, X.Q., "Marine drag reduction of shark skin inspired riblet surfaces", *Biosurface and Biotribology*, Vol. 3, pp. 11–24, (2017).
8. Suzuki, Y. and Kasagi, N., "Turbulent drag reduction mechanism above a riblet surface", *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 1781–1790, (1994).
9. Kramer, F., Grüneberger, R., Thiele, F., Wassen, E., Hage, W. and Meyer, R., "Wavy riblets for turbulent drag reduction", *In: 5th Flow Control Conference*, p. 4583, (2010).
10. Sareen, A., Deters, R.W., Henry, S.P. and Selig, M.S., "Drag reduction using riblet film applied to airfoils for wind turbines", *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 136, pp. 21007, (2014).
11. Hou, J., Hokmabad, B.V. and Ghaemi, S., "Three-dimensional measurement of turbulent flow over a riblet surface", *Experimental and Thermal Fluid Science*, Vol. 85, pp. 229–239, (2017).
12. Ahmmed, K.M.T., Montagut, J. and Kietzig, A., "Drag on superhydrophobic sharkskin inspired surface in a closed channel turbulent flow", *Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 95, pp. 1934–1942, (2017).
13. Choi, H., Moin, P. and Kim, J., "Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 255, pp. 503–539, (1993).
14. Huang, C., Wang, Q., Wei, J. and Yu, B., "Direct numerical simulation of turbulent flow over wide-rib rectangular grooves", *Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 96, pp. 1207–1220,

(2018).
15. Huang, C., Liu, D., Wei, J., Yu, B., Zhang, H. and Cheng, J., "Direct numerical simulation of surfactant solution flow in the wide-rib rectangular grooved channel", *AIChE Journal*, Vol. 64, pp. 2898–2912, (2018).
16. Sasamori, M., Iihama, O., Mamori, H., Iwamoto, K. and Murata, A., "Parametric study on a sinusoidal riblet for drag reduction by direct numerical simulation", *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 99, pp. 47–69, (2017).
17. Fuaad, P.A. and Prakash, K.A., "Enhanced drag-reduction over superhydrophobic surfaces with sinusoidal textures: A DNS study", *Computers and Fluids*, (2019).
18. Klumpp, S., Meinke, M. and Schröder, W., "Numerical simulation of riblet controlled spatial transition in a zero-pressure-gradient boundary layer", *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 85, pp. 57–71, (2010).
19. Bai, X., Zhang, X. and Yuan, C., "Numerical analysis of drag reduction performance of different shaped riblet surfaces", *Marine Technology Society Journal*, Vol. 50, pp. 62–72, (2016).
20. Byun, D. and Park, H.C., "Drag reduction on micro-structured super-hydrophobic surface", In: Robot. Biomimetics, pp. 818–823, (2006).
21. Zhang, Y., Chen, H., Fu, S. and Dong, W., "Numerical study of an airfoil with riblets installed based on large eddy simulation", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 78, pp. 661–670, (2018).
22. Boomsma, A. and Sotiropoulos, F., "Riblet drag reduction in mild adverse pressure gradients: a numerical investigation", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 56, pp. 251–260, (2015).

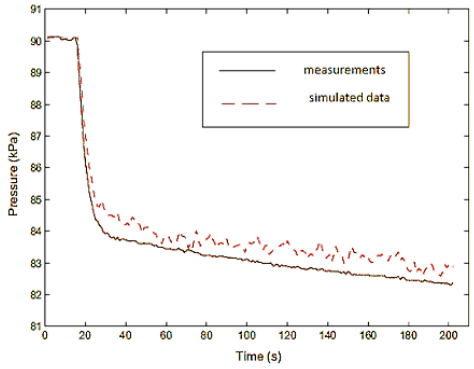


Figure 2. Comparison of pressure at gas pipeline outlet

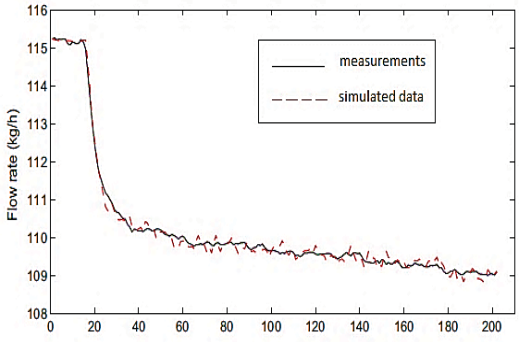


Figure 3. Comparison of gas pipeline outlet flow

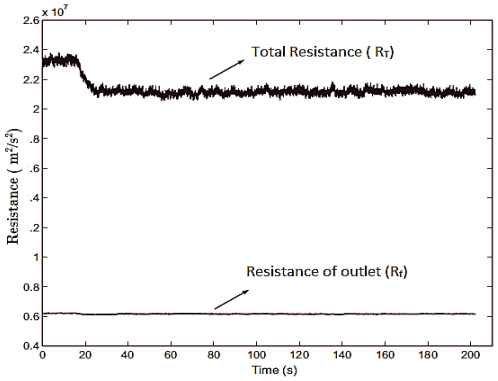


Figure 4. Change in resistance of a pipeline to a leak

A New Mathematical Model Gas Flows in Pipeline with Leak

Marjan Aliyari[1] Faezeh Farhadi[2]

1. Introduction

One of the most important issues in the gas industry is the calculation of wasted gas, which has always been a concern.

Mathematical modeling of flow in a leakage of gas can be considered by considering changes in parameter of flow such as pressure and flow velocity in ducts after a leak, so it can be used to evaluate leakage losses. Equations governing the flow behavior in a pipeline are a set of partial differential equations and are difficult to solve by analytical and even numerical methods such as characteristic (MOC). In all of these numerical methods, we need information on the pipeline boundary conditions, which depend on the upstream and downstream features. In this study, the leakage pipeline is simulated by an equivalent electrical circuit and the outlet end of the pipeline can be considered with an approximation of one type of circuit. The main idea of this work is taken from the papers and researches of Zabih et al. and Taherinejad et al. The details of this approach are then tested and compared with the proposed model with real data.

2. Modeling the flow in a pipeline with leak

To simplify mathematical expressions, the following two hypotheses are considered: 1. The synchronous current in a pipeline is assumed and therefore the energy equation can be ignored; 2. Since the given the high ratio of tube length to diameter, one-dimensional flow is assumed. Assuming sudden leakage, rapid changes in pressure and flow velocity cause the waves to propagate from the leakage point to the two ends of the pipeline. We restricted our study to a mild transient process that can be described by steady-state equations.

3. Solving the model equations based on the equivalent circuit

The main objective is to simulate the gas transition pipeline as the most effective natural gas transition and distribution networks, the resolution and prediction of flow velocity and pressure distribution along the pipe. Pressure as the driving factor of gas flow is considered as the electric potential in the electric analogy method, which is the factor of electrical conversion. It is clear that the gas flow is similar to the electricity flow. A simple tube element is an electric element that stores the flow rate and pressure at its beginning and end. The difference between electric potential (pressure drop) and electric current (current velocity) is taken into account, so a model should be presented that illustrates the physics of gas transition through the pipeline. Figure 1 shows the gas leakage pipeline and its equivalent circuit.

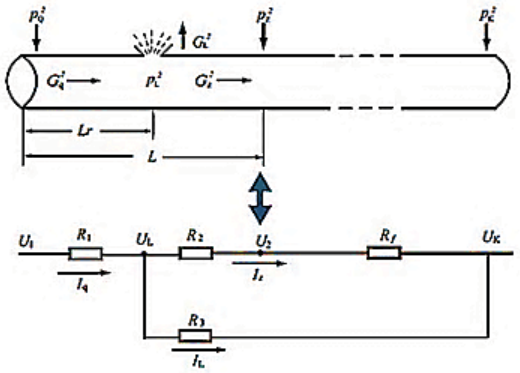


Figure 1. Leakage pipeline and equivalent circuit

4. Numerical results and comparison with experimental sample

Experimental measures were performed by manipulating the manual valves at three leak points different leakage sizes occur and pressure and flow changes were recorded at both ends of the pipeline. Figures 2 and 3 show the comparison between simulation and measurement results as a leak in L_2. Figure 4 shows the changes in the total resistance of the pipeline and the end of pipeline output during leakage. R_f is the end resistance of the pipeline and the total resistance of the pipeline is R_T.

5. Conclusion

A simple and efficient way to develop leak pipeline models was presented in this study. The models developed in this method can be used to estimate pressure and flow changes in a conduit after a leak. To solve the model equations, a new approach based on the similarity between the pipeline and the electrical circuit is proposed. As such, an equivalent circuit with a specific structure is used to simulate a pipeline leakage and a specific approximation is made to express the endpoint of the pipeline from the point of view of the circuit. The model's success in leaking pipeline simulations also confirms the validity of the method.

[1] *Corresponding Author: Assistant Professor, Faculty member of Applied Mathematics, Ayatollah Boroujerdi University, Borujerd, Iran. m.aliyari@abryu.ac.ir*

[2] *Master of Gas Pipeline designer, Azarab Company, Tehran, Iran.*

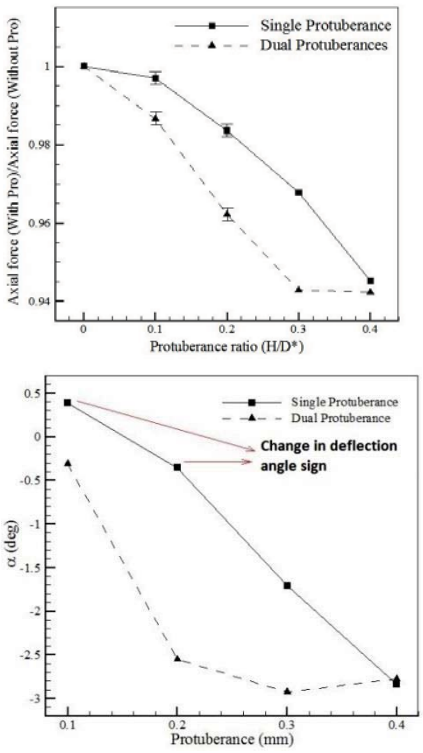
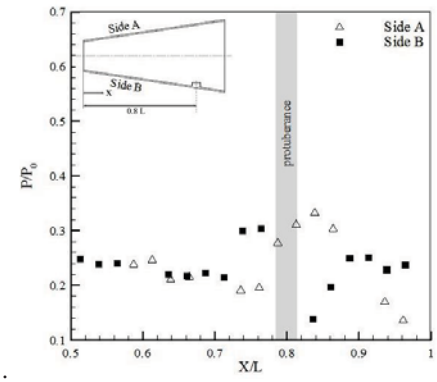
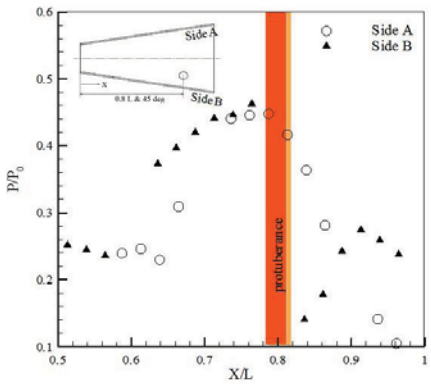


Figure 1. The axial force and deflection angle in different protuberances penetration ratios.

