ISSN 2008 - 918X

شبیه¬سازی کاربرد محفظهٔ احتراق ثانویهٔ موتور توربوفن در خارج از نقطهٔ طراحی ۱

سعید جعفری‌پناه – فتح‌اله امّی – سیدسعید خضرپور

بررسی عددی و تحلیلی اثرات تفرق حرارتی بر انتقال حرارت جریان نانوسیال درون یک کانال ۲۱

حبیب‌اله سایه‌وند – امیر بصیری‌پارسا

اثر شکل نانوذرات بر یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی نانوسیالی دارای متمرکزکنندهٔ سهموی خطی ۴۱

فریده یزدانی فرد – احسان ابراهیم‌نیا بجستان – مهران عامری

حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال برروی محور استوانه‌ای چرخان ۵۷

حمید محمدیون

تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی به‌وسیلهٔ حل معکوس ۷۱

مریم شمسا – محمدرضا گلبهار حقیقی – پرویز ملک زاده

پایداری دینامیکی حلقه‌های اخترفیزیکی ۸۹

محمدهادی خشن – محمود روشن

اثرهای معادلهٔ ایستایی و تابع ترفتز بر پاسخ¬های جزء صفحهٔ خمشی چهارپهلو ۹۹

محمد رضائی پژند – معصومه ملک‌زاده گنابادی – نیلوفر رجب‌زاده صفائی

ارائهٔ روش خمکاری لوله¬ها به‌کمک ماندرل سیمی به‌عنوان روشی جدید (یادداشت پژوهشی) ۱۱۹

محمدرضا رجبی – مسعود رضایی‌زاده – سید یوسف احمدی بروغنی

اصلاح پروفیل چرخ‌دندهٔ ساده به‌منظور کاهش خطای انتقال استاتیکی (یادداشت پژوهشی) ۱۲۹

شیدا محقق – مهرداد پورسینا

بالانس دینامیکی کامل نیرویی یک روبات موازی کروی جدید با ساختار... (یادداشت پژوهشی) ۱۴۵

مهدیه حیدری – جواد انفرادی

سال ۲۹، شماره ۲

بهار و تابستان، ۱۳۹۷

دانشگاه فردوسی مشهد

نشریه علوم کاربردی و محاسباتی

در مکانیک

(نشریه دانشکده مهندسی)

(علمی - پژوهشی)

شماره پیاپی ۱۸

نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

علمی ـ پژوهشی

ISSN: 2008-918X

سردبیر: دکتر محمدرضا مه‌پیکر

مدیر مسئول: دکتر حمید نیازمند

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

هیئت تحریریه:

دکتر محمدحسین ابوالبشری	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر حمید احمدیان	استاد، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مکانیک
دکتر اصغر برادران رحیمی	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر مسعود برومند	استاد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوا فضا
دکتر محمود پسندیده فرد	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر مهران تاج فر	دانشیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوا فضا
دکتر محمدرضا خلیلی	استاد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک
دکترمحمود سلیمی	استاد، دانشگاه اصفهان، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر ابراهیم شیرانی چهارسوقی	استاد، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی مکانیک
دکتر مسعود طهانی	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر علی عابدیان	دانشیار، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا
دکتر مهران کدخدایان	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر محمدرضا مه‌پیکر	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر حمید نیازمند	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

ویراستار علمی: دکتر محمدحسین ابوالبشری

مسئول دفتر نشریه: تکتم هوشمند

ویراستار ادبی: الهام دهقان

ویرایش و صفحه‌آرایی: فائزه علی‌اکبری

نشانی: مشهد- دانشگاه فردوسی مشهد- دانشکده مهندسی- دفتر نشریه - صندوق پستی: ۱۱۱۱-۹۱۷۷۵

تلفن: ۸۸۰۶۰۲۴-۰۵۱۱ دورنگار: ۸۷۶۳۳۰۱-۰۵۱۱

پست‌الکترونیکی: **ejour@um.ac.ir** وب سایت: **http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir**

شماره نامه مجوز وزارت علوم، تحقیقات و فناوری: ۱۳۳۳۷۵ مورخ ۱۳۹۰/۷/۱۹ چاپ: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

نمایه شده در پایگاه‌های معتبر: EBSCO, Magiran, SID, ISC

فهرست مطالب

شبیه‌سازی کاربرد محفظهٔ احتراق ثانویهٔ موتور توربوفن در خارج از نقطهٔ طراحی	سعید جعفری‌پناه فتح‌اله امّی سیدسعید خضرپور	**۱**
بررسی عددی و تحلیلی اثرات تفرق حرارتی بر انتقال حرارت جریان نانوسیال درون یک کانال	حبیب‌اله سایه‌وند امیر بصیری‌پارسا	**۲۱**
اثر شکل نانوذرات بر یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی نانوسیالی دارای متمرکزکنندهٔ سهموی خطی	فریده یزدانی فرد احسان ابراهیم‌نیا بجستان مهران عامری	**٤١**
حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال برروی محور استوانه‌ای چرخان	حمید محمدیون	**۵۷**
تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی به‌وسیلهٔ حل معکوس	مریم شمسا محمدرضا گلبهار حقیقی پرویز ملک‌زاده	**۷۱**
پایداری دینامیکی حلقه‌های اخترفیزیکی	محمدهادی خشن محمود روشن	**۸۹**
اثرهای معادلهٔ ایستایی و تابع ترفتز بر پاسخ‌های جزء صفحهٔ خمشی چهارپهلو	محمد رضائی پژند معصومه ملک‌زاده گنابادی نیلوفر رجب‌زاده صفائی	**۹۹**
ارائهٔ روش خمکاری لوله‌ها به‌کمک ماندرل سیمی به‌عنوان روشی جدید (یادداشت پژوهشی)	محمدرضا رجبی مسعود رضایی‌زاده سید یوسف احمدی بروغنی	**۱۱۹**
اصلاح پروفیل چرخ‌دندهٔ ساده به‌منظور کاهش خطای انتقال استاتیکی (یادداشت پژوهشی)	شیدا محقق مهرداد پورسینا	**۱۲۹**
بالانس دینامیکی کامل نیرویی یک روبات موازی کروی جدید با ساختار 3(RPSP)-S با افزودن یک مکانیزم چندمیله‌ای (یادداشت پژوهشی)	مهدیه حیدری جواد انفرادی	**۱٤۵**

شبیه‌سازی کاربرد محفظهٔ احتراق ثانویهٔ موتور توربوفن در خارج از نقطهٔ طراحی*

سعید جعفری‌پناه[۱] فتح‌اله امّی[۲] سیدسعید خضرپور[۳]

چکیده *هدف اصلی از انجام پژوهش حاضر تحلیل پارامترهای عملکردی و شبیه‌سازی موتور توربوفن پی دبلیو ۶۱۵ اف، در دو حالت با محفظهٔ احتراق ثانویه و بدون آن می‌باشد و برای اعتبارسنجی آن از نرم‌افزار تجاری گس‌ترب و جی‌اس‌پی استفاده شده است. درواقع سیستم پیش‌رانش در تعیین مأموریت و رژیم پروازی وسیلهٔ پرنده، اهمیت به‌سزایی دارد. این سیستم، تأمین‌کنندهٔ نیروی رانش یک هواپیما می‌باشد. درابتدا یک موتور توربینی انتخاب و سپس شبیه‌سازی می‌شود که بتواند تراستی معادل ۶/۳۵ کیلونیوتن تولید نماید. درادامه، روشی برای تحلیل عملکرد نقطهٔ طراحی و نقاط خارج از طرح موتورهای توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده ارائه شده است؛ همچنین ابزاری براساس روش مقیاس به‌منظور تولید منحنی مشخصهٔ کمپرسور و فن ارائه شده است. به‌منظور مدل‌سازی عملکرد موتور از روش حلقه‌های تودرتو استفاده شده است. عملکرد اجزای موتور با بهره‌گیری از نمودارهای عملکرد، معادلات ترمودینامیکی و دینامیک گازی مدل شده است. باتوجه به این‌که روند مدل‌سازی ریاضی موتورهای دومحوره تاحدودی پیچیده است، در ابتدا روند شبیه‌سازی موتورهای دومحوره ارائه شده است و درادامه عملکرد یک موتور توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده در نقطهٔ طراحی و نقاط خارج از طراحی ارائه شده است و نمودارهای حاصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهد، سیکل‌هایی که از وجود محفظهٔ احتراق ثانویه سود می‌برند به‌طور چشم‌گیری موجب افزایش تراست ویژه، کاهش آلاینده‌های خروجی از محفظهٔ احتراق اصلی و افزایش کار خروجی مخصوص از توربین کم‌فشار می‌شوند.*

واژه‌های کلیدی موتور توربوفن؛ عملکرد نقطهٔ طراحی؛ روش مقیاس؛ عملکرد خارج از نقطهٔ طراحی.

Simulation of the Secondary Combustion Chamber Application of Turbofan Engine in Off-design Point

S. Jafaripanah F. Ommi S.S. Khezrpour

Abstract *The main objective of this study is to analyze the performance parameters and simulation of PW615F turbofan engines both with and without secondary combustion chamber. For validation a commercial software called GasTurb & GSP is used. The purpose of the the propulsion system plays an important role in determining of mission and flight regime of an aircraft In this study, the first choice and then simulate a turbine engine thrust which is equivalent to 6.35 KN produce. And more the method for analyzing on-design and off-design analysis of twin-spool unmixed flow turbofan engines and also we present scaling method to produce the characteristics performance maps of compressor and fans. Mathematical modeling of engine performance has been conducted by serial nested loops algorithm. Performance of components have been modeled by performance diagrams, thermodynamics and gas dynamic equations. Mathematical modeling of a turbofan engine is somewhat complex. Therefore, initially, the off-design performance of a twin spool power generating gas generator and twin spool turbofan are analyzed. Finally, the off-design performance of a twin spool unmixed flow turbofan engine is simulated and the generated performance diagrams have been analyzed. The results show that the cycles that Advantage the secondary combustion chamber dramatically increase the specific thrust, reduce the main secondary combustion chamber outlet emissions and increase the output power of the low pressure turbine.*

Key Words Turbofan Engines; on-design performance; scaling method; off-design performance

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۷/۱۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62023

(۱) دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران. fommi@modares.ac.ir

(۳) کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

مقدمه

درطی سال‌های اخیر دانشمندان و مهندسان در تلاش بوده‌اند تا موتورهایی با راندمان بالا، مصرف سوخت پایین و درعین‌حال با وزن کمتر طراحی و تولید نمایند. وانگ یانگ هونگ برای مدل‌سازی ریاضی عملکرد توربین‌های گاز شیوه‌ای را تحت عنوان الگوریتم معکوس ابداع نموده است [1]. در سال ۲۰۱۵، توکل‌پور و همکارانش [2] با به‌کارگیری معادلات پایه در نقطهٔ طرح و حالت پایدار، عملکرد یک موتور توربوجت ویژه را شبیه‌سازی نمودند، که با بهره‌گیری از روش مقیاس پایه و به‌کارگیری روابط راندمان اجزا و با اعمال محدودیت حداقل خطا در شرایط تعادل، به مقایسهٔ تحلیل پارامتریک و غیرپارامتریک می‌پرداخت. کوراکیانیتیس و ویلسن [3] عملکرد انواع موتورهایی را که براساس سیکل برایتون عمل می‌نمایند، مورد بررسی قرار دادند و عملکرد خارج از طرح چند نوع توربین گازی و صنعتی را مدل‌سازی ریاضی نمودند. در این تحقیق راندمان اجزای موتور و دبی جرمی هوای خنک‌کنندهٔ پره‌های توربین، به‌ترتیب به‌صورت تابعی از نسبت فشار و سطح تکنولوژی خنک‌کاری درنظر گرفته شده‌اند. برای محاسبهٔ افت‌های فشار از روابط تجربی بهره گرفته شده است و جریان‌های نشتی با مقدارهای ثابت تخمین زده شده است. راندمان کمپرسور و توربین توابعی از نسبت فشار درنظر گرفته شده‌اند و از روابط تجربی به‌منظور مدل نمودن آنها استفاده شده است.کورزک و ریگلر [4] با انجام تحلیل‌های آماری برروی تعداد زیادی از منحنی‌های عملکرد کمپرسور، روشی نوین برای تغییر مقیاس نمودار عملکرد کمپرسور ابداع نمودند که درمقایسه با روش تغییر مقیاس خطی که از اعمال نمودن ضرایب ثابت به نسبت فشار بهره می‌گیرد، کارایی بسیار بهتری از خود نشان می‌دهد.

دومیتروویچ و همکاران [5] یک مدل ریاضی برای محاسبهٔ عملکرد خارج از طرح یک موتور توربوجت تک‌محور ارائه نمودند. اساس این مدل بر مشخصه‌های معلوم طراحی پایه‌گذاری شده است. آنها از این مدل، برای ارزیابی پارامترهای موتور در پرواز و همچنین پیش‌بینی رفتار موتور و کنترل آن استفاده نمودند. کیم و همکاران [6] مشخصه‌های عملکردی توربین‌های گازی تک‌محور و دومحور را به‌طور مقایسه‌ای بررسی نمودند که در آنها از پره‌های راهنمای ورودی متغیر، استفاده شده است. آنها عملکرد این توربین‌ها را در سرعت‌های دورانی پایین بررسی کردند و با یکدیگر مقایسه نمودند. آنها همچنین نشان دادند که دمای خروجی موتور که یک پارامتر بحرانی در موتور می‌باشد، بااستفاده از پرهٔ راهنمای متغیر، قابل کنترل می‌باشد. لی و همکاران [7, 8] بااستفاده از روش متینگلی به بررسی مطالعات پارامتریک و عملکرد سیکل موتور توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده با محفظهٔ احتراق ثانویه پرداختند. سپس دو حالت را با یکدیگر مقایسه کردند و نتایج را طی مقالاتی ارائه نمودند.

در این قسمت به فعالیت‌هایی پرداخته می‌شود که درزمینهٔ مقیاس نمودن منحنی‌های مشخصه است که در سال‌های اخیر صورت گرفته است.

بسیاری از روش‌هایی که اخیراً به‌کار گرفته می‌شود؛ مانند: الگوریتم ژنتیک، منطق فازی و... مستلزم آزمون اجزای موتور می‌باشند که به‌همراه به‌کارگیری روش‌های درون‌یابی و برون‌یابی می‌توان بقیهٔ عملکرد موتور را پیش‌بینی نمود. در پژوهش حاضر به‌دنبال این روش‌ها نبوده‌ایم، بلکه روش‌های بدون نیاز به هرگونه آزمون عملکردی موردنظر می‌باشند. روش رایج در مدل‌سازی صفر بعدی روش مقیاس با ضرایب ثابت می‌باشد. در این روش با داشتن پارامترهای اجزای موتور موردنظر در نقطهٔ طرح، تنها با مقیاس نمودن منحنی‌های عملکردی استاندارد، منحنی عملکردی اجزای موتور موردنظر حاصل می‌شود.

سانگهی و همکاران [9] با به‌کارگیری معالات پایه در نقطهٔ طرح و حالت پایدار، عملکرد موتور توربوفن خاصی را شبیه‌سازی نمودند که با بهره‌گیری از روش مقیاس پایه و به‌کارگیری روابط راندمان اجزا و با اعمال محدودیت حداقل خطا در شرایط تعادل، در نقطهٔ خارج از طرح مدل‌سازی شد.در سال ۲۰۱۳، گبران [10] یک مدل موتور توربین گاز خورشیدی را ارائه نمود که در آن عملکرد موتور برای شرایط خارج از طرح بررسی می‌شد. مدل مذکور قابلیت بررسی محدودهٔ وسیعی از سیکل‌های مختلف موتور توربینی را دارا می‌باشد. او درادامه یک روش مقیاس را برای تولید منحنی‌های مشخصهٔ کمپرسور و توربین ارائه نمود و خط عملکرد مربوط به کمپرسور و توربین را ترسیم نمود. در سال ۲۰۱۵، یانگ و همکارانش [11] یک مدل توربین گاز را برای شرایط خارج از طرح مورد بررسی قرار دادند که قابلیت بررسی محدودهٔ وسیعی از سیکل‌های مختلف موتور توربینی را دارا است و یک روش مقیاس، برای تولید منحنی‌های مشخصهٔ کمپرسور و توربین را ارائه نمودند و خط عملکرد مربوط به کمپرسور و توربین را ترسیم کردند و با انجام تحلیل‌های آماری برروی تعداد زیادی از منحنی‌های عملکرد کمپرسور، روشی نوین برای تغییر مقیاس نمودار عملکرد کمپرسور ابداع نمودند که درمقایسه با روش تغییر مقیاس خطی که از اعمال نمودن ضرایب ثابت به نسبت فشار بهره می‌گیرد، کارایی بسیار بهتری از خود نشان می‌دهد.

درادامه یکی از جدی‌ترین پیشنهادهایی که در این راستا ارائه شد و مورد قبول بیشتر طراحان قرار گرفت، استفاده از یک محفظهٔ احتراق دیگر تحت عنوان محفظهٔ میان‌مرحله‌ای میان توربین‌های پرفشار و کم‌فشار است که اولین‌بار در سال ۲۰۰۵ توسط کا هنگ لیو و همکاران در دانشگاه میشیگان مطرح شد [7]. مزیت عمدهٔ استفاده از این روش، افزایش تراست ویژه و کاهش مصرف سوخت ویژه می‌باشد که البته کاهش آلودگی را نیز به‌همراه دارد. از دیگر مزایای این روش اطمینان بیشتر به خاموش نشدن شعله در محفظهٔ احتراق اصلی می‌باشد به این‌صورت که طبقهٔ اضافه‌شده به توربین (محفظهٔ احتراق میان‌مرحله‌ای) مانع از پراکندگی شعله می‌شود و همچنین باعث می‌شود که سوخت در یک محیط با فشار بالاتر بسوزد. در یک راندمان حرارتی ثابت، تراست ویژه با مصرف سوخت ویژه با یکدیگر مرتبط هستند به‌طوری‌که افزایش تراست ویژه منجر به افزایش مصرف سوخت ویژه می‌شود. بااین‌وجود موتور توربوفن مجهز به محفظهٔ احتراق میان‌مرحله‌ای عملکرد بهتری در انتخاب‌های طراحی مختلف مانند نسبت فشار کمپرسور، نسبت فشار فن و نسبت جت کنارگذر دارد.

علاوه‌براین با اضافه نمودن اجزای جدید می‌توان دما و فشار بالاتری را در سیکل موتور توربوفن به‌وجود آورد [12]. در این مقاله به معرفی سیکل موتور توربوفن با محفظهٔ احتراق میان‌مرحله‌ای پرداخته می‌شود.

هدف از پژوهش حاضر، انجام مطالعات پارامتریک موتور توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده برای هواپیمای سبک ٦ نفره و به‌دست آوردن منحنی‌های عملکرد موتور و درنهایت مدل‌سازی ریاضی عملکرد خارج از طرح موتور مذکور با استفاده از روش حلقه‌های متوالی تودرتو می‌باشد. ازآنجاکه مدل‌سازی ریاضی عملکرد خارج از طرح موتور توربوفن پیچیده می‌باشد، لذا ابتدا به بررسی عملکرد توربین گاز تک‌محور برای تولید قدرت محوری و سپس موتور توربوجت تک‌محور و دومحور پرداخته می‌شود و در پایان مدل‌سازی موتور توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده ارائه می‌گردد. این پژوهش در ادامهٔ مطالعات گذشته می‌باشد که نتایج انتخاب‌های طراحی را نسبت به مصرف سوخت ویژه و تراست ویژه تحت بررسی قرار داده‌اند.

تعریف مسئله و انتخاب نوع موتور. در طراحی هواپیما انتخاب نوع موتور و سپس طراحی آن از اهمیت زیادی برخوردار است. انواع موتورهای مختلف در حوزه‌ای از ماموریت‌ها می‌توانند مفید و اقتصادی باشند؛ لذا براساس مأموریت اصلی هواپیما بایستی اقدام به انتخاب یک نوع موتور نمود، سپس درزمینهٔ طراحی و استخراج پارامترهای عملکردی آن اقدام کرد.

مدل‌سازی ریاضی موتور. این روش، روشی مطمئن، کم‌هزینه و سریع برای پیش‌بینی عملکرد خارج از طرح موتور می‌باشد. روش مدل‌سازی ریاضی، عملکرد خارج از طرح موتور را براساس عملکرد مستقل اجزای تشکیل‌دهندهٔ آن و با درنظر گرفتن تأثیر متقابل اجزا بر عملکرد یکدیگر، پیش‌بینی می‌کند. باتوجه به فقدان اطلاعات کافی درمورد عملکرد اجزای موتور در مرحلهٔ مقدماتی، عملکرد اجزا را می‌بایست با تکیه بر تجربیات قبلی و در صورت لزوم توسط آزمایش‌های عملی تخمین زد. درحقیقت تعداد زیاد پارامترهای ترمودینامیکی اجزا و وابستگی عملکردی آنها با یکدیگر سبب می‌شود که مدل‌سازی ریاضی موتور منجر به یک دستگاه معادلات غیرخطی شود، لذا دو روش کلی زیر برای حل دستگاه معادلات موجود می‌باشد:

۱- روش حلقه‌های متوالی تودرتو.

۲- روش آزمون و خطای ماتریسی.

در روش اول معادلات عملکرد اجزای موتور بااستفاده از حلقه‌های محاسباتی تودرتو حل می‌شود. درحالی‌که در روش دوم دستگاه معادلات غیرخطی به‌طور هم‌زمان حل می‌گردد؛ اما در هر دو روش از آزمون و خطا استفاده می‌شود.

در شبیه‌سازی پژوهش حاضر، موتور در دورهای مختلف بررسی می‌شود و میزان تغییرات تراست و مصرف سوخت ویژه را در دورهای مختلف با کمترین خطا نشان می‌دهد و همین امر منجر به متمایز شدن آن می‌شود [13].

فرضیات

- در تجزیه و تحلیل پارامتریک، سیکل ایده‌آل فرض می‌شود.
- سیال عامل داخل موتور گاز کامل کالریک فرض می‌شود و از رطوبت موجود در هوا صرف‌نظر می‌شود.
- جریان در طول کمپرسور، توربین و نازل دائمی فرض می‌شود.
- نسبت گرمای ویژه، در قسمت‌های سرد (ورودی هوا، داکت کنارگذر و کمپرسور) و گرم (محفظهٔ احتراق، توربین و نازل) موتور به‌ترتیب برابر با ۱/٤ و ۱/۳۳ درنظر گرفته می‌شوند.
- راندمان پلی‌تروپیک در کمپرسور، توربین و نازل ثابت می‌باشد.
- جریان سیال داخل ورودی هوا و نازل موتور به‌صورت آدیاباتیک درنظر گرفته می‌شود.

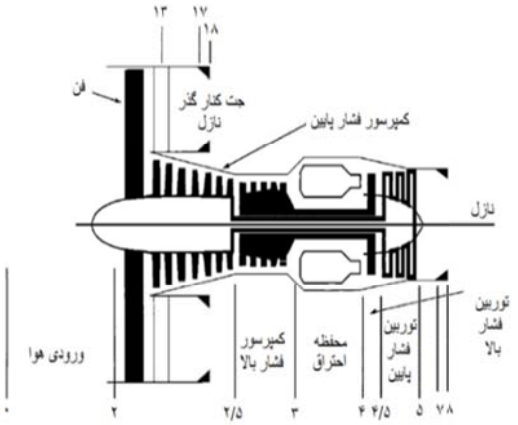
شبیه‌سازی موتور در نقطهٔ طراحی

به‌منظور شبیه‌سازی عملکرد موتور توربوفن در نقطهٔ طراحی در مرحلهٔ نخست باید روابط ترمودینامیکی مورد نیاز از قبیل جریان آزاد، ورودی هوا، کمپرسور، محفظهٔ احتراق اصلی، توربین، محفظهٔ احتراق ثانویه، نازل و پارامترهای عملکردی موتور استخراج شود تا مدل ریاضی موتور کامل گردد [7]. در این مقاله به‌منظور سهولت در انجام شبیه‌سازی عملکرد موتور توربوفن، موتور براساس محل قرارگیری اجزای اصلی‌اش شماره‌گذاری می‌شود (جدول ۱). در مراجع مختلف از شماره‌گذاری‌های دلخواه در این امر استفاده می‌شود. در این پژوهش سعی شده است که از استاندارد آ آر پی ۷۵۵ آ (ARP 755A) استفاده گردد که استاندارد جهانی شماره‌گذاری موتورهای توربینی است [8].

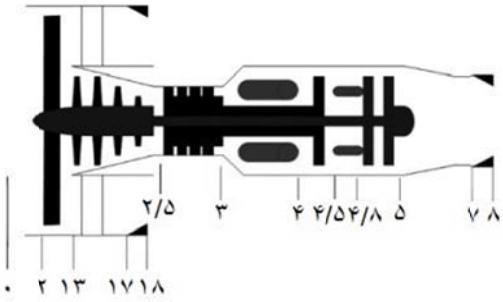
در شکل (۱) شماره‌گذاری مربوط به حالتی است که موتور بدون محفظهٔ احتراق ثانویه لحاظ شده است و همان‌طوری‌که در شکل (۲) مشاهده می‌شود محفظهٔ احتراق ثانویه در بین توربین‌های کم‌فشار و پرفشار قرار دارد و هوای خروجی از توربین پرفشار به‌طور مجدد در آن داغ می‌شود و سپس وارد توربین کم‌فشار می‌شود که این امر منجر به افزایش کار خروجی مخصوص توربین کم‌فشار می‌گردد و به این ترتیب تراست ویژه افزایش می‌یابد.

جدول ۱ شماره‌گذاری موتور توربوفن با محفظهٔ احتراق ثانویه

ردیف	شماره	مفهوم
۱	۰	شرایط جریان آزاد
۲	۲	ابتدای ورودی هوا
۳	۱۳	ورودی کمپرسور کم فشار
٤	۱۷	ورودی فن نازل
٥	۱۸	خروجی فن نازل
٦	۲/٥	ورودی کمپرسور پرفشار
۷	۳	ورودی محفظهٔ احتراق اصلی
۸	٤	ورودی توربین پرفشار
۹	٤/٥	ورودی محفظهٔ احتراق ثانویه
۱۰	٤/۸	ورودی توربین کم‌فشار
۱۱	٥	خروجی توربین کم‌فشار
۱۲	۷	ورودی نازل هسته موتور
۱۳	۸	خروجی نازل هسته موتور



شکل ۱ ایستگاه‌های مختلف موتور توربوفن بدون محفظه احتراق ثانویه [14]



شکل ۲ ایستگاه‌های مختلف موتور توربوفن با محفظه احتراق ثانویه [15]

معادلات حاکم بر فن و کمپرسور

سیال با دمای سکون و فشار سکون وارد فن می‌شود. با بهره‌گیری از رابطه‌های (۱ و ۲)، متغیرهای ورودی و خروجی محاسبه می‌شود. با دانستن نسبت فشار فن، فشار سکون خروجی فن به‌دست می‌آید [16].

$$\pi_f = \frac{P_{02}}{P_{01}} \qquad (۱)$$

$$P_{02} = \pi_f P_{01} \qquad (۲)$$

بااستفاده از روابط آیزونتروپیک و مشخص بودن نسبت فشار فن، اختلاف دمای دو طرف فن از طریق رابطهٔ (۳) محاسبه می‌شود:

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \qquad (۳)$$

با دانستن نسبت فشار کمپرسور و روابط آیزونتروپیک می‌توان فشار سکون و دمای سکون خروجی از کمپرسور را باتوجه به رابطهٔ (٤) محاسبه نمود:

$$T_{03} = T_{02}\left(\frac{P_{03}}{P_{02}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \qquad (٤)$$

درصورتی‌که فرض $\left({}^{P_{02}}/_{P_c}\right) > \left({}^{P_{02}}/_{P_a}\right)$ برقرار باشد، درنتیجه این شرایط سیال از کانال عبور می‌کند و

انبساط جریان درون نازل تا فشار اتمسفر، رخ می‌دهد. بااستفاده از روابط آیزونتروپیک می‌توان افت درجه‌حرارت نازل داکت کنارگذر را طبق رابطهٔ (۵) محاسبه نمود:

$$P_{18} = P_a \rightarrow T_{02} - T_{018} = \eta_j T_{02}\left[1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{P_{02}}{P_a}\right)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \qquad (۵)$$

پس از محاسبهٔ افت درجه‌حرارت نازل داکت کنارگذر می‌توان سرعت خروجی هوا از داکت کنارگذر را به‌دست آورد (رابطهٔ ٦).

$$C_8 = (2C_P(T_{02} - T_{08}))^{0.5} \qquad (٦)$$

$$\dot{m}_c = \frac{\dot{m}_\beta}{\beta + 1} \qquad (۷)$$

رابطهٔ (۷) بیان می‌کند که با مشخص شدن سرعت خروجی داکت کنارگذر و معلوم بودن دبی جرمی هوای ورودی به موتور و نسبت جت کنارگذر می‌توان دبی جرمی هوای ورودی به داکت کنارگذر را محاسبه نمود:

پس از تعیین دبی ورودی به داکت کنارگذر و سرعت خروجی هوا از داکت کنارگذر باتوجه به رابطهٔ (۸) می‌توان تراست ناشی از فن را محاسبه نمود که دراصطلاح به تراست سرد معروف است:

$$F_c = \dot{m}_c C_{18} \qquad (۸)$$

پس از مشخص شدن تراست ناشی از فن، تراست ناشی از موتور محاسبه می‌شود.

محفظهٔ احتراق. با مشخص بودن افت فشار کل محفظه، راندمان حرارتی محفظه و دمای ورودی به توربین می‌توان فشار کل خروجی و نسبت سوخت به هوای محفظهٔ احتراق را محاسبه نمود. سیال با دمای سکون و فشار سکون وارد محفظهٔ احتراق می‌شود و با بهره‌گیری از رابطهٔ (۹) و برمبنای متغیرهای ورودی و متغیرهای خروجی محاسبه می‌شود. با لحاظ نمودن افت فشار نسبی فشار سکون در محفظهٔ احتراق که ناشی از مسائلی چون اختلاط و نیروی پسای مسیر سیال می‌باشد، داریم:

$$P_{04} = P_{03}(1 - \Delta_{Pb}) \qquad (۹)$$

از طرفی با لحاظ نمودن میزان افزایش دمای سکون در محفظهٔ احتراق، باتوجه به رابطهٔ (۱۰) دمای سکون خروجی از محفظه به‌دست می‌آید:

$$T_{04} = T_{03} + \Delta T_{0b} \qquad (۱۰)$$

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} = \frac{(C_{Pg}T_{04} - C_{Pa}T_{03})}{(h_{PR}\eta_b - C_{Pg}T_{04})} \qquad (۱۱)$$

با محاسبهٔ اختلاف درجه‌حرارت محفظهٔ احتراق و همچنین درجه‌حرارت ورودی به محفظهٔ احتراق و با مشخص بودن ارزش حرارتی سوخت مورد استفاده می‌توان نسبت جرم سوخت به هوا را به‌دست آورد (رابطهٔ ۱۱).

توربین. رابطه‌های (۱۲ و ۱۳) بیان می‌دارد که باتوجه به مقادیر محاسبه‌شده، درجه‌حرارت در ورودی و خروجی از هر یک از کمپرسورها می‌توان کار مورد نیاز برای هر یک از توربین‌های کم‌فشار و پرفشار را محاسبه نمود:

$$T_{04} - T_{04.5} = \frac{C_{Pa}}{(\eta_m C_{Pg})(T_{03} - T_{02})} \qquad (۱۲)$$

$$T_{05} - T_{04.5} = \frac{(\beta + 1)C_{Pa}}{(\eta_m C_{Pg})(T_{02} - T_0)} \qquad (۱۳)$$

درادامه فشارهای خروجی از هر یک از توربین‌ها براساس روابط آیزونتروپیک (١٤ و ١٥) محاسبه می‌شوند:

$$(\frac{P_{04}}{P_{4.5}}) = (\frac{T_{04}}{T_{4.5}})^{\frac{n}{n-1}} \quad (١٤)$$

$$(\frac{P_{04.5}}{P_{05}}) = (\frac{T_{04.5}}{T_{05}})^{\frac{n}{n-1}} \quad (١٥)$$

گام بعدی محاسبهٔ فشار خروجی از توربین کم‌فشار می‌باشد (رابطهٔ ١٦).

$$P_{04.5} = \frac{P_{04}}{(\frac{P_{04}}{P_{4.5}})(\frac{P_{05}}{P_{05}})} \quad (١٦)$$

فرض می‌شود: $(P_{06}/P_c) > (P_{06}/P_a)$، بنابراین در این شرایط سیال از کانال عبور می‌کند و انبساط جریان درون نازل تا فشار اتمسفر، رخ می‌دهد. رابطهٔ (١٧) نشان می‌دهد بااستفاده از روابط آیزونتروپیک می‌توان افت درجه‌حرارت نازل داکت کنارگذر را محاسبه نمود:

$$P_7 = P_a \rightarrow T_{05} - T_{07} = \eta_j T_{05}[1 - (\frac{1}{(\frac{P_{05}}{P_a})})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}] \quad (١٧)$$

پس از محاسبهٔ افت درجه‌حرارت نازل خروجی باتوجه به رابطهٔ (١٨) می‌توان سرعت هوای خروجی از نازل را محاسبه نمود:

$$C_7 = (2C_P(T_{06} - T_{07}))^{0.5} \rightarrow \quad (١٨)$$

با مشخص شدن سرعت هوای خروجی از نازل و معلوم بودن دبی جرمی هوای ورودی به موتور و نسبت جت کنارگذر می‌توان دبی جرمی هوای ورودی به هسته موتور را بااستفاده از رابطهٔ (١٩) محاسبه نمود:

$$\dot{m}_h = \frac{\dot{m}}{(\beta + 1)} \quad (١٩)$$

رابطهٔ (٢٠) بیان می‌کند که با به‌دست آمدن دبی ورودی به هستهٔ موتور و سرعت هوای خروجی از نازل می‌توان تراست ناشی از هستهٔ موتور را محاسبه نمود که دراصطلاح به تراست گرم معروف است:

$$F_h = \dot{m}_h C_7 \quad (٢٠)$$

بعد از محاسبهٔ متغیرهای ورودی و خروجی جریان در نازل، نیروی پیشران و مصرف سوخت ویژه محاسبه می‌شود. نیروی پیشران کلی در موتور توربوفن از مجموع تراست سرد و گرم به‌دست می‌آید. همچنین نیروی پیشران با اعمال قانون بقای اندازهٔ حرکت بر حجم معیار پیرامون موتور به شکل رابطهٔ (٢١) به‌دست می‌آید:

$$F_t = (\dot{m}_c C_{jc} + \dot{m}_h C_{jh}) - \dot{m}C_a + A_8(P_8 - P_A) + A_7(P_7 - P_A) \quad (٢١)$$

$$S.F.C = \frac{(\dot{m}_h f)}{F_t} \quad (٢٢)$$

با تقسیم دبی جرمی سوخت بر نیروی پیشران، مصرف سوخت ویژه باتوجه به رابطهٔ (٢٢) به‌دست می‌آید.

مدل‌سازی

در یک آزمایشگاه استاندارد کمپرسور، به‌دست آوردن منحنی‌های عملکرد مربوط به یک کمپرسور عملیاتی پرهزینه است. به‌منظور به‌دست آوردن این منحنی‌های مدل‌سازی، باید عملکرد نقطهٔ طراحی یک کمپرسور واقعی و نیز منحنی‌های استاندارد در دسترس باشند. سپس می‌توان ضرایب مقیاس را از روش پیش‌گفته، به‌دست آورد. درنهایت مشخصهٔ عملکردی کمپرسور

به‌دست می‌آید. مشخصه‌ها در نقطهٔ طراحی به‌صورت mp_d، pr_d و $etha_d$ درنظر گرفته می‌شوند. سپس بااستفاده از منحنی‌هایی که پارامترهای بهینه را در دورهای بدون بعد نمایش می‌دهند و نیز معادله‌های (۲۵-۲۳)، مقادیر mp_d، pr_d و $etha_d$ تخمین زده می‌شوند:

$$\frac{mp_{dn}}{mp_d} = f(n) \Rightarrow mp_{dn} = f(n)\, mp_d \qquad (۲۳)$$

$$\frac{Pr_{dn}-1}{Pr_d-1} = g(n) \Rightarrow pr_{dn} = g(n)\,(pr_d-1)+1 \qquad (۲۴)$$

$$\frac{etha_{dn}}{etha_d} = h(n) \Rightarrow etha_{dn} = h(n)\, etha_d \qquad (۲۵)$$

در نهایت با به‌کاربردن معادله‌های (۲۸-۲۶)، مقادیر mp، pr و $etha$ محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} mp &= \left(\frac{mp}{mp_{dn}}\right)_b \cdot mp_{dn} \\ mp &= \left(\frac{mp}{f(n)mp_d}\right)_b \cdot f(n)\, mp_d = \\ &(mp)_b\ \frac{mp_d}{(mp_d)_b} \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} pr &= \left(\frac{pr}{pr_{dn}}\right)_b \cdot pr_{dn} \\ pr &= \left(\frac{pr}{g(n)(pr_d-1)+1}\right)_b \cdot g(n)(pr_d-1)+1 \\ pr &= (pr)_b \cdot \frac{g(n)(pr_d-1)+1}{g(n)((pr_d)_b-1)+1} \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

$$\begin{aligned} etha &= \left(\frac{etha}{etha_{dn}}\right)_b \cdot etha_{dn} \\ etha &= \\ &\left(\frac{etha}{h(n)etha_d}\right)_b \cdot h(n)\, etha_d = \\ &(etha)_b \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

شبیه‌سازی عملکرد خارج از طرح موتور توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده

در این بخش روابط مورد نیاز به‌منظور شبیه‌سازی موتور مذکور ارائه می‌شود. نکتهٔ موردتوجه این است که هر جزء با جزء بعدی خود دارای رابطهٔ سازگاری جرم می‌باشد. هر دو جزء متصل‌شده به یکدیگر بااستفاده از یک شفت دارای رابطهٔ سازگاری دور دورانی و سازگاری کار می‌باشند. شماره‌گذاری این موتور مطابق با شکل‌های (۱ و ۲) می‌باشد. رابطهٔ سازگاری جرم بین کمپرسور و فن مطابق با رابطهٔ (۲۹) می‌باشد.

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{02}}}{P_{02}} = \frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{013}}}{P_{013}} \times \frac{P_{013}}{P_{02}} \times \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{013}}} \times \frac{\dot{m}}{\dot{m}_h} \qquad (۲۹)$$

به‌دلیل ارتباط فن با توربین کم‌فشار از طریق شفت رابطهٔ سازگاری دور دورانی و همچنین سازگاری کار میان آنها به‌ترتیب به‌صورت رابطه‌های (۳۰ و ۳۱) بیان می‌شود.

$$\frac{N_L}{\sqrt{T_{02}}} = \frac{N_L}{\sqrt{T_{045}}}\sqrt{\frac{T_{045}}{T_{02}}} \qquad (۳۰)$$

$$\begin{aligned} &(\dot{m}_c + \dot{m}_h)c_{pa}\left(T_{013} - T_{02}\right) = \\ &\eta_{mL}\left(\dot{m}_h + \quad \dot{m}_f\right)c_{pg}\left(T_{04.5} - T_{05}\right) \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

از طرف دیگر، کمپرسور نیز با توربین پرفشار از طریق شفت پرفشار ارتباط دارد و بنابراین روابط سازگاری دور دورانی و کار میان آنها به‌صورت رابطه‌های (۳۲ و ۳۳) ارائه می‌شود.

$$\frac{N_H}{\sqrt{T_{013}}} = \frac{N_H}{\sqrt{T_{04}}}\sqrt{\frac{T_{04}}{T_{013}}} \qquad (۳۲)$$

$$\begin{aligned} &\dot{m}_h c_{pa}\left(T_{03} - T_{013}\right) \\ &= \eta_{mH}\left(\dot{m}_h + \dot{m}_f\right)c_{pg}\left(T_{04} - T_{045}\right) \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

سازگاری جرم بین کمپرسور و توربین پرفشار به‌صورت رابطهٔ (۳۴) می‌باشد.

$$\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{013}}}{P_{013}} = \frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04}}}{P_{04}} \times \frac{P_{04}}{P_{013}} \times \sqrt{\frac{T_{013}}{T_{04}}} \qquad (۳۴)$$

سازگاری جرم بین توربین کم‌فشار و پرفشار به‌صورت رابطهٔ (۳۵) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04.5}}}{P_{045}} = \frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04}}}{P_{04}} \times \frac{P_{04}}{P_{04.5}} \times \sqrt{\frac{T_{04.5}}{T_{04}}} \qquad (۳۵)$$

همچنین رابطهٔ سازگاری جرم را می‌توان بین توربین کم‌فشار و نازل هستهٔ موتور بیان نمود که به‌صورت رابطهٔ (۳۶) می‌باشد.

$$\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{05}}}{P_{05}} = \frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04.5}}}{P_{045}} \times \frac{P_{04.5}}{P_{05}} \times \sqrt{\frac{T_{05}}{T_{04.5}}} \qquad (۳۶)$$

و درانتها می‌توان سازگاری جرم را بین فن و نازل فن به‌صورت رابطهٔ (۳۷) محاسبه نمود:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{02}}}{P_{02}} = \frac{\dot{m}_c\sqrt{T_{017}}}{P_{017}} \times \frac{P_{017}}{P_{02}} \times \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{017}}} \times \frac{\dot{m}}{\dot{m}_c} \qquad (۳۷)$$

روند محاسباتی شبیه‌سازی عملکرد موتور توربوفن جریان مخلوط‌نشدهٔ دومحوره به‌صورت زیر می‌باشد:

۱- ابتدا یک دور مشخص برای فن و بااستفاده از منحنی عملکرد مربوط به آن انتخاب می‌شود.

۲- برروی دور انتخاب‌شده و بااستفاده از منحنی‌های عملکرد فن برای یک نقطهٔ مشخص مقدارهای $\dot{m}\sqrt{T_{02}}/P_{02}$، η_f و P_{013}/P_{02} استخراج می‌شود. اکنون بااستفاده از راندمان فن به‌دست‌آمده از این مرحله، می‌توان نسبت اختلاف دمای ورودی و خروجی به دمای ورودی فن را از رابطهٔ (۳۸) محاسبه نمود.

$$\frac{T_{013} - T_{02}}{T_{02}} = \frac{1}{\eta_f}\left[\left(\frac{P_{013}}{P_{02}}\right)^{\frac{\gamma a-1}{\gamma a}} - 1\right] \qquad (۳۸)$$

۳- بااستفاده از رابطهٔ (۳۸) که مربوط به راندمان فن می‌باشد و بااستفاده از مقادیر نسبت فشار و راندمان به‌دست‌آمده از منحنی‌های عملکرد در مراحل قبل، می‌توان نسبت T_{013}/T_{02} را با بهره‌گیری از رابطهٔ (۳۹) به‌دست آورد.

$$\frac{T_{013}}{T_{02}} = 1 + \frac{1}{\eta_f}\left[\left(\frac{P_{013}}{P_{02}}\right)^{\frac{\gamma a-1}{\gamma a}} - 1\right] \qquad (۳۹)$$

٤- در این مرحله یک دور مشخص برای کمپرسور انتخاب می‌شود.

۵- در دور انتخاب‌شده برای کمپرسور در مرحلهٔ قبل، یک نقطه تعیین می‌شود و بااستفاده از منحنی‌های عملکرد کمپرسور می‌توان نسبت فشار، راندمان و دبی جرمی کمپرسور را به‌دست آورد.

٦- اکنون می‌توان بااستفاده از رابطهٔ سازگاری جرم، میان فن و کمپرسور در رابطه‌های (٤٠ و ٤١)، نسبت جت کنارگذر را به‌صورت رابطهٔ (٤٢) محاسبه نمود.

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{02}}}{P_{02}} = \frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{013}}}{P_{013}} \times \frac{P_{013}}{P_{02}} \times \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{013}}} \times \frac{\dot{m}}{\dot{m}_h} \qquad (٤٠)$$

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_h} = 1 + \beta \qquad (٤١)$$

$$\beta = -1 + \frac{\frac{\dot{m}\sqrt{T_{02}}}{P_{02}}}{\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{013}}}{P_{013}} \times \frac{P_{013}}{P_{02}} \times \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{013}}}} \qquad (٤٢)$$

۷- در این مرحله و بااستفاده از منحنی عملکردی توربین، نسبت فشاری برای توربین پرفشار حدس زده می‌شود و سپس دبی جرمی مربوط به آن از نمودار مربوط استخراج می‌شود.

۸- در مقالهٔ حاضر به‌منظور کاهش حلقه‌های محاسباتی و درنتیجه کاهش خطاهای عددی، راندمان توربین، مقداری ثابت درنظر گرفته شده است. اکنون بااستفاده از رابطهٔ راندمان توربین پرفشار، می‌توان نسبت $T_{04.5}/T_{04}$ را در توربین فوق‌الذکر باتوجه به رابطه‌های (٤٣ و ٤٤) به‌دست آورد.

$$\frac{T_{04}-T_{04.5}}{T_{04}}=\eta_{th}[1-(\frac{1}{\frac{P_{04}}{P_{04.5}}})^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}}] \quad (٤٣)$$

$$\frac{T_{04.5}}{T_{04}}=1-\eta_{th}[1-(\frac{1}{\frac{P_{04}}{P_{04.5}}})^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}}] \quad (٤٤)$$

۹- در این مرحله بااستفاده از رابطهٔ سازگاری جرم بین کمپرسور و توربین پرفشار می‌توان نسبت T_{04}/T_{013} در رابطهٔ (٤٦) را از رابطهٔ (٤٥) محاسبه نمود.

$$\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{013}}}{P_{013}}=\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04}}}{P_{04}}\times\frac{P_{04}}{P_{013}}\times\sqrt{\frac{T_{013}}{T_{04}}} \quad (٤٥)$$

$$\frac{T_{04}}{T_{013}}=\sqrt{\frac{\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04}}}{P_{04}}}{\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{013}}}{P_{013}}}\frac{P_{04}}{P_{03}}} \quad (٤٦)$$

۱۰- بااستفاده از رابطهٔ سازگاری توان میان کمپرسور و توربین پرفشار و نیز بااستفاده از مقادیر نسبت‌های $(T_{03}-T_{013})/T_{013}$ و $(T_{04}-T_{045})/T_{04}$ که در رابطه‌های (٤٧ و ٤٨) محاسبه شده است، می‌توان نسبت T_{04}/T_{013} را بااستفاده از رابطهٔ (٤٩) محاسبه نمود.

$$m_h c_{pa}\left(T_{03}-T_{013}\right)=\eta_{mH}\left(\dot{m}_h+\dot{m}_f\right)c_{pg}\left(T_{04}-T_{045}\right) \quad (٤٧)$$

قابل توجه است که در رابطهٔ (۵۹) از دبی جرمی سوخت صرف‌نظر شده است.

$$c_{pa}\left(\frac{T_{03}-T_{013}}{T_{013}}\right)=\eta_{mH}c_{pg}\left(\frac{T_{04}-T_{04.5}}{T_{04}}\right)\times\frac{T_{04}}{T_{013}} \quad (٤٨)$$

$$\frac{T_{04}}{T_{013}}=\frac{\frac{T_{03}-T_{013}}{T_{013}}}{\frac{c_{pg}}{c_{pa}}\times\eta_{mH}\times(\frac{T_{04}-T_{04.5}}{T_{04}})} \quad (٤٩)$$

۱۱- مقادیر نسبت T_{04}/T_{013} محاسبه‌شده در گام‌های قبلی با یکدیگر مقایسه می‌شوند و درصورت یکسان نبودن دو مقدار، حدس دیگری برای نسبت فشار توربین در نمودار عملکرد، صورت می‌پذیرد و مراحل قبلی نیز تکرار می‌شود.

۱۲- بااستفاده از رابطهٔ سازگاری جریان میان توربین پرفشار و کم‌فشار می‌توان نسبت T_{04}/P_{045} را بااستفاده از رابطهٔ (۵۰) محاسبه نمود.

$$\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04.5}}}{P_{045}}=\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{04}}}{P_{04}}\times\frac{P_{04}}{P_{04.5}}\times\sqrt{\frac{T_{04.5}}{T_{04}}} \quad (۵۰)$$

اکنون بااستفاده از مشخصهٔ توربین کم‌فشار به دست‌آمده در بخش قبل، می‌توان نسبت فشار توربین مذکور را به‌دست آورد و سپس بااستفاده از راندمان توربین و رابطهٔ (۵۱) نسبت $T_{05}/T_{04.5}$ را محاسبه نمود.

$$\frac{T_{05}}{T_{04.5}}=1-\eta_{th}[1-(\frac{1}{\frac{P_{04.5}}{P_{05}}})^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}}] \quad (۵۱)$$

۱۳- بااستفاده از سازگاری توان میان فن و توربین کم‌فشار و بااستفاده از رابطهٔ (۵۵) می‌توان نسبت $T_{05}/T_{04.5}$ را محاسبه نمود.

$$\dot{m}c_{pa}(T_{013}-T_{02})=\eta_{mL}(\dot{m}_h+\dot{m}_f)c_{pg}(T_{04.5}-T_{05}) \quad (۵۲)$$

و با صرف‌نظر از دبی جرمی سوخت در رابطهٔ (۵۲) خواهیم داشت:

$$(1+\beta)c_{pa}\left(\frac{T_{013}-T_{02}}{T_{02}}\right)=\eta_{mL}c_{pg}\left(\frac{T_{04.5}-T_{05}}{T_{04.5}}\right)\times\frac{T_{04.5}}{T_{02}} \quad (۵۳)$$

که نسبت دمای ورودی توربین کم‌فشار به ورودی فن از رابطهٔ (۵۳) به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_{04.5}}{T_{02}}=\frac{T_{04.5}}{T_{04}}\times\frac{T_{04}}{T_{013}}\times\frac{T_{013}}{T_{02}} \quad (۵٤)$$

و درنهایت با عنایت به رابطهٔ (۵٤)، رابطهٔ (۵۵) حاصل می‌شود:

$$\frac{T_{05}}{T_{04.5}} = 1 - \frac{(1+\beta)\left(\frac{T_{013}-T_{02}}{T_{02}}\right)}{\frac{C_{pg}}{C_{pa}} \times \eta_{mL} \times \left(\frac{T_{04.5}}{T_{02}}\right)} \qquad (۵۵)$$

دو مقدار نسبت $T_{05}/T_{04.5}$ محاسبه‌شده در گام‌های قبلی مورد بررسی قرار می‌گیرد تا درصورت یکسان نبودن مقادیر، به نقطهٔ دیگری برروی عملکرد کمپرسور بروند و مقادیر نسبت فشار، راندمان و دبی جرمی از نمودارهای مربوط استخراج شوند.

۱۴- بااستفاده از رابطهٔ سازگاری جریان میان توربین کم‌فشار و نازل هستهٔ موتور رابطهٔ (۵۶) استخراج می‌شود:

$$\frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{05}}}{P_{05}} = \frac{\dot{m}_h\sqrt{T_{045}}}{P_{04.5}} \times \frac{P_{04.5}}{P_{05}} \times \sqrt{\frac{T_{05}}{T_{04.5}}} \qquad (۵۶)$$

که نسبت $P_{04.5}/P_{05}$ از رابطهٔ (۵۶) محاسبه شده است.

۱۵- اکنون با استفاده از رابطهٔ (۵۷) می‌توان نسبت فشار خروجی از نازل هستهٔ موتور را محاسبه نمود.

$$\frac{P_{05}}{P_a} = \left(\frac{P_{05}}{P_{04.5}}\right)\left(\frac{P_{04.5}}{P_{04}}\right)\left(\frac{P_{04.5}}{P_{04}}\right)\left(\frac{P_{04}}{P_{03}}\right)\left(\frac{P_{03}}{P_{013}}\right)\left(\frac{P_{013}}{P_{02}}\right)\left(\frac{P_{02}}{P_a}\right) \qquad (۵۷)$$

که نسبت $\frac{P_{02}}{P_a}$ از رابطهٔ (۵۸) محاسبه می‌شود.

$$\frac{P_{02}}{P_a} = [1 + \eta_i\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M_a{}^2]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad (۵۸)$$

۱۶- بااستفاده از نسبت فشار محاسبه‌شده در گام قبلی و بااستفاده از نمودار عملکرد نازل، مقدار دبی جرمی به‌دست می‌آید. دو مقدار به‌دست‌آمده برای دبی جرمی نازل در مراحل قبل مورد مقایسه قرار می‌گیرند و درصورت یکسان نبودن مقادیر، به نقطهٔ دیگری برروی منحنی عملکرد می‌روند و مقادیر فشار، راندمان و دبی جرمی از نمودارهای مربوط استخراج می‌شوند.

۱۷- با استفاده از رابطهٔ سازگاری جرم میان فن و نازل فن رابطهٔ (۵۹) حاصل می‌شود:

$$\frac{\dot{m}_c\sqrt{T_{017}}}{P_{017}} = \frac{\dot{m}\sqrt{T_{02}}}{P_{02}} \times \frac{P_{02}}{P_{017}} \times \sqrt{\frac{T_{017}}{T_{02}}} \times \frac{\dot{m}_c}{m} \qquad (۵۹)$$

نتایج

همان‌گونه که از جدول (۲) قابل مشاهده است، اطلاعات نقطهٔ طراحی در شرایط ایستا مد نظر قرار می‌گیرد. البته فرض فوق به‌دلیل در دسترس نبودن اطلاعات نقطهٔ طراحی موتور پی دبلیو ۶۱۵ اف درنظر گرفته شده است. شایان ذکر است که به طور معمول نقطهٔ طراحی یک موتور توربوفن در شرایط پروازی است که در صورت در دسترس نبودن اطلاعات نقطهٔ طراحی موتور می‌توان با اغماض از اطلاعات شرایط ایستای موتور در تحلیل نقطهٔ طراحی استفاده نمود. همچنین در جدول (۲) توزیع دما و فشار در مقاطع مختلف موتور فوق‌الذکر آورده شده است.

به‌منظور تحلیل عملکرد نقطهٔ طراحی موتور پی دبلیو ۶۱۵ اف از اطلاعات ورودی موجود در جدول (۳) بهره گرفته می‌شود.

شکل (۳) (در حالت بدون وجود محفظهٔ احتراق ثانویه) تغییرات تراست ویژه را برحسب تغییرات نسبت فشار فن به‌ترتیب برروی محورهای عمودی و افقی و برای مقادیر متفاوت نسبت جت کنارگذر نشان می‌دهد. این شکل با فرض عدد ماخ برابر صفر، نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ و درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار برابر ۱۱۱۸ درجهٔ کلوین تولید شده است. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، در یک نسبت فشار فن ثابت، با افزایش نسبت جت کنارگذر، تراست ویژه کاهش می‌یابد که این واقعیت به‌دلیل کاهش دبی جرمی عبوری از قسمت اصلی موتور می‌باشد. از طرف دیگر در یک نسبت جت کنارگذر معین، با افزایش نسبت فشار فن، تراست ویژه ابتدا افزایش می‌یابد و سپس به‌آرامی و با شیب خیلی کند شروع به کاهش می‌نماید. همچنین مقدار تراست ویژه در شرایطی که موتور در حالت پایه قرار دارد برابر ۳۱۰

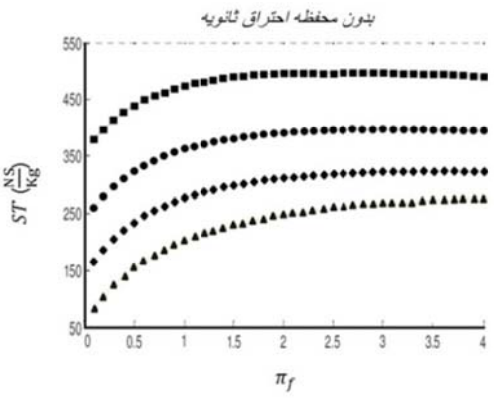
($\frac{N.S}{kg}$) و در حالت با محفظهٔ احتراق ثانویه برابر ۳٤۰ ($\frac{N.S}{kg}$) می‌باشد که مقدار تراست ۹/٦ درصد افزایش یافته است و همچنین به‌ازای افزایش ۰/۳ نسبت جت کنارگذر، تراست ویژه ۲۰ درصد کاهش خواهد داشت. اما این افت تراست زمانی بیشتر است که موتور با محفظهٔ احترق ثانویه کار می‌کند.

جدول ۲ توزیع دما و فشار در مقاطع مختلف موتور پی دبلیو ٦۱۵ اف

ردیف	پارامتر	نماد	مقدار
۱	دما و فشار استاتیک جریان آزاد	P_0, T_0	۲۸۸/۱۵و ۱۰۱۳۲۵
۲	دما و فشار کل ابتدای ورودی هوا	P_{02}, T_{02}	۲۸۸/۱۵و ۱۰۰۳۱۰
۳	دما و فشار کل ورودی کمپرسور کم‌فشار	P_{013}, T_{013}	۳۱٤/۲۵و ۱۱۰۹٤٤
٤	دما و فشار کل ورودی کمپرسور پرفشار	$P_{02.5}, T_{02.5}$	۳۳۷/۷و ۱۷۰۲۲۵
۵	دما و فشار کل ورودی محفظهٔ احتراق اصلی	P_{03}, T_{03}	٦۳۰/۱۷و ۱۳٦۲۵۵۳
٦	دما و فشار کل ورودی محفظهٔ احتراق ثانویه	$P_{04.5}, T_{04.5}$	۸٤۷/۳۸و ٤۰۱۸٦۵
۷	دما و فشار کل ورودی توربین پرفشار	P_{04}, T_{04}	۱۱۱۸و ۱۳۱۹۲٦۵
۸	دما و فشار کل ورودی توربین کم‌فشار بدون محفظهٔ احتراق ثانویه	$P_{04.5}, T_{04.5}$	۸٦۹/۷۳ و۳۵٦۹۳۷
۹	دما و فشار کل ورودی توربین کم‌فشار با محفظهٔ احتراق ثانویه	$P_{04.8}, T_{04.8}$	۱۲۰٦و ۲۷٤۷۷۲
۱۰	دما و فشار کل خروجی هسته موتور بدون محفظهٔ احتراق ثانویه	P_{08}, T_{08}	٦۵۵/۲و۱٦۲۲٦٤
۱۱	دما و فشار کل خروجی هسته موتور با محفظهٔ احتراق ثانویه	P_{08}, T_{08}	۹۵۹/۲و۲۵٤۵۷٦
۱۲	دما و فشار کل خروجی فن نازل	P_{018}, T_{018}	۳۱٤و۱٤۰۲٦۳

جدول ۳ اطلاعات ورودی شبیه‌سازی نقطهٔ طراحی موتور پی دبلیو ٦۱۵ اف [12].

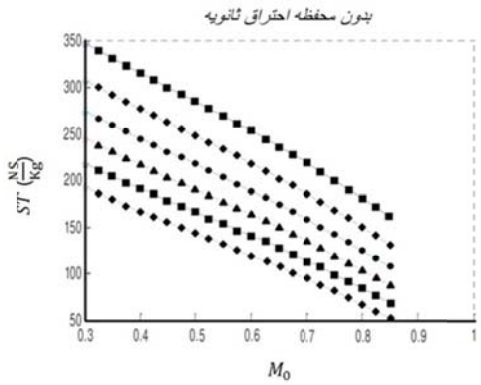
ردیف	پارامتر	مقدار
۱	دبی جرمی هوای ورودی	۲۰/٦
۲	راندمان پلی‌تروپیک کمپرسور	۰/۹۳
۳	نسبت فشار کمپرسور	۸
٤	نسبت جت کنارگذر	۲/۸
۵	نسیت فشار فن	۱/۷
٦	افت فشار محفظهٔ احتراق	۰/۹۷
۷	دمای ورودی توربین پرفشار	۱۱۰٦
۸	دمای ورودی توربین کم‌فشار	۸٦۹/۷۳
۹	راندمان پلی‌تروپیک توربین	۰/۹۲
۱۰	راندمان آیزنتروپیک نازل	۰/۹
۱۱	راندمان مکانیکی شفت	۰/۹۹
۱۲	عدد ماخ	۰
۱۳	ارتفاع از سطح دریا	۰
۱٤	ارزش حرارتی سوخت (JP4)	٤۳۳۲۳



شکل ۳ تغییرات تراست ویژه برحسب تغییرات نسبت فشار فن و نسبت جت کنارگذر بر اساس عدد ماخ برابر صفر، نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ و درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار برابر ۱۱۱۸ درجهٔ کلوین

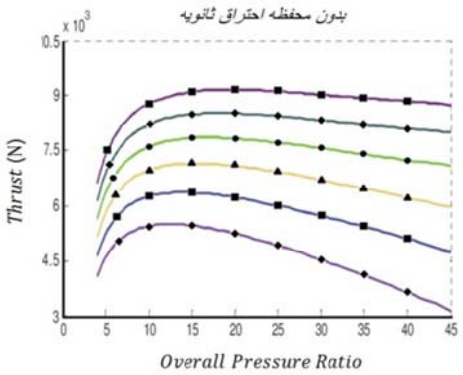
شکل (٤) (در حالت بدون وجود محفظهٔ احتراق ثانویه) تغییرات تراست ویژه را با تغییرات عدد ماخ به‌ترتیب برروی محورهای عمودی و افقی و برای مقادیر متفاوت نسبت جت کنارگذر نشان می‌دهد. این

شکل با فرض نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ نسبت فشار فن برابر ۱/۷ و درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار برابر ۱۱۱۸ درجهٔ کلوین تولید شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود برای یک عدد ماخ ثابت، با افزایش نسبت جت کنارگذر، تراست ویژه کاهش می‌یابد و علت آن این است که مقدار بیشتری از جریان هوا، به‌جای عبور از قسمت اصلی موتور و ترکیب با سوخت و ایجاد رانش، از داکت کنارگذر عبور می‌نماید. از طرف دیگر برای یک نسبت جت کنارگذر معین، افزایش عدد ماخ منجر به کاهش تراست ویژه می‌شود.



شکل ٤ تغییرات تراست ویژه برحسب تغییرات عدد ماخ و نسبت جت کنارگذر، براساس نسبت فشار کمپرسور برابر ۸، نسبت فشار فن ۱/۷ و درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار برابر ۱۱۱۸ درجهٔ کلوین

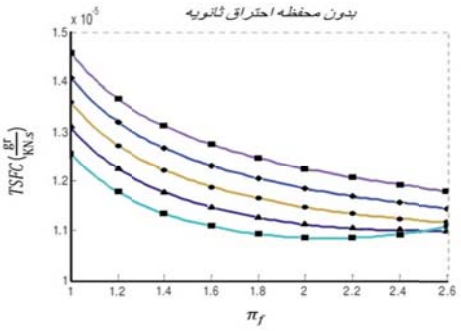
شکل (۵) (در حالت بدون وجود محفظهٔ احتراق ثانویه) تغییرات نیروی تراست را برحسب تغییرات نسبت فشار کل به‌ترتیب برروی محورهای عمودی و افقی و برای مقادیر متفاوت درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار نشان می‌دهد. این شکل با فرض عدد ماخ برابر صفر و نسبت جت کنارگذر برابر ۲/۸ تولید شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، در یک نسبت فشار معین، با افزایش دمای خروجی از محفظهٔ احتراق، تراست افزایش می‌یابد. همچنین مقدار تراست در شرایطی که موتور در حالت پایه قرار دارد برابر ٦٣٩٤ نیوتن می‌باشد.



شکل ۵ تغییرات تراست برحسب نسبت فشار کلی و درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار، براساس عدد ماخ برابر صفر و نسبت جت کنارگذر برابر ۲/۸

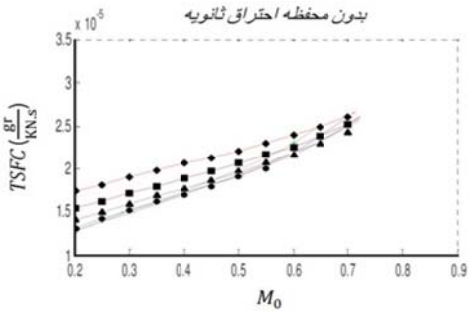
شکل (٦) (در حالت بدون وجود محفظهٔ احتراق ثانویه) تغییرات مصرف سوخت ویژهٔ رانش با واحد ($\frac{gr}{Kn.s}$) را برحسب تغییرات نسبت فشار فن به‌ترتیب برروی محورهای عمودی و افقی و برای مقادیر متفاوت درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار نشان می‌دهد. این شکل با فرض عدد ماخ برابر صفر، نسبت جت کنارگذر برابر ۲/۸ و نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ تولید شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود اگر محفظهٔ احتراق ثانویه غیرفعال باشد با افزایش نسبت فشار فن، مصرف سوخت ویژهٔ رانش کاهش می‌یابد که به‌دلیل افزایش دمای ورودی به محفظهٔ احتراق می‌باشد؛ اما از یک نسبت فشار معین به بعد، با افزایش نسبت فشار سوخت ویژهٔ رانش افزایش می‌یابد زیرا باعث افزایش دبی جرمی واردشده به موتور می‌شود. در یک نسبت فشار معین، با افزایش دمای خروجی محفظهٔ احتراق، مصرف سوخت ویژهٔ رانش نیز افزایش می‌یابد و این بدین علت است که محفظهٔ احتراق برای تولید درجه‌حرارت بالاتر نیاز بیشتری به سوخت دارد. همچنین مقدار مصرف

سوخت ویژه در شرایطی که موتور در حالت پایه قرار دارد برابر ۱/۱٤ ($\frac{gr}{Kn.s}$) و همچنین به ازای افزایش ۱۰۰ درجه دمای ورودی به توربین، مصرف سوخت ویژه ٤ درصد رشد خواهد داشت که این مقدار در زمانی که سیکل از محفظهٔ احتراق ثانویه سود می‌برد، کمتر خواهد بود.

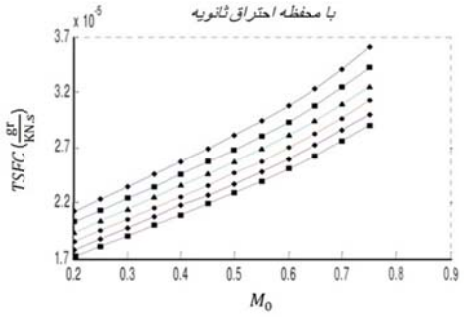


شکل ٦ تغییرات مصرف سوخت ویژهٔ تراست برحسب تغییرات نسبت فشار فن و درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار، براساس عدد ماخ برابر صفر و نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ و نسبت جت کنارگذر برابر ۲/۸

شکل‌های (۷ و ۸) (در دو حالت بدون وجود محفظهٔ احتراق ثانویه و با وجود محفظهٔ احتراق ثانویه) تغییرات مصرف سوخت ویژهٔ رانش با واحد ($\frac{gr}{Kn.s}$) را برحسب تغییرات عدد ماخ به‌ترتیب برروی محورهای عمودی و افقی و برای مقادیر متفاوت نسبت جت کنارگذر نشان می‌دهد. این شکل با فرض نسبت فشار فن برابر ۱/۷، درجه‌حرارت ورودی به توربین پرفشار برابر ۱۱۱۸ درجهٔ کلوین و نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ تولید شده است. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش عدد ماخ کاهش رانش و رانش ویژه بیشتر از افزایش مصرف سوخت می‌باشد و بنابراین با افزایش عدد ماخ، مصرف سوخت ویژهٔ رانش افزایش می‌یابد و در یک ماخ ثابت با کاهش نسبت جت کنارگذر، دبی جرمی گذرنده از قسمت اصلی موتور افزایش می‌یابد که منجر به افزایش مصرف سوخت ویژهٔ رانش می‌شود.