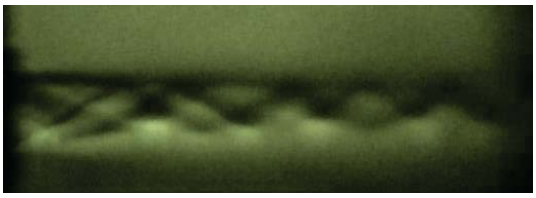


Single protuberance

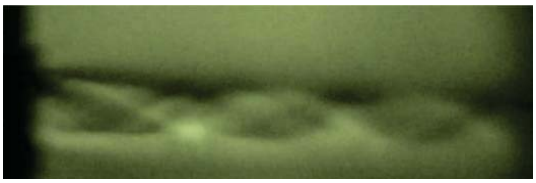


Dual protuberances

Figure 2. Static pressure changes on the nozzle wall (H/D*=0.3)



Single protuberance



Dual protuberances

Figure 4. Schlieren images in nozzle exit at $H/D^* = 0.2$

4. Conclusion

In this study, effects of the use of dual transverse protuberances (DTP) as a new, low cost and simple method in controlling the thrust vector in a C-D nozzle, whose nominal Mach number is 2, was investigated. The protuberances are two cylindrical shapes that are placed in the divergence part of nozzle. Protuberances are installed in 80% of the length of the nozzle divergence section from nozzle throat transversely. The flow field was investigated by schlieren imaging, along with measuring the pressure distributions on the nozzle walls. Moreover, the thrust vector was measured using a force balance. The results show using the DTP in the nozzle can increase the angle of the thrust vector up to 3.5 degrees. Besides, no change in the deflection angle sign in compare to using a single protuberance is observed. Also, the results reveal that axial force more decreases in the presence dual transverse protuberances. But it dose not exceed from 5.5% in the examined conditions

Experimental Investigation of the Influence of Transverse Dual Protuberances on the Thrust Vector of a Supersonic C-D nozzle

Mohammad Reza Babaeyan[1], Mohammad Hojaji[2,3]

1. Introduction

One of the essential steps in designing aerial vehicles is designing the controlling equipment, which can protect the aerial vehicle from any unwanted deflection. Thrust vector control is one way of controlling aerial vehicles when the aerodynamic forces are negligible. Different methods have been used to control the thrust vector. The use of tabs that are placed in the hot gas path is popular due to their simplicity. The use of jet tabs has been experimentally investigated by some researchers. In these studies, the effects of the tab angle in the nozzle outlet on the thrust vector angle were scrutinized. Also, the effects of tabs on the thrust vector control have been examined. The results showed the use of tabs causes the nozzle outlet deflection. Another resercher also investigated the effects of using corrugated tabs on thrust vector control. The results indicated that the use of corrugated tabs instead of simple tabs could also control the thrust vector and reduce the length of the diamond shocks. However, this method encounters different problems because of the permanent presence in the flow path. One of the problems is the negative effect of thermal loading on the tabs. In another study, numerically and experimentally the ways of heat diffusion through tabs was studied. Another method to control the thrust vector is secondary fluid injection in the nozzle flow. Many studies have been done on secondary fluid injection. In these studies the effects of secondary injection parameters and its location, number of injctions and their arrangements on the thrust vector was numerically and experimentally investigated. This method has some disadvantages. In this method, hot flow causes valves to wear out; hence, researchers are still working on various new methods that are more affordable than the conventional methods. Researchers have recently examined protuberance that is placed on the divergent nozzle section. In a experimental study the effect of location and penetration ratios of cylindrical protuberance on the thrust vector of a Supersonic C-D nozzle was investigated. Besides, in another study, experimental investigation of the penetration effects of opposite dual protuberances on the thrust vector has also conducted.

In the present experimental study, for the first time, the impacts of dual transverse protuberances on the nozzle thrust vector and the flow field is examined. for this purpose, in two different cases, the effests of one and dual transverse protuberances and their penetration ratios on the flow field is studied.

2. Experimental apparatus and conditions

In this study, a convergent-diverging nozzle with nominal Mach number 2 was designed and fabricated. The nozzle inlet diameter is equal to the settling chamber diameter (16 mm), throat diameter is 5 mm, and the outlet diameter is 6.5 mm. Besides, the total nozzle length is 86 mm, and the divergent section length is also 50 mm. Protuberances are placed in 40mm from throat in the divergent part of the nozzle. At the first case, one protuberance and in the second case, two transverse protuberances are placed in the nozzle in different penetration ratios of 0.1, 0.2, 0.3 and 0.4. Besides, pressure holes with a diameter of 0.7 mm are created on both sides of the nozzle wall. The stagnation pressure is considered constant in all experiments; as a result, the nozzle pressure ratio (NPR) is set to 6.6. Pressure holes on the nozzle wall are connected to Trafaq pressure sensors with the overall accuracy of 0.1% FS and converted using Advantech 41117 DAQ portable module. A two component balance with the overall accuracy of 0.5% FS is used to measure the axial and lateral forces of the nozzle.

3. Results and Discussion

In order to investigate the effects of protuberance on the flow field, the cylindrical protuberance, is installed at $X/L = 0.8$, while the protuberance ratios is equal to $H/D^* = 0.1$, 0.2, 0.3 and 0,4. In Figures 2(a), changes in axil force are seen. Results show that axial force more decreases in the presence of transverse dual protuberances (case 2). Figure 2(b) also illustrates the deflection angle of thrust vector in various penetration ratios. In this figure, the thrust vector angle is obtained from equation (1).

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{F_s}{F_a}\right) \quad (1)$$

Results show deflection angle in the second case is more than the first case for the same penetration ratios. Also, there is a change in deflection angle sign in low penetration ratios in the first case. Pressure distribution on the nozzle wall (Figure 2) shows the pressure increases in the upstream of protuberance while decreases in the downstream because of the blockage effects of the protuberance. Moreover, stronger shocks and wakes are observed up and down stream of the protuberances in the second, respectively.

Figure 3 shows the Schlieren images of flow field at the nozzle exit for penetration ratio of 0.2. More deflection angle of the jet plume at the nozzle exit can be observed in the second case. It seems that the stronger shocks in the second case is the main reason of this phenomenon.

[1] *M.Sc. Student, Department of Mechanical Engineering, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran.*

2 *Corresponding Author: Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran.Hojaji_m@pmc.iaun.ac.ir*

3 Aerospace and Energy Conversion Research Center, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran.

where, $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{x}(t), \lambda(t)]^T \in \mathbb{R}^{2p}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2p+1} \to \mathbb{R}^{2p}$, and $\Psi : \mathbb{R}^{2p+1} \to \mathbb{R}^{p+1}$ is the boundary function of the problem. Here, the problem is to determine a vector $\mathbf{v} = (\lambda_1(0),\ldots,\lambda_p(0), t_f)^T$, such that, the shooting equations

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{y}(t_f), t_f) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}(t_f), \lambda(t_f), -\text{sign}(\sigma(t_f))) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

is satisfied. It is noted that, because of the existence of discontinuous integrated function in right-hand-side of the above system of differential equations, solving the shooting equations can cause the accuracy of the solution of the HBVP especially in finding the switching points, is deteriorated. The next section is devoted to the efficient and accurate numerical solution of this HBVP.

An Improved Shooting Method with a Control Parameterization

In this section, with a knowledge about the number of the switching points and structure of the optimal control obtained from the conventional shooting method explained in the previous section, suppose that each of control function $u_j(t)$ has n_j switching points. So, the following approximation for each control $u_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,q$,

$$u_j(t) = \begin{cases} b_j^0, & s_j^0 \le t \le s_j^1, \\ b_j^1, & s_j^1 < t \le s_j^2, \\ \vdots & \\ b_j^{n_j}, & s_j^{n_j} < t \le s_j^{n_j+1}, \end{cases}$$

is intended, where $0 = s_j^0 < s_j^1 < \cdots < s_j^{n_j} < s_j^{n_j+1} = t_f$, are considered as unknown switching and terminal points, in which on each subdomain, $u_j(t)$ takes known parameter b_j^k for $k = 0,1,\ldots,n_j$. So, given that, $b_j^k \in \{-1,+1\}$, where, $b_j^{k+1} = -b_j^k$, consequently we have $b_j^k = -\text{sign}(\sigma_j(t))$, $s_j^k < t \le s_j^{k+1}$, and $b_j^{n_j} = (-1)^{n_j} b_j^0$. It is noted that, according to such approximation for each of control $u_j(t)$, we parameterized it by $\mathbf{s}_j = (s_j^1,\ldots,s_j^{n_j}, t_f)$. Now, by replacing the control function $\mathbf{u}(t;\mathbf{s}) = [u_1(t;\mathbf{s}_1),\ldots,u_q(t;\mathbf{s}_q)]^T$, in the dynamic equations of the problem, the new HBVP is deduced as

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}(t;\mathbf{s})), \quad 0 \le t \le t_f \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \\ \Psi(\mathbf{y}(t_f), \mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_q, t_f) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

So, the new shooting equations is constructed by

$$\Psi(\cdot) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}(t_f), \lambda(t_f), -\text{sign}(\sigma(t_f))) \\ \sigma_j(s_j^1) \\ \vdots \\ \sigma_j(s_j^{n_j}) \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,\ldots,q,$$

where, $\Psi(\cdot)$ is used instead of $\Psi(\mathbf{y}(t_f), \mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_q, t_f)$ for simplicity in notation. The purpose is to solve the shooting equations $\mathbf{S}(\mathbf{z}) = \Psi(\cdot) = \mathbf{0}$, in which, the column vector $\mathbf{z}$, is a vector of unknown parameters and considered as $\mathbf{z} = (\mathbf{s}, \lambda_1(0),\ldots,\lambda_p(0))^T$, where $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_q)$.

4. Conclusion

An improved shooting method with control parameterization was applied in this paper for the indirect solution of a class of switching optimal control problems. The present method satisfies the first order necessary conditions of optimality and it can capture the switching points accurately. Five illustrative examples were given to demonstrate the validity and applicability of the proposed method.

An Improved Shooting Method for a Class of Switching Optimal Control Problems

Fariba Vahidifar[1], Mohammad Ali Mehrpouya[2]

1. Introduction

In this study, we consider a class of switching optimal control problems which control functions take values from a discrete set and appear linearly in the objective function and the dynamical equations. This type of optimal control problems arises in many applications such as aerospace engineering, cranes, and industrial robots. The computation of optimal controls in this type of optimal control problems is of particular interest because of the difficulty in obtaining switching points and optimal solution.

The aim of this study was to present an indirect improved shooting method based on using the Pontryagin's minimum principle for solving this class of switching optimal control problems. Because the switching optimal control problems have discontinuities in the controls and in the derivatives of the states, the conventional shooting method in solving them can cause the accuracy of method, especially in finding the switching points, is deteriorated. Therefore, to cope with this deficiency, an improved shooting method with a control parameterization is presented. For this purpose, at first, based on the Pontryagin's minimum principle, the first order necessary conditions of optimality, which lead to the Hamiltonian boundary value problem (HBVP) are derived. Then, with a knowledge about the number of the switching points and structure of the optimal control obtained from the conventional shooting method, control functions are replaced with piecewise constant functions. Consequently, the problem is converted to the solution of the "shooting equations", in which the values of the switching points and the initial values of the costate variables are unknown parameters.

2. Problem Statement

We consider the switching optimal control problems with control appearing linearly. Suppose, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t),...,x_p(t)]^T$ denotes the state vector and $\mathbf{u}(t) = [u_1(t),...,u_q(t)]^T$ is the control vector in the time interval $t \in [0, t_f]$, with a free final time t_f which minimizes

$$J = \int_0^{t_f} 1dt = t_f,$$

subject to the constraints on the interval $[0, t_f]$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) &= f_1(\mathbf{x}(t),t) + f_2(\mathbf{x}(t),t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(t_f) &= \mathbf{x}_f, \\ u_j(t) \in \{-1,+1\},\ j &= 1,2,...,q. \end{aligned}$$

Here, the state $\mathbf{x}$ is continuous and controls have finite number of switching points in which controls jump from one value to another at these points. The function $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{p+q+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ is also assumed to be a smooth function of the variables $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

3. The Proposed Method

To formulate the first order necessary conditions of optimality, the Hamiltonian function is introduced as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}(t),\lambda(t),\mathbf{u}(t)) &= 1 + \lambda^T(t)\mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) \\ &= 1 + \lambda^T(t)f_1(\mathbf{x}(t),t) + \lambda^T(t)f_2(\mathbf{x}(t),t)\mathbf{u}(t), \end{aligned}$$

where, $\lambda(t) = [\lambda_1(t),...,\lambda_p(t)]^T$ is called the costate variables. Also, the factor of the control $\mathbf{u}(t)$ in the Hamiltonian function is called the switching function and denoted by

$$\sigma(\mathbf{x},\lambda,t) = [\sigma_1(\mathbf{x},\lambda,t),...,\sigma_q(\mathbf{x},\lambda,t)] = \lambda^T f_2(\mathbf{x},t).$$

It is noted that the solution of the optimal control problem satisfies the following necessary conditions