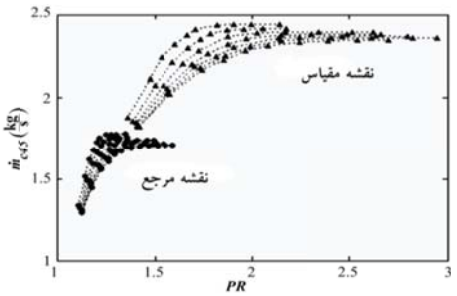


شکل ۷ تغییرات مصرف سوخت ویژهٔ تراست برحسب تغییرات عدد ماخ و نسبت جت کنارگذر، براساس عدد ماخ برابر صفر و نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ و نسبت فشار فن برابر ۱/۷

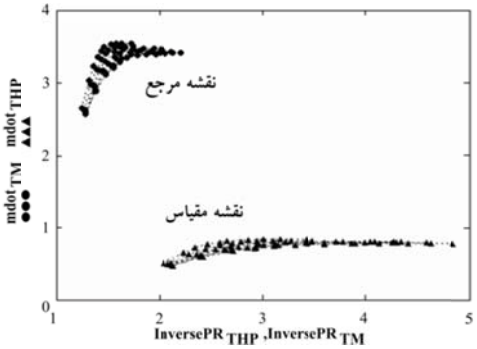


شکل ۸ تغییرات مصرف سوخت ویژهٔ تراست برحسب تغییرات عدد ماخ و نسبت جت کنارگذر، براساس عدد ماخ برابر صفر و نسبت فشار کمپرسور برابر ۸ و نسبت فشار فن برابر ۱/۷

منحنی مشخصهٔ توربین‌های پرفشار و کم‌فشار بااستفاده از روابط موجود در معادلات (۲۸-۲۳) تولید شده است که در شکل‌های (۹ و ۱۰) قابل مشاهده است.

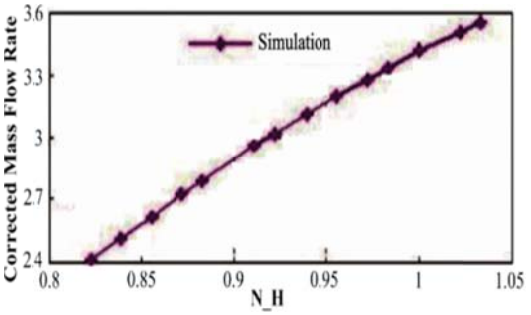


شکل ۹ منحنی مشخصهٔ توربین کم‌فشار (دبی جرمی تصحیح‌شده برحسب نسبت فشار)

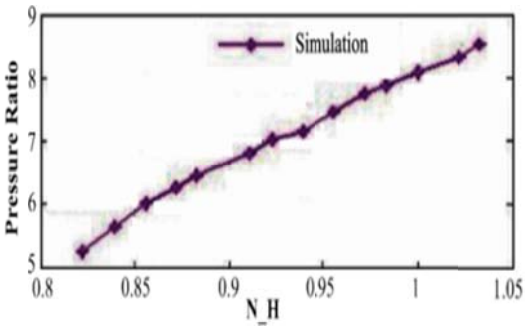


شکل ۱۰ منحنی مشخصهٔ توربین پرفشار (دبی جرمی تصحیح‌شده برحسب نسبت فشار)

شکل (۱۱) منحنی مشخصهٔ کمپرسور را در شرایط ارتفاع ۹۵۰۰ متری و ماخ ۰/۵۸ نشان می‌دهد. شکل‌های (۱۱ و ۱۲) توسط کد شبیه‌ساز تولید شده‌اند. شکل (۱۱) تغییرات دبی جرمی تصحیح‌شدهٔ کمپرسور برحسب $^{kg}/_{s}$ را نسبت به دور محور پرفشار نشان می‌دهد؛ حال آن‌که شکل (۱۲) تغییرات نسبت فشار کمپرسور را نسبت به دور پرفشار نمایش می‌دهد.

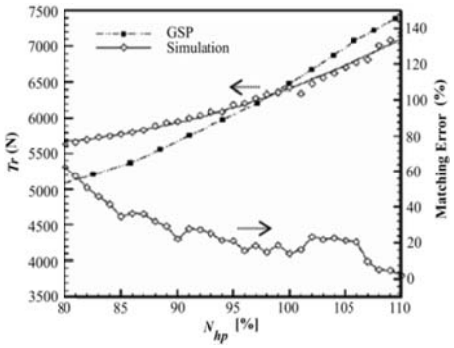


شکل ۱۱ تغییرات دبی جرمی اصلاح‌شدهٔ کمپرسور برحسب تغییرات دور محور پرفشار

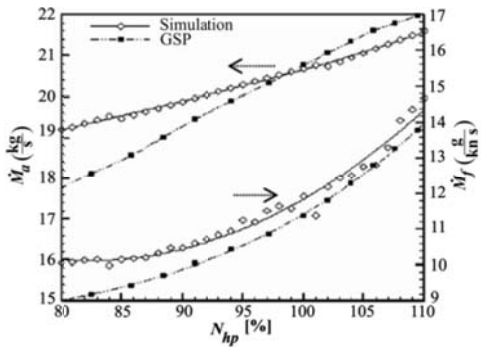


شکل ۱۲ تغییرات نسبت فشار کمپرسور برحسب تغییرات دور محور پرفشار

در شکل‌های (۱۳ و ۱٤) مدل شبیه‌سازی‌شده و نرم‌افزار جی‌اس‌پی (GSP) موردمقایسه قرار گرفته‌اند. همان‌گونه که در سمت راست شکل (۱۳) مشاهده می‌شود، معیار تطبیق (خطای محاسباتی) قرار گرفته است، که در دورهای پایین دارای خطای بالایی می‌باشد؛ ولی هر اندازه که دور افزایش می‌یابد، خطا کمتر می‌شود تا این‌که در دورهای بالای ۹۰ درصد، مقدار خطا به کمتر از ۲۰ درصد می‌رسد. این امر نشان‌دهندهٔ این است که مدل شبیه‌سازی‌شده در دورهای بالا دارای دقت قابل قبولی است و در نقطهٔ طراحی کمترین میزان خطا وجود دارد؛ ولی هر اندازه دور کاهش یا افزایش می‌یابد، خطای مذکور افزایش می‌یابد که به‌دلیل کاربرد روش مقیاس می‌باشد. شکل (۱٤) نیز دبی هوا و دبی سوخت را نشان می‌دهد که در دورهای بالای ۹۰ درصد از دقت خوبی برخوردار است.



شکل ۱۳ تغییرات تراست و خطای تطبیق برحسب دور محور فشار قوی



شکل ۱٤ تغییرات دبی هوا و سوخت برحسب دور فشار قوی

نتیجه‌گیری

نتایج جدیدی که در این پژوهش به‌دست می‌آید حاکی از این است که سیکل‌های با محفظهٔ احتراق میان‌مرحله‌ای در سرعت‌های بالاتر عملکرد بهتری نسبت به سیکل‌های معمولی دارند. باتوجه به مطالعه‌های سیکل عملکردی موتور توربوفن با محفظهٔ احتراق ثانویه می‌توان اشاره داشت که سیکل‌های دارای محفظهٔ احتراق ثانویه نسبت به سیکل‌های معمولی (سیکل‌های بدون محفظهٔ احتراق ثانویه) دارای تراست ویژهٔ بالاتر و در نسبت جت کنارگذر بالا، مصرف سوخت ویژهٔ پایین‌تر و آلودگی کمتری دارند و با افزایش نسبت فشار فن در آنها، تراست ویژه به‌طور چشم‌گیری نرخ صعودی و مصرف سوخت ویژه نیز روندی نزولی دارد. در واقع سیکل‌های مذکور می‌توانند موتورهایی که نسبت جت کنارگذر آنها بالا می‌باشند را پشتیبانی نمایند و راندمان آنها را بالا ببرند. به‌طور کلی این سیکل‌ها با کاهش دمای ورودی به توربین پرفشار باعث کاهش مصرف سوخت ویژهٔ سیکل و همچنین افزایش تراست ویژه می‌شوند. سایر نتایج در جدول (٤) آورده شده است. لازم به توجه است که دمای خروجی از توربین پرفشار و دمای خروجی از محفظهٔ احتراق ثانویه باید به‌درستی تعیین شده باشند.

در جدول (۵) نیز نتایج حاصل از کد شبیه‌ساز و نرم‌افزار تجاری گس‌ترب با یکدیگر موردمقایسه قرار گرفته است. همان‌گونه که از جدول (۵) استخراج می‌شود؛ مقادیر خطا به‌جز در مقدار مصرف سوخت ویژه بسیار ناچیز است. از دلایل اختلاف در مقدار مصرف سوخت ویژه این است که در کد شبیه‌ساز مقادیر گرمای ویژه در تمامی طول موتور در فشار و حجم ثابت، فرض شده است که در عمل این‌گونه نیست. همچنین یکی از محدودیت‌های نرم‌افزار تجاری گس‌ترب این است که امکان شبیه‌سازی محفظهٔ احتراق ثانویه در آن وجود ندارد.

جدول ٤ رابطهٔ تراست و مصرف سوخت در دو حالت با وجود محفظهٔ احتراق ثانویه و بدون وجود محفظهٔ احتراق ثانویه

	تراست ویژه	مصرف سوخت
موتور با محفظهٔ احتراق ثانویه	۳٤۰/۳۲	۰/۰۵۸
موتور بدون محفظهٔ احتراق ثانویه	۳۱۰/٤۳٦	۰/۰٤۹

جدول ۵ محاسبهٔ خروجی‌های کد شبیه‌ساز و نرم‌افزار تجاری گس‌ترب

	کد شبیه‌ساز	نرم‌افزار تجاری گس‌ترب	خطا
Thrust (N)	٦۳۹٤	٦٤۹۰	٪ ۱/٤۸
TSFC ($\frac{gr}{KN.s}$)	۱۱/٤۸	۱۰/۱۳۲٦	٪ ۱۳/۳
T_0 (°K)	۲۸۸/۱۵	۲۸۸/۱۵	۰
P_0 (Pa)	۱۰۱۳۲۵	۱۰۱۳۲۵	۰
T_{02} (°K)	۲۸۸/۱۵	۲۸۸/۱۵	۰
P_{02} (Pa)	۱۰۰۳۱۰	۱۰۰۳۱۲	۰
$T_{02.5}$ (°K)	۳۳۷/۷	۳۳۹/۰۵	٪۰/٤
$P_{02.5}$ (Pa)	۱۷۰۲۲۵	۱۷۰۵۳۰	٪۰/۱۸
T_{03} (°K)	٦۳۰/۱۷	٦۳۳/۵۹	٪ ۰/۵٤
P_{03} (Pa)	۱۳٦۲۵۵۳	۱۳٦٤۲٤۰	٪ ۰/۱۲۳
T_{04} (°K)	۱۱۱۸	۱۱۱۸	۰
P_{04} (Pa)	۱۳۱۹۲٦۵	۱۳۲۳۳۱۳	٪۰/۳۰۷
$T_{04.5}$ (°K)	۸٤۷/۳۸	۸۵۲/۰۹	٪ ۰/۵۵٦
$P_{04.5}$ (Pa)	٤۰۱۸٦۵	٤۰۷۱۰۸	٪ ۱/۳
T_{05} (°K)	٦۸۰/۳۸	۷۰۸/۲۲	٪٤/۱
P_{05} (Pa)	۱٦۹۳۷۵	۱۸٦٤٤٤	٪ ۱۰
T_{07} (°K)	٦۷۱/۲۵۸	–	–
P_{07} (Pa)	۱٦۷۱۰٤/۲۳	–	–
P_{08} (Pa)	۱٦۲۲٦٤	۱۸٦٤٤٤	٪ ۱٤/۹
T_8 (°K)	٦۱۲/۵	۷۰۸/۲۲	٪ ۱۵/٦۲
P_8 (Pa)	۸۷۱۷۸/۱۲	–	–
T_{017} (°K)	۳۲۲/۹	–	–
P_{017} (Pa)	۱٤٤٤٦/۹۵	–	–
T_{18} (°K)	۲۹٤/٦٤	۳۲۷/٦٦	٪ ۱۱/۲
P_{018} (Pa)	۱٤۰۲٦۳	۱٤۷٤۵۸	٪ ۵/۱۳
P_{18} (Pa)	۷۵۳۵۷/۸٤	–	–

درخاتمه موارد زیر نیز از پژوهش حاضر استنباط می‌شود:

۱- استفاده از روش حلقه‌های متوالی تودرتو دقت مناسبی را برای پیش‌بینی عملکرد موتورهای توربوفن دومحورهٔ جریان مخلوط‌نشده در فاز طراحی و تحلیل فراهم می‌نماید.

۲- باتوجه به در دسترس نبودن منحنی مشخصه‌های موتور مذکور، استفاده از روش مقیاس‌گذاری یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای تخمین منحنی‌های عملکردی می‌باشد.

۳- مقادیر خطا در خط عملیاتی خارج از طراحی مربوط به منحنی مشخصه‌های به‌دست‌آمده و ثابت درنظر گرفتن راندمان می‌باشد.

٤- در روش مقیاس‌گذاری ضرایب ثابت هر اندازه اطلاعات نقطهٔ طراحی موتور مورد تحلیل و منحنی‌های مرجع انتخاب‌شده به یکدیگر نزدیک‌تر باشند، خطای موجود در نتایج شبیه‌سازی کاهش می‌یابد.

فهرست علائم

a	سرعت صوت
C	سرعت
C_p	گرمای ویژه در فشار ثابت
C_{pa}	اجزای سرد موتور
C_{pg}	اجزای گرم موتور
f	نسبت سوخت به هوا
F	تراست (N)
f_b	نسبت سوخت به هوا در محفظهٔ احتراق اصلی
f_{itb}	نسبت سوخت به هوا در محفظهٔ احتراق ثانویه
h	آنتالپی
H	ارتفاع از سطح دریا (m)
h_{PR}	ارزش حرارتی سوخت ($^{kj}/_{kg}$)
ITB	محفظهٔ احتراق ثانویه
$\dot{m}_{c\,13}$	دبی جرمی ورودی کمپرسور
$\dot{m}_{c\,2}$	دبی جرمی ورودی فن
$\dot{m}_{c\,4}$	توربین پرفشار دبی جرمی ورودی
$\dot{m}_{c\,45}$	دبی جرمی ورودی توربین کم‌فشار
$\dot{m}_o$	دبی جرمی هوای ورودی ($^{kg}/_{s}$)
M_o	عدد ماخ
N	دور موتور
$N_{hp\,rel}$	دور نسبی محور پرفشار
$N_{lp\,rel}$	دور نسبی محور کم‌فشار
OPR	نسبت فشار کلی
P	فشار (Pa)
P_0	فشار سکون (Pa)
R_{ey}	رینولدز
$S.F.C$	مصرف سوخت ویژه ($^{kg}/_{Nh}$)
ST	تراست ویژه ($^{NS}/_{kg}$)
T	دما (°K)
$Thrust$	تراست (N)
TIT	درجه‌حرارت ورودی به توربین (°K)
$TSFC$	مصرف سوخت ویژهٔ رانش ($^{gr}/_{Kn.s}$)
T_0	دمای سکون (°K)
T_{04}	دمای ورودی توربین پرفشار (°K)
$T_{04.5}$	دمای ورودی توربین کم‌فشار (°K)

علایم یونانی

β	نسبت جت کنارگذر
γ	نسبت گرمای ویژه
ΔP_b	افت فشار محفظهٔ احتراق
η_b	راندمان حرارتی محفظهٔ احتراق
η_c	راندمان پلی‌تروپیک کمپرسور
η_f	راندمان آیزونتروپیک فن
η_m	راندمان مکانیکی شفت
η_n	راندمان آیزنتروپیک نازل
η_t	راندمان پلی‌تروپیک توربین

μ	ویسکوزیته		نسبت آنتالپی مجموع گازهای خروجی
π_c	نسبت فشار کمپرسور	$\tau_{\lambda-b}$	از محفظهٔ احتراق اصلی به آنتالپی مجموع دمای محیط
$\pi_{d\,max}$	افت فشار اصطکاکی ورودی هوا		
π_f	نسبت فشار فن		نسبت آنتالپی مجموع گازهای خروجی
π_{thp}	نسبت فشار توربین پرفشار	$\tau_{\lambda-itb}$	از محفظهٔ احتراق ثانویه به آنتالپی مجموع دمای محیط
π_{tlp}	نسبت فشار توربین کم‌فشار		
ρ	دانسیته		

مراجع

1. Hamdan, Z. and Ebaid, S.Y., "Modeling and simulation of gas turbine engine for power generation", *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 128, pp. 302-311, (2014).
2. Tavakolpour-Saleh, A.R., Nasib, S.A.R., Sepasyan, A. and Hashemi, S.M., "Parametric and nonparametric system identification of an experimental turbojet engine", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 43, pp. 21-29, (2015).
3. Korakianitis, T. and Wilson, D.G., "Models for Predicting the Performance of Bryton-Cycle Engines", *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power Transactions of ASME*, Vol. 116, pp.381-388, April (1994).
4. Kurzke, J. and Riegler, C., "A New Compressor Map Scaling Procedure for Preliminary Conceptual Design of Gas Turbine", *ASME Paper No. 2000-GT-0006*, pp. V001T01A006, ISBN: 978-0-7918-7854-5, May 8-11 (2000).
5. Domitrovid, A., Bazijanac, E. and Stojkovic, V., "Mathematical Model For Prediction Of Single-Spool Turbojet Engine Off-Design Performance", *First Simposyum Of Explosive Materials, Weapons And Military Techonology OHRID*, September 25-28, (2002).
6. Kim, J.H., Kim, T.S., Sohn, J.H. and Ro, S.T., "Comparative Analysis of Off Design Performance Characteristics of Single and Two-Shaft Turbines", *ASME Turbo Expo 2002: Power for Land, Sea, and Air*, Paper No. GT2002-30132, Vol. 2, pp. 509-516, (2002).
7. Liew, K.H., Urip, E. and Yang, S.L "Parametric Cycle Analysis of a Turbofan Engine with an Interstage Turbine Burner", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 21, pp. 546-551, No. 3, (2005).
8. Liew, K.H., Urip, E., Yang, S.L. and Siow, Y.K. "A Complete Parametric Cycle Analysis of a Turbofan With Interstage Turbine Burner", *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit Reno*, Nevada, Jan 6-9 (2003).
9. Sanghi, V., Lakshmanan, B.K. and Sundararajan, V., "Digital Simulator for Steady-State Performance Prediction of Military Turbofan Engine", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 14, pp. 74-81, (1998).
10. Gobran, M.H., "Off-design performance of solar Centaur-40 gas turbine engine using Simulink", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 2, pp. 285-298, (2013).
11. Yang, C., Huang, Z., Yang, Z., Ma, X., "Analytical Off-design Characteristics of Gas Turbine-Based CCHP System", *The 7th International Conference on Applied Energy*, Vol. 75, pp. 1126-1131, March 28-31 (2015).
12. Yonghong, W., "A New Method of Predicting the Performance of Gas Turbine Engines", *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power Transactions of ASME*, Vol. 113, pp. 106-111, April (1991).

13. Kim, J.H., Kim, T.S., Sohn, J.H., Ro, S.T., "Comparative Analysis of off Design Performance Characteristics of Single and Two-Shaft Turbines", *ASME Paper*, 95-GT-334, Vol. 2, pp. 509-516, (2002).
14. Oates, G.C., "The Aerothermodynamics of Gas Turbine and Rocket Propulsion", AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, ISBN 1-56347-241-4, pp. 285-291 (1997).
15. Gilani, S. I., Baheta, A. T., majid, M. A. A., "Thermodynamic approach to determine a gas turbine components design data and scaling method for performance map generation", *1st International Conference on Plant Equipment and Reliability (CIPER)*, Malaysia, March 27-28 (2008).
16. Mattingly, J.D., Heiser, W.H., Pratt, D.T., "Aircraft Engine Design", AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, ISBN 1-56347-538-3, pp. 210-218 (2002).

بررسی عددی و تحلیلی اثرات تفرق حرارتی بر انتقال حرارت جریان نانوسیال درون یک کانال*

حبیب‌اله سایه‌وند[۱] امیر بصیری‌پارسا[۲]

چکیده *در مطالعهٔ حاضر انتقال حرارت جریان نانوسیال از داخل یک کانال با آرایش‌های مختلفی از تزریق نانوذرات به‌عنوان عناصر تفرق حرارتی، بررسی شده‌است. در پدیدهٔ انتقال حرارت حضور نانوذرات در جریان سیال به‌عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل ایجاد تفرق یا پراکندگی حرارتی شناخته می‌شود. در این پژوهش نحوهٔ توزیع عناصر تفرق حرارتی یا همان نانوذرات در کانال به سه صورت توزیع در منطقهٔ مرکزی، توزیع در منطقهٔ نزدیکی دیوار و توزیع در کل کانال درنظر گرفته شده‌است. اعتبارسنجی نتایج توسط راه‌حل تحلیلی برای یک وضعیت سادهٔ مسئله و همچنین مقایسه با نتایج ارائه‌شده در مقالات گذشته، انجام شده‌است. حضور نانوذرات در منطقهٔ مرکزی کانال، عدد ناسلت و ویژگی‌های انتقال حرارت را به‌شکل صعودی افزایش می‌دهد؛ اما برای آرایش مرزی، افزایش ضخامت نانوذرات تزریق‌شده منجر به یک رفتار صعودی- نزولی برای عدد ناسلت می‌شود، بنابراین در این توزیع، ضخامت بهینه‌ای برای عناصر تفرق به‌دست می‌آید. همچنین در بررسی توابع توزیع مختلف نانوذرات تزریق‌شده در کل کانال، مشاهده می‌شود که برخلاف توزیع سهموی که منجر به افزایش تقریباً خطی عدد ناسلت می‌شود، در توزیع نمایی و به‌خصوص به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر ضریب تفرق، افزایش عدد ناسلت رفتاری غیرخطی دارد که مهم‌ترین وجه تمایز این دو تابع توزیع می‌باشد.*

واژه‌های کلیدی انتقال حرارت;تفرق حرارتی;کانال;نانوسیال.

Numerical and Analytical Investigation of Thermal Dispersion Effects on the Heat Transfer of Nanofluid flow inside a Channel

H.-O. Sayehvand A. Basiri Parsa

Abstract *In the present study the heat transfer of nanofluid flow inside a channel with different arrangements of nanoparticles injection (dispersive elements) is investigated. In the heat transfer phenomena, nanoparticles presence in the fluid flow is known as one of the most important factor for the thermal dispersion. In this work, the distribution of dispersive elements or nanoparticles in the channel is considered to be uniformly distributed in the central region and near the walls. The validation of results is verified by the analytical solution for a simple state of the problem and also by comparison with previous published papers. The presence of the nanoparticels in the center region, increase the Nusselt number and heat transfer characteristics with an ascending form. For the boundary arrangement, increasing the thickness of injected nanoparticles lead to an ascending-descending behavior for Nusselt number. Therefore in this distribution, the optimum thickness for dispersive elements is obtained. Also it can be seen that the presence of the nanoparticels with parabolic distribution increase the Nusselt number with a univocal form. For the exponential arrangement, especially for large values of dispersive coefficient, increasing the Nusselt number has a nonlinear behavior that is the most important distinction of these two distribution functions.*

Key Words Channel; Heat transfer; Nanofluids; Thermal dispersion

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۶/۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۵/۱۲/۲۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.58387

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان. hsayeh@basu.ac.ir

(۲) دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان.

مقدمه

تولید حرارت در بسیاری از فرایندهای صنعتی اجتناب‌ناپذیر است که برای خارج شدن این حرارت از سیستم معمولاً از جریان یک سیال به‌عنوان خنک‌کن و ناقل حرارت استفاده می‌شود. به‌عبارت دیگر، پدیدهٔ انتقال حرارت، برای کنترل دمای سیستم و خروج حرارت مازاد نقش ویژه و مهمی را دارد. از نقطه‌نظر تئوری و عملی، به‌منظور افزایش بازده انتقال حرارت در تجهیزاتی نظیر مبدل‌های حرارتی، دو عامل هدایت حرارتی سیال حامل انرژی و ضریب انتقال حرات جابه‌جایی، نقش اساسی را بر عهده دارند. با افزایش رقابت جهانی در زمینهٔ صنایع مختلف و نقش انرژی در هزینهٔ تولید، این صنایع به‌شدت به‌سمت توسعهٔ سیالات پیشرفته و جدید با شاخص‌های حرارتی بالا پیش می‌روند. یکی از روش‌هایی که اخیراً موردتوجه محققان قرار گرفته است، افزودن نانوذرات فلزی و یا غیرفلزی با هدایت حرارتی بالاتر نسبت به سیالات پایه نظیر آب است. سوسپانسیون حاصل از افزودن ذرات در اندازهٔ نانو به سیال پایه، نانوسیال نامیده می‌شود. البته افزودن این ذرات باعث بروز مسائل متعددی ازجمله ساییدگی و افزایش افت فشار و رسوب و عدم پایداری سوسپانسیون نیز می‌شود. در سال‌های اخیر مطالعات متعددی درزمینهٔ بررسی بازده انتقال حرارت در نانوسیالات انجام گرفته‌است. نتایج گزارش‌شده از افزایش بازده انتقال حرارتی نانوسیالات توسط مراکز تحقیقاتی مختلف و محققان با یکدیگر متفاوت است. مسئلهٔ افزایش بازده حرارتی نانوسیال دراثر حضور نانوذرات در دو دیدگاه متفاوت بررسی می‌شود. از دیدگاه اول، افزایش ضریب هدایت مؤثر نانوسیال دراثر حضور نانوذرات با هدایت حرارتی بالا موجب افزایش قابل‌توجهی در انتقال حرارت نانوسیال می‌گردد و این افزایش قابل‌توجه در انتقال حرارت نیاز به ایجاد قدرت پمپاژ زیاد را برای افزایش قدرت جابه‌جایی منتفی می‌گرداند. اما دیدگاه دوم ادعا می‌کند که افزایش انتقال حرارت دراثر افزایش ضریب هدایت مؤثر نانوسیال چندان چشم‌گیر نیست و به‌منظور افزایش بیشتر و موردنظر در میزان انتقال حرارت، باتوجه به کاهش ظرفیت حرارتی نانوسیال درمقایسه با سیال پایه، با افزایش قدرت پمپاژ و درنتیجه افزایش انتقال حرارت جابه‌جایی می‌توان به شرایط مطلوب دست یافت [1]. ژوان و لی [2] انتقال حرارت جابه‌جایی و جریان سیال نانو را در داخل لوله مطالعه کردند. نتایج آزمایش آنها نشان‌دهندهٔ افزایش ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی و عدد ناسلت با افزایش عدد رینولدز و تراکم حجمی نانوذره در جریان توربولانس است. درمقایسه با آب، استفاده از نانوذرات مس با تراکم حجمی2%، موجب افزایش 39% در عدد ناسلت می‌شود. ویلیامز و همکاران [3] نانوسیالات Al2O3 و ZrO2 در آب را در جریان داخل لولهٔ افقی با شار حرارتی ثابت بررسی کردند. آنها دریافتند که در جریان توربولانس $(3000 < \mathrm{Re} < 6300)$ عدد ناسلت می‌تواند با رابطهٔ دیتوس-بولتر (Dittus-Boelter)، وقتی خواص نانوسیال در رابطه جاگذاری شود، به‌دست آید. این نتایج پیشنهاد می‌کند که هیچ مکانیزم جدیدی در انتقال حرارت برای نانوسیالات وجود ندارد. رئا و همکاران [4] بااستفاده از نانوسیالات Al_2O_3 و ZrO_2 در آب در جریان آرام در حال توسعهٔ گرمایی دریافتند که اعداد ناسلت محلی اندازگیری‌شده از آزمایش با نتایج تحلیلی مطابقت دارد. نتایج آنها در جریان آرام نشان می‌دهد که نانوسیالات رفتاری مشابه با مخلوط‌های همگن از خود نشان می‌دهند. فتوکیان و اصفهانی [5] انتقال حرارت جابه‌جایی و افت فشار را در نانوسیال رقیق آب و اکسید مس در جریان توربولانس به‌صورت آزمایشگاهی مطالعه کردند. نتایج آزمایش‌های آنها نشان می‌دهد که مقاومت در برابر جاری شدن حتی در تراکم پایین نانوذرات نسبت به سیال پایه چشم‌گیر است و رابطهٔ تئوری بونگورنو

نتایج آزمایشگاهی را به‌خوبی پیش‌بینی می‌کند. پاک و چو [6] انتقال حرارت و اصطکاک نانوسیال‌های آب- اکسید آلومینیوم و آب– دی‌اکسید تیتانیوم را در لوله به‌صورت آزمایشگاهی مطالعه کردند. آزمایش‌های آنها نشان داد که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در تراکم حجمی 3%، به‌میزان 12% از سیال خالص بیشتر است. این در حالی است که افزایش چشم‌گیری در ویسکوزیته نسبت به سیال پایه صورت می‌گیرد. بیانکو و همکاران [7] جابه‌جایی اجباری در لوله را در جریان توربولانس به‌روش عددی مطالعه کردند. آنها از روشی تک‌فاز و دوفاز برای شبیه‌سازی عددی استفاده کردند و نتایج آنها توافق خوبی با روابط ارائه‌شده دارد. بهزادمهر و همکاران [8] انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری را درون یک لولهٔ دایره‌ای در محیط نانوسیال آب- اکسید مس (Water/Cuo) با دو روش تک‌فازی و دوفازی مطالعه کردند. آنها گزارش کردند که نتایج تحلیل دوفازی به نتایج داده‌های آزمایشگاهی نزدیک‌تر است. درعوض یو و همکاران [9] در مؤسسه آرگون در سال 2011 در یک جمع‌بندی عنوان کردند که به‌منظور پیش‌بینی ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در جریان آشفته و در تراکم‌های پایین نانوذرات، می‌توان نانوسیال را یک محیط همگن درنظر گرفت و از تئوری‌های تک‌فازی برای محاسبهٔ انتقال حرارت استفاده کرد.

مطابق با تحقیقات صورت‌گرفته انتظار می‌رود که انتقال حرارت در نانوسیالات، دراثر افزایش سرعت ناشی از اثرات اختلاطی مرتبط با حرکت براونی نانوذرات، بیشتر شود. این اثرات اختلاطی دراصطلاح به‌عنوان اثر پراکندگی یا تفرق حرارتی [10] شناخته می‌شود؛ لذا به‌دلیل وابستگی این پراکندگی حرارتی به حضور نانوذرات، به این ذرات ریز معلق در سیال پایه دراصطلاح ترموفیزیکی عناصر پراکندگی یا تفرق حرارتی می‌گویند. لازم به ذکر است که از اینجا به بعد، در متن این مقاله مقصود از اصطلاح عناصر تفرق، همان نانوذرات می‌باشد. بررسی جنبه‌های دیگری از اثرات پراکندگی حرارتی در نانوسیالات را می‌توان در برخی از آثار اخیر [16-11] یافت. لی و ژوان [17] افزایش 60% در انتقال حرارت هم‌رفتی در داخل یک کانال پرشده با نانوسیال را گزارش کردند. این افزایش قابل‌توجه نشان می‌دهد که پراکندگی یا تفرق حرارتی مکانیسم اصلی برای انتقال حرارت در داخل جریان هم‌رفتی است. چالش جدید پیدا کردن روش دیگری برای بهبود عملکرد سیستم‌های خنک‌کننده است. همچنین افزایش انتقال حرارت جابه‌جایی در داخل کانال از طریق کنترل اثرات تفرق حرارتی توسط خالد و وفایی [18] مورد تحلیل قرار گرفته است .

شاه‌نظری و همکاران [19] دو دیدگاه تک‌فازی و دوفازی در انتقال حرارت در داخل یک کانال دوبعدی پرشده با مادهٔ متخلخل با دمای دیوارهٔ ثابت را به‌طور جداگانه موردبررسی قرار داده‌اند. همچنین اثرات تفرق حرارتی جریان نانوسیال غیرنیوتنی روی یک صفحهٔ عمودی توسط کامسباران و سیباندا [19] مورد بررسی قرار گرفته است.

در تحقیق حاضر، روشی برای افزایش شاخصه‌های انتقال حرارت از طریق استفاده از نانوسیال با خواص پراکندگی حرارتی مناسب پیشنهاد شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. این افزایش در انتقال حرارت نانوسیال را می‌توان به دو روش خاص کنترل کرد. روش اول بر پایهٔ انتخاب یک توزیع مناسب برای نانوذرات پخش‌شده در داخل کانال می‌باشد؛ روش دوم کنترل اثرات تفرق حرارتی نانوذرات از طریق تزریق جزئی ذرات نانو با دو آرایش تزریق مرکزی و تزریق مرزی می‌باشد. همچنین کنترل اثرات تفرق حرارتی و درنهایت میزان انتقال حرارت صورت‌گرفته در نانوسیال علاوه بر دو روش ذکرشده به عوامل دیگری همچون اندازهٔ نانوذرات، خواص فیزیکی نانوذرات، حضور نیروهای مغناطیسی همراه با نانوذرات مغناطیسی، نیروهای گریز از مرکز و نیروهای الکترواستاتیک همراه با نانوذرات باردار الکتریکی

بستگی دارد. توزیع‌های مختلفی از نانوذرات را می‌توان بااستفاده از ترکیباتی متفاوت از روش‌های فوق به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، نانوذرات چگال‌تر مانند نانوذرات مس و یا ذرات با اندازهٔ بزرگ‌تر تمایل به تعلیق در ارتفاعات پایین‌تر در مادهٔ مبرد را دارند. بااین‌حال، نانوذرات با چگالی کمتر مانند نانوذرات کربن و یا ذرات با اندازهٔ کوچک‌تر تمایل به تعلیق در ارتفاعات بالاتر مایعات چگال‌تر مانند محلول‌های آبی و فلزات مایع را دارند؛ به‌این‌ترتیب، خواص پراکندگی حرارتی غیرهمگن را می‌توان به‌دست آورد. اثرات گریز از مرکز تمایل به تولید خواص پراکندگی حرارتی متمرکز در نزدیکی حداقل یکی از مرزها را دارد. حرکت براونی محیط مویین معلق موجب افزایش خواص پراکندگی حرارتی به‌خصوص در نزدیکی صفحات دستگاه‌های خنک‌کننده می‌شود و می‌توان آن را با یک سیستم تعلیق مناسب برای به‌دست آوردن هرگونه خواص پراکندگی حرارتی موردنیاز استفاده کرد.