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= [\partial\mathcal{H} / \partial\lambda]^T, \\ \dot{\lambda} &= -[\partial\mathcal{H} / \partial\mathbf{x}]^T, \end{aligned}$$

and based on the Pontryagin's minimum principle, an optimal control must minimize the Hamiltonian function with related to the control functions, which readily implies the following control law

$$u_j(t) = \begin{cases} -1, & \text{if } \sigma_j(\mathbf{x},\lambda,t) > 0, \\ +1, & \text{if } \sigma_j(\mathbf{x},\lambda,t) < 0, \\ \text{undefined}, & \text{if } \sigma_j(\mathbf{x},\lambda,t)=0, \end{cases}$$

for $j = 1,2,...,q$. So, the switching function $\sigma(t)$ determines the optimal control via

$$\mathbf{u}(t) = -\text{sign}(\sigma(t)),$$

on $[0, t_f]$, except on the switching points. It is noted that, when the final time t_f is free, then the condition

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t_f),\lambda(t_f),\mathbf{u}(t_f)) = 0,$$

as transversality condition, must be considered beside the initial and boundary conditions of the problem. Now, by replacing the control function $\mathbf{u}(t) = -\text{sign}(\sigma(t))$ in the dynamic equations, a HBVP as the necessary optimality conditions is formed. Finally, the resulted HBVP is represented by

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{y}), & 0 \le t \le t_f \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \\ \Psi(\mathbf{y}(t_f), t_f) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

1- M. SC., Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran

2- Corresponding Author, Assistant Professor, Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran. mehrpouya@tafreshu.ac.ir

3. Statistical analysis of the equations of the friction factor of the nanofluid flow with single variable

The equations of the friction factor of the nanofluid flow with single variable are in fact only in terms of Reynolds numbers. These equations with other variables held constant as the volume fraction of nanoparticles have been developed. In this case, the probability distribution function of the data of the friction factor extracted from the equations, Johnson SB, was concluded. Figure 2 demonstrates the probability distribution function of Johnson SB for friction factor of the three nanofluids.

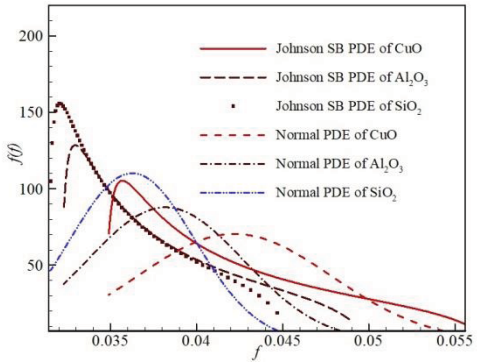


Figure 2. Johnson SB and Normal probability distribution function of friction factor for presented equations by Vajjha et al.

It is observed that the data accumulation on the left side of the graphs is more than that of the right side, and in fact in the high Reynolds numbers the changes in the friction factor are less. On the other hand, it is observed that for all three nanofluids the Johnson SB probability distribution function is wider than the normal probability distribution function.

4. Statistical analysis of the equations of the friction factor of the nanofluid flow with two variables

The two variable equations are developed in terms of Reynolds number and volume fraction of nanoparticles. After reviewing the results, it was observed that the best probability distribution function of the friction factor of two variable equations, like single variable equations, is the Johnson SB probability distribution function (Figure 3).

5. Statistical analysis of the equations of the friction factor of the nanofluid flow with three variables and more

These equations have been developed according to different variables such as Reynolds number, volume fraction of nanoparticles, ratio of nanoparticle diameter to diameter particle of base fluid, volume fraction of each particle in hybrid nanofluids, aspect ratio or width to channel height ratio, hydraulic diameter ratio to the inner diameter of the channel in the channels containing the tape and the rotation ratio of the tape.

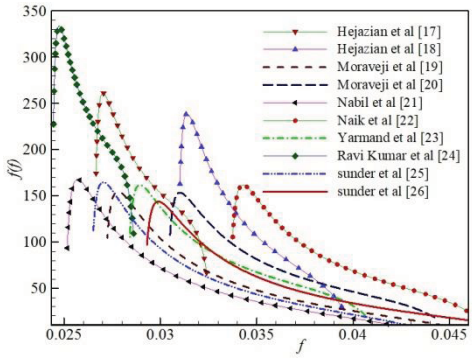


Figure 3. Johnson SB probability distribution function of friction factor for two variables of presented equations of nanofluid

In this section, as in previous cases, after analyzing the results, it was observed that the best probability distribution function of the friction factor based on all 3 statistics is the Johnson SB probability distribution function. Figure 4 demonstrates the diagram of the Johnson SB probability distribution function of friction factor for three variables or more of presented equations of nanofluid.

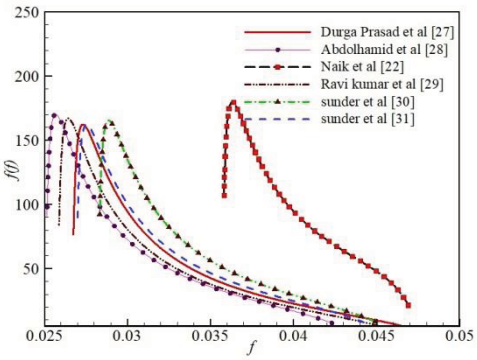


Figure 4. Johnson SB probability distribution function of friction factor for three variables or more of presented equations of nanofluid

6. Conclusion

In the present study, the equations of friction factor presented by researchers in base fluid and various nanofluids have been statistically analyzed. The intended equations are selected based on the turbulent fluid flow. 48 probability distribution functions have been used in statistical analysis. The Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling and chi square statistics were used to determine the best probability distribution function for the friction factor's data. After reviewing and analyzing the results, it was found that the best probability distribution function of the presented equations of friction factor in both the base fluid and the nanofluid, based on all 3 statistics, is Johnson SB probability distribution function.

The Friction Factor of Turbulent Flow of the Base Fluid and Nanofluid in Statistical Approach

Farhad Vahidinia[1], Ghanbar Ali Sheikhzadeh[2]

1. Introduction

One of the most important parameters that is always considered in fluid transfer is the friction factor. The friction factor in the fluid flow depends on various variables such as Reynolds number, flow structure in terms of laminar or turbulence, the volume fraction of nanoparticles, size and shape of nanoparticles, channel dimensions and Prandtl number. The aim of this study was to investigate the equations of friction factor in turbulent flow of base fluids and nanofluids and statistical analysis of this parameter. Nanofluids are a group of heat transfer fluids in which metallic and non-metallic particles are suspended in dimensions of less than 100 nm and significantly increase the heat transfer potential. Nanofluids are used to improve and increase heat transfer instead of base fluids such as water and ethylene glycol. Researchers studying nanofluids usually consider two issues. The first is how much heat transfer increases with the use of nanofluids, and the second is how much the pressure drop due to the use of nanofluids increases. At the end of the study, based on experimental or numerical data, they present equations for the Nusselt number and the friction factor. Based on the developed equations of friction factor, it is observed that fluid transfer systems and heat transfer facilities include uncertainties. These uncertainties are in fact the same independent variables including Reynolds number, volume fraction, and nanoparticle diameter, flow geometry, and so on. Therefore, changing any variable leads to a change in the friction factor and pressure drop. Accordingly, statistical analysis of dependent variables such as friction factor is necessary for proper system efficiency.

In this study, first the presented friction factor equations for the base fluid and nanofluid in the turbulent flow were considered. Then, due to the importance of Reynolds number in the turbulence flow based on the change of this variable, statistical analysis was performed. Easy Fit software was used for the statistical analysis. In order to select the best probability distribution function of the dependent variable friction factor, 48 different probability distribution functions were used using Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling and chi squared tests. After reviewing the results, it was found that based on all three statistics, the probability distribution function of the friction factor in the base fluid and nanofluid is the Johnson SB probability distribution function. On the other side, it was observed that the probability distribution function of the friction factor of the base fluid and nanofluid equations is wider than the normal distribution function and the probability distribution function of Johnson SB also has a right skewness.

2. The presented equations for the base fluid and their statistical analysis

After reviewing various studies in the field of nanofluids, it was observed that most researchers often use the two equations of Blasius and Petukhov to compare the numerical and experimental results of the friction factor and ensure the accuracy of the conducted study. These equations depend only on single variable that is the Reynolds number. The two equations of Naphon et al. and Li et al. developed in terms of Reynolds numbers, have also been used for statistical analysis that the latter being expressed for rough tubes. To determine the best probability distribution function for the friction factor, 48 different multiparameter distribution functions have been used. After reviewing the results based on Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling and chi squared statistics, it was found that the best probability distribution function for the friction factor in the base fluid by changing the Reynolds number based on all three statistics is the Johnson SB probability distribution function. This probability distribution function is defined as follows:

$$f\left(f\right)=\frac{\delta}{\lambda\sqrt{2\pi z}\left(1-z\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma+\delta\ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)^{2}\right) \qquad (1)$$

In equation (1), $z=(f-\xi)/\lambda$, γ and δ are the continuous shape parameters, λ is the continuous scale parameter and ξ is the continuous location parameter. The Johnson SB probability distribution function is plotted in Fig. 1 for the friction factor's data of Blasius, Petukhov, Naphon et al., and Li et al. equations.

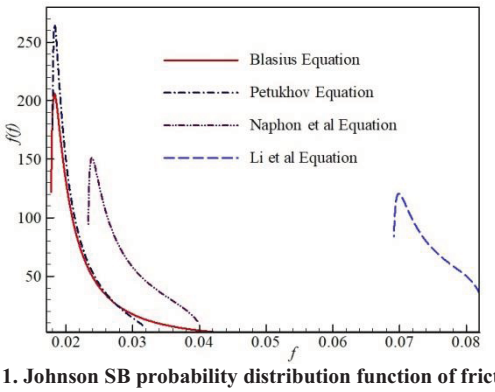


Figure 1. Johnson SB probability distribution function of friction factor for Blasius, Petukhov, Naphon et al., and Li et al. equations

Figure 1. shows that the probability distribution function of the friction factor of all equations has a right skewness.

[1] *Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.*
[2] *Corresponding Author: Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran. Email: sheikhz@kashanu.ac.ir*

4. Results and Discussion

The results of laboratory experiments conducted in the previous studies suggest that when the viscosity of the fluid is high (about 11 times more than the water viscosity) and in the presence of a downstream obstacle with a certain height on the target plate, the hydraulic jump appears in the form of a polygon. As described in the theory section, disturbances create instabilities and convert jumps to polygonal shapes. These disturbances can be divided into several categories: Environmental disturbances, Disturbances caused by moving and vibrate parts, Disturbances caused by the production of bubbles and the phenomenon of cavitation, Disturbances caused by the turbulent flows, Disturbances caused by fluid collisions on the target plate and producing surface waves. In this study, it is predicted that if the disturbances and fluctuations are minimized or reduced, the hydraulic jump remains stable and circular.

The results of various experiments conducted in this study indicate that the predictions made by the authors of the present study were correct and that circular hydraulic jumps can be formed by eliminating or reducing different types of disturbances even in the presence of a downstream obstacle. Figure 3 illustrates the upper and lower views of a stable circular hydraulic jump in the presence of a circular symmetric downstream obstacle with a height of 2.10 mm.

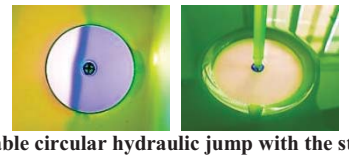


Figure 3. Stable circular hydraulic jump with the structure type IIb in the presence of downstream obstacle at h=2.10mm height (Q=82.23ml/s)

Figure 4 illustrates a comparison of the results of the stable circular jumps obtained in this study with those obtained through modified Watson's theory for fluid jet with three different diameters. The results obtained at different flow rates are consistent with those obtained through modified Watson's theory.

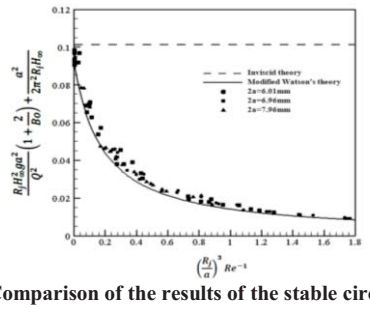


Figure 4. Comparison of the results of the stable circular jumps obtained in this study with modified Watson's theory

By eliminating the disturbances and the fluctuations from the flow, system, and environment, stable circular jumps are formed at low Reynolds numbers to high Reynolds numbers.

Moreover, it should be noted that the hydraulic jump tends to produce the minimum jump surface area due to the presence of the surface tension. The minimum surface area of polygonal jumps with an equal number of sides and the internal area can be found in a regular polygonal jump.

In addition, the reason for the behavior of the polygonal hydraulic jumps and the formation of the stability range can be explained. In the presence of disturbances, the hydraulic jump forms a regular polygon. At low flow rates (low momentum), the shape of the jump is oval or eye-like. As the flow rate increases, which also leads to increases in the flow momentum, the jump size grows and its internal and surface area increases. At the same time, the surface tension force as a resistance force tend to create the minimum surface area. Therefore, it reduces the surface area by adding a corner and one side, and consequently, the jump shape turns into a triangle. The reason is that, at this flow rate, the surface area of the triangular jump is smaller than that of the final oval. This trend will continue with increasing flow rate.

So the upper limit of stability is obtained (path number 1 in Figure 5). The path number 2 in Figure 5 shows the lower limit of stability.

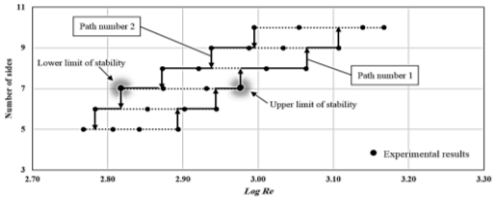


Figure 5. Stability chart for polygonal hydraulic jumps (2a=0.69cm and $H_{obstacle}$=0.25cm)

Nevertheless, it can be discovered from Figure 5, that in a fixed parametric regime (e.g. log Re=3), polygonal hydraulic jumps with 8, 9, and 10 sides can be formed.

5. Conclusion

The present study was an attempt to conduct a phenomenological analysis of polygonal hydraulic jumps, behavior and the possible reasons therefore. The findings of the study can be summarized as follows:

- The true cause of polygonal hydraulic jumps is the presence of disturbances and fluctuations in the flow, environment, or system of the experiment device based on the Rayleigh-Plateau phenomenon and in the presence of surface tension and viscosity effect.
- Increasing the flow rate strengthens instabilities, which leads to unstable circular jumps.
- The stable circular hydraulic jumps were all found to be of type IIb and is fairly consistent with the modified Watson's theory.
- The surface tension of the fluid tries to create the minimum possible surface area in the jump. Since the minimum surface area between different polygons with an equal number of sides is related to regular polygons, the polygonal hydraulic jump is formed in a symmetrical and regular way.

A Phenomenological Study of Polygonal Hydraulic Jumps

Ali Asadi[1], Majid Malek Jafarian[2],
Ali Reza Teymourtash[3]

1. Introduction

From the viewpoint of fluid mechanics, when a vertical jet of a fluid impinges a horizontal plate, the fluid spreads radially in all directions. At a certain distance from the impingement point of the fluid jet, called the hydraulic jump radius, the thickness of fluid suddenly increases, the flow changes from supercritical to subcritical, and the so-called circular hydraulic jump is formed.

Figure 1 illustrates a schematic view of a circular hydraulic jump. The nozzle radius (a), the nozzle distance from the horizontal surface (h_N), the jump radius (R_j), the jump downstream height (h_2), and other parameters of the circular hydraulic jump are displayed in this figure. This phenomenon can be used for cooling purposes in industrial processes.

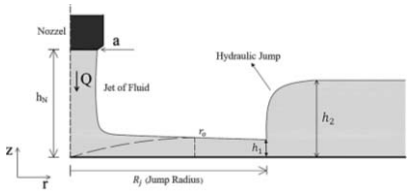


Figure 1. A schematic diagram of circular hydraulic jump

A review of the previous studies indicates that when the viscosity of the fluid is about 11 times more than the water viscosity and a downstream obstacle is considered for a stable circular hydraulic jump, the jump becomes unstable and changes into a polygonal hydraulic jump. The occurrence of this phenomenon has been attributed to the Rayleigh-Plateau instability in the previous studies. However, these instabilities and their effects on circular hydraulic jumps are unknown and the possible reasons for the formation of polygonal hydraulic jumps have not yet been discovered. The present study tried to identify instabilities and the reasons for the formation of polygonal hydraulic jumps. It also tried to respond to the question of why polygonal hydraulic jumps are formed as regular polygons.

2. Theory

The most important theory in the field of circular hydraulic jumps is Watson's theory, which was modified by Bush and Aristoff through applying the effect of surface tension coefficient.

Stability is an important factor for classifying circular and non-circular hydraulic jumps. It can be argued that one of the important parameters in the field of stability is the surface tension.

Plateau and Rayleigh found that in a fluid stream pouring out of the nozzle, the surface tension can form curves on the stream surface by radially growing disturbances, which leads to a dropping stream, no matter how much smooth the stream is. The higher the surface tension, the higher the disturbances and instabilities.

With a higher viscosity and lower surface tension, the fluid stream is able to neutralize disturbances and conserve stability more effectively. On the contrary, with a higher surface tension and lower viscosity, the increase in disturbances and instabilities is higher and the fluid progresses towards forming curves and a drop-like shapes. That is why in water, which has a higher surface tension and lower viscosity compared to ethylene glycol, the disturbances increase faster and the hydraulic jump do not show a regular shape. On the contrary, ethylene glycol, as a higher viscosity and lower surface tension fluid, can fairly control disturbances without forming a drop-like shape. As a result, the surface tension reduces the surface, and energy to the lowest level through creating curves on the jump. These curves are the same as the sides and corners of the polygonal hydraulic jump, the number, and length of which changes depending on the flow rate.

Here the questions are: How do the disturbances form the polygonal hydraulic jumps based on the Rayleigh-Plateau instability in the presence of surface tension and viscosity? How do the disturbances enter the system? Does the decrease or elimination of the disturbances form circular jumps instead of polygonal ones? The following sections focus on identifying the disturbances and fluctuations, of the reasons for the formation of polygonal hydraulic and regular jumps.

3. Experimental Details

Figure 2 illustrates the device used in this study. As it is shown, the device includes a main tank for storing the fluid (1), a fluid pump (2), holding legs, pipes with different diameters for regulating the fluid jet diameter, the circular target plate (7), the overflow tank (9), horizontal and vertical levelling mechanisms, exposure and imaging mechanisms, the flowmeter (5), liquid film height measurement system (11), digital caliper, and the thermometer.

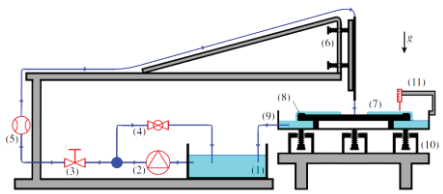


Figure 2. The device used in this study: 1) Fluid storage tank, 2) Pump, 3) Flow control valve, 4) Sub-path valve, 5) Flowmeter, 6) Vertical leveling mechanism, 7) Glass target plate, 8) Downstream obstacle, 9) Overflow tank, 10) Horizontal leveling mechanism, and 11) Fluid thickness measuring system

[1] *PhD. Student, Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.*
[2] *Corresponding Author: Associate Professor Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran. mmjafarian@birjand.ac.ir*
[3] *Professor, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran*

observable that increasing frequency regulator parameter decreases resonant amplitude.

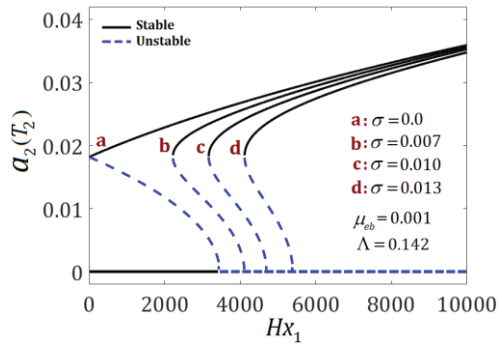


Figure 3. Magnetic resonance amplitude variation curves for four different values of the frequency regulator parameter

Figure 4 depicts characteristic curves of frequency response for four different values of the axial magnetic excitation amplitude $H_{x1} = 2860, 3475, 3900, 4400$ for the microtube beyond flutter beginning point (corresponding to the critical velocity V_{cr}) with turbulent velocity of $\Lambda = 0.142$. This figure shows that an increase of magnetic excitation amplitude has destabilizing effect that increases width of parametric magnetic resonance zone. Moreover, increasing excitation amplitude increases nonlinear response amplitude, that is, resonant amplitude.

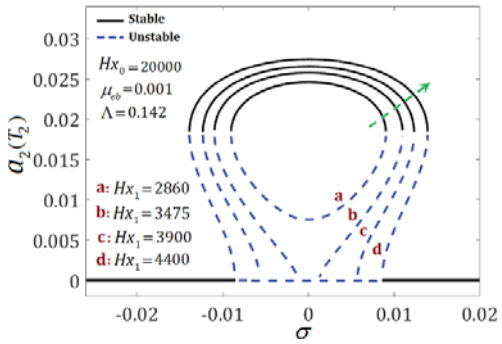


Figure 4. Frequency response curves for four different values of the magnetic excitation amplitude of microtube

Figure 5 illustrates frequency response characteristic curves for three different values of the non-local stress parameter (scale characteristic parameter) $en = 0, 0.07, 0.1$ by keeping other parameters $H_{x0} = 20000$, $H_{x1} = 20000$, $\mu_{eb} = 0.001$ and $\Lambda = 0.142$ constant. According to this figure, increasing non-local stress characteristic parameter has destabilizing effect and increases width of magnetic parametric resonance zone. On the other hand, increasing the non-local stress parameter increases nonlinear response amplitude or resonant amplitude.

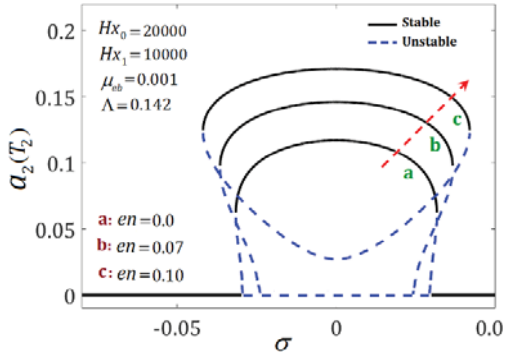


Figure 5. Comparison of frequency response curves for three different values of the non-local stress parameter

5. Conclusion

In this research, governing differential equations for axial, rotational and transverse movements of a magnetizing fluid conveying microtube was extracted using first order Reddy beam model and multiple scales method with consideration of nonlinear geometric terms, fluid viscosity effects and centrifugal acceleration effects, and stability of zero and nonzero solutions of the equations were analyzed in steady condition. Instability problem of nonlinear nonlocal vibrations of the microtube under parametric magnetic excitation of the axial flowing fluid beyond flutter instability was investigated. By deriving nonlinear response curves, effects of various parameters including magnetic excitation amplitude, parameter of excitation frequency and nonlocal stress parameter on resonance amplitude was studied and discussed. It was shown that increase of non-local stress characteristic parameterand magnetic excitation amplitude has destabilizing effects and increases the width of magnetic parametric resonance zone and increases nonlinear response amplitude. Also an increase of frequency regulating parameter has stabilizing effect and decreases resonance zone width and resonance amplitude.

Nonlinear Vibration Analysis of Fluid Conveying Microtube under Parametric Magnetic Excitation

Reza Jahangiri[1], Akbar Allahverdizadeh[2], Behnam Dadashzadeh[3], Hamid Azimzadeh[4]

1. Introduction

Fluid conveying microtubes have extensive applications in micro fluidic circuits, biomechanical equipment and microelectromechanical systems. Therefore, modeling and analysis of their dynamic behavior and stability are important. In this research, effects of various system parameters on nonlinear response of transverse vibrations of beam-like fluid conveying microtube with fixed simply supported boundary conditions under axial magnetic parametric resonance condition is investigated; the issue has not been fully addressed in previous research works.