در این تحقیق، افزایش انتقال حرارت در داخل یک کانال پرشده با مایع مبرد همراه با خواص پراکندگی حرارتی مختلف، تحلیل می‌شود. ترتیبات مختلف برای نانوذرات و یا عناصر پراکنده درنظر گرفته می‌شود. در یک آرایش خاص، نانوذرات یا همان عناصر پراکنده به‌صورت یکنواخت در نزدیکی مرکز کانال ترتیبات توزیع شده‌است. در آرایش دیگر، آنها به‌طور یکنواخت در نزدیکی مرز کانال توزیع شده‌اند. معادلات انرژی برای هر کدام از مناطق مربوطه به‌شکل بی‌بعد درخواهند آمد. نتایج عددی برای عدد ناسلت و توزیع درجه‌حرارت ارائه شده است. لازم به ذکر است که در مقالهٔ حاضر با بهره‌گیری از مدل‌سازی و معادلات حاکم مقالهٔ خالد و وفایی [18]، جنبه‌های مستقلی از مسئله موردتوجه قرار گرفته است و توجه به پارامترهای فیزیکی مهم و بررسی دقیق توزیع‌های مختلف نانوذرات، هدف کار حاضر بوده است.

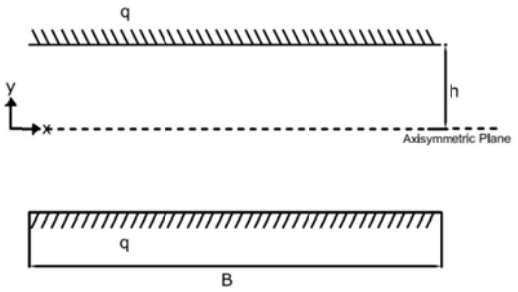
ازجمله نتایج مستقل و نوآوری‌های موجود در این مقاله می‌توان به بررسی تغییرات عدد ناسلت روی دیواره در طول کانال اشاره کرد. همچنین بررسی اثرات ضخامت منطقه تفرق حرارتی بر توزیع دمای بی‌بعد عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی در دو آرایش مرکزی و مرزی و توجه دقیق‌تر به تأثیرات عدد پکله بر ویژگی‌های حرارتی مسئله ویژگی برجستهٔ دیگر این مقاله می‌باشد. ضمناً در مقالهٔ حاضر به بررسی اثرات کسر حجمی عناصر تفرق (نانوذرات) و ضریب تفرق حرارتی بر عدد ناسلت دیواره در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای سه تابع توزیع یکنواخت، سهموی و نمایی نانوذرات پرداخته شده است.

مدل‌سازی ریاضی

جریان سیال داخل کانال دوبعدی به‌ارتفاع 2h و طول B درنظر گرفته می‌شود. محور x درامتداد خط مرکزی کانال و محور y درجهت عمود بر آن فرض می‌شود (شکل ۱). سیال عبوری که می‌تواند به‌صورت سیال خالص و یا نانوسیال باشد، یک سیال نیوتنی با خواص متوسط ثابت (به‌جز هدایت حرارتی برای محاسبهٔ اثرات پراکندگی حرارتی) فرض شده است که با دمای T_1 وارد کانال می‌شود. شار گرمایی یکنواخت و ثابت q به دو دیوارهٔ کانال اعمال می‌شود. معادلهٔ انرژی در این شرایط به‌صورت زیر است [18]:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \qquad (۱)$$

میدان سرعت u در داخل کانال توسعه‌یافته فرض می‌شود. حجم عناصر تفرق بسیار کوچک است به‌طوری‌که پروفیل سرعت را می‌توان به‌شکل سهموی درنظر گرفت.



شکل ۱ دیاگرام شماتیک و سیستم مختصات

$$\frac{u}{u_m}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right) \qquad (۲)$$

وقتی u_m سرعت متوسط جریان است. برای نانوسیال یا همان رژیم تفرق حرارتی پارامتر ρc_p باید به‌صورت $(\rho c_p)_{nf}$ تعریف شود [17]:

$$(\rho c_p)_{nf}=(1-\varphi)(\rho c_p)_f+\varphi\,(\rho c_p)_p \qquad (۳)$$

درحالی‌که زیرنویس‌های f, nf و p به‌ترتیب به نانوسیال یا همان رژیم تفرق، سیال خالص و ذرات جامد اشاره دارند. پارامتر φ هم کسر حجمی المان‌های تفرق یا همان نانوذرات است که برابر با نسبت حجم ذرات نانو به حجم کل است. ذرات معلق فوق‌العاده ریز از قبیل نانوذرات، نانولوله‌ها یا عناصر تفرق در سیال نقش مهمی در انتقال حرارت در داخل کانال بازی می‌کنند که این نقش به‌واسطهٔ حرکت براونی (Brownian motion) است که تمایل به افزایش اختلاط سیال دارد. این عامل انتقال حرارت را افزایش می‌دهد. تصحیحات ارائه‌شده در مقالهٔ لی و ژوان [17] برای اعداد ناسلت در جریان‌های لایه‌ای یا آشفته نشان می‌دهد که انتقال حرارت در حضور نانوذرات افزایش می‌یابد که این میزان دراثر افزایش کسر حجمی نانوذرات، قطر نانوذرات و سرعت جریان، بیشتر نیز خواهد شد. ژوان و روتزل [10] برپایهٔ مدل ارائه‌شده در مرجع [17] مدل خطی زیر را برای هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال ارائه کردند:

$$k=k_0+C^*\,(\rho c_p)_{nf}\,\varphi hu \qquad (٤)$$

ضریب تفرق حرارتی نانوسیال (C^*) وابسته به ویژگی‌های فیزیکی نانوذرات (عناصر تفرق حرارتی) می‌باشد [18]. به‌عبارت دیگر، اندازه و شکل فیزیکی نانوذرات پارامترهای تعیین‌کنندهٔ ضریب تفرق حرارتی می‌باشد. معادلهٔ (٤) یک برآورد اولیه برای تعیین هدایت حرارتی نانوسیال می‌باشد که آن را به‌صورت خطی به ظرفیت حرارتی نانوذرات شناور در سیال مرتبط می‌کند. مطابق با این رابطه، k_0 هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال در شرایط سکون $(u=0)$ می‌باشد. با ایجاد جریان در میدان سیال، هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال باتوجه به خواص هندسی نانوذرات و از طریق پارامتر C^*, مطابق با معادلهٔ (٤) تغییر می‌کند. به لحاظ فیزیکی معادلهٔ فوق یک تقریب درجه‌اول برای هدایت حرارتی نانوسیال است که دارای یک رابطهٔ خطی با ظرفیت گرمایی ذرات نانو می‌باشد. هدایت حرارتی مؤثر نانوذرات تحت شرایط سکون $(u=0)$ از رابطهٔ پیشنهادشده توسط واسپ [21] به‌دست می‌آید:

$$\frac{k_0}{k_f}=\frac{k_p+2k_f-2\varphi(k_f-k_p)}{k_p+2k_f+2\varphi(k_f-k_p)} \qquad (۵)$$

در این تحقیق از نانوذرات مس در آب به‌عنوان سیال پایه استفاده می‌شود. خواص ترموفیزیکی آنها در جدول (۱) ارائه شده است. باتوجه به رابطهٔ (۵)، وجود 2% کسر حجمی نانوذرات مس در داخل سیال به‌میزان 8% مقدار k_P را نسبت به هدایت حرارتی سیال خالص افزایش می‌دهد. از سوی دیگر، نتایج تجربی در کار لی و ژوان [17] نشان می دهد که حضور نانوذرات معلق مس با 2% کسر حجمی، حدود 60% ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را درمقایسه با سیال خالص

افزایش می‌دهد. این نشان می‌دهد که تفرق حرارتی مکانیسم اصلی برای افزایش انتقال حرارت در داخل کانال پرشده با نانوسیال در شرایط هم‌رفتی است. بی‌بعدسازی معادلهٔ (۱) با متغیرهای بی‌بعد زیر صورت می‌گیرد [18]:

$$X=\frac{x}{h}, Y=\frac{y}{h}, U=\frac{u}{u_m}, \theta=\frac{T-T_1}{qh/k_f} \quad (٦)$$

با جای‌گذاری متغیرهای بی‌بعد فوق در معادلهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$PeU\frac{\partial\theta}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{k}{k_f}\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right) \quad (٧)$$

درحالی‌که عدد پکله (Peclet number) به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$Pe=\left(\frac{\rho c_p u_m h}{k_f}\right) \quad (٨)$$

باتوجه به مدل ارائه‌شده در مرجع [17] می‌توان نوشت:

$$\frac{k}{k_f}=\frac{k_0}{k_f}+\lambda\frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f}\varphi U_{nf},\ \lambda=C^* Pe_f, \quad (٩)$$
$$Pe_f=\left(\frac{(\rho c_p)_f u_m h}{k_f}\right)$$

جدول ۱ خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانوذرات

ویژگی فیزیکی	سیال پایه (آب)	نانوذرات (مس)
$k(W/mK)$	0.6	391
$c_P(kJ/kgK)$	4.192	0.398
$\rho(kg/m^3)$	997.1	8933

در این تحقیق بخشی از حجم سیال تحت تأثیر اثرات پراکندگی حرارتی وابسته به ذرات معلق نانو درنظر گرفته می‌شود، درحالی‌که بخش دیگر تنها حاوی سیال خالص است. بارزترین روش برای به‌دست آوردن توزیع خاص برای عناصر پراکندهٔ حرارتی، داشتن سطوح گسترش‌یافتهٔ مویین هادی روی صفحات کانال است. حجم این ساختار به‌اندازهٔ کافی کوچک است که فرض توزیع سهموی برای میدان سرعت هم‌چنان معتبر است. همچنین، خواص پراکندگی حرارتی غیر همگن را می‌توان با داشتن نانوذرات با تراکم‌های مختلف و یا اندازه‌های مختلف به‌دست آورد. نانوذرات یا عناصر پراکنده سنگین‌تر به‌دلیل نیروهای گرانشی تمایل به تعلیق نزدیک به صفحهٔ پایینی دارند، درحالی‌که نانوذرات یا عناصر پراکنده سبک‌تر به‌علت نیروهای شناوری تمایل به تعلیق نزدیک به صفحهٔ بالایی را دارند. با دادن خاصیت مغناطیسی به ذرات نانو و اعمال میدان مغناطیسی متمرکز مناسب می‌توان عناصر پراکنده یا همان نانوذرات را بیشتر در نزدیکی دیواره‌های کانال متمرکز کرد. به‌این‌ترتیب، تفاوت در خواص پراکندهٔ حرارتی نانوسیال می‌تواند به‌دست آید. خواص پراکندهٔ حرارتی مناسب می‌تواند بااستفاده از روش‌های مختلف بحث شده و توسط معادلات (۳-۵) به‌دست آید. معادلهٔ انرژی بی‌بعد برای بخش شامل پراکندگی حرارتی (حضور نانوذرات) به‌شکل زیر است:

$$Pe_f\left(\frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f}\right)U_{nf}\frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X}=$$
$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\left(\frac{k_0}{k_f}+\lambda\frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f}\varphi U_{nf}\right)\frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y}\right) \quad (١٠)$$

درحالی‌که معادلهٔ انرژی برای حجم حاوی سیال خالص عبارت است از:

$$Pe_f U_f \frac{\partial \theta_f}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial Y^2} \quad (11)$$

در این کار توزیع‌های مختلفی برای نانوذرات ارائه خواهد شد. در یکی از این توزیع‌ها همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، منطقه‌ای که با اثرات پراکندگی حرارتی (نانوذرات) درنظر گرفته می‌شود، منطقه‌ای مستطیل‌شکل به‌ارتفاع $2l$ حول خط مرکزی کانال است. در توزیع دیگر منطقه شامل اثرات پراکندگی حرارتی (نانوذرات) تنها در دو منطقه مستطیل‌شکل چسبیده به دیواره‌های کانال با ارتفاع یکسان l درنظر گرفته می‌شود (شکل ۳). شرایط مرزی برای آرایش مرکزی (آرایش نوع اول) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\theta_{nf}(X,0)}{dY} = 0,\\
&\left(\frac{k_0}{k_f} + \lambda \frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f} \varphi U(\Lambda)\right) \frac{d\theta_{nf}(X,\Lambda)}{dY} =\\
&\frac{d\theta_f(X,\Lambda)}{dY},\\
&\theta_f(X,\Lambda) = \theta_{nf}(X,\Lambda),\\
&\frac{d\theta_f(X,1)}{dY} = 1
\end{aligned} \quad (12)$$

شرایط مرزی برای آرایش مرزی (آرایش نوع دوم) به‌صورت زیر است:

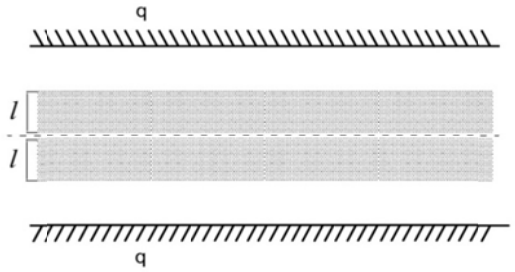
$$\begin{aligned}
&\frac{d\theta_f(X,0)}{dY} = 0,\\
&\left(\frac{k_0}{k_f} + \lambda \frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f} \varphi U(1-\Lambda)\right) \frac{d\theta_{nf}(X,1-\Lambda)}{dY} =\\
&\frac{d\theta_f(X,1-\Lambda)}{dY},\\
&\theta_f(X,1-\Lambda) = \theta_{nf}(X,1-\Lambda),\\
&\left(\frac{k_0}{k_f} + \lambda \frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f} \varphi U(1)\right) \frac{d\theta_f(X,1)}{dY} = 1
\end{aligned} \quad (13)$$

در معادلات فوق $\Lambda = l/h$ ضخامت بی‌بعد منطقهٔ تفرق. البته می‌توان توزیع‌های دیگری ازجمله توزیع سهموی یا نمایی را برای عناصر تفرق درنظر گرفت. در مسئلهٔ حاضر تعداد کل عناصر تفرق (ذرات نانو) ثابت درنظر گرفته می‌شود. به این ترتیب، کسر حجمی عناصر تفرق برای آرایش مرکزی و یا مرزی در توزیع یکنواخت، به ضخامت آنها بستگی دارد و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [18]:

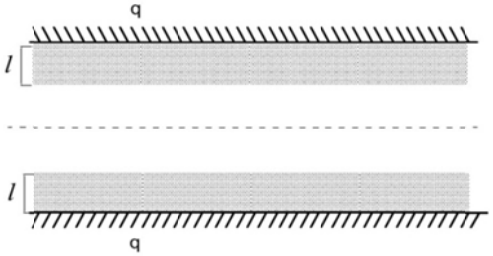
$$\varphi = \frac{\varphi_0 h}{l} = \frac{\varphi_0}{\Lambda} \quad (14)$$

در این رابطه φ_0 کسر حجمی نانوسیال وقتی که کل کانال را پر کرده است، می‌باشد.

در عمل، ایجاد توزیع‌های متفاوت (غیریکنواخت) برای پخش ذرات نانو در جریان سیال نسبت به توزیع یکنواخت دارای پیچیدگی‌ها و دشواری‌هایی خواهد بود، اما با تکنولوژی و تجهیزات مدرن امروزی غیرممکن نیست.



شکل ۲ آرایش مرکزی برای ناحیهٔ تفرق حرارتی (ناحیهٔ تزریق نانوذرات)



شکل ۳ آرایش مرزی برای ناحیهٔ تفرق حرارتی (ناحیهٔ تزریق نانوذرات)

دو توزیع پرکاربرد در این زمینه شامل توابع سهموی و نمایی و توزیع سهموی به‌صورت زیر است [18]:

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 + D_c \left((\frac{1}{3} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \right) \qquad (۱۵)$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0 D_e}{e^{D_e} - 1} e^{D_e Y} \qquad (۱۶)$$

باید توجه داشت که کسر حجمی متوسط برای هر توزیع بدون توجه به مقادیر D_c و D_e برابر φ_0 است. یکی از اهداف این پژوهش به‌دست آوردن مقادیری از D_c و D_e است که حداکثر انتقال حرارت را در داخل کانال تولید کند.

با حل معادلات حاکم (۱۰ و ۱۱) تحت شرایط مرزی (۱۲ و ۱۳) می‌توان توزیع دمای داخل کانال را به‌دست آورد. دمای متوسط روی دیوارهٔ کانال $(\bar{\theta}_w)$ از رابطهٔ زیر قابل‌محاسبه می‌باشد:

$$\bar{\theta}_w = \frac{\int_0^B \theta(X, h) dX}{B} \qquad (۱۷)$$

همچنین دمای حجمی متوسط (θ_m) در هر مقطع X کانال از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_m(X) = \int_0^1 U(Y) \theta(X, Y) dY \qquad (۱۸)$$

بنابراین عدد ناسلت روی دیوارهٔ کانال در هر مقطع از X را می‌توان به‌شکل زیر به‌دست آورد:

$$Nu = \frac{h_c h}{k_f} = \frac{1}{\theta_w(X) - \theta_m(X)} \qquad (۱۹)$$

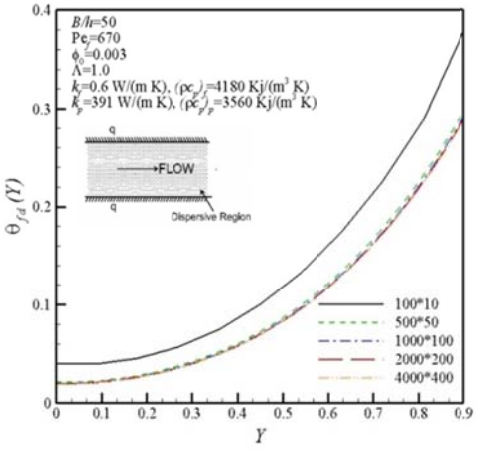
در رابطهٔ اخیر h_c ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی برروی صفحات کانال است و $\theta_w(X)$ دمای صفحات کانال در هر مقطع X از کانال است.

روش عددی

روش عددی مورد استفاده در این تحقیق برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم، روش تفاضل محدود است. معادلات (۹ و ۱۰) بااستفاده از تفاضل مرکزی سه نقطه درجهت Y و تفاضل رو به عقب (Backward) برای گرادیان دما درجهت X گسسته می‌شوند. درنتیجه سیستم سه‌قطری از معادلات جبری در $X = \Delta X$ حاصل می‌شود که بااستفاده از الگوریتم توماس [22] حل خواهد شد. این روش برای مقادیر متوالی X از ناحیه ورودی کانال تا شرایط توسعه‌یافتگی گرمایی و زمانی که X به‌مقدار B برسد ادامه می‌یابد. لازم‌به‌ذکر است همان‌طور که قبلاً نیز عنوان شد، در معادلات حاکم بر مسئله پروفیل سرعت در داخل کانال توسعه‌یافته فرض شده است و از آنجا که حجم عناصر تفرق بسیار کوچک است پروفیل سرعت را می‌توان به‌شکل سهموی و معادلهٔ (۲) درنظر گرفت.

مطالعهٔ شبکه. دستگاه معادلات غیر خطی حاکم بر مسئله، بااستفاده از روش تفاضل محدود، در محیط برنامه نویسی فرترن (Fortran)و با الگوریتم ضمنی حل شده است. به‌منظور بررسی استقلال جواب‌های به‌دست‌آمده از شبکهٔ حل، معادلات حاکم بااستفاده از چندین شبکه حل شد. تأثیر شبکه بر پارامترهای مختلف به‌دقت مورد بررسی قرار گرفت. اگر تعداد تقسیمات شبکه درجهت محوری X با NX و تعداد تقسیمات شبکه درجهت عرضی Y با NY نشان داده شود آن‌گاه به‌ازای $NX * NY$ مختلف می‌توان حل معادلات را انجام داد. به‌عنوان نمونه در شکل (٤) پروفیل دما در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی $(X = 50)$ با

فرض توزیع سهموی برای میدان سرعت برای جریان درحالتی‌که عناصر تفرق (نانوذرات) از کل عرض کانال می‌گذرند، داده شده است. مشاهده می‌شود وقتی تعداد گره‌های شبکه بیشتر از 100×1000 گره می‌شود، دیگر ظریف‌تر کردن شبکه تأثیری در حل انجام‌شده ندارد، بنابراین یک شبکهٔ 100×1000 به‌عنوان شبکهٔ حل انتخاب شده است.



شکل ٤ مطالعه و انتخاب شبکه

حل تحلیلی و اعتبارسنجی نتایج

با درنظر گرفتن حالت خاص و ساده‌شده‌ای از این مسئله شامل جریان توسعه یافته هیدرودینامیکی یکنواخت درون کانال به‌طوری‌که $U=1$ باشد، معادلات حاکم (۱۰ و ۱۱) به‌صورت زیر ساده خواهند شد:

$$\frac{\partial^2\theta_{nf}}{\partial Y^2}=\frac{1}{\left(\frac{k_0}{k_f}+\lambda\frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f}\varphi\right)} \qquad (۲۰)$$

$$\frac{\partial^2\theta_f}{\partial Y^2}=1 \qquad (۲۱)$$

با تعریف $A=\frac{k_0}{k_f}+\lambda\frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_f}\varphi$ و همچنین حل معادلات دیفرانسیل سادهٔ (۲۰ و ۲۱) برای آرایش مرکزی (شکل ۲ و شرایط مرزی ۱۲) به‌صورت زیر خواهد بود:

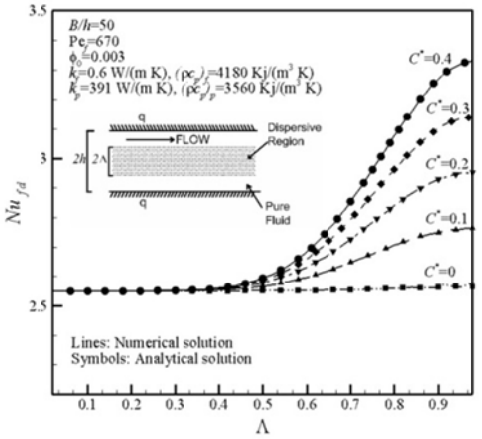
$$\frac{\theta_w(X)-\theta_{nf}(X,Y)}{\theta_w(X)-\theta_m(X)}=\frac{1.5\left(\Lambda^2-Y^2\right)+1.5A\left(1-\Lambda^2\right)}{\Lambda^3-A\left(\Lambda^3-1.5\Lambda^2+0.5\right)+1.5A\left(1-\Lambda^2\right)},\quad 0<Y<\Lambda \qquad (۲۲)$$

$$\frac{\theta_w(X)-\theta_f(X,Y)}{\theta_w(X)-\theta_m(X)}=\frac{1.5A\left(1-Y^2\right)}{\Lambda^3-A\left(\Lambda^3-1.5\Lambda^2+0.5\right)+1.5A\left(1-\Lambda^2\right)},\quad \Lambda<Y<1 \qquad (۲۳)$$

بنابراین عدد ناسلت روی دیوارهٔ کانال در هر مقطع از X در این حالت به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Nu_{fd}=\frac{1}{\theta_w(X)-\theta_m(X)}=\frac{3A}{\Lambda^3-A\left(\Lambda^3-1.5\Lambda^2+0.5\right)+1.5A\left(1-\Lambda^2\right)} \qquad (۲٤)$$

اکنون بااستفاده از حل تحلیلی انجام‌شده و مقایسهٔ آن با نتایج حل عددی در حالت متناظر، اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل عددی اختلاف محدود انجام خواهد گرفت. در شکل (۵) مقایسهٔ دقیقی بین نتایج حل عددی و تحلیلی برای تأثیر ضریب تفرق بر عدد ناسلت روی دیوارهٔ کانال در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی ($X=50$) و جریان یکنواخت برای مقادیر مختلف Λ در آرایش مرکزی نانوذرات ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود توافق بسیار خوب و دقیقی بین آنها وجود دارد که حاکی از صحت و دقت مناسب روش عددی مورد استفاده است.

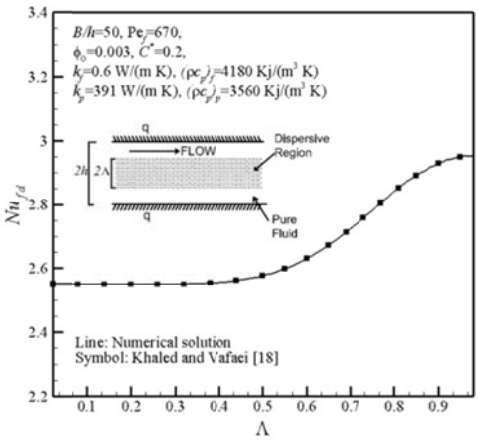


شکل ۵ مقایسهٔ نتایج عددی و تحلیلی برای تأثیر ضریب تفرق برعدد ناسلت دیوارهٔ کانال در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای آرایش مرکزی

همچنین به‌منظور اعتبارسنجی بیشتر، نتایج حل حاضر با نتایج به‌دست‌آمده از مقالهٔ خالد و وفایی [18] مقایسه می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده برای تغییرات عدد ناسلت روی دیوارهٔ کانال در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی ($X = 50$) با ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی در آرایش مرکزی نانوذرات، درمقایسه با نتایج ارائه‌شده در مقالهٔ خالد و وفایی [18]، در شکل (٦) ارائه شده است. همان‌طور که از این شکل دیده می‌شود توافق بسیار دقیق و نزدیکی بین این نتایج وجود دارد که صحت و دقت حل عددی حاضر را بیش از پیش مورد تأیید قرار می‌دهد.

تحلیل نتایج و بحث

همان‌طور که در بخش (۲) ذکر شد، حل این مسئله برای دو توزیع متفاوت نانوذرات و فرض پروفیل سهموی برای میدان سرعت انجام شده است. در توزیع مرکزی (شکل ۲)، منطقه‌ای مستطیل‌شکل به‌ارتفاع $2l$ حول خط مرکزی کانال شامل اثرات پراکندگی حرارتی (نانوذرات) و ناحیهٔ باقی‌مانده شامل حرکت سیال خالص درنظر گرفته می‌شود. در توزیع مرزی (شکل ۳)، منطقه شامل اثرات پراکندگی حرارتی (نانوذرات) تنها در دو منطقهٔ مستطیل‌شکل چسبیده به دیواره‌های کانال با ارتفاع یکسان l درنظر گرفته می‌شود و ناحیهٔ باقی‌مانده شامل حضور سیال خالص می‌باشد. در این قسمت به تحلیل و بحث در مورد نتایج این دو توزیع نانوذرات داخل کانال پرداخته می‌شود.

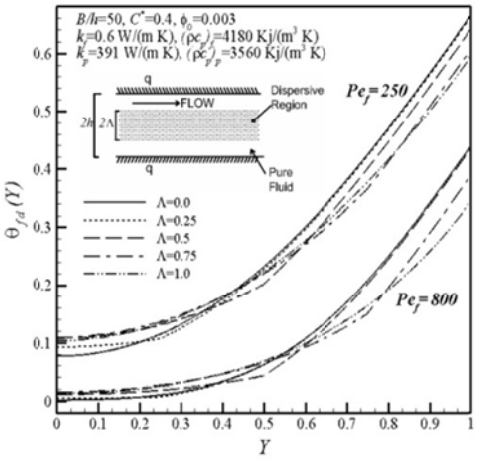


شکل ٦ مقایسهٔ نتایج عددی برای تأثیر عدد پکله بر عدد ناسلت دیوارهٔ کانال در ناحیهٔ توسعه‌یافته برای آرایش مرکزی

توزیع مرکزی. در شکل (۷) توزیع دمای عرضی داخل کانال در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای مقادیر مختلف ضخامت ناحیهٔ تزریق نانوذرات (Λ) و اعداد پکلهٔ مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود و مطابق شکل با افزایش ضخامت ناحیهٔ حضور نانوذرات و نزدیک شدن این ناحیه به دیواره‌های کانال، پروفیل دمای بی‌بعد یا همان اختلاف دما به‌شدت کم می‌شود زیرا اثر مستقیم حضور نانوذرات افزایش ضریب انتقال گرما است که باتوجه به شرط مرزی شار گرمای ثابت، اختلاف دما باید روند کاهشی داشته باشد. همچنین تفاوت شیب نمودارها در مرز بین ناحیهٔ تفرق (نانوذرات) و ناحیهٔ حضور سیال خالص قابل‌توجه است. همچنین با افزایش عدد پکله از $Pe_f = 250$ به $Pe_f = 800$ دمای عرضی نانوسیال

ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی داخل کانال به‌میزان زیادی کاهش می‌یابد. این روند باتوجه به کاهش ضریب هدایت حرارتی سیال قابل‌توجیه است.

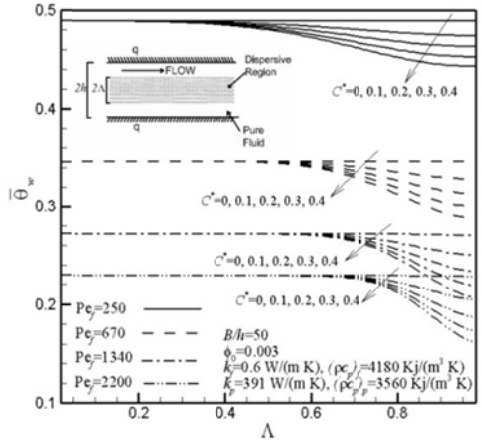
در شکل (۸) تأثیر ضریب تفرق C^* بر درجه‌حرارت متوسط کل صفحه برای مقادیر مختلف ضخامت ناحیهٔ تفرق (Λ) به‌ازای اعداد پکله مختلف نشان داده شده است. همان‌طورکه دیده می‌شود دمای متوسط صفحه برای $\mathrm{Pe_f} = 250$ در مقادیر Λ کمتر از 0.2 تقریباً بدون تغییر است، درحالی‌که این مقدار برای $Pe_f = 670$ تقریباً 0.37 است. همچنین مرز تغییرات دمای متوسط صفحه برای $\mathrm{Pe_f} = 1340$ و $\mathrm{Pe_f} = 2200$ به‌ترتیب حدوداً از اعداد 0.5 و 0.58 شروع می‌شود.



شکل ۷ تأثیر ضخامت منطقه تفرق حرارتی بر توزیع دمای بی‌بعد عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای آرایش مرکزی در اعداد پکلهٔ مختلف

حداکثر عدد ناسلت و یا همان حداقل درجه‌حرارت متوسط صفحه به‌ازای بیشترین مقدار ضریب تفرق اتفاق می‌افتاد که با افزایش بیشتر ضخامت ناحیهٔ حضور نانوذرات و نزدیک‌شدن این ناحیه به دیواره‌های کانال این رفتار دائماً تشدید می‌شود که باتوجه به تأثیرات ذرات نانو در افزایش ضریب انتقال حرارت، پدیده‌ای قابل پیش‌بینی است. از طرف دیگر نتیجهٔ مستقیم افزایش عدد پکله، کاهش شدید گرادیان دما است. دلیل این است که گرادیان دمایی در نزدیکی خط مرکزی جریان با افزایش Pe_f کاهش می‌یابد که موجب کاهش اثرات پراکندگی حرارتی می‌شود.

در شکل (۹) تأثیر ضریب تفرق C^* بر عدد ناسلت در خروجی کانال (ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی) برای مقادیر مختلف ضخامت ناحیهٔ تفرق (Λ) به‌ازای اعداد پکلهٔ مختلف نشان داده شده است.



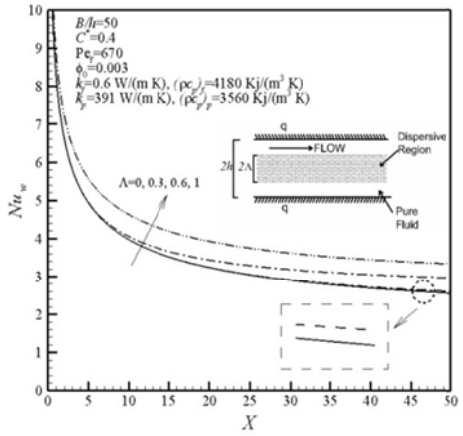
شکل ۸ تأثیرات ضریب تفرق حرارتی، عدد پکله و ضخامت منطقهٔ تفرق بر دمای متوسط بی‌بعد دیوارهٔ کانال برای آرایش مرکزی

ازآنجاکه مطابق رابطهٔ سرمایش نیوتن، تغییرات عدد ناسلت با گرادیان دما رابطهٔ عکس دارند، لذا انتظار می‌رود روند تغییرات عدد ناسلت عکس رفتار گرادیان دما در شکل (۷) باشد و همان‌طور که در شکل (۸) نیز دیدیم عدد ناسلت روی دیواره برای $\mathrm{Pe_f} = 250$ در مقادیر Λ کمتر از 0.2 تقریباً بدون تغییر است، درحالی‌که این مقدار برای $\mathrm{Pe_f} = 670$ تقریباً 0.37 است. همچنین مرز تغییرات دمای متوسط صفحه برای $\mathrm{Pe_f} = 1340$ و $\mathrm{Pe_f} = 2200$ به‌ترتیب حدوداً از اعداد 0.5 و 0.58 شروع می‌شود.