2. Modeling

Schematic view of a microtube with length L, radius R, and thickness h conveying a fluid with velocity V_f with fixed simply supported boundary conditions is depicted in Figure 1. The deformation field is assumed as

$$U(x,z,t) = u(x,t) + z\phi_x(x,t)$$
$$W(x,z,t) = w(x,t) \quad (1)$$

in which, u and w are axial and transverse displacements of the points located on the neutral axis of magnetized microtube and ϕ_x is rotation angle of the normal vector of transverse section around y axis. We use Reddy's first order shear deformation theory and Eringen nonlocal elasticity theory considering nonlinear geometric terms of von-Karmanand we derive microtube nonlinear equations of axial, transverse and rotational motion as three second order partial differential equations. Then dimensionless parameters are used for nondimensionalization of the equations.

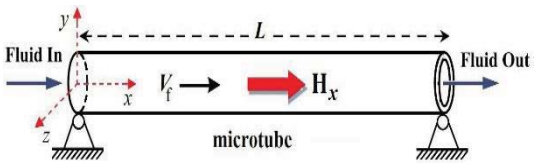


Figure 1. Schematic view of fluid conveying microtube

3. Influence of nonlocal stress parameter on flutter critical velocity

Using two first mode shapes of transverse displacements and neglecting nonlinear terms effect, we derive approximate solutions of axial and rotational displacements. According to Figure 2, second mode is stable at velocities less than V_B. At velocities more than V_C, the first and second natural modes are mixed and create an unstable coupled mode shape that is flutter instability.

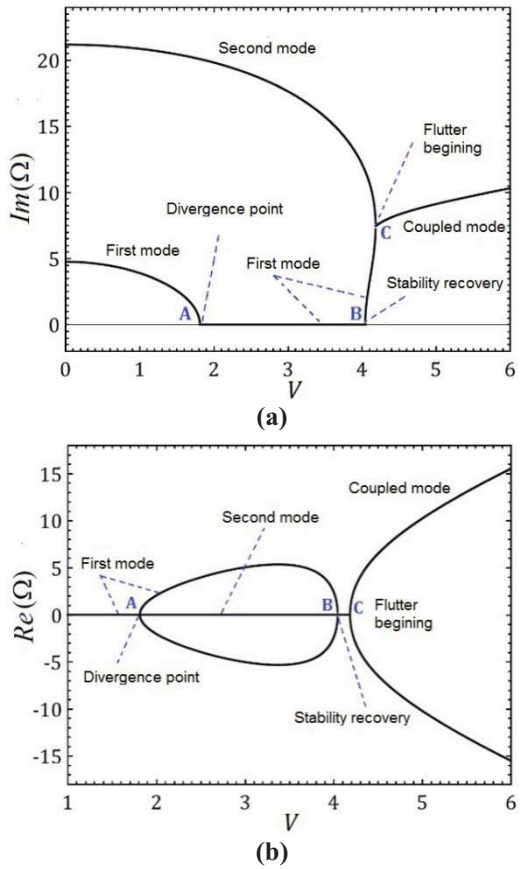


Figure 2. Variation of (a) imaginary part and (b) real part of first and second mode eigenvalues versus dimensionless velocity of fluid

4. Nonlinear analysis of the problem and quantitative study of the stability

For fluid flow velocities more than flutter critical velocity, we study behavior of 2 DoF nonlinear system under parametric magnetic resonance condition. In Figure 3, variation curves of resonance amplitude versus magnetic excitation amplitude parameter for four values of frequency regulator parameter $\sigma = 0, 0.007, 0.01, 0.013$ are plotted. According to this figure, with an axial fluid flow with turbulent velocity of $\Lambda = 15$, the microtube is resonated all the time and increasing parameter σ causes moving bifurcation saddle and subcritical points of the curves towards right direction and decreases resonance zone width. Therefore, an increase of frequency regulator parameter has stabilizing effect on response. In addition, it is

[1]*Corresponding Author: Assistant professor, Mechanical Engineering Department, Islamic Azad University, Salmas, Iran. r_jahangiri@tabrizu.ac.ir*
[2]*Assistant professor, Department of Mechatronics Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.*
[3]*Assistant professor, Department of Mechatronics Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.*
[4]*MSc graduate, Mechanical Engineering Department, Islamic Azad University, Salmas, Iran.*

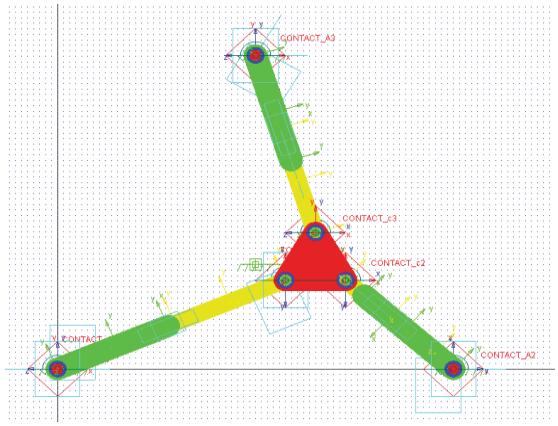


Figure 1. The 3-RPR parallel manipulator with clearance revolute joints

The dynamic behavior of the manipulator with the effects of the clearance joints is analyzed by plottingthe position, velocity, and acceleration (linear/rotational) for different clearance sizes. For instance, it is clearly shown that the magnitudes of the accelerations change sharply in the presence of joints clearances when it leads to contact.

The magnitude of clearance size obviously affects the end-effector acceleration. The manipulator experiences higher accelerations for the larger clearance sizes. In spite of kinematic analysis in this paper, one can expect higher impact forces at the joints in the kinetic analysis.

According to the diagrams which demonstrate kinematic parameters, it can be seen that by increasing the size of the joint clearance, the error rate increases significantly compared to the ideal state and the EE pose is affected. Figure 2 shows the rotational changes of the EE with the size of the joints clearance. These changes in rotational positions in oneparallel robot can easily spoil the robot's performance. Therefore, if the parallel mechanism is used to produce ahigh accuracy path, special attention should be paid to the effects of clearance in creating errors.

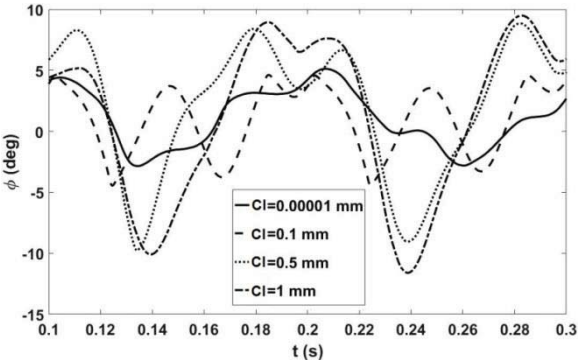


Figure 2. Rotational changes of the EE with clearance size

FFT Frequency Analysis

The discrete Fourier transform may be used to identify periodic structures in time series data. It is approved the significant effects of the clearance on the time domain dynamic response. However, due to the less focus on frequency domain analysis with clearance, Fast Fourier Transformation (FFT) is performed. Since the existence of clearance causes high-frequency vibration of the acceleration, this signal is used to analyze the frequency spectrum of the vibration characteristics. The peaks of vibration amplitude in FFT analysis results with varying clearance sizes areincreased as the clearance size increases. Moreover, increasing the clearance size will carry a lower frequency of contact. It means that with a larger clearance, the contact phase is appeared for a longer period.

4. Conclusion

In this work, a 3-RPR with a focus on the revolute joints was modeled. The parallel robot with clearance revolute joints has been modeled and simulated in the ADAMS as dynamic analysis software. The simulation results are compared for the two ideal joints, without clearance, and the real joints. It has been shown that if there is a clearance in the hinged or revolute joints, the velocity and acceleration of the end-effector (and other mechanism members) are increased relative to the ideal joint within a perfect design. Additionally, FFT analysis proves the joint clearance effect on decreasing of the motion stability.

As a result, special attention should be paid to factors such as wear and unbalance in the system dynamics that increase corrosion in the joints and thus increase clearance. On the contrary, an increase in the acceleration of the members and, consequently, the emergence of high forces during the robot's performance should be expected.

The Effects of Revolute Joint Clearance on the Kinematic Behavior of the 3RPR Planar Parallel Manipulator

Seyyed Mojtaba Varedi-Koulaei[1], Mahdi Bamdad[2], Borzo Fathi[3]

1. Introduction

Mechanical joint defects might highly influence the dynamic response of the whole multibody system. Affecting the transient behavior, the joint clearance yields noise and vibration with a reduction in the component life.

The aim of this study is the kinematic and dynamic analysis, considering the clearance in the simulation of a 3-RPR planar parallel manipulator where the three prismatic joints are actuated.

The ideal and non-ideal model, without and with clearance in the revolute joints, are compared in the results to show the effect of clearance in the robot performance, such as an illustration in path tracking.

2. Planar Parallel Mechanism 3-RPR

The planarthree-DOF3-RPR mechanism has a parallel structure, including a fixed base and a moving platform, called end-effector (EE). These types of parallel manipulators are mainly used in making fast operations and accurate simulators. Three planar chains are connected to the moving platform in a triangular planar kinematic chain.

It is assumed that the center point of the end effector creates a specific path with a constant velocity in the plane regard to the kinematics chains. Using the inverse kinematic equations in the ideal case, the inputs and their derivatives can be computed. Now, given these inputs, one can solve the direct kinematic in the presence of clearance. Then, the generated trajectory of point *C* can be calculated and compared with the desired path. Moreover, the joints forces and the accelerations of the links can be computed for both cases, that is, in the presence and absence of the clearance in the joints.

In this case, the complexity of the robot's kinematic and dynamic relationships increases greatly. As a result, ADAMS Software is used here to overcome the numerical difficulties for non-ideal joints. Researchers have addressed this method to simulate and analyze parallel robots, indicating the high quality and reliability in dynamic simulation.

[1]*Assistant Professor, Department of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Iran.*
2 Corresponding Author: Assistant Professor, Department of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Iran. bamdad@shahroodut.ac.ir
[3]*M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Babol University of Technology, Iran.*

The geometrical equation could be written based on the difference in the radius of the different surfaces in terms of displacements and lead to the distance between two levels g as kinematic contact condition. The situation where the contact is lost corresponds to $g>0$ with zero contact force, whereas the contact with local deformation referred to as a penetration, corresponds to $g<0$. Acritical factor, in the precise prediction of the impact force, is the type of the selected contact model.

3. ADAMS Modeling

ADAMS is the most widely used software for multibody simulation and motion analysis. ADAMS in this paper helps us understand the dynamics of a parallel mechanism involving the moving realistic non-ideal revolute joint.

Clearance modeling

In planar mechanisms, the clearance of each hinge joint adds two degrees of freedom to the system, which can include horizontal and vertical displacements of the pin center relative to the bearing center. During motion, the interaction of surfaces is based on vertical and tangential forces at the point of contact.

Contact modeling

In ADAMS, the impact model and restitution model are two models that are utilized for the surface contact definition. In this paper, IMPACT-Function-Based Contact is employed.

The normal force of the contact has involved elastic and viscous damping. The rigidityis a function of the penetration and the viscous damping is dependent on the speed of penetration.

4. Simulation

Before extracting and reviewing simulation results, the robot modeling accuracy in software should be ensured. To this end, linear accelerations of the end-effector (EE) is compared in three different ways: (1) the robot's kinematic analytic solution in the ideal state, (2) modeling without clearance joints in software, (3) robot modeling with clearance joints in software considering a very small clearance (Cl=0001 mm).

During the robot path tracking, kinematic curves in diagrams are very close together. The impact forces in the joints, as expected, create a deviation representing error signal in the diagrams, which results from a clearance in the joints. Therefore, it is possible to confirm the correctness of the software modeling and its proper functioning during this model validation.

ADAMS result

Figure 1 shows the 3-RPR manipulator that is modeled by ADAMS software, including six non-ideal revolute joints and rigid links. The simulation examines the EE center point kinematics in three different clearance sizes (0.00001mm, 0.5 mm, and 1mm).

HEMA. Using the introduced optimum parameters namely, reaction temperature (75 ℃), reaction time (1 h), pre-irradiation time (40 min) and initiator concentration (9 wt%), the predicted values for grafting and homo-polymer %'s by mathematical model were 38.59 and 43.42%, respectively. They were in conformity with real values of 37.89 and 42.98%.

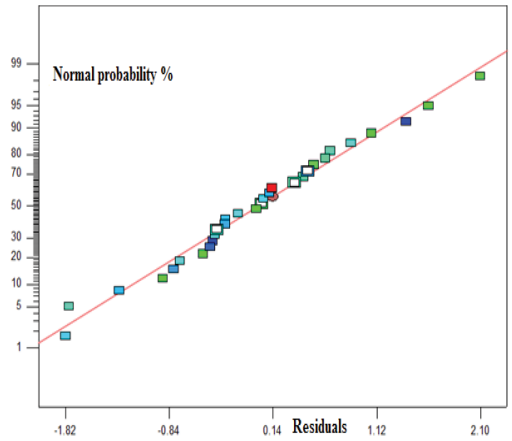


Figure 1. Normal probability versus degree of grafting % residuals

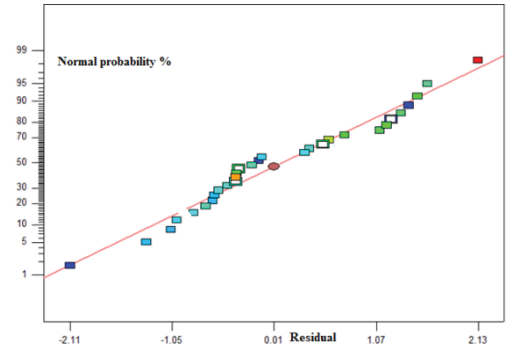


Figure 2. Normal probability versus homo-polymer % residuals

The Grafting of a Nylon Fiber Surface by a Mixture of Two Acrylic Monomers and the Evaluation of Optimum Values by using a Traditional Design of Experiment Software

Mohammad Khosravi[1], Saeed Ostad Movahed[2]

1. Introduction

The biofouling is any accumulation and growth of living matters on the manmade material surfaces. The biofilm formation has harmful effects on the vessel surfaces, navy piers and sea water submerged fish cages and constructions. It restricts the vessel movement resulting in 40% extra fuel consumption. Several anti-biofouling methods proposed. In this study a dual mix of 2-Hydroxy ethyl methacrylate (HEMA) and methyl acrylate (MA) was grafted on the fiber surface. Subsequently, degree of grafting and homo polymer % of the aforementioned monomers at different operative parameters including reaction temperatures, reaction times, pre-irradiation time and also initiator concentration were measured and the results were compared and discussed with those calculated values by a traditional design of experiment software (Design expert®). Also, two equations were proposed by the software for calculation of the aforementioned parameters with studied operative parameters.

2. Experimental

2.1. Materials

Polyamide fiber, PA6 with 210 Denier (1 Denier = 1 g/ 9000m), 34 filaments, entirely drawn yarn (FDY), methyl acrylate (MA) and 2-hydroxyethyl methacrylate (HEMA), IRAMID-CD (non-ionic detergent,Toluene-4-sulfonic acid monohydrate (PTSA, 90%, inhibitor for homo-polymerization),dichloromethane (99%), methanol (99%), , sodium carbonate and benzophenone (BP, 99%, photo-initiator).

2.2. Method

The 10 g of cut 10 cm fiber samples was weighed and put inside a baker containing 500 ml distilled water, 1 g IRAMID-CD, 1 g sodium carbonate and was heated for 300 min at 70℃. In next stage, the fibers removed from solution and after washing with distilled water and subsequent drying at 50℃ for 24 h, they used for monomer grafting. For monomer grafting, a solution containing 32cc dichloromethane, 8cc methanol and different amounts of BP was prepared and during stirring, 1.84 g fiber was added to the solution. The stirring continued up to 24 h. Subsequently, the fibers were removed and put under UV irradiation for selected irradiation times. The irradiated fibers were put inside a three-span flask containing 50 cc de-ionized water, 0.243 g PTSA and a dual monomer mix (1 cc HEMA-2cc MA) for different reaction time and temperatures. After finishing the grafting reactions, the treated fibers were washed by hot de-ionized water to remove unreacted materials and dried under vacuum.

3. Results and Discussion

The optimum degree of grafting and homo polymer % and also the evaluation of the interaction between studied parameters (reaction time and temperature, pre-irradiation time and initiator concentration) was accomplished by the software using four variables and two surface responses with central point design method. Table 1 represents the studied parameters limits used for surface response method. Figures 1 and 2 show normal probability versus degree of grafting and homo polymer % residuals, respectively. As observed, the points are more or less along a line and follow a normal distribution.

With consideration of the above founds, the following equations were proposed by the software for prediction of degree of grafting and homo polymer %:

$$\text{Degree of grafting (\%)} = +58.27481 - 2.63825*A + 29.81527*B + 0.15126*C + 1.70849*D - 0.11965AB - 0.24102BC - 1.23401BD + 0.13378CD + 0.019758A^2 - 1.41293B^2 \quad (1)$$

$$\text{Degree of homo and co-polymer (\%)} = +48.94532 - 0.041657*A - 8.99374*B + 0.12089*C - 3.16614*D + 0.12208*AB - 3.48604E{-}003*AC + 4.97687E{-}003*AD - 0.10497BC + 0.80207*BD + 0.066134*CD \quad (2)$$

Where A, B, C and D are reaction temperature (℃), reaction time (h), pre-irradiation time (min) and initiator concentration (wt%), respectively.

Table 1. The studied parameters limits used for surface response method

Parameter	ID code	Unit	lower limit	upper limit	variation domain
reaction temperature	A	℃	60	90	75
reaction time	B	h	1	4	2.5
pre-irradiation time	C	min	10	40	25
initiator concentration	D	wt%	3	9	6

4. Conclusion

The Design expert® software is a suitable and powerful tool for the analysis and evaluation the optimum grafting % values for a mix of studied monomers, MA and

[1] *Graduate student, Polymer group, Department of chemistry, Faculty of Science, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.*

[2] *Corresponding Author: Associate professor, Polymer group, Department of chemistry, Faculty of Science, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. s-ostad@um.ac.ir*

To evaluate k at interface, k_{int}, for monolithic approach, a harmonic interpolation is used:

$$k_{int} = \frac{k_f k_s}{\frac{\Delta_f}{\Delta} k_s + \frac{\Delta_s}{\Delta} k_f} \quad (8)$$

4. Results and Discussion

Numerical results for the case of 2D conjugate natural convection with thermal conduction in a thick vertical wall, shown in Figure 2, are presented to validate the accuracy of solvers. Figure 3 shows temperature profile at horizontal center line given by three algorithms and compares them with a reference.

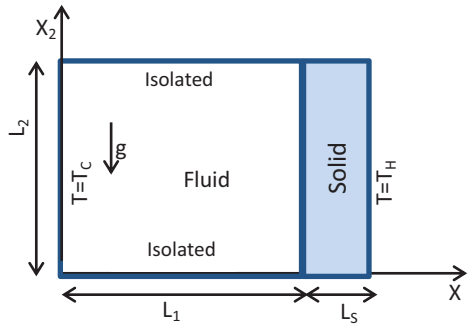


Figure 2. Natural convection adjacent to a thick vertical wall

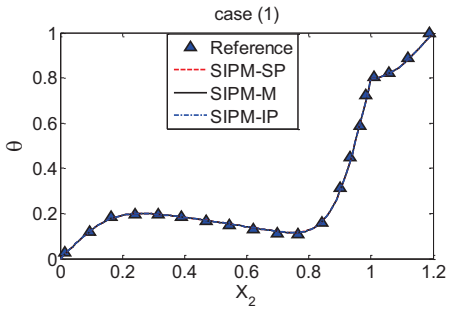


Figure 3. Temperature at horizontal line passing center

In order to evaluate the computational costs of three algorithms, four different cooling conditions are applied for the simulation of the test cases. Computational costs of the proposed algorithms for solution of the case A are compared in Figure 4. As seen in this figure, SIPM-IP produces the slowest convergence rate especially in case A and B, where strong thermal interaction exists between fluid and solid regions.

Table 1. Non-dimensional properties for four cases

	Pr	k_s/k_f	Gr	σ
CaseA	0.7	1.6	1.43×10^5	0.93
Case B	0.7	1.6	10^4	0.93
Case C	0.7	1600	1.43×10^5	4×10^{-4}
Case D	0.7	1600	10^4	4×10^{-4}

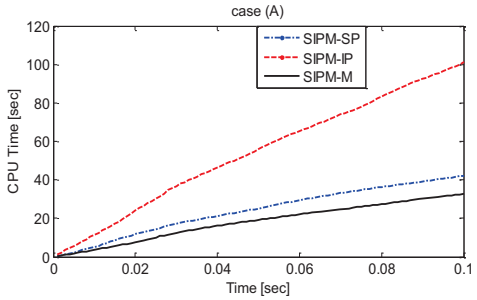


Figure 4. CPU time as a function of solution time

New test case with two regions of fluid and two regions of solid, shown in Figure 5, are also solved by three algorithms. Figure 6 shows the convergence results for case B of the new test case.

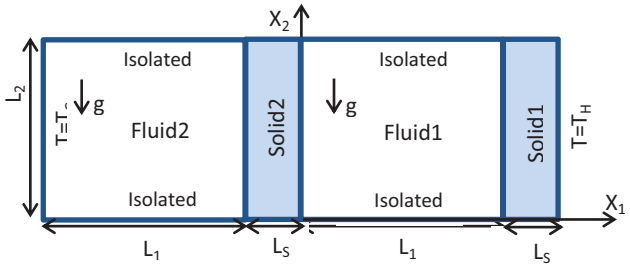


Figure 5. Multi-region test case

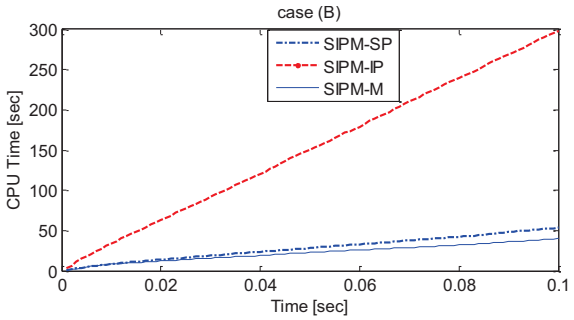


Figure 6- CPU time as a function of solution time

5. Conclusion

- Monolithic solution of energy equation across entire domain results in more efficient CHT solver.
- Comparing two types of partitioned methods, that is, SIPM-IP and SIPM-SP showed that employing separate iterative loop is advantageous in terms of efficiency especially where there is a strong coupling between energy equations at different sub-domains.

Comparison of Monolithic and Partitioned Approaches for the Solution of Fluid-Solid Thermal Interaction Problems

Emad Tandis[1], Ali Ashrafizadeh[2]

1. Introduction

Thermal interaction between fluid flow and solid, known as conjugate heat transfer (CHT), has been widely studied due to its industrial applications. This problem is classified as a multi-physics phenomenon which is characterized by at least two distinct computational sub-domains, i.e. fluid and solid regions, whose associated equations are coupled at shared boundaries. In addition to interface coupling, there are two other types of coupling; one is between momentum and energy in fluid region and another is known as pressure-velocity coupling. These three are shown in the fig. 1.

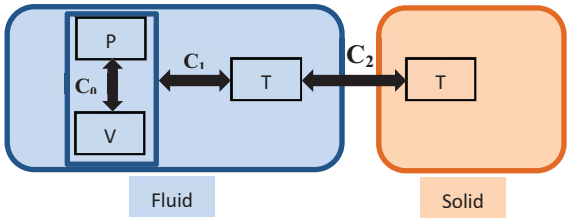


Figure 1. Three Types of coupling in CHT

Appropriate enforcement of coupling conditions at shared interfaces is one of the key effects on accuracy and computational costs in CHT problems especially in unsteady simulations. Based on previous studies, two types of coupling play a major role in stability and efficiency of CHT problems: coupling between energy and momentum equations in fluid as well as coupling associated with thermal interaction between two separate regions.

This study compares performance of three finite volume-based solvers all of which use a family of semi-implicit projection method[3], that is, PISO, to handle pressure-velocity coupling. However, they differ in dealing with two other types of coupling. In the monolithic approach, PISO algorithm with a single outer iteration is performed for solution of pressure and velocity in all fluid regions and it is followed by simultaneous solution of energy equation across all sub-domains; For partitioned methods, where energy equation for all sub-domains are solved in a sequent way, with two strategies: the first one is to apply separate iterative loop for enforcing each type of coupling, and the second suggests integrating two types of coupling in a single outer loop. Finally, the performance of the three algorithms is assessed via solution of thermal interaction between natural convection in an incompressible flow and conduction in vertical wall with different levels of coupling strength.