این اعداد مرزی دقیقاً با مقادیر شکل (۷) متناظر

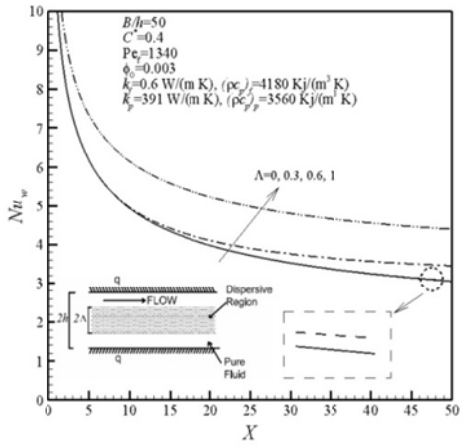
هستند. حداکثر عدد ناسلت روی دیواره و یا همان حداقل درجه‌حرارت متوسط صفحه به‌ازای بیشترین مقدار ضریب تفرق اتفاق می‌افتاد که با افزایش بیشتر ضخامت ناحیهٔ حضور نانوذرات و نزدیک شدن این ناحیه به دیواره‌های کانال این رفتار دائماً تشدید می‌شود که باتوجه به تأثیرات ذرات نانو در افزایش ضریب انتقال حرارت، پدیده‌ای قابل پیش‌بینی است. از طرف دیگر نتیجهٔ مستقیم افزایش عدد پکله، افزایش عدد ناسلت روی دیواره است.

تغییرات عدد ناسلت روی دیواره از نقطهٔ ورود تا خروج کانال به‌ازای مقادیر مختلف Λ در آرایش مرکزی نانوذرات در شکل‌های (۱۲-۱۰) به‌ترتیب برای اعداد پکله $\mathrm{Pe_f}=670$,$\mathrm{Pe_f}=1340$ و $\mathrm{Pe_f}=2200$ ارائه شده است.

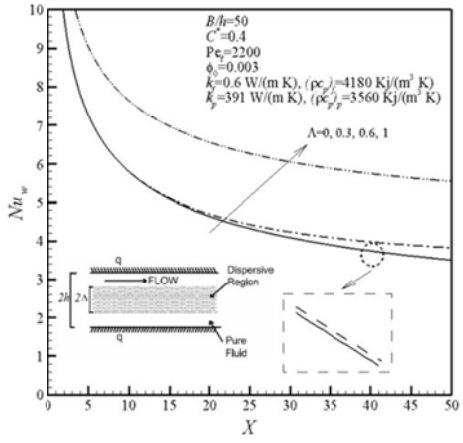


شکل ۱۰ تأثیر ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی بر عدد ناسلت دیواره برای $\mathrm{Pe_f}=670$ و آرایش مرکزی

همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌علت تأثیرات ناحیهٔ ورودی از نقطهٔ ورود تا ابتدای ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی عدد ناسلت دیواره به‌شدت کاهش می‌یابد، اما پس از ورود به بخش توسعه‌یافتهٔ حرارتی عدد ناسلت تقریباً به‌مقدار ثابتی خواهد رسید. افزایش عدد ناسلت دیواره دراثر افزایش ضخامت ناحیهٔ حضور نانوذرات و نزدیک شدن این ناحیه به دیواره‌ها نیز به‌خوبی قابل‌مشاهده و توجیه‌پذیر است.



شکل ۱۱ تأثیر ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی در آرایش مرکزی بر عدد ناسلت دیواره برای $\mathrm{Pe_f}=1340$ و آرایش مرکزی

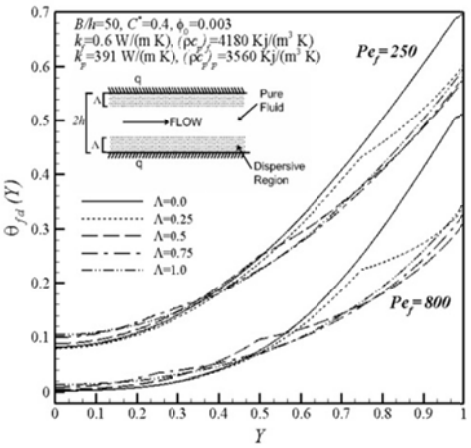


شکل ۱۲ تأثیر ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی در آرایش مرکزی بر عدد ناسلت دیواره برای $\mathrm{Pe_f}=2200$ و آرایش مرکزی

نکتهٔ دیگر این‌که با مقایسهٔ شکل‌های (۱۲-۱۰) می‌توان نتیجه گرفت که افزایش عدد پکله، افزایش عدد ناسلت دیواره را درپی دارد که باتوجه به توضیحات قبلی به‌خوبی قابل‌توجیه است.

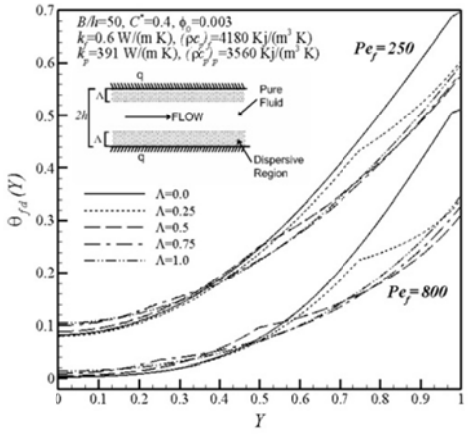
توزیع مرزی. توزیع عرضی گرادیان دما داخل کانال در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای مقادیر مختلف ضخامت ناحیهٔ تزریق نانوذرات (Λ) و اعداد پکلهٔ مختلف در شکل (۱۳) نشان داده شده است. دقیقاً مشابه با رفتار مشاهده‌شده در توزیع مرکزی در این

حالت نیز با افـزایش ضـخامت ناحیـهٔ حضـور عناصـر تفرق و نزدیک شدن این ناحیه به مرکز کانال، گرادیـان دمای داخل کانال به‌علـت حضـور بیشـتر نـانوذرات و افزایش ضریب انتقال گرما کم می‌شود. باز هم وضـوح تفـاوت شـیب نمودارهـا در مـرز بـین ناحیـهٔ تفـرق (نانوذرات) و ناحیهٔ حضور سـیال خـالص قابـل‌توجـه است. در این حالت نیز واضح است که با افزایش عـدد پکلـه از $Pe_f = 250$ بـه $Pe_f = 800$ دمـای عرضـی نانوسیال در ناحیهٔ توسعه‌یافته به‌علـت کـاهش ضـریب هدایت حرارتی سیال، کاهش می‌یابد.

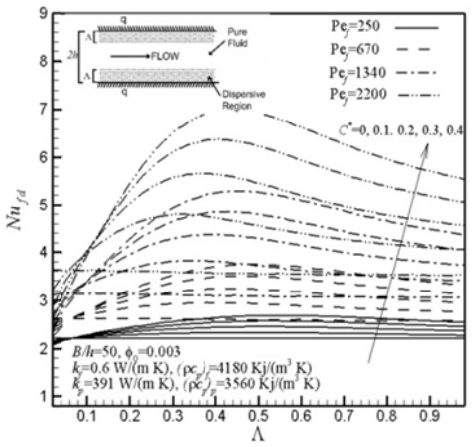


شکل ۱۳ تأثیر ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی بر توزیع دمای بی‌بعد عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای آرایش مرزی در اعداد پکلهٔ مختلف

همچنین در شکل‌های (۱٤ و ۱۵) تأثیرات ضریب تفرق C^* به‌ترتیب بر درجه‌حرارت متوسط کل صفحه و عدد ناسلت در خروجی کانـال (ناحیـهٔ توسـعه‌یافتـهٔ حرارتی) برای مقـادیر مختلـف Λ و Pe_f نشـان داده شده است. مسئلهٔ حائز اهمیت در اینجا این اسـت کـه برخلاف آرایـش مرکـزی کـه درجـه‌حـرارت متوسـط صـفحه (و متنـاظر بـا آن عـدد ناسـلت در ناحیـهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی) در مقـادیر کوچـک‌تـر Λ تقریبـاً بدون تغییر بود، در آرایش مـرزی ایـن مقـادیر بـه‌ازای تمامی مقادیر Λ متفاوت است.



شکل ۱٤ تأثیرات ضریب تفرق حرارتی، عدد پکله و ضخامت منطقهٔ تفرق بر دمای متوسط بی‌بعد دیوارهٔ کانال برای آرایش مرزی

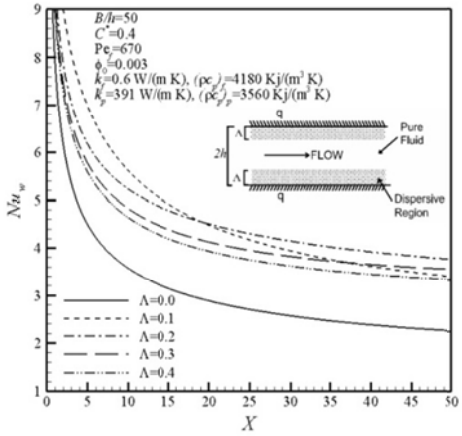


شکل ۱۵ تأثیرات ضریب تفرق حرارتی، عدد پکله و ضخامت منطقهٔ تفرق بر عدد ناسلت ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای آرایش مرزی

دلیل فیزیکی این موضوع این است که در آرایـش مرزی ذرات نانو از روی مرز صفحات تزریق می‌شوند، لذا تغییـر ضـخامت تزریـق ذرات نـانو از همـان ابتـدا موجب تأثیر بر ویژگی‌های حرارتی سیال ازجمله دما و عدد ناسلت خواهد شد.

باتوجه به این‌که در آرایش مرزی برخلاف آرایـش مرکزی تغییرات درجه‌حرارت متوسـط صـفحه و عـدد

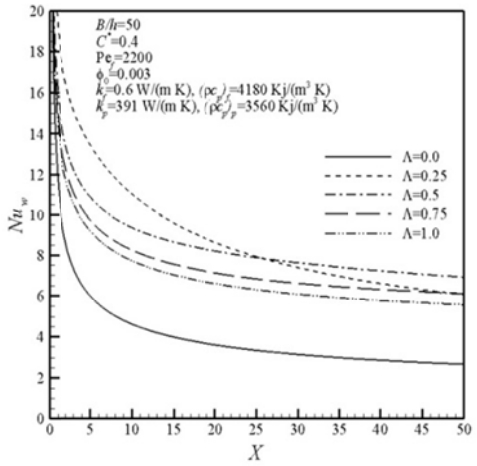
ناسلت خروجی با Λ به‌شکل یکنواخت نمی‌باشد، لذا در آرایش مرزی کمترین گرادیان دما و یا به‌عبارتی بیشترین عدد ناسلت خروجی به‌ازای مقدار خاصی از ضخامت ناحیهٔ تفرق (Λ) اتفاق می‌افتاد. این مقدار بهینه Λ برای $Pe_f = 250$ در حدود 0.53 و برای $Pe_f = 670$, $Pe_f = 1340$ و $Pe_f = 2200$ به‌ترتیب در حدود 0.5، 0.4 و 0.36 می‌باشد. باز هم توجه به این نکته ضروری است که نتیجهٔ افزایش عدد پکله، کاهش شدید گرادیان دما و افزایش عدد ناسلت می‌باشد.



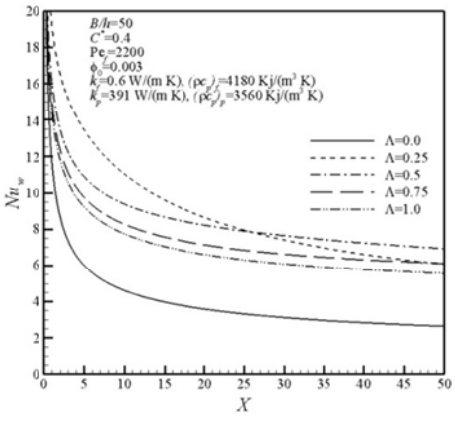
شکل ۱۶ تأثیر ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی در آرایش مرزی بر عدد ناسلت دیواره برای $Pe_f = 670$ و آرایش مرکزی

در شکل‌های (۱۶ و ۱۷) تغییرات عدد ناسلت روی صفحات کانال از نقطهٔ ورود تا خروج به‌ازای مقادیر متفاوت Λ در آرایش مرزی به‌ترتیب برای اعداد پکلهٔ $Pe_f = 670$ و $Pe_f = 2200$ ارائه شده است. همان‌طور که ذکر شد، تأثیرات ناحیهٔ ورودی از نقطهٔ ورود تا ابتدای ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی عدد ناسلت دیواره را به‌شدت کاهش می‌دهد، اما پس از ورود به بخش توسعه‌یافتهٔ حرارتی عدد ناسلت تقریباً به‌مقدار ثابتی خواهد رسید. مقایسهٔ شکل‌های (۱۶ و ۱۷) نشان می‌دهد که افزایش عدد پکله موجب افزایش قابل‌توجه عدد ناسلت دیواره می‌شود که باتوجه به روند شکل (۱۴) و توضیحاتی که در آن مورد داده شد، به‌خوبی قابل‌توجیه است.

به‌دلیل تأثیرات متضاد و اختلاطی رسانش ذرات نانو از یک سو و هدایت حرارتی جابه‌جایی ناشی از سرعت سیال از سوی دیگر، عدد ناسلت دیواره دراثر افزایش ضخامت ناحیهٔ حضور نانوذرات و نزدیک شدن این ناحیه به مرکز کانال دارای تغییرات منظم و پیش‌بینی‌شده‌ای نمی‌باشد.



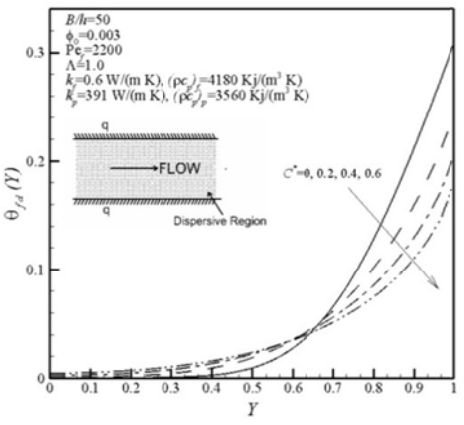
شکل ۱۷ تأثیر ضخامت منطقهٔ تفرق حرارتی در آرایش مرزی بر عدد ناسلت دیواره برای $Pe_f = 2200$ و آرایش مرکزی



شکل ۱۸ تأثیر ضریب تفرق حرارتی بر توزیع دمای بی‌بعد عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای کانال پرشده با تابع توزیع یکنواخت نانوذرات و $Pe_f = 670$

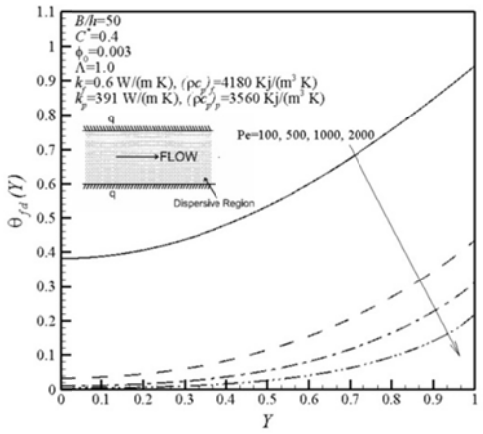
توزیع نانوذرات در کل کانال. در شکل‌های (۱۸ و ۱۹) پروفیل عرضی گرادیان دما داخل کانال اشباع‌شده از عناصر تفرق (نانوذرات) به‌صورت یکنواخت در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای مقادیر مختلف ضریب تفرق C^* به‌ترتیب برای اعداد پکلهٔ $\mathrm{Pe_f}=670$ و $Pe_f=2200$ ارائه شده است.

باتوجه به این شکل‌ها واضح است که با حضور ذرات نانو در داخل سیال، افزایش ضریب تفرق موجب افزایش گرادیان دما در نیمهٔ ابتدایی میدان جریان می‌شود، اما در نیمهٔ دوم که با جدارهٔ کانال در ارتباط است کاهش شدید گرادیان دما را دراثر افزایش ضریب تفرق می‌توان مشاهده کرد به‌طوری‌که به‌ازای تمامی مقادیر C^*, گرادیان دمای بی‌بعد در یک مختصات مشخص از لوله یکسان می‌باشد. مقایسهٔ این شکل‌ها کاهش کلی دمای عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی داخل کانال را دراثر افزایش عدد پکله از $\mathrm{Pe_f}=250$ به $\mathrm{Pe_f}=800$ نشان می‌دهد. این روند باتوجه به کاهش ضریب هدایت حرارتی سیال دراثر افزایش عدد پکله قابل‌توجیه است.



شکل ۱۹ تأثیر ضریب تفرق حرارتی بر توزیع دمای بی‌بعد عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای کانال پرشده با تابع توزیع یکنواخت نانوذرات و $\mathrm{Pe_f}=2200$

تغییرات توزیع عرضی گرادیان دما داخل کانال اشباع‌شده از نانوذرات به‌صورت یکنواخت در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای مقادیر مختلف عدد پکله را در شکل (۲۰) می‌توان مشاهده کرد. ازآنجاکه عدد پکله نسبت جابه‌جایی به هدایت (پخش) را در سیال بیان می‌کند و باتوجه به حضور نانوذرات داخل کانال، که موجب افزایش شدید قابلیت هدایت سیال می‌شود، لذا در این حالت با وجود شار گرمایی ثابت اعمال‌شده به جدارهٔ کانال، افزایش عدد پکله همراه با افزایش ویژگی‌های انتقال حرارتی سیال است که هم‌زمان موجب کاهش گرادیان دما می‌شود. این مطلب به‌خوبی در شکل (۲۰) قابل مشاهده است.

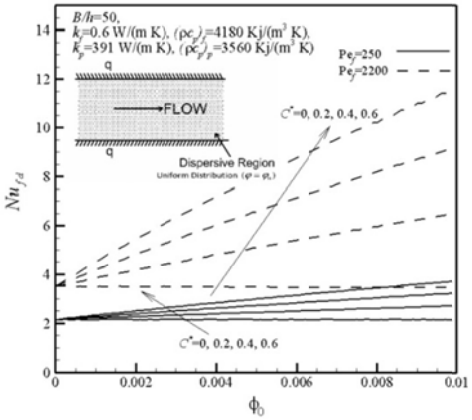


شکل ۲۰ تأثیر عدد پکله بر توزیع دمای بی‌بعد عرضی ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی برای کانال پرشده با تابع توزیع یکنواخت نانوذرات

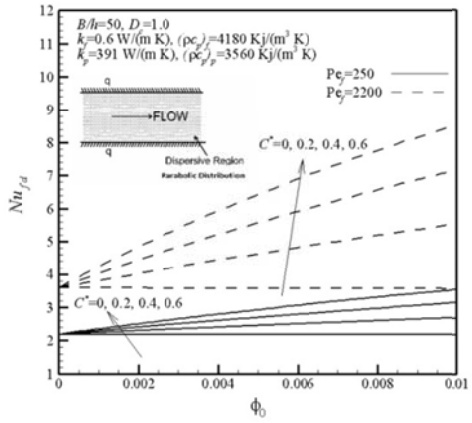
همچنین در شکل‌های (۲۱-۲۳) تأثیرات ضریب تفرق $(\mathbf{C}^*)$ و کسر حجمی نانوذرات (φ_0) بر عدد ناسلت در خروجی کانال (ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی) برای اعداد پکلهٔ مختلف به‌ترتیب برای توزیع یکنواخت، سهموی و نمایی نانوذرات در داخل کل کانال نشان داده شده است.

مطابق با شکل (۲۱) با افزایش کسر حجمی نانوذرات در داخل کانال با توزیع یکنواخت، به‌علت افزایش قابل‌ملاحظهٔ ضریب رسانش نانوسیال دراثر حضور نانوذرات بیشتر، افزایش چشم‌گیری در عدد ناسلت ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی کانال مشاهده

می‌شود. همچنین با افـزایش ضـریب تفـرق حرارتـی، مطابق با رابطـهٔ (٤)، هـدایت حرارتـی مـؤثر نانوسـیال افزایش می‌یابـد، لـذا قابلیـت انتقـال حـرارت و عـدد ناسلت افزایش می‌یابد. ضمناً مطابق با انتظار با افزایش عدد پکله به‌علـت افـزایش قـدرت جابـه‌جـایی، عـدد ناسلت افزایش می‌یابد.



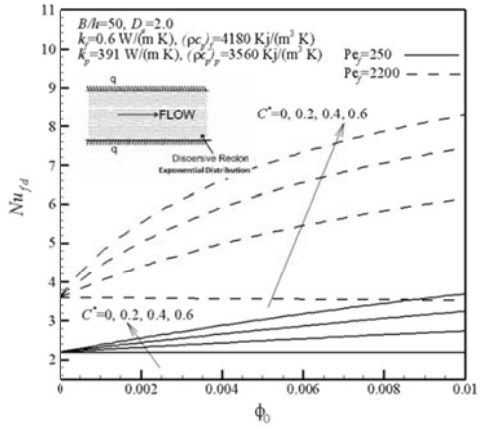
شکل ۲۱ تأثیرات ضریب تفرق و کسر حجمی عناصر تفرق بر عدد ناسلت دیواره در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای اعداد پکلهٔ مختلف برای تابع توزیع یکنواخت نانوذرات



شکل ۲۲ تأثیرات ضریب تفرق و کسر حجمی عناصر تفرق بر عدد ناسلت دیواره در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای اعداد پکلهٔ مختلف برای تابع توزیع سهموی نانوذرات

همچنین در شکل‌های (۲۲ و ۲۳) تأثیرات ضریب تفرق و کسـر حجمـی نـانوذرات بـر عـدد ناسـلت در خروجی کانال (ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی) برای اعـداد پکلهٔ مختلف، به‌ترتیب برای توزیـع سـهموی و نمـایی نشان داده شده است. افـزایش شـدید عـدد ناسـلت و قابلیت انتقال حرارت جریان سیال دراثر افـزایش کسـر حجمی نانوذرات و ضریب تفرق، مطابق با آنچه بحـث شد، قابل‌پیش‌بینی و توجیه‌پذیر است.

به‌عبارت دیگر افـزایش هرکـدام از شـاخص‌هـای کسر حجمی نانوذرات و ضریب تفرق به مفهوم حضور گسترده‌تر ذرات ریز دارای هدایت حرارتی بـالا اسـت که موجب افزایش قدرت انتقال حرارت سیال خواهـد شد و این مطلب بـه‌خـوبی در شـکل‌هـای (۲۲ و ۲۳) قابل مشاهده است. مسئلهٔ حائز اهمیـت در اینجـا ایـن است که برخلاف توزیـع سـهموی کـه افـزایش عـدد ناسلت تقریباً به‌شکل خطی صورت می‌گیرد، در توزیع نمایی و به‌خصوص به‌ازای مقـادیر بـزرگ‌تـر ضـریب تفرق، افزایش عدد ناسلت رفتـاری غیرخطـی دارد کـه مهم‌ترین وجـه تمـایز ایـن دو تـابع توزیـع مـی‌باشـد. همان‌طور که دیده می‌شود همانند توزیع یکنواخت، در توزیع سهموی و نمایی نیز با افزایش عدد پکله به‌علت افزایش قدرت جابه‌جایی، عدد ناسلت افزایش می‌یابد.



شکل ۲۳ تأثیرات ضریب تفرق و کسر حجمی عناصر تفرق بر عدد ناسلت دیواره در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای اعداد پکلهٔ مختلف برای تابع توزیع نمایی نانوذرات

نتیجه‌گیری

در این مقاله بهبود در پدیدهٔ انتقال حرارت داخل کانال پرشده از سیال با ویژگی‌های تفرق حرارتی متفاوت، موردمطالعه قرار گرفت. توزیع‌های مختلفی را می‌توان برای عناصر تفرق یا همان نانوذرات درنظر گرفت. نانوذرات را می‌توان به‌شکل یکنواخت در کل کانال، یا اطراف خط مرکزی کانال و یا در نزدیکی مرز یا جدارهٔ کانال تزریق کرد. همچنین توابع توزیع متفاوتی همچون سهموی و نمایی را به‌جای توزیع یکنواخت برای پخش نانوذرات داخل کانال می‌توان مورد بررسی قرار داد. همان‌طور که دیده شد، نتیجهٔ مهمی که حضور نانوذرات در داخل سیال دربردارد، افزایش کلی عدد ناسلت و درنتیجه ویژگی‌های انتقال حرارتی سیال است که پیش از این نیز قابل‌پیش‌بینی بود؛ اما توجه به ساختار و توزیع تزریق ذرات نانو و اثرات آن بر ویژگی‌های حرارتی نتیجهٔ مهم‌تری از این پژوهش است. باتوجه به نتایج ارائه‌شده افزایش ضخامت نانوذرات تزریق‌شده در توزیع مرکزی از خط مرکزی لوله تا رسیدن به حالت اشباع تا جداره‌های کانال، به‌صورت یکنواخت موجب افزایش عدد ناسلت و قابلیت انتقال حرارت سیال می‌شود؛ اما در توزیع مرزی افزایش ضخامت نانوذرات تزریق‌شده از روی جدارهٔ کانال تا رسیدن به خط مرکزی کانال، روندی به‌شکل صعودی- نزولی به عدد ناسلت خواهد داد، لذا در این توزیع مقدار خاصی از ضخامت را برای نانوذرات تزریق‌شده در کنار مرز لوله می‌توان به‌عنوان مقدار بهینه معرفی کرد که منجر به بیشترین عدد ناسلت خواهد شد. از طرف دیگر، در آرایش مرکزی عدد ناسلت در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌ازای ضخامت‌های کوچک نانوذرات تزریقی بدون تغییر می‌باشد، درحالی که در آرایش مرزی عدد ناسلت در تمامی ضخامت‌های نانوذرات تزریقی از همان ابتدا متغیر است. دلیل فیزیکی این موضوع این است که در آرایش مرزی ذرات نانو از روی مرز صفحات تزریق می‌شوند، لذا تغییر ضخامت تزریق ذرات نانو از همان ابتدا موجب تأثیر بر عدد ناسلت خواهد شد. همچنین مقایسهٔ دو تابع توزیع سهموی و نمایی برای تزریق نانوذرات در کانال نشان می‌دهد که تزریق سهموی نانوذرات موجب افزایش خطی عدد ناسلت می‌شود درحالی‌که تزریق نانوذرات با توزیع نمایی افزایش عدد ناسلت را به‌صورت غیرخطی به‌همراه دارد. نکتهٔ قابل‌توجه دیگری که می‌توان به آن اشاره کرد این است که فارغ از نوع توزیع نانوذرات، با افزایش عدد پکله و به‌علت افزایش قدرت جابه‌جایی جریان نانوسیال، عدد ناسلت در ناحیهٔ توسعه‌یافتهٔ افزایش می‌یابد.

فهرست علائم

B	طول کانال
C^*	ضریب تفرق حرارتی (وابسته به ویژگی عناصر تفرق)
c_P	حرارت مخصوص
D_c	شاخص اندازهٔ ذرات در توزیع سهموی
D_e	شاخص اندازهٔ ذرات در توزیع نمایی
h	نصف عرض کانال
h_c	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی
k	ضریب هدایت حرارتی
k_0	ضریب هدایت حرارتی ایستایی مؤثر نانوسیال
l	نصف ضخامت منطقهٔ تزریق نانوسیال (منطقهٔ تفرق حرارتی)
Nu	عدد ناسلت
Pe	عدد پکله
Pr	عدد پرانتل
q	شار حرارتی ثابت روی دیواره‌های کانال
T	دما
T_1	دمای ورود سیال به کانال
u	سرعت محوری
U	سرعت محوری بی‌بعد

x	مختصات محوری	φ	کسر حجمی عناصر تفرق (نانوذرات)
X	مختصات محوری بی‌بعدشده	φ_0	کسر حجمی عناصر تفرق وقتی به‌شکل یکنواخت کل کانال را پر کرده‌اند
y	مختصات عرضی		
Y	مختصات عرضی بی‌بعدشده	Λ	ضخامت بی‌بعد منطقهٔ تفرق
علائم یونانی		**زیرنویس‌ها**	
θ	دمای بی‌بعد	f	سیال خالص (عاری از نانوذرات)
θ_m	دمای بی‌بعد حجمی متوسط	m	مقدار متوسط
θ_W	دمای بی‌بعد دیوارهٔ کانال	nf	نانوسیال
ρ	چگالی	p	ذرات

مراجع

1. Yang, Y., "Characterizations and Convective Heat Transfer Performance of Nanofluids", Ph. D thesis, Lehigh University, UMI Publisher, Ann Arbor, (2011).
2. Xuan, Y. and Qiang, Li., "Investigation on Convective Heat Transfer and Flow Features of Nanofluids", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 125, No. 1, pp. 151-155, (2003).
3. Williams, W., Bourgiorno, J. and Hu, J., "Experimental Investigation of Turbulent Convective Heat Transfer and Pressure Loss of Alumina/Water and Zirconia/Water Nanoparticle Colloids (Nanofluid) in Horizontal Tubes", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 130, No. 4, pp. 42-48, (2008).
4. Rea, U., Mc rell, T. and Hu, L., "Laminar convective heat transfer and viscous pressure loss of alumina-water and zirconia-water nanofluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 2042-2048, (2008).
5. Fotukian, S.M. and Nasr Esfahany, M., "Experimental study of turbulent convective heat transfer and pressure drop of dilute CuO/water nanofluid inside a circular tube", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 214-219, (2010).
6. Pak, B. and Cho, Y.I., "Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particle", *Experimental Heat Transfer*, Vol. 11, pp. 151-170, (1998).
7. Bianco, V., Manca, O. and Nardini, S., "Numerical investigation on nanofluids turbulent convection heat transfer inside a circular tube", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50 pp. 341-349, (2011).
8. Behzadmehr, A., Saffar-Avval, M. and Galanis, N., "Prediction of turbulent forced convection of a nanofluid in a tube with uniform heat flux using a two phase approach", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 211–219, (2007).
9. Yu, W., France, D.M., Timofeeva, E.V., Singh, D. and Routbort, J.L., "Convective Heat Transfer of Nanofluids in Turbulent Flow", *Proceedings of Carbon Nano Materials and Applications Workshop*, Rapid city, USA, pp. 118-129, October 30 -November 1, (2011).
10. Xuan, Y. and Roetzel, W., "Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3701-3707, (2000).
11. Chang, P.Y., Shiah, S.W and Fu, M.N., "Mixed convection in a Horizontal square packed-sphere channel under axially uniform heating peripherally uniform wall temperature", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 45, pp. 791-809, (2004).

12. Hancu, S., Ghinda, T., Ma, L., Lesnic, D. and Ingham, D.B., "Numerical modeling and experimental investigation of the fluid flow and contaminant dispersion in a channel", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 2707-2718, (2002).
13. Kuznetsov, A.V., Cheng, L. and Xiong, M., "Effects of thermal dispersion and turbulence in forced convection in a composite parallel-plate channel: investigation of constant wall heat flux and constant wall temperature cases", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 42, pp. 365-383, (2002).
14. Gunn, D.J., "An analysis of convective dispersion and reaction in the fixed-bed reactor", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 2861-2875, (2004).
15. Metzger, T., Didierjean, S. and Maillet, D., "Optimal experimental estimation of thermal dispersion coeffcients in porous media", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 3341-3353, (2004).
16. Amiri, A. and Vafai, K., "Analysis of dispersion effects and non-thermal equilibrium non-Darcian, variable porosity incompressible flow through porous medium", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 939-954, (1994).
17. Li, Q. and Xuan, Y., "Convective heat transfer and flow characteristics of cu-water nanofluid", *Science in China* (Series E), Vol. 45, pp. 408-416, (2002).
18. Khaled, A.R.A. and Vafai, K., "Heat transfer enhancement through control of thermal dispersion effects", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 2172-2185, (2005).
19. Shahnazari, M.R., Ziabasharhagh, M. and Talsaz, H., "Comparison of Thermal Dispersion Effects for Single and Two Phase Analysis of Heat Transfer in Porous Media", *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, Vol. 24, No. 1, pp. 81-91, (2011).
20. Kameswaran, P.K. and Sibanda, P., "Thermal dispersion effects on convective heat and mass transfer in an Ostwald de Waele nanofluid flow in porous media", *Boundary Value Problems*, Vol. 27, pp. 243-270, (2013).
21. Wasp, F.J., "Solid–liquid Slurry Pipeline Transportation", Trans. Tech., Berlin, (1977).
22. Blottner, F.G., "Finite-difference methods of solution of the boundary-layer equations", *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 193-205, (1970).

اثر شکل نانوذرات بر یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی نانوسیالی دارای متمرکزکنندهٔ سهموی خطی*

فریده یزدانی فرد[۱] احسان ابراهیم‌نیا بجستان[۲] مهران عامری[۳]

چکیده *در این پژوهش، یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی- خطی شبیه‌سازی شده و اثر استفاده از نانوسیال اکسید آلومینیوم/ اتیلن‌گلیکول: آب ۵۰:۵۰ دارای نانوذرات مختلف پلاکتی، استوانه‌ای، تیغه‌ای و آجری‌شکل بر کارایی این سیستم از دیدگاه انرژی و اگزرژی در دو جریان آرام و مغشوش بررسی شده است. مدل پیشنهادشده بااستفاده از نتایج آزمایشگاهی موجود اعتبارسنجی شده است و تطابق مناسبی بین نتایج مشاهده گردیده است. باتوجه به نتایج، استفاده از نانوسیال با نانوذرات استوانه‌ای‌شکل در جریان آرام و نانوذرات آجری‌شکل در جریان مغشوش منجر به حداکثر بازده سیستم می‌گردد. به علاوه، استفاده از نانوسیال در جریان آرام نسبت به جریان مغشوش برای بهبود عملکرد سیستم فتوولتاییک/ حرارتی مؤثرتر است.*

واژه‌های کلیدی سیستم فتوولتاییک/ حرارتی، شکل نانوذرات، نانوسیال، جریان آرام، جریان مغشوش.

Nanoparticle Shape Effect on a Nanofluid-Based Parabolic Trough Concentrating Photovoltaic/Thermal System

F. Yazdanifard E. Ebrahimnia-Bajestan M. Ameri

Abstract *In this study, a linear parabolic trough concentrating photovoltaic/thermal system has been simulated and the effects of using Al_2O_3/ethylene glycol-water 50:50 nanofluid with different nanoparticle shapes including platelet, cylindrical, blade and brick shapes from energy and exergy standpoints in the laminar and turbulent regimes have been numerically investigated. The proposed model has been validated using existing experimental results where good agreement was observed. The results indicated that using nanoparticles of cylindrical shape in laminar regime and brick-shaped one in turbulent regime lead to the best system performance compared to others. In addition, applying nanofluid in laminar regime is more effective compared to turbulent regime.*

Key Words Photovoltaic/Thermal system, Nanoparticles shape, Nanofluid, Laminar flow, Turbulent flow

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/٤/۱۸ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62148

(۱) دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر، کرمان.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، e.ebrahimnia@qiet.ac.ir

(۳) استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر، کرمان.

مقدمه

سوخت‌های فسیلی منبع تولید ۹۹٪ انرژی در ایران هستند و کمتر از ۱٪ انرژی از طریق منابع تجدیدپذیر تأمین می‌شود [1]. از طرف دیگر، منابع نفت و گاز جهان محدود است و عمر این منابع نیز کوتاه پیش‌بینی شده است [2]. همچنین، بحث آلایندگی سوخت‌های فسیلی که به یکی از بحران‌های جدی کلان‌شهرهای ایران تبدیل شده است، نشان‌دهندهٔ اهمیت استفاده از روش‌های جایگزین تولید انرژی، ازجمله منابع تولید انرژی تجدیدپذیر است. در ایران انرژی خورشیدی بیشترین پتانسیل را برای تولید انرژی بین سایر انرژی‌های تجدیدپذیر دارد و میزان تابش دریافتی در ایران عالی تخمین زده شده است [1]. بنابراین، استفاده از سیستم‌های خورشیدی مانند سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی می‌تواند بخشی از نیاز انرژی را به‌ویژه در بخش خانگی پاسخ‌گو باشد.

سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی برحسب ساختار یا عملکرد به دسته‌های مختلفی تقسیم‌بندی می‌شوند [3]. یکی از این انواع، سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی در ترکیب با متمرکزکننده‌های تابش خورشیدی هستند که به‌دلیل تمرکز تابش قادر به تولید میزان بیشتر الکتریسیته نسبت به سطح فتوولتاییک و تولید انرژی حرارتی با کیفیت بالاتر می‌باشند [4]. در این راستا، استفاده از عدسی‌های فرنل، متمرکزکننده‌های سهموی، سهموی ترکیبی و هذلولوی برای تمرکز تابش در سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [5]. در این بین متمرکزکننده‌های سهموی شناخته‌شده‌ترین متمرکزکننده‌ها به‌سبب نصب نسبتاً آسان و قیمت پایین هستند. در این متمرکزکننده‌ها یک آینهٔ سهموی‌شکل نور خورشید را برروی دریافت‌کنندهٔ واقع در نقطهٔ کانونی یا خط کانونی متمرکز می‌کند.

تحقیقات متعددی درزمینهٔ سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی صورت گرفته است. کاونتری [6] در سال ۲۰۰۵ به‌صورت آزمایشگاهی یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی را با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی و نسبت تمرکز ۳۷ مورد بررسی قرار داد. بازده حرارتی و الکتریکی این سیستم به‌ترتیب ۵۸ و ۱۱ درصد به‌دست آمد. لی و همکارانش [7, 8] در سال ۲۰۱۱ عملکرد سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی را با چند نوع متمرکزکنندهٔ سهموی خطی به‌صورت آزمایشگاهی و عددی بررسی کردند. طبق نتایج آنها سلول‌های فتوولتاییک سیلیکونی برای نسبت‌های تمرکز کم و متوسط و سلول‌های گالیوم آرسنید برای نسبت‌های تمرکز زیاد عملکرد مناسبی دارند. جی و همکاران [9] در سال ۲۰۱۲ یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی سهموی خطی را به‌صورت عددی و آزمایشگاهی بررسی کردند. طبق بررسی آنها عملکرد سیستم با افزایش ضریب انعکاس متمرکزکننده افزایش می‌یابد. کالیسه و همکاران [10] در سال ۲۰۱۲ یک مدل حجم محدود را برای سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی و دریافت‌کنندهٔ سه‌وجهی با دو وجه شامل سلول‌های فتوولتاییک تک‌کریستالی و یک وجه شامل جاذب حرارتی که لوله سیال خنک‌کننده داخل این سه‌وجهی جریان دارد ارائه کردند. نتایج آنها نشان داد که انتخاب دبی جرمی مناسب برای عملکرد مناسب سیستم بسیار مهم است. چابان و همکاران [11] در سال ۲۰۱۳ یک سیستم فتولتاییک و یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی را در شرایط آب و هوایی خاص به‌صورت آزمایشگاهی و عددی مورد مقایسه قرار دادند. نتایج آنها نشان داد که سیستم فتوولتاییک/ حرارتی بازده الکتریکی بیشتری نسبت به سیستم فتولتاییک تنها دارد. دل کول و همکاران [12] در سال ۲۰۱٤ عملکرد الکتریکی یک سیستم فتوولتاییک/

حرارتی سهموی خطی با نسبت تمرکز ۱۳۰ را به‌صورت آزمایشگاهی و عددی بررسی نمودند. طبق بررسی آنها افزایش دمای عملکرد سیستم تأثیر کمی بر بازده الکتریکی دارد و می‌توان برای دستیابی به حرارت خروجی با دمای مناسب، دمای کارکرد سیستم را افزایش داد.

یکی از روش‌های افزایش بهره‌وری سیستم‌های انرژی خورشیدی استفاده از نانوسیالات است که توجه محققان بسیاری را به خود معطوف داشته است [13]. نانوسیال حاصل تعلیق ذرات با اندازهٔ نانو (کمتر از ۱۰۰ نانومتر) در سیالات متداول است، که خصوصیات انتقال حرارتی بهتری نسبت سیال پایه را از خود بروز می‌دهد. با این وجود، تحقیقات کمی درزمینهٔ استفاده از نانوسیالات در سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی انجام شده است. ماهیان و همکاران [14] در سال ۲۰۱۳ میزان تولید انتروپی در جریان نانوسیال با هندسه‌های مختلف را به‌صورت عددی بررسی کردند. طبق بررسی آنها با انتخاب رژیم جریان، اندازهٔ کانال و کسر حجمی مناسب می‌توان میزان تولید انتروپی را کاهش داد. کوی و زو [15] در سال ۲۰۱۲ استفاده از جریان نانوسیال اکسید منیزیم/ آب را برروی پانل‌های فتوولتاییک سیلیکونی به‌صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان داد که راندمان الکتریکی سیستم فتوولتاییک/ حرارتی کمتر از ماژول فتوولتاییک است، اما راندمان انرژی کلی آن بالاتر است. سردارآبادی و همکاران [16] در سال ۲۰۱٤ تأثیر استفاده از نانوسیال اکسید سیلیسیم/ آب را به‌عنوان سیال خنک‌کننده بر بازده الکتریکی و حرارتی یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی به‌صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. آنها نشان دادند که بااستفاده از نانوسیال و افزایش کسر حجمی ذرات، بازده انرژی و اگزرژی درمقایسه با سیستم فتوولتاییک بدون گرداورندهٔ حرارتی افزایش می‌یابد. کرمی و رحیمی [17] در سال ۲۰۱٤ یک سیستم ترکیبی شامل سیستم خنک‌کنندهٔ میکروکانال، سیستم فتوولتاییک/ حرارتی و نانوسیال بوهمیت/ آب را طراحی کردند. براساس نتایج آنها با کاهش کسر حجمی نانوذرات دمای متوسط سطح فتوولتاییک کاهش و بازده الکتریکی افزایش می‌یابد. سردار آبادی و همکاران [18] در سال ۲۰۱٦ به‌صورت عددی و آزمایشگاهی استفاده از نانوسیال اکسید تیتانیوم/ آب، اکسید آلومینیوم/ آب و اکسید روی/ آب را در سیستم فتوولتاییک/ حرارتی صفحه و لوله بررسی کردند. طبق نتایج آنها بیشترین بازده الکتریکی مربوط به نانوسیال اکسید تیتانیوم/ آب بود. رجب و همکاران [19] در سال ۲۰۱٦ استفاده از نانوسیال با دوسیال پایهٔ آب و اتیلن گلیکول را در سیستم فتوولتاییک/ حرارتی صفحه و لوله بررسی کردند. نتایج ایشان نشان داد که نانوسیال با سیال پایهٔ آب کارامدتر است.

مطالعات اندکی نیز درزمینهٔ استفاده از نانوسیالات به‌عنوان سیال خنک‌کننده در سیستم‌های فتوولتاییک/ حرارتی داری متمرکزکننده وجود دارد. زو و کلینستریور [20] در سال ۲۰۱٤ با مدل‌سازی دوبعدی و استفاده از یک مدل جدید برای هدایت حرارتی نانوسیالات، تأثیر استفاده از نانوسیالات را بر بهبود بازده سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکننده مورد بررسی قرار دادند. بررسی آنها نشان داد که استفاده از نانوسیال بازده الکتریکی و کلی سیستم را بهبود می‌بخشد، درحالی‌که بر بازده حرارتی تأثیر اندکی دارد. زو و کلینستریور در مقالهٔ دیگری [21] در سال ۲۰۱٤ تأثیر استفاده از نانوسیال اکسید آلومینیوم/ آب را بر خنک‌کنندگی یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی و نسبت تمرکز بالا به‌صورت عددی بررسی کردند. نتایج آنها نشان داد که افزایش کسر حجمی نانوسیال و کاهش دمای ورودی آن منجر به بهبود عملکرد سلول‌های فتوولتاییک

می‌شود. جینگ و همکاران [22] در سال ۲۰۱۵ به‌صورت آزمایشگاهی نانوسیال سیلیکا/ آب را طی فرایندی تک‌مرحله‌ای ساختند و استفاده از آن را در سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ پیشنهادی خود به‌صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. آنها سعی کردند که دبی جرمی و نسبت تمرکز بهینه را برای دستیابی به بهترین عملکرد سیستم از دیدگاه اگزرژی به‌دست آورند. ردوان و همکاران [23] در سال ۲۰۱۶ به‌صورت عددی استفاده از نانوسیال اکسید آلومینیوم/ آب و کاربید سیلیسیم/ آب را در سیستم فتوولتاییک/ حرارتی یا متمرکزکننده مطالعه کردند. نتایج ایشان نشان داد که استفاده از نانوسیال در نسبت‌های تمرکز زیاد و اعداد رینولدز کم منجر به بیشترین بازده الکتریکی می‌شود. به‌علاوه، استفاده از کاربید سیلیسیم/ آب دمای فتوولتاییک را درمقایسه با اکسید آلومینیوم/ آب کاهش بیشتری می‌دهد.

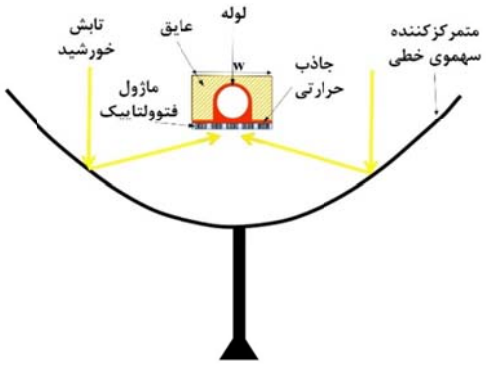
در بین کارهایی که تاکنون صورت گرفته است عملکرد سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی تحت دو جریان آرام و مغشوش ارزیابی نشده است. همچنین تأثیر استفاده از نانوسیال با شکل‌های مختلف نانوذره در این سیستم‌ها مورد مطالعه قرار نگرفته است. هدف پژوهش حاضر بررسی و مقایسهٔ تأثیر استفاده از نانوسیال با چهار شکل نانوذره پلاکتی، استوانه‌ای، تیغه‌ای و آجری‌شکل به‌عنوان سیال عامل بر عملکرد این سیستم از دیدگاه قانون اول و دوم ترمودینامیک در دو جریان آرام و مغشوش است.

مدل‌سازی

سیستم فتوولتاییک/حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی که در شکل (۱) نشان داده شده، برای ارائهٔ یک مدل ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است. برای نوشتن معادلات موازنهٔ انرژی برای اجزای مختلف این سیستم، المان دیفرانسیلی به‌طول dx و عرض w درنظر گرفته می‌شود. فرضیات مورد استفاده برای نوشتن معادلات انرژی عبارتند از انتقال حرارت پایا و یک‌بعدی، ثابت درنظر گرفتن خواص ترموفیزیکی همهٔ اجزای سیستم فتوولتاییک/ حرارتی، چشم‌پوشی از ظرفیت گرمایی ویژهٔ همهٔ اجزا به‌جز نانوسیال درون لوله‌ها به‌دلیل ناچیز بودن آن درمقابل ظرفیت گرمایی نانوسیال. با این فرضیات معادلات انرژی برای هر یک از اجزا در جدول (۱) ارائه شده است.

در این پژوهش، برای شبیه‌سازی از نرم‌افزار متلب و برای حل معادلات موازنهٔ انرژی از روش رانگ کوتا مرتبهٔ چهار استفاده شده است. روابط استفاده‌شده برای خواص نانوسیالات در جدول (۲) ارائه شده است. سیال پایهٔ مورد استفاده، مخلوط آب: اتیلن گلیکول با نسبت ۵۰:۵۰ است که دارای نانوذرات اکسید آلومینیوم می‌باشد.

شکل (۲) بیانگر شکل‌های مختلف نانوذرات اکسید آلومینیوم مورد استفاده در مطالعهٔ حاضر است. ثوابت A_1 و A_2 در رابطهٔ ویسکوزیته و ثابت C_k در رابطهٔ رسانایی حرارتی برای شکل‌های مختلف نانوذرات اکسید آلومینیوم در جدول (۳) ارائه شده است.



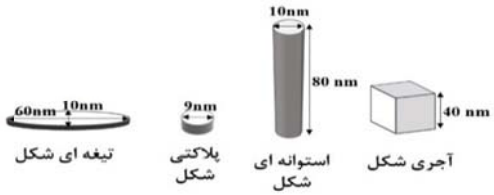
شکل ۱ سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی

جدول ۱ معادلات موازنهٔ انرژی اجزای سیستم فتوولتاییک/ حرارتی [24]

جزء	معادلهٔ انرژی
پانل فتوولتاییک	$I_B C R \rho_{con} \gamma_t \alpha_{pv}\left[1-pa\times\eta_r\left(1-\beta_r(T_{pv}-T_r)\right)\right]wdx = (h_{r,pv-a}+h_{c,pv-s})(T_{pv}-T_a)wdx + h_{pv-abs}(T_{pv}-T_{abs})wdx + h_{pv-t}(T_{pv}-T_t)wdx$
جاذب حرارتی	$h_{pv-abs}(T_{pv}-T_{abs})wdx = h_{abs-t}(T_{abs}-T_t)wdx + h_{abs-i}(T_{abs}-T_i)\,wdx$
لوله	$h_{abs-t}(T_{abs}-T_t)wdx + h_{pv-t}(T_{pv}-T_t)wdx = h_{t-w}(T_t-T_w)wdx + h_{t-i}(T_t-T_i)wdx$
لایهٔ عایق	$h_{abs-i}(T_{abs}-T_i)wdx + h_{t-i}(T_t-T_i)wdx = h_{i-a}(T_i-T_a)wdx$
سیال خنک‌کن	$h_{t-w}(T_t-T_w)wdx = \dot{m}C_p dT_w$

جدول ۲ روابط استفاده‌شده برای خواص نانوسیالات

خاصیت	مرجع	رابطه
چگالی	[25]	$\rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_{bf} + \varphi\rho_{np}$
ظرفیت گرمایی	[26]	$C_{p,nf} = \frac{(1-\varphi)(\rho C_p)_{bf} + \varphi(\rho C_p)_{np}}{\rho_{nf}}$
ویسکوزیته	[27]	$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = 1 + A_1\varphi + A_2\varphi^2$
رسانایی حرارتی	[28]	$\frac{k_{nf}}{k_{bf}} = 1 + C_k\varphi$



شکل ۲ اشکال مختلف نانوذرات اکسید آلومینیوم [27]

جدول ۳ ثابت‌های A_1 و A_2 در رابطهٔ ویسکوزیته و ثابت C_k در رابطهٔ رسانایی حرارتی برای شکل مختلف نانوذرات اکسید آلومینیوم [27, 28]

نوع نانوذره	C_k	A_1	A_2
پلاکتی	۲/۶۱	۳۷/۱	۶۱۲/۶
تیغه‌ای	۲/۷۴	۱۴/۶	۱۲۳/۳
استوانه‌ای	۳/۹۵	۱۳/۵	۹۰۴/۴
آجری	۳/۳۷	۱/۹	۴۷۱/۴

باتوجه به طول لوله، جریان داخل لولـه در حالـت آرام ازنظر هیدرودینامیکی توسعه یافته و ازنظر حرارتی در حال توسعه، اما در حالت جریـان مغشـوش از نظـر هیدرودینامیکی و حرارتـی توسـعه یافتـه اسـت. عـدد ناسـلت بـرای جریـان آرام داخـل لولـه در حالـت توسعه‌یافتهٔ حرارتی به‌شکل زیر محاسبه می‌شود [29]:

$$x^* = \frac{L}{RePrD} \qquad (۱)$$

$$Nu_w = \begin{cases} 1.953(x^*)^{-1/3} & x^* \le 0.03 \\ 4.364 + \dfrac{0.0722}{x^*} & x^* > 0.03 \end{cases} \qquad (۲)$$

برای جریان مغشوش عدد ناسـلت از رابطـهٔ زیـر محاسبه می‌گردد [30]:

$$Nu_w = \frac{(f/8)(Re-1000)Pr}{1+12.7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3}-1)} \qquad (۳)$$

چاره‌ای جز استفاده از روابط (۲ و ۳) برای عدد ناسلت نیست، چون داده‌های مناسب یا رابطه‌ای برای عدد ناسلت تابع شکل نانوذرات وجود ندارد.

روابط مربوط به بازده انرژی و اگزرژی در جدول (٤) ارائه شده است. توان خروجی پانل فتوولتاییک و توان پمپ در روابط بازده انرژی و اگزرژی الکتریکی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{E}_{PV} = I_B C R \rho_{con} \gamma_t \alpha_{pv} A_{PV/T}\, pa \times \eta_r\left[1-\beta_r\left(T_{pv}-T_r\right)\right] \quad (٤)$$

$$P_{pump} = \frac{\dot{m} \times \rho g(L\sin\theta + h_l)}{\rho \times \eta_{pump}} \quad (٥)$$

اعتبارسنجی

اعتبار سنجی حل عددی، بااستفاده از نتایج تجربی موجود [9] برای یک سیستم با مساحت دهانهٔ مؤثر آینهٔ سهموی خطی $۱/۹۵m^2$، نسبت تمرکز ۱٦/۹۲، دریافت‌کننده به‌ابعاد ۱/۵m×۰/۱۲m×۰/۰۹m و قطر لوله ۰/۰۳m انجام شده است. باتوجه به جدول (۵)، تطابق بسیار مناسبی بین نتایج حاصل از مدل پیشنهادی پژوهش حاضر با دمای تجربی گزارش‌شده توسط جی و همکاران [9] وجود دارد.

نتایج و بحث

پس از اطمینان از صحت مدل، نتایج مدل‌سازی باتوجه به اطلاعات موجود در جدول (٦) ارائه شده است. برای بررسی اثر هر یک از پارامترها، پارامتر مورد نظر تغییر داده شده و بقیه پارامترها مطابق با جدول (٦) ثابت درنظر گرفته شده‌اند.

شکل (۳) تغییرات دمای فتوولتاییک و شکل (٤) تغییرات دمای خروجی نانوسیال اکسید آلومینیوم/ اتیلن گلیکول: آب ۵۰:۵۰ را برای چهار شکل نانوذرهٔ پلاکتی، استوانه‌ای، تیغه‌ای و آجری‌شکل در کسرهای حجمی مختلف، برای دو جریان آرام و مغشوش نشان می‌دهند.

جدول ٤ روابط بازده انرژی و اگزرژی الکتریکی، حرارتی و کلی

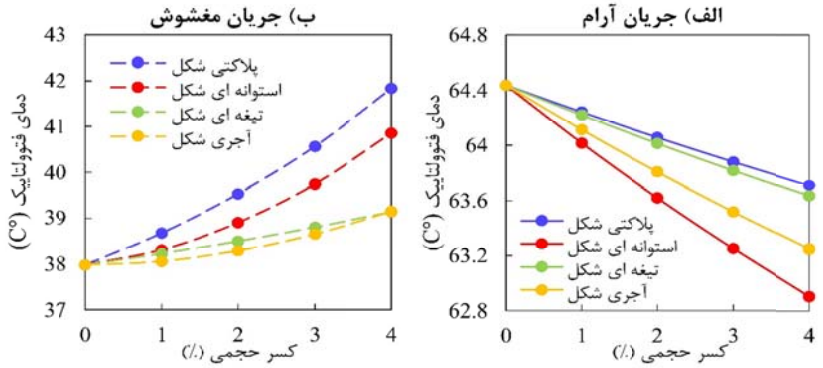
بازده	انرژی	اگزرژی
حرارتی	$\eta_{th} = \frac{\dot{m}c_p(T_{w,out}-T_{w,in})}{I_B A_{ca}}$	$\dot{\varepsilon}_{th} = \frac{\dot{m}c_p(T_{w,out}-T_{w,in})\left(1-\frac{293}{293+(T_{w,out}-T_a)}\right)}{\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{T_a}{T_{sun}}\right)^4-\frac{4T_a}{3T_{sun}}\right]I_B A_{ca}}$
الکتریکی	$\eta_{ele} = \frac{\dot{E}_{PV}-P_{pump}}{I_B A_{ca}}$	$\dot{\varepsilon}_{ele} = \frac{\dot{E}_{PV}-P_{pump}}{\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{T_a}{T_{sun}}\right)^4-\frac{4T_a}{3T_{sun}}\right]I_B A_{ca}}$
کلی	$\eta_{CPV/T} = \eta_{th}+\eta_{ele}$	$\dot{\varepsilon}_{PV/T} = \dot{\varepsilon}_{th}+\dot{\varepsilon}_{ele}$

جدول ۵ نتایج حاصل از اعتبارسنجی مدل

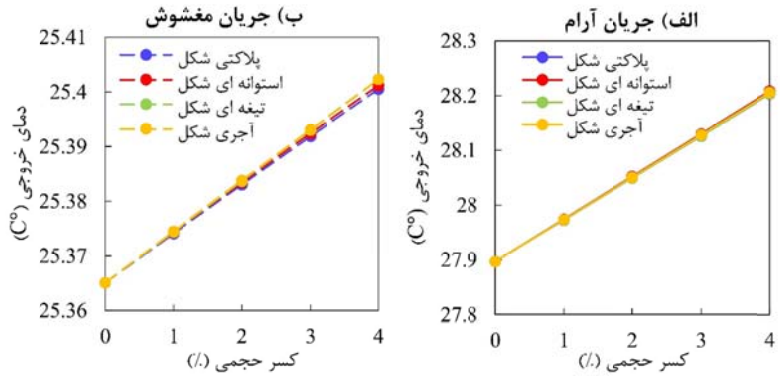
نوع سلول فتوولتاییک	تابش مستقیم ($W.m^{-2}$)	دمای آب ورودی (°C)	دبی جرمی ($kg.s^{-1}$)	دمای آب خروجی			دمای فتوولتاییک		
				تجربی جی و همکاران[9]	پژوهش حاضر	خطا (٪)	تجربی جی و همکاران[9]	پژوهش حاضر	خطا (٪)
سوپر	۹۰۵/۱	۲۲/٦	۰/۰۰۵	۵۰/۱	۵۰/۹	۱/٦	۸۳/۲	۸۱/۷	−۱/۸
	۹۵۳/۷	۲٤/۱	۰/۰۱۱۱	۳۹/۰	۳۷/۲	−٤/٦	۵۷/٦	٦۲/۷	۸/۸
گالیم آرسنایید	۹۰۲/۱	۲۰/۱	۰/۰۰۸	۳۹/۱	۳۸/۳	−۲	٦۱/٤	٦۲/۹	۲/٤
	۸۹٤/۲	۱۹/۸	۰/۰۰۸	۳۸/۲	۳۷/٤	−۲/۱	۵۹/٤	٦۱/۲	۳

جدول ٦ پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی

جزء	پارامتر
متمرکزکنندهٔ سهموی	نسبت تمرکز: ۱۵، ضریب انعکاس: ۰/۸، ضریب ممانعت: ۰/۹۵
صفحهٔ فتوولتاییک	ضریب جذب: ۰/۹، ضریب انتشار: ۰/۹، ضریب هدایت حرارتی: $۱۰۰Wm^{-1}K^{-1}$، بازده سلول مرجع: ۱۵٪، ضریب دمایی مرجع: $۰/۰۰٤۵K^{-1}$، دمای مرجع: ۲۹۸K
صفحهٔ جاذب (مسی)	ضخامت: ۰/۰۰۳m، ضریب هدایت حرارتی: $۳۱۰Wm^{-1}K^{-1}$
لوله (مسی)	قطر داخلی: ۰/۰۳m، ضخامت: ۰/۰۰۳m، طول: ۲m، ضریب هدایت حرارتی: $۳۱۰Wm^{-1}K^{-1}$
لایهٔ عایق	ضخامت: ۰/۰۵m، ضریب هدایت حرارتی: $۰/۰۳Wm^{-1}K^{-1}$
سیال درون لوله	دمای ورودی: ۲۹۸K، دبی جرمی در جریان آرام: $۰/۱۲kgs^{-1}$، دبی جرمی در جریان مغشوش: $۱kgs^{-1}$
سایر پارامترها	سرعت باد: $۱/۵ms^{-1}$، دمای محیط: ۲۹۸K، تابش مستقیم: $۷۰۰Wm^{-2}$، شیب کلکتور: ۳۰°، ضریب فشردگی: ۰/۹، بازده پمپ: ۰/۸



شکل ۳ تغییرات دمای فتوولتاییک با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش



شکل ٤ تغییرات دمای خروجی با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش

همان‌طور که از شکل (۳) مشخص است، در جریان آرام با افزایش کسر حجمی نانوذرات دمای فتوولتاییک کاهش می‌یابد، اما شاهد روندی متفاوت در جریان مغشوش هستیم. برای توضیح این رفتار،

جدول‌های (۷ و ۸) ارائه شده‌اند که تغییرات ویژگی‌های نانوسیال را در کسرهای حجمی مختلف به‌ترتیب برای جریان آرام و مغشوش نشان می‌دهند.

باتوجه به جدول‌های (۷ و ۸)، با افزایش کسر حجمی، ویسکوزیته و رسانایی حرارتی افزایش، ولی ظرفیت حرارتی کاهش پیدا می‌کند. عدد رینولدز با ویسکوزیته رابطهٔ عکس دارد. از طرف دیگر، عدد پرانتل با ویسکوزیته نسبت مستقیم و با رسانایی حرارتی نسبت عکس دارد. ازآن‌جایی که در نانوسیال مورد بررسی در این پژوهش میزان افزایش ویسکوزیته با کسر حجمی بیش از رسانایی حرارتی است، عدد پرانتل با افزایش کسر حجمی افزایش پیدا می‌کند. عدد ناسلت متناسب با عدد رینولدز و عدد پرانتل است. درنتیجه با کاهش بیشتر عدد رینولدز درمقابل افزایش عدد پرانتل، عدد ناسلت در هر دو جریان کاهش پیدا می‌کند. این کاهش در جریان آرام بسیار کمتر از جریان مغشوش است؛ از سوی دیگر ضریب انتقال حرارت متناسب با عدد ناسلت و رسانایی حرارتی است. در جریان آرام، که میزان کاهش عدد ناسلت با کسر حجمی اندک است، افزایش رسانایی حرارتی منجر به افزایش ضریب انتقال حرارت می‌شود. درحالی‌که در جریان مغشوش کاهش شدید در عدد ناسلت با کسر حجمی، باعث کاهش ضریب انتقال حرارت می‌گردد. درنهایت، افزایش ضریب انتقال حرارت در جریان آرام باعث کاهش دمای فتوولتاییک و کاهش ضریب انتقال حرارت در جریان مغشوش باعث افزایش دمای فتوولتاییک می‌شود.

در بین شکل‌های مختلف، نوع پلاکتی، استوانه‌ای، تیغه‌ای و آجری به‌ترتیب بیشترین ویسکوزیته و نوع استوانه‌ای، آجری، تیغه‌ای و پلاکتی به‌ترتیب بیشترین رسانایی حرارتی را دارا می‌باشند. تأثیر تغییرات ویسکوزیته و رسانایی حرارتی بر اعداد رینولدز و پرانتل و درنتیجه بر ضریب انتقال حرارت به‌گونه‌ای است که نانوذرهٔ استوانه‌ای بیشترین ضریب انتقال حرارت را در جریان آرام دارد و پس از آن به‌ترتیب نانوذرات آجری، تیغه‌ای و پلاکتی قرار دارند. در جریان مغشوش، بهترین ضریب انتقال حرارت به‌ترتیب مربوط به نانوذرات آجری، تیغه‌ای، استوانه‌ای و پلاکتی شکل است. درنتیجه باتوجه به شکل (۳)، در جریان آرام نانوذرهٔ استوانه‌ای‌شکل و در جریان مغشوش نانوذرهٔ آجری‌شکل کمترین دمای فتوولتاییک را نتیجه می‌دهند. همان‌طور که از شکل (٤) مشخص است دمای خروجی سیال در هر دو جریان آرام و مغشوش افزایش پیدا می‌کند. علت این پدیده کاهش ظرفیت حرارتی نانوسیال با افزایش کسر حجمی است. در جریان آرام، شکل‌های مختلف نانوذرات دارای دمای خروجی تقریباً یکسانی هستند. در جریان مغشوش نانوذرات تیغه‌ای و آجری‌شکل به‌دلیل ضریب انتقال حرارت بالاتر، اندکی دمای خروجی بیشتری درمقایسه با نانوذرات استوانه‌ای و پلاکتی‌شکل دارند.