[1] *Corresponding Author: Ph.D. Student, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, Iran, e.tandis@email.kntu.ac.ir*
[2] *Professor, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.*

2. Governing Equations

The time dependent equations for describing for a Boussinesq fluid flow, that is, continuity, momentum and energy equations, are expressed as follow

$$\nabla . u = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\nabla p + \upsilon \nabla^2 u - g\beta(T - T_{ref}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u.\nabla)T = \frac{1}{\rho C_P}\nabla.(k\nabla T) \tag{3}$$

The time dependent energy equation for solid is

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{(\rho C_P)_s}\nabla.(k_s \nabla T_s) \tag{4}$$

The temperature and heat flux must be continuous at shared interface, $\Gamma_{f,s}$ as follow

$$T(\Gamma_{f,s}, t) = T_s(\Gamma_{f,s}, t) \tag{5}$$

$$n.(k\nabla T) = n.(k_s \nabla T_s) \tag{6}$$

The coupling highly depends on the Grashof number, $Gr = \frac{g\beta(T_H - T_L)L^3}{\nu^2}$. The non-dimensional quantity for describing the strength of second type of coupling is:

$$\sigma = \frac{k_f/\sqrt{\alpha_f}}{k_s/\sqrt{\alpha_s}} \tag{7}$$

Here, α is thermal diffusivity. The interaction strength is weak for $\sigma << 1$and increases as $\sigma \to 1$.

3. Numerical Approaches

In this section, the numerical algorithms, which are developed in OpenFOAM package, are explained.

Algorithm (a), which is called semi-implicit projection method with separate loops (SIPM-SP), suggests an outer iteration for first type of coupling and a sub-iteration loop for second one. Algorithm (b), called semi-implicit projection method with integrated loop (SIPM-IP), integrates two loops into one. However, for monolithic solver, (SIPM-M), algorithm (c), there is only need for one iteration loop to strongly enforce first type of coupling. It is worth mentioning that algorithms (b) and (c) are implemented in standard solvers of OpenFOAM while algorithm (a) is developed by authors via modifying an existing partitioned solver in this software.

using wall friction velocity u_τ and kinematic viscosity υ, are given in Table 1.

Table 1. Simulation specifications. Resolutions are given in wall units: $\Delta x^+ = \Delta x u_\tau/\upsilon$, $\Delta y^+ = \Delta y u_\tau/\upsilon$ and $\Delta z^+ = \Delta z u_\tau/\upsilon$. $Re_\tau = h u_\tau/\upsilon$ is the friction Reynolds number.

Re_τ	Δz^+	Δy^+	Δx^+	SGS model	Case
142.1	9	9	35	Dynamic Smagorinsky	DS-SGS
154.8	11	11	28	−−	No-SGS
148.3	9	5	10	−−	DNS

The conventional dynamic Smagorinsky model is used as the subgrid-scale (SGS) model. Simulations are carried out at a fixed bulk Reynolds number $Re_b = h_b/\upsilon = 2800$. The flow geometry is shown in Figure 2. The simulation box length is 25 times the duct half width to accommodate for large turbulent structures that are formed in the duct.

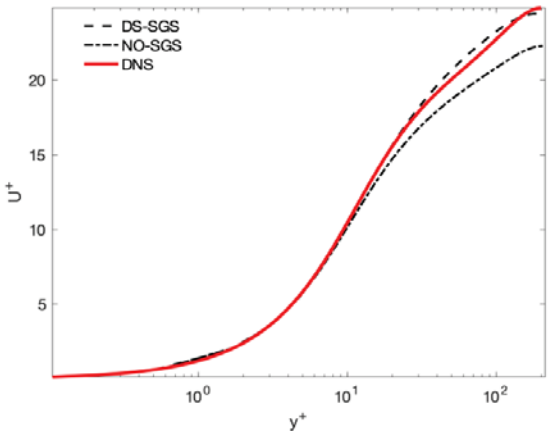


Figure 3. Mean velocity profiles U^+ in wall-units

3. Large-eddy simulations

Mean velocity profiles, at the center of the duct, are given in Figure 3. The DS-SGS simulation, with the dynamic Smagorinsky model, shows a good agreement with the reference DNS data at this point. There is a remarkable difference between the no-SGS model, prediction with the reference DNS data. The difference in the predictions is due to the over-prediction of the wall shear stress in this simulation. This is the situation often encountered in no-SGS model situations, where turbulence is not damped due to the lack of an SGS model.

Analysis of Reynolds stresses shows a similar behavior, like what is observed for the mean velocity profiles, for the streamwise and shear Reynolds stress profiles. Other components of the Reynolds stresses are only reasonably predicted by the dynamic Smagorinsky model. Hence, The Reynolds stress anisotropy is not correctly predicted by this model.

4. Conclusion

Large-eddy simulation (LES) of a turbulent square duct flow is carried out at a moderate resolution at the bulk Reynolds number $Re_b = u_b h/\upsilon = 2800$. LES is carried out using the conventional dynamic Smagorinsky subgrid-scale (SGS) model. Predictions are compared to a reference direct numerical simulation (DNS) and LES without an SGS model. LES showed a good agreement with the DNS data for the mean velocity and Reynolds stresses. Comparison with the no SGS model simulation showed that the SGS model makes an appreciable improvement in LES predictions of the mean velocity and Reynolds stresses over the no SGS model simulations. It was also observed that the Reynolds stress anisotropy was not captured properly. This was reflected in the excellent prediction of the streamwise and shear stress predictions, whereas other Reynolds stresses were predicted only reasonably acceptable. The reason for this behavior of the dynamic Smagorinsky model was argued to be due to its isotropic formulation. It is expected that at lower resolutions, where the SGS anisotropy becomes more pronounced, the differences in LES predictions with the DNS, become more prominent.

Large-eddy Simulation of Turbulent Square Duct Flow

Amin Rasam[1], Zeinab Pouransari[2]
Mohammad Reza Zangeneh[3]

1. Introduction

Turbulent duct flows occur in many industrial applications, including combustion and air-conditioning systems. Contrary to the simple geometry, turbulent duct flow has a complex behavior. This complexity is due to the secondary motions forming in the vicinity of the corners (see Figure 1). Secondary flows are comprised of four corner vortex pairs, which rotate in opposite directions. Previous investigations indicate that turbulent shear stress gradients in the direction normal to the bisectors is responsible for the formation of these secondary flows.

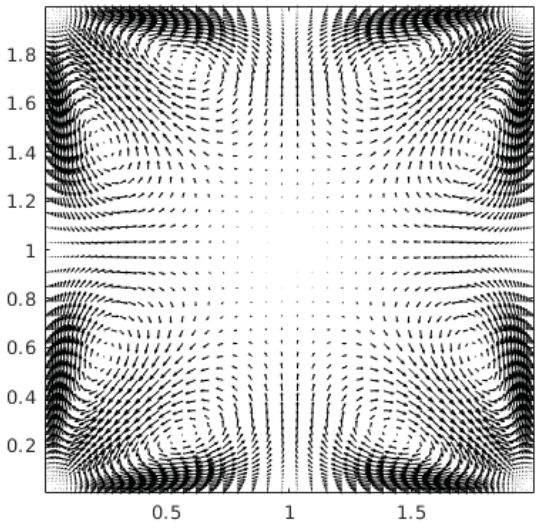


Figure 1. Vector plot of the mean velocity in a y-z plane

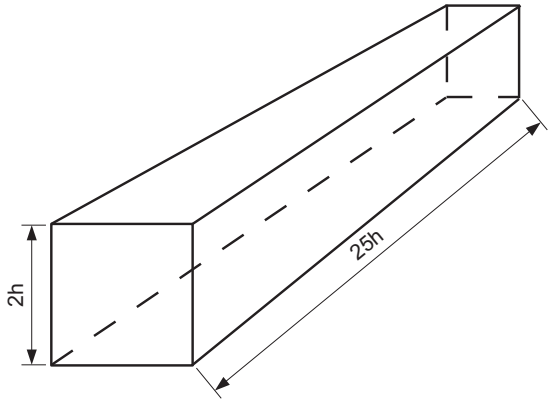


Figure 2. Schematic of the duct geometry.

Large-eddy simulation (LES) is an invaluable tool for numerical simulation of turbulent flows. Similar to direct numerical simulation (DNS), LES can provide instantaneous velocity and pressure fields. Although, it is computationally less expensive, its predictions are not as accurate as DNS. It is also well known that accuracy of LES predictions largely depends on the subgrid-scale model (SGS) formulation and flow complexity. In this respect, turbulent duct flow would be a good candidate for testing performance of SGS models for the prediction of complex turbulent flows. There has been a number of previous DNS and experimental studies on turbulent duct flows, but only a few LES studies. Hence, more LES studies on the performance of different SGS models for this type of flow seem to be necessary.

In the present study, LES is carried out for a turbulent square duct flow. Accuracy of LES prediction is assessed using a reference DNS data. To determine the effect of the SGS model on LES predictions, a simulation is also carried out without an SGS model. Results show that LES predictions have an appreciable improvement over no SGS model prediction for mean velocity and Reynolds stress quantities. But, the Reynolds stress anisotropy is not well-predicted for this type of flow.

2. Numerical method, geometry and SGS model

LESs are carried out using an open-source unstructured finite volume solver. The spatial and temporal discretization is carried out using a second-order scheme. The SIMPLEC algorithm is used for velocity-pressure coupling and Rhie-Chow interpolation is used to avoid oscillations in the solution.

The grid used in the simulations has a uniform spacing in the streamwise direction, whereas it is stretched in wall-normal directions, using a tangent-hyperbolic distribution, to capture the near wall turbulence structures. The LESs are carried out at a moderate resolution. Resolutions in wall units, i.e.

[1] *Corresponding Author: Assistant Professor, Department of mechanical and energy engineering, Shahid Beheshti University. a_rasam@sbu.ac.ir*
[2] *Assistant Professor, Department of mechanical engineering, Iran University of Science and Technology.*
[3] *M. Sc. Student, Department of mechanical and energy engineering, Shahid Beheshti University.*

involved (about 120 degrees of rotation of the pinion) is greater than the corresponding values in the other teeth. Figure 2 (b) shows the sum of symmetric neighbors multiplication with a neighborhood size equal to one mesh cycle. As observed, the operation was quite effective in highlighting the effect of the crack and showing its location.

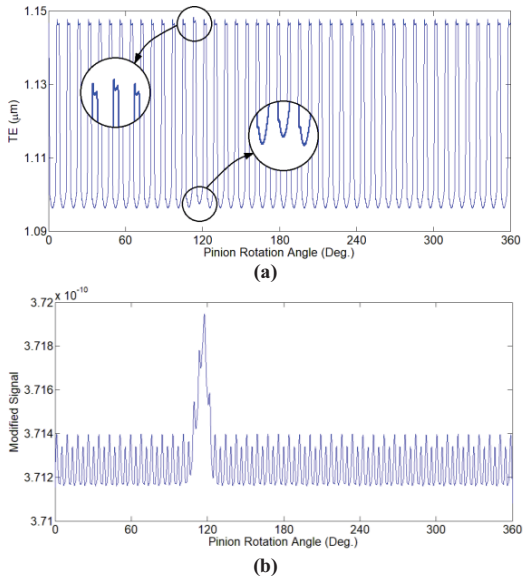


Figure 2. (a) Vibration signal obtained by dynamic simulation of the system. (b) The sum of the symmetric neighbors of this signal

Figure 3 (a) shows the vibration signal of a gear system with 71 pinion teeth and four cracked teeth presented by Wang and Wong. As can be seen from Figure 3 (a), the local changes occur in the region between the pinion rotation angles from 240 to 340 degrees. As observed, it is not possible to accurately identify faulty teeth. Figure 3 (b) shows the sum of symmetric neighbors multiplication with the neighborhood size of a mesh cycle. As observed, the four distinct areas have been clearly identified.