جدول ۷ تغییرات ویژگی‌های نانوسیال با شکل و کسرهای حجمی مختلف نانوذرات در جریان آرام

شکل نانوذرات	کسر حجمی	$\frac{\rho_{nf}}{\rho_{bf}}$	$\frac{c_{p,nf}}{c_{p,bf}}$	$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}}$	$\frac{k_{nf}}{k_{bf}}$	عدد رینولدز	عدد پرانتل	عدد ناسلت	ضریب انتقال حرارت ($Wm^{-2}K^{-1}$)
پلاکتی	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۵۷۰/۷۶۷	۲۸/۹۰٤	۱۷/۱۸۳	۲۱۲/۳۸۵
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/٤۳۲	۱/۰۲٦	۱۰۹۷/۹۷٤	۳۹/۲۸۰	۱٦/۸۹۱	۲۱٤/۲٤۳
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۰	۱/۹۸۷	۱/۰۵۲	۷۹۲/۳٤۱	۵۱/۷٦۷	۱٦/٦۱۱	۲۱٦/۰٦۲
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۲/٦٦٤	۱/۰۷۸	۵۹۱/٦۱۱	٦٦/۰۱۱	۱٦/۳٤۱	۲۱۷/۸٤۳
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰۵	۳/٤٦٤	۱/۱۰٤	٤۵۵/۵۵۲	۸۱/۷۰۹	۱٦/۰۸۱	۲۱۹/۵۸۹
استوانه‌ای	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۵۷۰/۷۶۷	۲۸/۹۰٤	۱۷/۱۸۳	۲۱۲/۳۸۵
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/۲۲۵	۱/۰۳۹	۱۲۸۳/۳۱٦	۳۳/۱۷۳	۱٦/۸۱۸	۲۱٦/۱۰۵

	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۰	۱/٦۳۱	۱/۰۷۹	۹٦٤/۹۰۷	٤۱/٤۵۳	۱٦/٤۷۲	۲۱۹/۷۱٦
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۲/۲۱۹	۱/۱۱۸	۷۱۰/٤۱۳	۵۲/۹۹٦	۱٦/۱٤۳	۲۲۳/۲۲۵
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰۵	۲/۹۸۷	۱/۱۵۸	۵۲۸/۳۷۳	٦۷/۱۸۷	۱۵/۸۳۰	۲۲٦/٦۳۸
تیغه‌ای	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۵۷۰/۷٦۷	۲۸/۹۰٤	۱۷/۱۸۳	۲۱۲/۳۸۵
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/۱۵۸	۱/۰۲۷	۱۳۵۷/٦۳۵	۳۱/۷۲۷	۱٦/۸۸٤	۲۱٤/٤۲٤
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۰	۱/۳٤۱	۱/۰۵۵	۱۱۷۳/۷۸۵	۳٤/۸۵۸	۱٦/۵۹۷	۲۱٦/٤۱۸
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۲/۵٤۹	۱/۰۸۲	۱۰۱۷/٦۲۲	۳۸/۲۳۸	۱٦/۳۲۱	۲۱۸/۳٦۸
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰۵	۲/۷۸۱	۱/۱۱۰	۸۸۵/۹٤۹	٤۱/۸۱۸	۱٦/۰۵۷	۲۲۰/۲۷۸
آجری	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۵۷۰/۷٦۷	۲۸/۹۰٤	۱۷/۱۸۳	۲۱۲/۳۸۵
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/۰٦٦	۱/۰۳٤	۱٤۷۵/۰۹۰	۲۹/۰۲۳	۱٦/۸٤۹	۲۱۵/۳۰۰
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۰	۱/۲۲٦	۱/۰٦۷	۱۲۸۳/۷٦۵	۳۱/٤۹٦	۱٦/۵۳۱	۲۱۸/۱۳۸
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۱/٤۸۱	۱/۱۰۱	۱۰٦٤/۳۷۲	۳۵/۹۳۱	۱٦/۲۲۸	۲۲۰/۹۰٤
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰۵	۱/۸۳۰	۱/۱۳۵	۸٦۲/۵۱۷۹	٤۲/۰۰۰	۱۵/۹۳۷	۲۲۳/٦۰۱

جدول ۸ تغییرات ویژگی‌های نانوسیال با شکل و کسرهای حجمی مختلف نانوذرات در جریان مغشوش

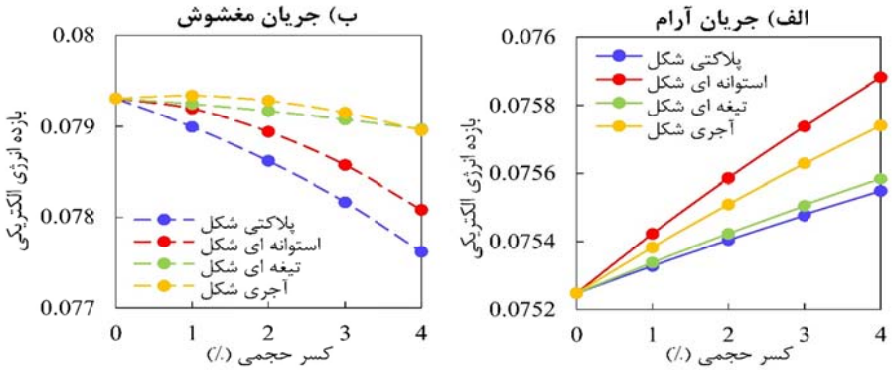
شکل نانوذرات	کسر حجمی	$\frac{\rho_{nf}}{\rho_{bf}}$	$\frac{c_{p,nf}}{c_{p,bf}}$	$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}}$	$\frac{k_{nf}}{k_{bf}}$	عدد رینولدز	عدد پرانتل	عدد ناسلت	ضریب انتقال حرارت ($Wm^{-2}K^{-1}$)
پلاکتی	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۲٦۰۲/۳۹	۳۰/۰۳۹	۱٦۷/٤۲۵	۲۰٦۵/۱۳۷
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/٤۳۲	۱/۰۲٦	۸۸۰۰/۰۱	٤۰/۸٦۷	۱۳۲/۵۲٦	۱٦۷۷/۳٤٤
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۱	۱/۹۸۷	۱/۰۵۲	٦۳٤۳/۸۱۷	۵۳/۹۱۷	۱۰۵/۲۱۸	۱۳٦۵/۵۹۷
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۲/٦٦٤	۱/۰۷۸	٤۷۳۱/۷۲۷	٦۸/۸۲۸	۸۳/۷۷۳	۱۱۱٤/۲٤٤
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰٦	۳/٤٦٤	۱/۱۰٤	۳٦۳۹/٦۷٦	۸۵/۲۸۹	٦٦/۵۹۸	۹۰۷/۲۵۱
استوانه‌ای	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۲٦۰۲/۳۹	۳۰/۰۳۹	۱٦۷/٤۲۵	۲۰٦۵/۱۳۷
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/۲۲۵	۱/۰۳۹	۱۰۲۸۵/۳۳	۳٤/۵۱٤	۱٤۵/۱۷۵	۱۸٦۱/٤۳۵
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۱	۱/٦۳۲	۱/۰۷۹	۷۷۲۵/۱۷۸	٤۳/۱۷٦	۱۱۸/۸۸۱	۱۵۸۲/۲۳۱
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۲/۲۱۹	۱/۱۱۸	۵٦۸۱/۵٦۷	۵۵/۲٦۱	۹٤/٦٤۲	۱۳۰۵/۷٤
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰٦	۲/۹۸۷	۱/۱۵۸	٤۲۲۱/۱۲٤	۷۰/۱۳۷	۷٤/۱۸٤	۱۰۵۹/٦۵
تیغه‌ای	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۲٦۰۲/۳۹	۳۰/۰۳۹	۱٦۷/٤۲۵	۲۰٦۵/۱۳۷
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/۱۵۸	۱/۰۲۷	۱۰۸۸۱/۱۷	۳۳/۰۰۸	۱۵۰/۷۷۳	۱۹۱۰/۷۱۵
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۱	۱/۳٤۱	۱/۰۵۵	۹۳۹۸/۰۵۹	۳٦/۳۰۵	۱۳۵/۵۳۷	۱۷٦۳/٤۵۷
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۱/۵٤۹	۱/۰۸۲	۸۱۳۹/۱۸٦	۳۹/۸٦۸	۱۲۱/۷٦۱	۱٦۲۵/۳۷۷
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰٦	۱/۷۸۱	۱/۱۱۰	۷۰۷۸/۷۳۹	٤۳/٦٤۷	۱۰۹/۳۷۸	۱٤۹۷/۰٦٦
آجری	٪۰	۱	۱	۱	۱	۱۲٦۰۲/۳۹	۳۰/۰۳۹	۱٦۷/٤۲۵	۲۰٦۵/۱۳۷
	٪۱	۱/۰۲٤	۰/۹۷۵	۱/۰٦٦	۱/۰۳۳	۱۱۸۲۲/۵۹۰	۳۰/۱۹۵	۱۵۸/۰۰٤	۲۰۱٤/٦۳۲
	٪۲	۱/۰٤۷	۰/۹۵۱	۱/۲۲٦	۱/۰٦۷	۱۰۲۷۸/٤۵۰	۳۲/۸۰۳	۱٤۲/۵۲٦	۱۸۷٦/۵٤٤
	٪۳	۱/۰۷۱	۰/۹۲۸	۱/٤۸۱	۱/۱۰۱	۸۵۱۲/۹۳٦	۳۷/٤٦٤	۱۲٤/۵۱۳	۱٦۹۱/۱٤٦
	٪٤	۱/۰۹٤	۰/۹۰٦	۱/۸۳۰	۱/۱۳۵	٦۸۹۱/۱۸۳	٤۳/۸٤۰	۱۰٦/٦۲۵	۱٤۹۲/۵۲۸

شکل‌های (۷-۵) تغییرات بازده انرژی الکتریکی، حرارتی و کلی و شکل‌های (۱۰-۸) تغییرات بازده اگزرژی الکتریکی، حرارتی و کلی را برای شکل‌های مختلف نانوذرات اکسید آلومینیوم در سیال پایهٔ اتیلن گلیکول:آب و در بازه کسر حجمی صفر تا چهار درصد نشان می‌دهند. به‌دلیل کاهش دمای فتوولتاییک در جریان آرام، بازده انرژی و اگزرژی الکتریکی افزایش پیدا می‌کنند ولی در جریان مغشوش در اثر افزایش دمای فتوولتاییک با افزایش کسر حجمی، بازده انرژی و اگزرژی الکتریکی کاهش پیدا می‌کنند (شکل‌های ۵ و ۸).

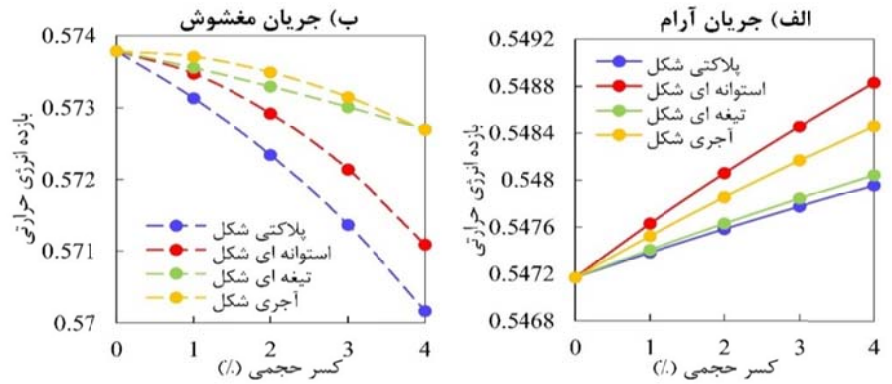
در جریان آرام نانوسیال با نانوذرهٔ استوانه‌ای و در جریان مغشوش نانوسیال با نانوذرات آجری و تیغه‌ای‌شکل بازده انرژی و اگزرژی الکتریکی بزرگ‌تری درمقایسه با سایر نانوذرات دارند؛ زیرا دمای سطح فتوولتاییک، هنگام استفاده از آنها کمتر از سایر شکل‌ها بوده است.

بازده انرژی حرارتی به ظرفیت حرارتی و دمای خروجی بستگی دارد. همان‌طور که در شکل (٦) مشخص است، در جریان آرام که افزایش دمای خروجی شدیدتر از جریان مغشوش است، بازده انرژی حرارتی افزایش می‌یابد؛ اما در جریان مغشوش، کاهش ظرفیت حرارتی با افزایش کسر حجمی باعث کاهش بازده انرژی حرارتی می‌شود.

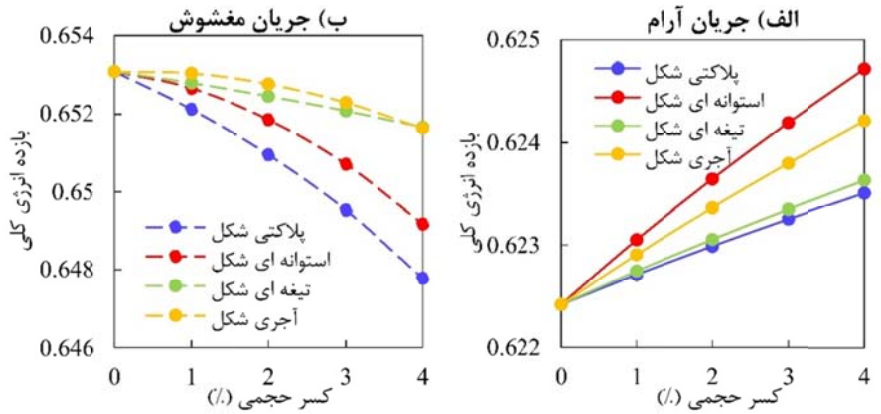
در جریان آرام، نانوسیال حاوی نانوذرهٔ استوانه‌ای و در جریان مغشوش نانوسیال دارای نانوذرات آجری و تیغه‌ای‌شکل به‌دلیل داشتن دمای خروجی بالاتر درمقایسه با سایر شکل‌های نانوذرات، بازده انرژی حرارتی بزرگ‌تری را بروز می‌دهند.



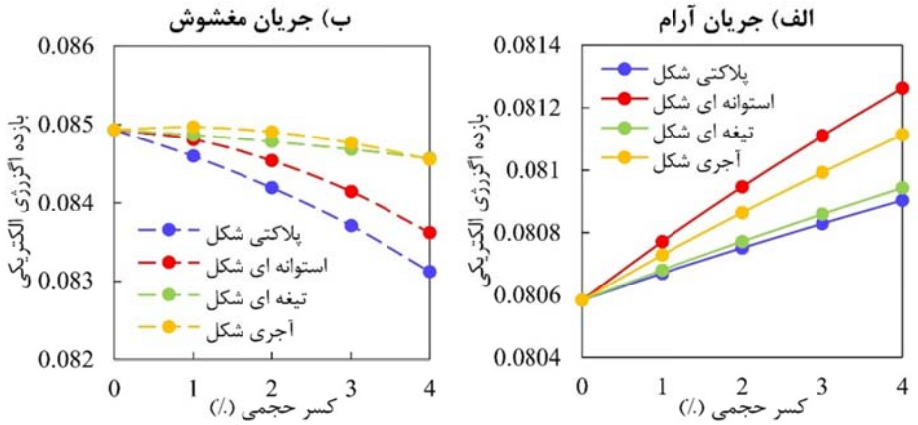
شکل ۵ تغییرات بازده انرژی الکتریکی با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش



شکل ٦ تغییرات بازده انرژی حرارتی با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش



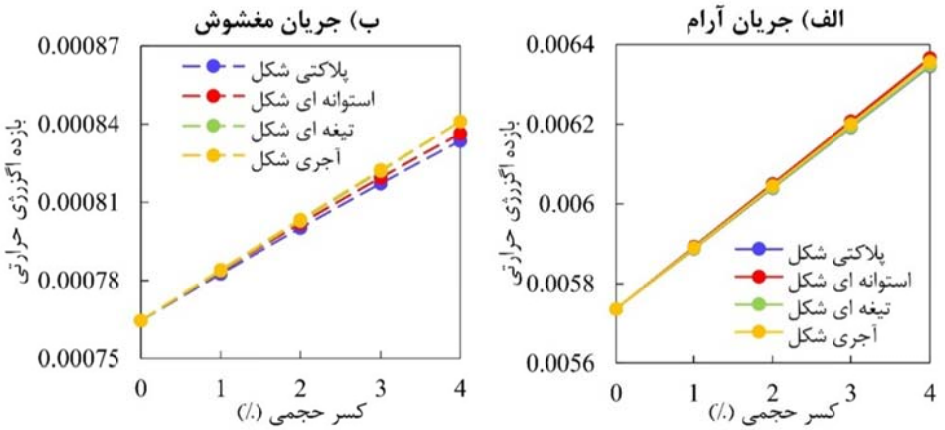
شکل ۷ تغییرات بازده انرژی کلی با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش



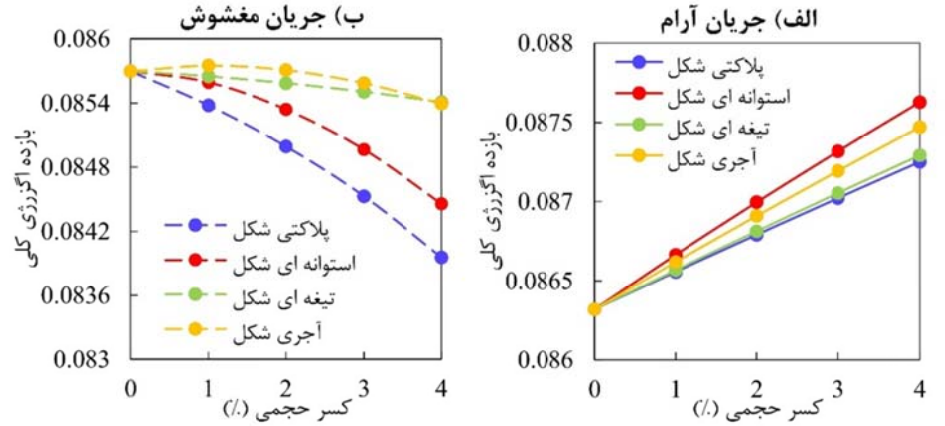
شکل ۸ تغییرات بازده اگزرژی الکتریکی با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش

بازده اگزرژی حرارتی بیشتر متأثر از دمای خروجی است و با افزایش کسر حجمی در هر دو جریان آرام و مغشوش افزایش می‌یابد (شکل ۹). روند تغییرات بازده اگزرژی حرارتی برای شکل‌های مختلف نانوذره با کسر حجمی، مشابه با روند تغییرات دمای خروجی است.

باتوجه به شکل (۷)، افزایش بازده انرژی الکتریکی و حرارتی در جریان آرام منجر به افزایش بازده انرژی کل بر حسب افزایش کسر حجمی می‌شود، درحالی‌که در جریان مغشوش به‌علت کاهش بازده انرژی الکتریکی و حرارتی، بازده انرژی کل کاهش پیدا می‌کند. نانوذرات استوانه‌ای‌شکل در جریان آرام و نانوذرات آجری‌شکل در جریان مغشوش بالاترین بازده انرژی را دارا می‌باشند. بازده اگزرژی کل در جریان آرام به‌علت افزایش بازده اگزرژی الکتریکی و حرارتی افزایش می‌یابد (شکل ۱۰). در جریان مغشوش بازده اگزرژی کل برای نانوذرات پلاکتی، استوانه‌ای و تیغه‌ای‌شکل در اثر کاهش بازده اگزرژی الکتریکی کاهش می‌یابند؛ ولی برای نانوذرهٔ آجری‌شکل که بیشترین بازده اگزرژی الکتریکی و حرارتی را در جریان مغشوش دارد، تقابل اثر کاهشی بازده اگزرژی الکتریکی و اثر افزایشی بازده اگزرژی حرارتی باعث افزایش بازده اگزرژی تا کسر حجمی ۱٪ و سپس کاهش آن می‌شود.



شکل ۹ تغییرات بازده اگزرژی حرارتی با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش



شکل ۱۰ تغییرات بازده اگزرژی کل با کسر حجمی و شکل نانوذرات متفاوت برای جریان الف: آرام، ب: مغشوش

جمع‌بندی

در این پژوهش یک سیستم فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکنندهٔ سهموی خطی مدل‌سازی شد. اثر استفاده از نانوسیال اکسیدآلومینیوم/ اتیلن‌گلیکول: آب ۵۰:۵۰ بر دمای فتوولتاییک، دمای سیال خروجی، بازده انرژی و بازده اگزرژی سیستم، مورد ارزیابی قرار گرفت. همچنین اثر غلظت و شکل نانوذرات با به‌کارگیری نانوذرات پلاکتی، استوانه‌ای، تیغه‌ای و آجری‌شکل در کسرهای حجمی یک تا چهار درصد مطالعه شد. خلاصه نتایج این بررسی به‌شرح زیر است:

- با افزایش کسر حجمی نانوذرات دمای فتوولتاییک در جریان آرام کاهش و در جریان مغشوش افزایش می‌یابد، ولی دمای سیال خروجی در هر دو جریان با افزایش کسر حجمی افزایش پیدا می‌کند.
- کمترین دمای فتوولتاییک در جریان آرام مربوط به نانوذرهٔ استوانه‌ای‌شکل و در جریان مغشوش مربوط به نانوذرهٔ آجری‌شکل است.
- در جریان آرام، شکل نانوذرات اکسید آلومینیوم بر دمای خروجی اثر چندانی ندارد، اما در جریان مغشوش، نانوسیال حاوی نانوذرات تیغه‌ای و آجری دمای خروجی بیشتری را نتیجه می‌دهند.

- بازده انرژی کل در جریان آرام افزایش و در جریان مغشوش کاهش پیدا می‌کند.
- بازده اگزرژی کل در جریان آرام افزایش می‌یابد درحالی‌که در جریان مغشوش بازده اگزرژی کل برای نانوذرات پلاکتی، استوانه‌ای و تیغه‌ای‌شکل کاهش می‌یابد، ولی برای نانوذرهٔ آجری‌شکل شاهد افزایش بازده اگزرژی تا کسر حجمی ۱٪ و سپس کاهش آن هستیم.
- استفاده از نانوذرات استوانه‌ای‌شکل در جریان آرام و نانوذرات آجری‌شکل در جریان مغشوش منجر به حداکثر بازده انرژی و اگزرژی می‌شود.

فهرست علایم

علایم انگلیسی

A	مساحت (m^2)
CR	نسبت تمرکز
D	قطر (m)
f	ضریب اصطکاک
h_c	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی ($Wm^{-2}K^{-}$)[1]
h_r	ضریب انتقال حرارت تابشی ($Wm^{-2}K^{-1}$)
I_B	شدت تابش ورودی مستقیم (Wm^{-2})
L	طول سیستم (m)
$\dot{m}$	دبی جرمی (kgs^{-1})
Nu	عدد ناسلت
pa	ضریب فشردگی
P	فشار (Pa)
Pr	عدد پرانتل
Re	عدد رینولدز
T	دما (K)
w	عرض (m)

علائم یونانی

α	ضریب جذب
β_r	ضریب دمایی در شرایط مرجع
γ_t	عامل ممانعت
ρ	ضریب انعکاس، چگالی (kgm^{-3})
η	بازده
η_r	بازده سلول خورشیدی در شرایط مرجع
σ	ثابت استفان بولتزمن ($Wm^{-2}K^{-4}$)
τ	ضریب عبور
θ	شیب کلکتور
φ	کسر حجمی

زیرنویس‌ها

a	لایهٔ هوا
abs	جاذب حرارتی
adh	چسب رسانای حرارتی
b	اتصال لوله
bf	سیال پایه
con	متمرکزکننده
i	لایهٔ عایق
nf	نانوسیال
np	نانوذره
PV	صفحهٔ فتوولتاییک
PV/T	فتوولتاییک/ حرارتی
CPV/T	فتوولتاییک/ حرارتی با متمرکزکننده
t	لوله
w	سیال عامل انتقال حرارت

مراجع

1. Najafi, G., Ghobadian, B., Mamat, R., Yusaf, T. and Azmi, W., "Solar energy in Iran: Current state and outlook", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 49, pp. 931-942, (2015) .
2. Shafiee, S. and Topal, E., "When will fossil fuel reserves be diminished?", *Energy policy*, Vol. 37, No. 1, pp. 181-189, (2009) .
3. Makki, A., Omer, S. and Sabir, H., "Advancements in hybrid photovoltaic systems for enhanced solar cells performance", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 41, No. 0, pp. 658-684, (2015) .
4. Saharaf, O.Z. and Orhan, M.F., "Concentrated photovoltaic thermal (CPVT) solar collector systems: Part I–Fundamentals, design considerations and current technologies", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 50, pp. 1500-1565, (2015) .
5. Saharaf, O.Z. and Orhan, M.F., "Concentrated photovoltaic thermal (CPVT) solar collector systems: Part II–Implemented systems, performance assessment, and future directions", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 50, pp. 1566-1633, (2015) .
6. Coventry, J.S., "Performance of a concentrating photovoltaic/thermal solar collector", *Solar Energy*, Vol. 78, No. 2, pp. 211-222, (2005) .
7. Li, M., Ji, X., Li, G., Wei, S., Li, Y. and Shi, F., "Performance study of solar cell arrays based on a trough concentrating photovoltaic/thermal system", *Applied Energy*, Vol. 88, No. 9, pp. 3218-3227, (2011) .
8. Li, M., Ji, X., Li, G., Yang, Z., Wei, S. and Wang, L., "Performance investigation and optimization of the Trough Concentrating Photovoltaic/Thermal system", *Solar Energy*, Vol. 85, No. 5, pp. 1028-1034, (2011) .
9. Ji, X., Li, M., Lin, W., Wang, W., Wang, L. and Luo, X., "Modeling and characteristic parameters analysis of a trough concentrating photovoltaic/thermal system with GaAs and super cell arrays", *International Journal of Photoenergy*, Vol. 2012, (2012) .
10. Calise, F., Palombo, A., and Vanoli, L., "A finite-volume model of a parabolic trough photovoltaic/thermal collector :Energetic and exergetic analyses", *Energy*, Vol. 46, No. 1, pp. 283-294, (2012) .
11. Chaabane, M. ,Charfi, W., Mhiri, H and Bournot, P., "Performance evaluation of concentrating solar photovoltaic and photovoltaic/thermal systems", *Solar Energy*, Vol. 98, pp. 315-321, (2013) .
12. Del Col, D., Bortolato, M., Padovan, A. and Quaggia, M., "Experimental and numerical study of a parabolic trough linear CPVT system", *Energy Procedia*, Vol. 57, pp. 255-264, (2014) .
13. Mahian, O., Kianifar, A., Kalogirou, S.A., Pop, I. and Wongwises, S., "A review of the applications of nanofluids in solar energy", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 57, No. 2, pp. 582-594, (2013) .
14. Mahian, O., Kianifar, Kleinstreuer, C., Al-Nimr, M.A, A., Kalogirou, Pop, I., Sahin, A.Z. and Wongwises, S., "A review of entropy generation in nanofluid flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 65, pp. 514-532, (2013) .
15. Cui, Y. and Zhu, Q., "Study of Photovoltaic/Thermal Systems with MgO-Water Nanofluids Flowing

over Silicon Solar Cells", *In Proceedings of Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC)*, Shanghai,China (2012) .

16. Sardarabadi, M., Passandideh-Fard, M. and Heris, S.Z., "Experimental investigation of the effects of silica/water nanofluid on PV/T (photovoltaic thermal units)", *Energy*, Vol. 66, pp. 264-272, (2014) .
17. Karami, N. and Rahimi, M., "Heat transfer enhancement in a hybrid microchannel-photovoltaic cell using Boehmite nanofluid", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 55 ,pp. 45-52, (2014) .
18. Sardarabadi, M. and Passandideh-Fard, M., "Experimental and numerical study of metal-oxides/water nanofluids as coolant in photovoltaic thermal systems (PVT)", *Solar Energy Materials and Solar Cells*, Vol. 157, pp. 533-542, (2016) .
19. Rejeb, O., Sardarabadi, M., Ménézo, C., Passandideh-Fard, M., Dhaou, M.H. and Jemni, A., "Numerical and model validation of uncovered nanofluid sheet and tube type photovoltaic thermal solar system", *Energy Conversion and Management*, Vol. 110, pp. 367-377, (2016) .
20. Xu, Z. and Kleinstreuer, C., "Concentration photovoltaic–thermal energy co-generation system using nanofluids for cooling and heating", *Energy Conversion and Management*, Vol. 87, pp. 504-512, (2014) .
21. Xu, Z. and Kleinstreuer, C., "Computational analysis of nanofluid cooling of high concentration photovoltaic cells", *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, Vol. 6, No. 3, pp. 031009-031009-9, (2014) .
22. Jing, D., Hu, Y., Liu, M., Wei, J. and Guo, L., "Preparation of highly dispersed nanofluid and CFD study of its utilization in a concentrating PV/T system", *Solar Energy*, Vol. 112, pp. 30-40, (2015) .
23. Radwan, A., Ahmed, M. and Ookawara, S., "Performance enhancement of concentrated photovoltaic systems using a microchannel heat sink with nanofluids", *Energy Conversion and Management*, Vol. 119, pp. 289-303, (2016) .
24. Yazdanifard, F., Ebrahimnia-Bajestan, E. and Ameri, M., "Investigating the performance of a water-based photovoltaic/thermal (PV/T) collector in laminar and turbulent flow regime", *Renewable Energy*, Vol. 99, pp. 295-306, (2016) .
25. Pak, B.C. and Cho, Y.I., "Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles", *Experimental Heat Transfer an International Journal*, Vol. 11, No. 2, pp. 151-170, (1998) .
26. Xuan, Y. and Roetzel, W., "Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 19, pp. 3701-3707, (2000) .
27. Timofeeva, E.V., Routbort, J.L. and Singh, D., "Particle shape effects on thermophysical properties of alumina nanofluids", *Journal of Applied Physics*, Vol. 106, No. 1, pp. 014304, (2009) .
28. Mahian, O., Kianifar, A., Heris, S. Z. and Wongwises, S., "First and second laws analysis of a minichannel-based solar collector using boehmite alumina nanofluids: effects of nanoparticle shape and tube materials", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 78, pp. 1166-1176, (2014) .
29. Shah, R.K., London, A.L., Irvine, T.F. and Hartnett, J.P., "Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data", *Elsevier Science*, (2014) .

30. Bergman, T.L., Lavine, A.S. and Incropera, F.P., "*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th Edition", John Wiley & Sons, New York, (2011).

حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال برروی محور استوانه‌ای چرخان*

حمید محمدیون(۱)

چکیده *در این مقاله جریان سکون شعاعیِ نانوسیال، برروی یک استوانهٔ نامحدود به‌صورت پایا مورد بررسی قرار گرفته است. جریان آزاد نیز پایا است و قدرت اولیهٔ جریان $\bar{k}$ می‌باشد و محور باسرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش است. حل تشابهی معادلات ناویراستوکس و معادلهٔ انرژی در این تحقیق ارائه شده است. این معادلات، بااستفاده از تبدیلات مناسبی که در این تحقیق معرفی شده است ساده‌سازی شده‌اند. برای همهٔ اعداد رینولدز، با افزایش کسر حجمی، مؤلفه‌های شعاعی و محوری میدان سرعت و نیز مؤلفهٔ محوری تنش برشی کاهش می‌یابد و درمقابل، مؤلفه‌های زاویه‌ای میدان سرعت، مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی و عدد ناسلت جریان افزایش می‌یابد.*

واژه‌های کلیدی نانوسیال، جریان سکون، انتقال حرارت، معادلات کاملاً تشابهی، کسر جرمی، سرعت زاویه‌ای ثابت.

Similarity Solution of Axisymmetric Stagnation Point Flow of Nanofluid on Rotating Cylinder

H. Mohammadiun

Abstract *In this paper the steady state radial stagnation point flow impinging on an infinite cylinder has been investigated. The impinging free stream is steady with a constant strain rate $\bar{k}$ and axis is rotating with constant angular velocity. Similarity solution of the Navier-Stokes and energy equations is presented in this research. A reduced from of these equations are obtained by using appropriate transformations introduced in this study. For all Reynolds numbers, as the particle fraction increases, fluid velocity component in radial and axial directions and axial component of shear-stresses decrease and in the contrary the angular component of shear stress and velocity field and Nusselt number increase.*

Key Words Nanofluid, Stagnation point flow, Heat transfer, Similarity solution, Particle fraction, Constant angular velocity

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۱۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۱۱/۱۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62224

(۱) استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، ایران. hmohammadiun@iau-shahrood.ac.ir

مقدمه

نانوسیال، نامی است که اولین بار توسط چوبی [1]، به‌کار گرفته شد و به سیالاتی گفته می‌شود که حاوی نانوذرات جامد معلق با اندازهٔ کوچک‌تر از ۱۰۰ nm و با کسر حجمی کمتر از ۵ درصد باشند. نانوسیال می‌تواند باعث بهبود انتقال حرارت درمقایسه با مایعات خالص شود. از نانوسیالات می‌توان برای بهبود سیستم مدیریت حرارتی در کاربردهای مهندسی، ازجمله انتقال حرارت، میکرومکانیک، سیستم‌های HVAC و تجهیزات سرمایشی استفاده کرد. در سال‌های اخیر، محققان به مطالعهٔ تجربی و عددی انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیالات در هندسه‌های مختلف پرداخته‌اند (میگا و همکاران [2]، هریس و همکاران [3]، وانگ وایسز و همکاران [4]، سانترا و همکاران [5] و نوین و همکاران [6]).

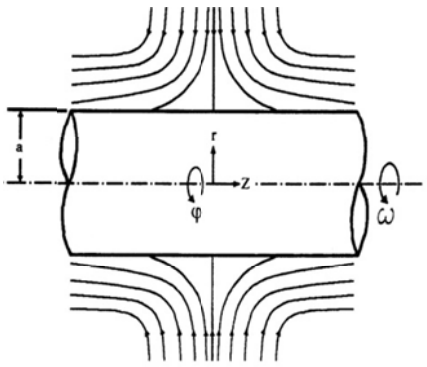
نیلد و کوزنتسو، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در لایهٔ مرزی جریان آرام یک نانوسیال را به‌صورت تحلیلی بررسی کردند [7]. آنها نشان داده‌اند که مدل به‌کاررفته برای نانوسیال با تأثیرات حرکت براونی تلفیق می‌شود. در پژوهش دیگری ، نیلدو کوزنتسو [8]، ناپایداری حرارتی در یک لایهٔ مرزی متخلل اشباع‌شده با یک نانوسیال را بررسی کردند. اخیراً، خان و پاپ، جریان لایهٔ مرزی یک نانوسیال را که از روی یک سطح گسترش‌یافته عبور کرده است، مورد مطالعه قرار داده‌اند [9]. به‌طور کلی یافتن حل‌های دقیق معادلات ناویراستوکس دارای پیچیدگی‌های ریاضی بسیاری است. این امر ناشی از غیرخطی بودن این معادلات است، به‌طوری‌که اصل برهم‌نهی که در جریان پتانسیل کارساز است، دیگر قابل اعمال نیست؛ با این حال در مواردی خاص، می‌توان حل‌های دقیق برای معادلات ناویراستوکس یافت؛ ولی اغلب این حل‌ها مربوط به حالاتی است که جملات جابه‌جایی که جملاتی غیرخطی هستند، به‌طور طبیعی حذف شوند.

اولین حل دقیق مسئلهٔ جریان سکون توسط هایمنز [10] ارائه گردید. در این حل، جریان سکون دوبعدی در مقابل صفحهٔ تخت بررسی شد. هایمنز جریان روی صفحهٔ تخت ساکن را، به‌صورت آرام، غیر قابل تراکم و پایدار فرض کرد. وی همچنین با اختیار متغیری مناسب و نیز تبدیل مؤلفه‌های سرعت به یک تابع تشابهی، به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی دست یافت و با حل آن، میدان سرعت و درنتیجه میدان فشار را در نزدیکی صفحهٔ تخت به‌دست آورد.