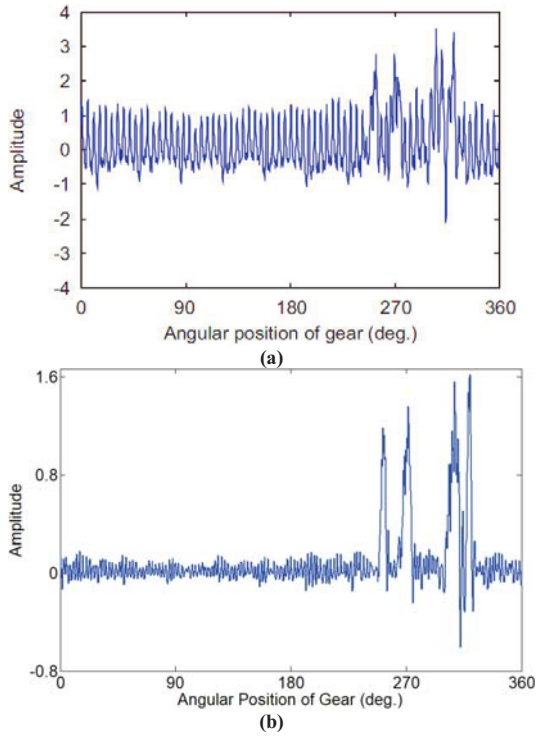


Figure 3. (a) Vibration signal of the gear system provided by Wang and Wong. (b) The sum of symmetric neighbors multiplication of this signal

6. Conclusion

In this study, the sum of symmetric neighbors multiplication method is introduced to highlight the effect of defects in a vibration signal. The results show, by applying the proposed method, small local changes on the vibration signal amplitude, caused by a small tooth root crack, increase approximately three times with respect to the original signal. The capability of the newly proposed method is also assessed in a multi-crack case. The results indicate that the proposed method can highlight the effect of each crack. That is, the proposed method not only can highlight the effect of defects but also can locate these defects with reasonable accuracy.

A Novel Method to Improve Crack Detection Ability in Helical Gear

Mohsen Rezaei[1], Shahram Hadian Jazi[2], Mehrdad Poursina[3], Farhad Haji Aboutalebi[4]

1. Introduction

Helical gear systems have some distinctions such as more precision, long life and more applications in the industry, and less vibration, noise and transmission error compared to spur gear systems. One of the damages that can affect the operation of these systems is the gear tooth root crack. So, crack detection in its early stages of growth and development is very important. The residual signal method is one of the most common methods to extract the effect of crack from the system vibration signal. Since the residual signal calculation requires the information of the vibration response of the healthy state or the system initial parameters, providing a method to extract the effect of crack from the vibrating response without any more information is very helpful. In this research, at first the calculation of the helical gear pair mesh stiffness is explained and also the effect of tooth root crack is also described. Then, a single-stage helical gear system, with the motor and the load, is modeled and solved numerically to achieve the system dynamic response. Then, the effect of the present method on the vibration signal obtained from the dynamic simulation of a system with a small crack is shown and discussed. Finally, the proposed method is applied to the dynamic response signal of a system presented in one of the previous researches, and its efficiency is illustrated.

2. Analytical Calculation of Mesh Stiffness

The first step in the process of evaluating a gear system is determining the mesh stiffness of the two involved gears. When two teeth of two involved gears come into contact, the gears become strained due to the force they bring to each other and their elastic behavior. The ratio of the force applied between the two teeth and the displacement that occurs due to this force is called the mesh stiffness. To calculate the mesh stiffness, the stiffness of a pair of teeth is first investigated and then assembled together using the contact ratio of the gears.

In this method, the helical tooth is divided into thin slices, which can be assumed to be a spur tooth approximately. As it is known, the stiffness of the original helical tooth can be obtained from the stiffness of the spur slices by considering their angular distance. In order to model the crack effect, its area is considered as a dead area and is not considered in calculating tooth stiffness. The only variables that change in this method are the tooth cross-section area and its second moment of area.

3. Helical Gear System Dynamic Model

The Lumped Mass Model is used to model the single-stage helical gear system. In this type of model, system is modeled as components with concentrated masses that are connected to each other by springs and dampers. The springs' stiffness is related to the stiffness of system components such as bearings, axles, and gear mesh stiffness. An 8 DOF model of the helical gear system is shown in Figure 1.

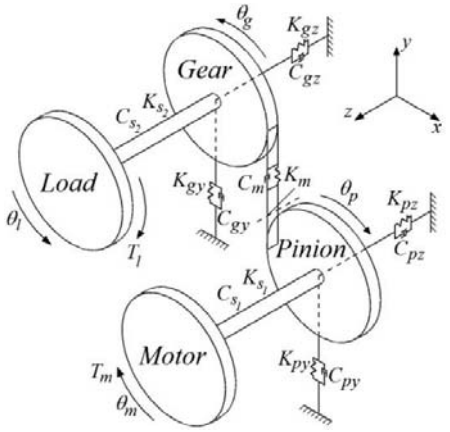


Figure 1. 8 DOF Dynamic Model of Helical Gear System

4. Sum of symmetric neighbors multiplication

In this article, the sum of symmetric neighbors multiplication method is proposed to highlight the local variations of a signal.

In this method, the amplitude of a certain number of neighboring points of each point of the original signal are symmetrically multiplied into each other and the sum of these multiplications is assigned to that point.

In fact, the difference between healthy and defective areas comes from multiplying neighboring values, which shows the large changes due to small changes in a region of the original signal. For a discrete signal $x[n]$, the sum of symmetric neighbors multiplication is defined as:

$$SSNM_x[n,d] = \sum_{k=1}^{d} x[n+k]x[n-k]$$

where d represents the size of the neighborhood.

5. Results and Discussion

The transmission error obtained by dynamic simulation of the system with a crack of 10% length and depth of tooth length and thickness in the pinion 14th tooth is shown in Figure 2 (a). The difference between the geometric location of a point on the base circle of the gear and its line of action, in the actual and theoretical cases is called the transmission error of a gear pair.

Due to the small size of the crack, its effect on the system transmission error is very small and not easily distinguishable in the figure. The amount of transmission error in the area where the cracked tooth (14th tooth) is

[1] *Ph. D. in Mechanical Engineering, University of Isfahan.*
[2] *Corresponding Author: Assistant Professor, University of Isfahan. s.hadian@eng.ui.ac.ir*
[3] *Associate Professor, University of Isfahan.*
[4] *Assistant Professor, University of Isfahan.*

CONTENTS

A Novel Method to Improve Crack Detection Ability in Helical Gear	M. Rezaei Sh. Hadian Jazi M. Poursina F. Haji Aboutalebi	1
Large-Eddy Simulation of Turbulent Square Duct Flow	A. Rasam Z. Pouransari M. R. Zangeneh	13
Comparison of Monolithic and Partitioned Approaches for the Solution of Fluid-Solid Thermal Interaction Problems	E. Tandis A. Ashrafizadeh	23
The Grafting of a Nylon Fiber Surface by a Mixture of Two Acrylic Monomers and the Evaluation of Optimum Values by using a Traditional Design of Experiment Software	M. Khosravi S. Ostad Movahed	39
The Effects of Revolute Joint Clearance on the Kinematic Behavior of the 3RPR Planar Parallel Manipulator	S.M. Varedi-Koulaei M. Bamdad B. Fathi	53
Nonlinear Vibration Analysis of Fluid Conveying Microtube under Parametric Magnetic Excitation	R. Jahangiri A. Allahverdizadeh B. Dadashzadeh H. Azimzadeh	69
A Phenomenological Study of Polygonal Hydraulic Jumps	A. Asadi M. Malek Jafarian A.R. Teymourtash	87
The Friction Factor of Turbulent Flow of the Base Fluid and Nanofluid in the Statistical Approach	F. Vahidinia G.A. Sheikhzadeh	105
An Improved Shooting Method for a Class of Switching Optimal Control Problems	F. Vahidifar M.A. Mehrpouya	123
Experimental Investigation of the Influence of Transverse Dual protuberances on the Thrust Vector of a Supersonic C-D nozzle	M.R. Babaeyan M. Hojaji	139
A New Mathematical Model Gas Flows in Pipeline with Leak	M. Aliyari F. Farhadi	155
Numerical Investigation of Drag Reduction Mechanism in Laminar Flow Regime using Rectangular Riblets (Short Paper)	A. Haji Khan Mirzaei A. Raoufpanah	165

Ferdowsi University of Mashhad

JOURNAL OF APPLIED AND COMPUTATIONAL SCIENCES IN MECHANICS

ISSN: 2008-918X **ISSN (Online): 2423-6519**

Editor- in-Chief: Dr. Mehran Kadkhodayan
General Director: Dr. Hamid Niazmand
Concessionaire: Ferdowsi University of Mashhad

Editorial Board:

Dr. Akbar Afaghi Khatibi	Associate Professor	RMIT University, Australia
Dr. Kazem Abhary	Associate Professor	University of South Australia, Australia
Dr. Aliakbar Akbarzadeh	Professor	RMIT University, Australia
Dr. Masoud Boroomand	Associate Professor	Amirkabir University of Technology
Dr. S.Mohammad Reza Khalili	Professor	K.N. Toosi University of Technology
Dr. Ehsan Roohi	Associate Professor	Ferdowsi University of Mashhad
Dr. Mahmoud Shariati	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
Dr. Ebrahim Shirani	Professor	Isfahan University of Technology
Dr. Masoud Tahani	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
Dr. Mehran Kadkhodayan	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
Dr. Hamid Moeenfard	Associate Professor	Ferdowsi University of Mashhad
Dr. Behdad Moghtaderi	Professor	University of Newcastle, Australia
Dr. Mohammad Reza Mahpeykar	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
Dr. Hamid Niazmand	Professor	Ferdowsi University of Mashhad

Administrative Director: T. Hooshmand
Text Editor: y. Bina
Typesetting: F. Aliakbari

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics
Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad
P. O. Box: 91775-1111, Mashhad, I.R. IRAN
Tel: +98 51 38806024 Fax: +98 51 38763301
Email: ejour@um.ac.ir Web site: http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir
Indexed in: ISC, SID, Magiran, EBSCO

ISSN 2008 - 918X

Ferdowsi University
of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

(Journal of Faculty of Engineering)

Serial No. 21

A Novel Method to Improve Crack Detection Ability in Helical Gear 1
M. Rezaei- Sh. Hadian Jazi- M. Poursina- F. Haji Aboutalebi

Large-Eddy Simulation of Turbulent Square Duct Flow 13
A. Rasam- Z. Pouransari- M. R. Zangeneh

Comparison of Monolithic and Partitioned Approaches for the Solution of Fluid-Solid Thermal Interaction Problems 23
E. Tandis- A. Ashrafizadeh

The Grafting of a Nylon Fiber Surface by a Mixture of Two Acrylic Monomers and the Evaluation of Optimum Values by using a Traditional Design of Experiment Software 39
M. Khosravi- S. Ostad Movahed

The Effects of Revolute Joint Clearance on the Kinematic Behavior of the 3RPR Planar Parallel Manipulator 53
S.M. Varedi-Koulaei- M. Bamdad- B. Fathi

Nonlinear Vibration Analysis of Fluid Conveying Microtube under Parametric Magnetic Excitation 69
R. Jahangiri- A. Allahverdizadeh- B. Dadashzadeh- H. Azimzadeh

A Phenomenological Study of Polygonal Hydraulic Jumps 87
A. Asadi- M. Malek Jafarian- A.R. Teymourtash

The Friction Factor of Turbulent Flow of the Base Fluid and Nanofluid in the Statistical Approach 105
F. Vahidinia- G.A. Sheikhzadeh

An Improved Shooting Method for a Class of Switching Optimal Control Problems 123
F. Vahidifar- M.A. Mehrpouya

Experimental Investigation of the Influence of Transverse Dual protuberances on the Thrust Vector of a Supersonic C-D nozzle 139
M.R. Babaeyan- M. Hojaji

A New Mathematical Model Gas Flows in Pipeline with Leak 155
M. Aliyari- F. Farhadi

Numerical Investigation of Drag Reduction Mechanism in Laminar Flow Regime using Rectangular Riblets (Short Paper) 165
A. Haji Khan Mirzaei- A. Raoufpanah

Vol. 31, No.1,
Autumn & Winter, 2020