پس از هایمنز، هومان [11] یک حل دقیق برای حالت سه‌بعدی معادلات ناویراستوکس از جریان سکون متقارن محوری درمقابل یک صفحهٔ تخت به‌دست آورد. او نیز با تعریف تغییر متغیری مناسب و تبدیل مؤلفه‌های سرعت به یک تابع تشابهی، یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای تابع تشابهی به‌دست آورد و حل آن را به‌صورت یک سری توانی ارائه داد. هوارث [12] و دیوی [13] جریان سکون سه‌بعدی درمقابل یک صفحهٔ تخت را برای حالت‌های غیر متقارن بررسی کردند و نتایج خود را منتشر نمودند. اولین حل دقیق برای جریان سکون متقارن محوری برروی یک استوانهٔ نامحدود، توسط وانگ [14] ارائه شد. در این حل فرض شده است که استوانه ساکن است و هیچ‌گونه حرکت چرخشی یا محوری ندارد، استوانه نیز بدون عبور جریان از سطح خود و فاقد دمش یا مکش سطحی می‌باشد. ضمناً به‌دلیل تقارن جریان آزاد نسبت به محور استوانه و دائمی بودن جریان، کلیهٔ مشتقات نسبت به φ (جهت زاویه‌ای) و t (زمان)، صفر است و معادلات ناویراستوکس در مختصات استوانه‌ای به‌شکل ساده‌تری تبدیل می‌شوند. گورلا [19-15] در مجموعه‌ای از مقالات، جریان سکون متقارن محوری اطراف استوانه را مورد بررسی قرار داد، که جریان به‌صورت آرام در حالت‌های دائم و

گذرا درنظر گرفته شده بود. در این مقالات اثر حرکت محوری یکنواخت و نیز حرکت محوری هارمونیک استوانه مورد بررسی قرار گرفته است. کانینگ و همکارانش [20]، اثر چرخش استوانه با سرعت دورانی ثابت را برای جریان سکون برروی استوانه مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق همچنین اثر مکش و دمش یکنواخت جریان، روی سطح استوانه درنظر گرفته شده است. به‌دلیل چرخش استوانه، جریان کاملاً سه‌بعدی است و سرعت درجهت φ نیز وجود دارد. تاخار و همکاران [21]، اثر غیردائمی بودن جریان سکون شعاعی متقارن محوری برروی استوانه را همراه با اثر حرکت محوری استوانه با سرعت متغیر مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مقاله، تابع تغییرات زمانی جریان سکون آزاد و همچنین تابع تغییرات زمانی سرعت محوری استوانه برای به‌دست آوردن حل کاملاً تشابهی، یکسان و به‌صورت عکس تابع خطی نسبت به زمان درنظر گرفته شده است. صالح و رحیمی [22] و رحیمی و صالح [23-24] حل‌های دقیقی برای جریان سکون متقارن محوری برروی استوانهٔ نامحدود و نیز انتقال حرارت آن، برای حالت‌هایی که استوانه دارای حرکت محوری و چرخشی تابع زمان می‌باشد به‌دست آورده‌اند. همچنین شکرگزار عباسی و همکاران [25-28] حل‌های دقیقی برای جریان سکون سه‌بعدی و انتقال حرارت سیال لزج تراکم‌ناپذیر در حالت گذار، در برخورد با صفحهٔ تخت ارائه داده‌اند. محمدیون و همکاران نیز [29-31] در مجموعه‌ای از مقالات، حل‌های کاملاً تشابهی به‌منظور تحلیل جریان سکون متقارن محوری و انتقال آن برروی محور استوانه‌ای با درنظر گرفتن اثرات تراکم‌پذیری جریان در حالت پایا ارائه داده‌اند. همچنین محمدیون و همکاران [32] به بررسی آزمایشگاهی بهبود انتقال حرارت در مبدل حرات دولوله‌ای در حضور نانوسیال اتیلن گلایکول- اکسید آلومینیوم پرداخته‌اند که در این تحقیق از آشفته‌ساز نوار مارپیچ در رژیم جریان مغشوش استفاده شده است. فریدون مهر و رحیمی [33] به حل مسئلهٔ تولید آنتروپی در جریان آرام نانوسیال هیدرومغناطیسی برروی صفحهٔ تخت پرداختند. در این تحقیق فرض شده است که سطح، تحت تأثیر مکش و دمش سطحی یکنواخت قرار دارد. منصور و همکاران [34] بااستفاده از روش حل تشابهی به بررسی تولید آنتروپی در لایهٔ مرزی جریان هیدرومغناطیسی سیال غیرنیوتنی برروی صفحهٔ تخت، بااستفاده از مدل کیسون پرداختند.

در تحقیق حاضر، حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال و انتقال حرارت آن برروی استوانه همراه با حرکت چرخشی یکنواخت، برای اولین‌بار ارائه شده است. همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود جریان در مختصات استوانه‌ای (r,φ,z) با اجزای سرعت متناظر (u,v,w) درنظر گرفته شده است. استوانه دارای طول نامحدود و شعاع a است و این استوانه دارای حرکت چرخشی با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌باشد. مسئله در شرایطی بررسی می‌شود که دمای دیوارهٔ استوانه ثابت است یا دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابتی قرار دارد.



شکل ۱ شماتیک جریان سکون شعاعی برروی استوانه همراه با حرکت چرخشی

از موارد زیر می‌توان به‌عنوان برخی از کاربردهای حالت‌های جریان سکون برروی استوانه نام برد: تحلیل حرکت ماشین‌های سانتریفیوژ، پروسه‌های تولید در کارخانجات صنایع شیمیایی، پتروشیمی و سیمان، فرایندهای سرمایش و گرمایش، فازهای شتاب‌گیری موتورهای راکت، مراحل راه‌اندازی و ازکاراندازی ماشین‌های صنعتی، مخلوط‌کننده‌های صنعتی، الک‌های صنعتی و سایر ماشین‌های نوسان‌کنندهٔ صنعتی.

خواص نانوسیال

نانوذرات اکسید آلومینیوم (γAl_2O_3) که در پژوهش حاضر به‌کار رفته‌اند ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد: چگالی $\rho_m = 3600 \frac{Kg}{m^3}$، قطر میانگین ذره $44\ nm$ سایر خواص نیز در جدول (۱) فهرست شده است.

جدول ۱ خواص مربوط به سیال پایه و نانوسیال

مقدار	پارامتر
0.6316 [W/m-K]	ضریب هدایت حرارتی سیال پایه، k_f
40 [W/m-K]	ضریب هدایت حرارتی نانو ذره، k_p
4.181 [kJ/kg-K]	ظرفیت گرمایی ویژه سیال پایه، $C_{p,f}$
0.765 [kJ/kg-K]	ظرفیت گرمایی ویژه نانوذرات، $C_{p,p}$
987.6 [kg/m^3]	چگالی سیال پایه، ρ_f
3600 [kg/m^3]	چگالی نانو ذرات، ρ_p
0.000538 [kg/m-s]	لزجت دینامیکی سیال پایه، μ_f
44 nm	قطر نانوذرات، d_p
0.384 nm	قطر مولکول سیال پایه، d_f

چگالی نانوسیال

در این تحقیق فرض شده است که چگالی نانوذرات اکسید آلومینیوم در کل دامنهٔ دمایی مورد نظر ثابت باشد و از رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ چگالی نانوسیال استفاده شده است:

$$\rho_n = (1-\phi_v)\rho_f + \phi_v \rho_p \qquad (۱)$$

در رابطهٔ بالا اندیس‌های n , f , p به‌ترتیب معرف نانوسیال، سیال پایه و ذرات اکسید آلومینیوم می‌باشد و ϕ_v معرف کسر حجمی ذرات معلق در سیال است.

لزجت دینامیکی نانوسیال

لزجت دینامیکی نانوسیال را می‌توان با روابط موجود، برای مخلوط‌های دوفازی برآورد کرد. یکی از جامع‌ترین روابط برای محاسبهٔ لزجت سینماتیکی نانوسیالات رابطه‌ای است که توسط میسون کرچیونه به‌صورت زیر ارائه شده است [35]:

$$\frac{\mu_n}{\mu} = \frac{1}{1-34.87(\frac{d_p}{d_f})^{-0.3}\phi_v^{1.03}} \qquad (۲)$$

در رابطهٔ بالا d_f، قطر معادل یک مولکول سیال پایه است، که بااستفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d_f = 0.1(\frac{6M}{N\pi\rho_{f0}})^{\frac{1}{3}} \qquad (۳)$$

که در آن M وزن مولکولی سیال پایه، N عدد آووگادرو و ρ_{f0} چگالی سیال پایهٔ محاسبه‌شده در دمای $T_0 = 293k$ است. در تحقیق حاضر، فرمول کرچیونه برای محاسبهٔ لزجت سیال و بازنویسی معادلات ناویر–استوکس حاکم بر نانوسیال و نیز معادلهٔ انرژی استفاده شده است.

ضریب هدایت حرارتی نانوسیال

رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ ضریب هدایت حرارتی نانوسیال پیشنهاد شده است [35]:

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = 1 + 4.4\,\mathrm{Re}_p^{\,0.4}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{\,0.66}(\frac{T}{T_{fr}})^{10}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}\phi_v^{\,0.66} \qquad (٤)$$

در رابطهٔ بالا Re_p و Pr_{bf} به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\mathrm{Re}_p = \frac{2\rho_{bf}k_bT}{\pi\mu_{bf}{}^2 d_p} \quad \& \quad \mathrm{Pr}_{bf} = \frac{\mu_{bf}(c_p)_{bf}}{k_{bf}} \qquad (۵)$$

معادلات حاکم

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است جریان در مختصات استوانه‌ای (r,φ,z) با اجزای سرعت متناظر (u,v,w) درنظر گرفته شده است. جریان تراکم‌ناپذیر است و در حالت پایا بررسی می‌شود. با فرض تقارن محوری معادلات حاکم در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

معادلهٔ پیوستگی:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + r\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (٦)$$

معادلهٔ اندازه حرکت راستای r:

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P}{\partial r} + \upsilon_n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (۷)$$

معادلهٔ اندازه حرکت راستای z:

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P}{\partial z} + \upsilon_n\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (۸)$$

معادلهٔ اندازه حرکت راستای φ:

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \upsilon_n\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \qquad (۹)$$

معادلهٔ انرژی:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_{eff}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{eff}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = (\rho c_p)_n\left[u\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right] \qquad (۱۰)$$

شرایط مرزی معادلات بالا عبارتند از:

$$r = a: \quad u = 0, \quad v = a\omega, \quad w = 0 \qquad (۱۱)$$

$$r \to \infty: \; u = -\bar{k}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \& \frac{\partial u}{\partial r} = -\bar{k}, \quad \lim_{r\to\infty}(rv) = 0, \quad w = 2\bar{k}z \qquad (۱۲)$$

رابطهٔ (۱۱) همان شرط عدم لغزش سیال لزج می‌باشد. روابط (۱۲) براساس حل غیرلزج به‌دست آمده‌اند، به این شکل که اولی بیانگر این موضوع است که شیب تغییرات سرعت u در دوردست با شیب آن در حل غیرلزج یکسان است و عبارت سوم نیز بیانگر این موضوع است که اگر به‌حد کافی از دیوارهٔ استوانه دور شویم، آن‌گاه سرعت w سیال لزج همان سرعت w سیال غیرلزج می‌شود.

شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادلهٔ انرژی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

الف) حالت دیواره با دمای معلوم

$$r = a: \quad T = T_w \qquad r \to \infty: \; T = T_\infty \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ فوق T_w بیانگر دمای دیواره می‌باشد که دارای مقدار ثابت است. همچنین T_∞ بیانگر دمای جریان آزاد یا همان دمای سیال دور از دیواره می‌باشد.

ب) حالت دیواره با شار حرارتی معلوم

$$\begin{aligned} &r=a: \quad \frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{q_w}{k} \\ &r\to\infty: \quad T=T_\infty \end{aligned} \tag{۱٤}$$

در روابط فوق k ضریب هدایت حرارتی سیال و q_w شار حرارتی معلوم دیوارهٔ استوانه می‌باشد که مقدار آن ثابت است. همان‌طور که از روابط فوق مشهود است، شرط مرزی دوم در هر دو حالت یکسان است و فرض شده است که T_∞ ثابت باشد. بااستفاده از متغیرهای تشابهی مناسب می‌توان تعداد متغیرهای موجود در معادلات حاکم را کاهش داد. با الگو برداری از حل‌های غیرلزج ارائه‌شده در رابطهٔ (۱۲) و با ضرب این روابط در توابع تبدیل مناسب و فرض جریان پایا، روابط زیر برای کاستن معادلات ناویراستوکس به معادلات تشابهی بی‌بعد ارائه شده است [23]:

$$\begin{aligned} &u=-\bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta+1}}f(\eta)\ ,v=\bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta+1}}G(\eta), \\ &w=2\bar{k}\,f'(\eta)\,z,\quad P=\rho_n\bar{k}^2a^2p \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در روابط بالا $'(\ )$ معرف مشتق نسبت به متغیر تشابهی η می‌باشد که به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\eta=(\frac{r}{a})^2-1 \tag{۱٦}$$

روابط (۱۵)، معادلهٔ پیوستگی را خودبه‌خود ارضا می‌کند و پس از جایگزینی این روابط در معادلات اندازه حرکت راستاهای z ، φ و r، یک دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای تعیین f و G به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &(\eta+1)f'''+f''+\mathrm{Re}_n\,[1-(f')^2+f\,f'']=0 \\ &(\eta+1)G''+\mathrm{Re}_n\,f\,G'=0 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

در رابطهٔ بالا عدد رینولدز نانوسیال به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\mathrm{Re}_n=\beta\frac{\bar{k}\,a^2}{2\upsilon_f} \tag{۱۸}$$

$$\beta=[1-34.87(\frac{d_p}{d_f})^{-0.3}\phi_v^{1.03}](1-\phi_v+\phi_v\frac{\rho_p}{\rho_f}) \tag{۱۹}$$

بااستفاده از روابط (۱۱ و ۱۲)، شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادلات (۱۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\eta=0: \quad f=0, \quad f'=0, \quad G=\frac{a^2}{2\upsilon}\frac{\omega}{\mathrm{Re}} \\ &\eta\to\infty: \quad f'=1, \quad G=0 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

به‌منظور انتقال معادلهٔ انرژی از متغیر بی‌بعد $\theta(\eta)$ در دو حالت دیواره با دمای ثابت و شار حرارتی ثابت به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

الف) حالت دیواره با دمای معلوم

در این حالت متغیر جدید θ که بیانگر دمای بی‌بعد است، به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\theta(\eta)=\frac{T(\eta)-T_\infty}{T_w-T_\infty} \tag{۲۱}$$

دراین حالت، شرایط مرزی ارائه‌شده در رابطهٔ (۱۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\eta=0: \quad \theta=1 \\ &\eta\to\infty: \quad \theta=0 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

با فرض $\Gamma = 4.4(\frac{2\rho_{bf}K_b}{\pi\mu_{bf}{}^2 d_p})^{0.4}\frac{1}{T_{fr}{}^{10}}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}$، معادلهٔ انرژی پس از ساده‌سازی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left\{1+\Gamma\phi_v{}^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}{}^{0.66}[T_\infty+(T_w-T_\infty)\theta]^{10.4}\right\}\\&[(\eta+1)\theta''+\theta']+10.4[T_\infty+(T_w-T_\infty)\theta]^{9.4}\\&(T_w-T_\infty)\Gamma\phi_v{}^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}{}^{0.66}(\eta+1)(\theta')^2\\&+\left\{1-\phi_v+\phi_v[\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}]\right\}\mathrm{Re}_{bf}\,\mathrm{Pr}_{bf}\,f\theta'=0\end{aligned}\qquad(۲۳)$$

ب) حالت دیواره با شار حرارتی معلوم

در شرایطی که دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابت q_w قرار دارد دمای بی بعد $\theta(\eta)$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta(\eta)=\frac{T(\eta)-T_\infty}{\frac{aq_w}{2k_{bf}}}\qquad(۲٤)$$

در این حالت، شرایط مرزی ارائه‌شده در رابطهٔ (۱۳) به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\eta=0: \quad -\frac{k_{nf}}{k_{bf}}\theta'(0)=1\\&\eta\to\infty: \quad \theta=0\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

با استفاده از رابطهٔ (۲٤) و پس از ساده‌سازی، معادلهٔ انرژی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left\{1+\Gamma\phi_v{}^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}{}^{0.66}[T_\infty+\frac{aq_w}{2k_{bf}}\theta]^{10.4}\right\}\\&[(\eta+1)\theta''+\theta']+10.4[T_\infty+\frac{aq_w}{2k_{bf}}\theta]^{9.4}\\&\frac{aq_w}{2k_{bf}}\Gamma\phi_v{}^{0.66}\,\mathrm{Pr}_{bf}{}^{0.66}(\eta+1)(\theta')^2+\\&\left\{1-\phi_v+\phi_v[\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}]\right\}\mathrm{Re}_{bf}\,\mathrm{Pr}_{bf}\,f\theta'=0\end{aligned}\qquad(۲٦)$$

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}h&=\frac{-k_{nf}\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a}}{T_w-T_\infty}=\frac{-k_{nf}\left.\frac{\partial T}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}\right|_{\eta=0}}{T_w-T_\infty}\\&=\frac{-k_{nf}|_{T=Tw}(T_w-T_\infty)\theta'(0)}{T_w-T_\infty}\frac{2}{a}\end{aligned}\qquad(۲۷)$$

از رابطهٔ بالا نتیجهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}ha&=-2k_{nf}|_{T=Tw}\theta'(0)=-2k_{bf}[1+4.4\,\mathrm{Re}_p{}^{0.4}\\&\mathrm{Pr}_{bf}{}^{0.66}(\frac{T_w}{T_{fr}})^{10}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}\phi^{0.66}]\theta'(0)\end{aligned}\qquad(۲۸)$$

معادلات دیفرانسیل (۱۷ و ۲۳ و ۲٦) به‌همراه شرایط مرزی ارائه‌شده، باروش تفاضل محدود و بااستفاده از الگوریتم ماتریس سه‌قطری (*TDMA*) به‌طور هم‌زمان حل می‌شود. نتایج حاصل از حل این معادلات در بخش‌های بعد ارائه شده است.

محاسبهٔ تنش برشی در سطح

برای محاسبهٔ تنش برشی مؤثر بر سطح استوانه رابطهٔ زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\sigma=\sigma_\varphi\hat{e}_\varphi+\sigma_z\hat{e}_z=\mu_n[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r})\hat{e}_\varphi+\frac{\partial w}{\partial r}\hat{e}_z]_{r=a}\qquad(۲۹)$$

به‌منظور محاسبهٔ تنش برشی، ابتدا با مشتق‌گیری زنجیره‌ای، جملهٔ $\frac{\partial w}{\partial r}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}=(2\bar{k}\,f''z)\frac{2r}{a^2}\qquad(۳۰)$$

باتوجه به این‌که در $r=a$، داریم $\eta=0$ رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ تنش برشی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sigma=\mu_n[2\bar{k}f''(0)z]\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{\sigma a}{4\mu_n\bar{k}z}=f''(0)\qquad(۳۱)$$

همچنین برای محاسبهٔ σ_φ داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v}{r}) = -\frac{2\bar{k}a^2}{r^2}\frac{G(\eta)}{c(\eta)} + 2\bar{k}[G'(\eta) - \frac{G(\eta)c'(\eta)}{c(\eta)}] \quad (۳۲)$$

ازآنجاکه در سطح استوانه $\eta = 0$ می‌باشد، σ_φ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_\varphi = 2\bar{k}\mu_n[-\frac{G(0)}{c(0)} + G'(0) - \frac{G(0)c'(0)}{c(0)}] \rightarrow \frac{\sigma_\varphi}{2\bar{k}\mu_n} = -\frac{G(0)}{c(0)} + G'(0) - \frac{G(0)c'(0)}{c(0)} \quad (۳۳)$$

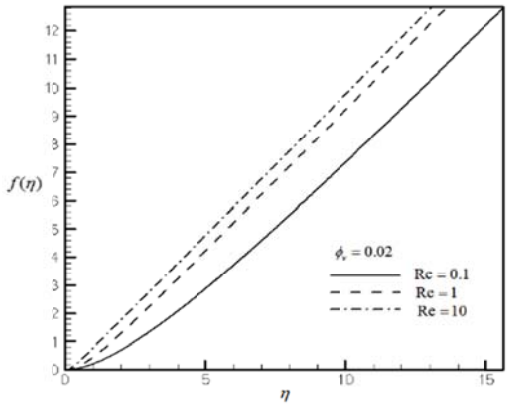
باتوجه به این‌که $\frac{G(0)}{c(0)} = \frac{a^2}{2\upsilon}\frac{\omega}{\mathrm{Re}}$، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\sigma_\varphi}{2\mu_n\omega} = -[1 + c'(0)] + \frac{\bar{k}\,G'(0)}{\omega} \quad (۳۴)$$

نتایج

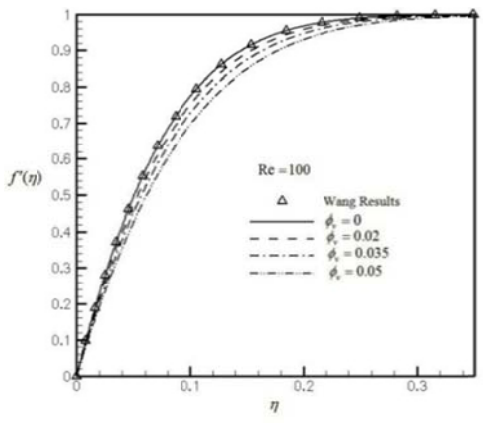
در این قسمت نتایج حاصل از حل معادلات دیفرانسیل (۱۷ و ۲۳ و ۲۶) به‌همراه تنش برشی در سطح و عدد ناسلت در محدودهٔ اعداد رینولدز مختلف و به‌ازای کسر حجمی‌های انتخابی ارائه شده است.

در شکل (۲) نمونه‌ای از منحنی‌های $f(\eta)$ برحسب η برای کسر حجمی $\phi_v = 0.02$ و اعداد رینولدز انتخابی ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز عمق نفوذ مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت سیال افزایش می‌یابد؛ زیرا با افزایش عدد رینولدز اینرسی حرکتی شعاعی سیال بیشتر می‌شود، به‌عبارت دیگر با نفوذ هر چه بیشتر ممنتوم شعاعیِ سیال، مؤلفهٔ شعاعی میدان جریان نیز افزایش می‌یابد.



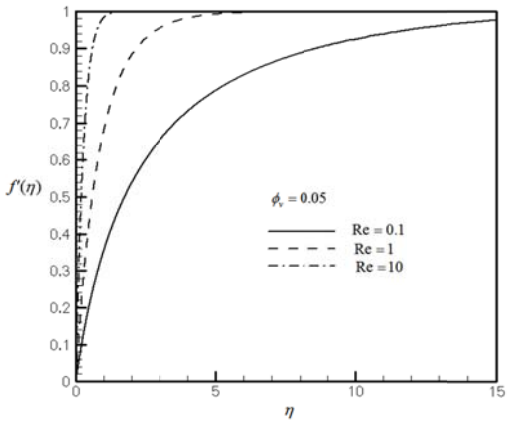
شکل ۲ منحنی تغییرات $f(\eta)$ برحسب η در $\phi_v = 0.02$ به‌ازای اعداد رینولدز مختلف

اثر تغییر کسر حجمی نانوذرات بر تابع $f'(\eta)$ در $\mathrm{Re} = 100$ در شکل (۳) نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج حل حاضر در $\phi_v = 0$ (برای سیال پایه) بر نتایج حل *Wang* مرجع [14] منطبق می‌باشد. با افزایش کسر حجمی نانوذرات، عمق نفوذ مؤلفهٔ محوری میدان سرعت سیال کاهش می‌یابد. به‌عبارت دیگر تزریق نانوذرات در سیال پایه، باعث کاهش اینرسی حرکتی سیال می‌شود و با کاهش اندازهٔ حرکت محوری سیال، سرعت محوری آن کاهش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهند، بیشترین مؤلفهٔ محوری، مربوط به سیال پایه می‌باشد.

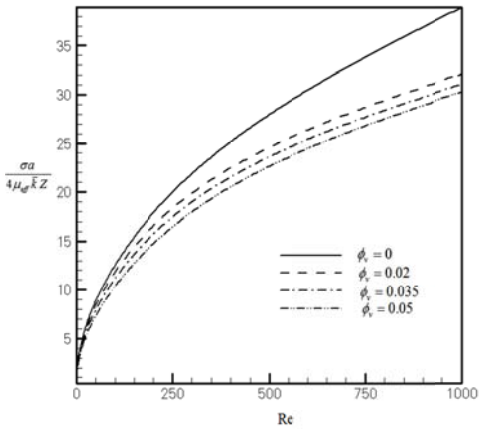


شکل ۳ منحنی تغییرات $f'(\eta)$ برحسب η در $\mathrm{Re} = 100$

در شکل (٤) نمونه‌ای از منحنی های $f'(\eta)$ برحسب η برای $\phi_v = 0.05$ و اعداد رینولدز انتخابی نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عدد رینولدز، ضخامت لایهٔ مرزی سرعت کاهش می‌یابد که منجر به افزایشِ شیب نیم‌رخ‌های توزیع سرعت در $\eta = 0$ می‌شود و بنابراین گرادیان سرعت در سطح استوانه افزایش می‌یابد. می‌توان نشان داد برای سایر مقادیر کسر حجمی نانوذرات نیز نتایج مشابهی استخراج می‌شود.



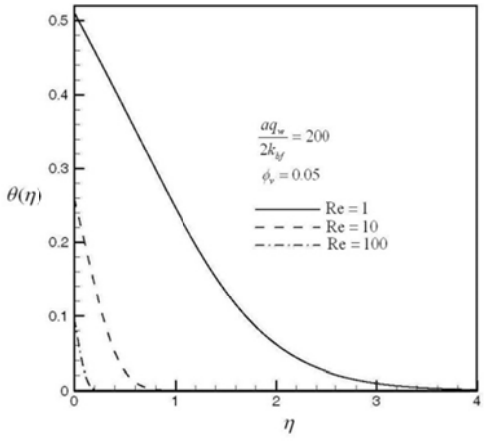
شکل ٤ منحنی تغییرات $f'(\eta)$ برحسب η در $\phi_v = 0.05$، به‌ازای اعداد رینولدز مختلف



شکل ٥ منحنی تغییرات تنش برشی در سطح استوانه برحسب عدد رینولدز، به‌ازای کسر حجمی‌های مختلف نانوذرات

در شکل (٥) مؤلفهٔ محوری تنش برشی دیواره، برحسب عدد رینولدز در کسرحجمی‌های مختلف نانوذرات ترسیم شده‌اند. باتوجه به منحنی‌های ارائه‌شده، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش کسرحجمی نانوذرات، تنش برشی در سطح را کاهش می‌دهد، زیرا افزایش کسرحجمی نانوذرات باعث کاهش شیب نیم‌رخ‌های توزیع سرعت می‌شود و به‌عبارت دیگر گرادیان سرعت در سطح کاهش می‌یابد و این موضوع باعث کاهش تنش برشی در سطح استوانه می‌شود.

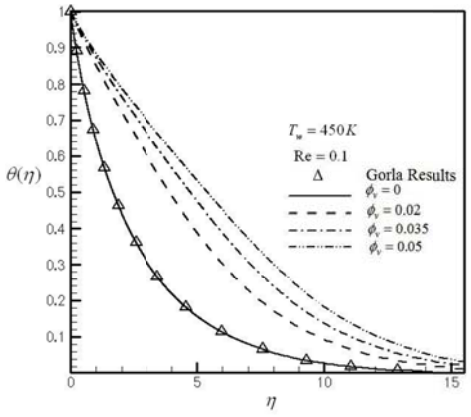
در شکل (٦) نمونه‌ای از منحنی‌های توزیع دمای بی‌بعد θ برحسب η نمایش داده شده است. این منحنی‌ها در شرایطی ترسیم شده‌اند که دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی یکنواخت قرار دارد. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عدد رینولدز جریان اندازهٔ حرکت سیال افزایش می‌یابد و با افزایش عمق نفوذ ممنتوم سیال نه‌تنها ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی کاهش می‌یابد بلکه دمای بی‌بعد در سطح نیز کمتر می‌شود.



شکل ٦ اثر کسر حجمی نانوذرات بر منحنی‌های دمای بی‌بعد θ در شرایط شار حرارتی ثابت دیواره در Re=10

در شکل (٧) تأثیر کسر حجمی ϕ_v بر منحنی‌های دمای بی‌بعد نشان داده شده است. این نتایج در دمای دیواره T_w=450k ترسیم شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رود، برخلاف منحنی‌های دمای بی‌بعد شار ثابت در این حالت تمام منحنی‌ها از نقطهٔ $\theta = 1$ شروع می‌شوند و با افزایش کسر حجمی نانوذرات شیب منحنی‌ها کاهش می‌یابد واین به‌معنی افزایش ضخامت

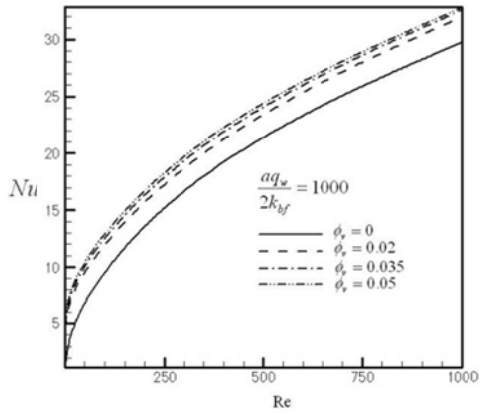
لایهٔ مرزی حرارتی می‌باشد. هر چند افزایش نانوذرات به سیال، منجر به کاهش گرادیان دمای بی‌بعد در سطح استوانه می‌شود، اما شدت افزایش ضریب هدایت حرارتی آن‌قدر قابل‌توجه است که افزایش نرخ انتقال حرارت را به‌همراه دارد.



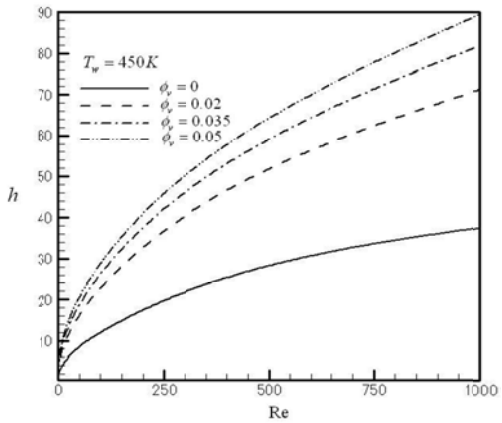
شکل ۷ تأثیر کسر حجمی ϕ_v بر منحنی‌های دمای بی‌بعد در دمای $T_W=450K$ و Re= 0.1

تأثیر کسر حجمی نانوذرات برروی عدد ناسلت در شرایطی که دیوارهٔ استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابت قرار دارد در منحنی‌های شکل(۸) نمایش داده شده است. در این منحنی‌ها عدد ناسلت برحسب عدد رینولدز به‌ازای کسر حجمی‌های مختلف ترسیم شده است. نتیجهٔ قابل‌توجه این است که با افزایش کسر حجمی نانوذرات عمق نفوذ حرارت افزایش می‌یابد و ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی بیشتر می‌شود. همان‌طور که این منحنی‌ها نشان می‌دهند افزایش عدد رینولدز جریان باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود که این به‌معنی بهبود انتقال حرارت است. همچنین افزایش کسر حجمی نانوذرات تأثیر محسوسی بر افزایش عدد ناسلت جریان دارد و بهبود انتقال حرارت را به‌همراه می‌آورد.

در شکل (۹) ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) برحسب عدد رینولدز در دمای دیواره $T_w=450\ k$ به‌ازای کسر حجمی‌های متفاوت ترسیم شده است. با افزایش کسر حجمی‌های نانوذرات که منجر به افزایش ضریب هدایت حرارتی سیال می‌شود ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، افزایش می‌یابد و همان‌طور که ملاحظه می‌شود کمترین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی مربوط به سیال پایه ($\phi_v = 0$) می‌باشد.



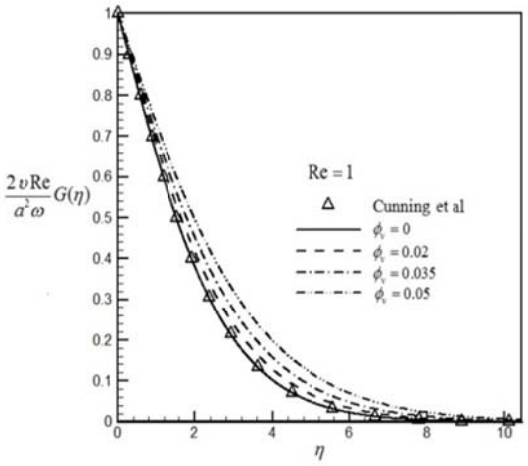
شکل ۸ تأثیر کسر حجمی نانوذرات برروی عدد ناسلت در شرایط $\frac{aq_w}{2k_{bf}} = 1000$



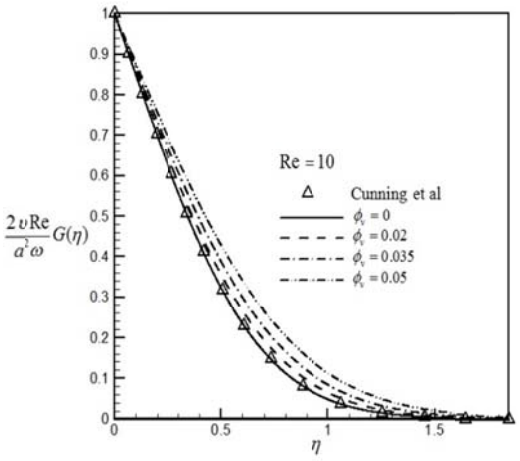
شکل ۹ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) دردمای دیواره $T_w=450\ k$

اثر کسر حجمی نانوذرات بر تابع $\frac{2\upsilon \mathrm{Re}}{a^2\omega}G(\eta)$ برحسب η به‌ازای اعداد رینولدز مختلف در شکل‌های (۱۲-۱۰) نمایش داده شده است. با افزایش کسر حجمی نانوذرات، به‌ازای هر مقدار عدد رینولدز

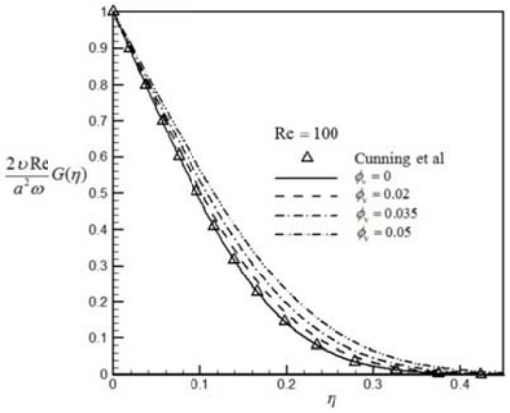
انتخابی، مقدار تابع $\frac{2\upsilon \mathrm{Re}}{a^2\omega}G(\eta)$ افزایش می‌یابد و افزایش مقدار این تابع به‌معنی افزایش مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت سیال است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در تمام اعداد رینولدز، کمترین مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت سیال متعلق به سیال پایه است. در تمام موارد نتایج حاصل، به‌ازای $\phi_v = 0$ (برای سیال پایه) بر نتایج Cunning مرجع [19] منطبق است که این انطباق نتایج، صحت روش حل را تأیید می‌کند.



شکل ۱۰ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت در Re=1

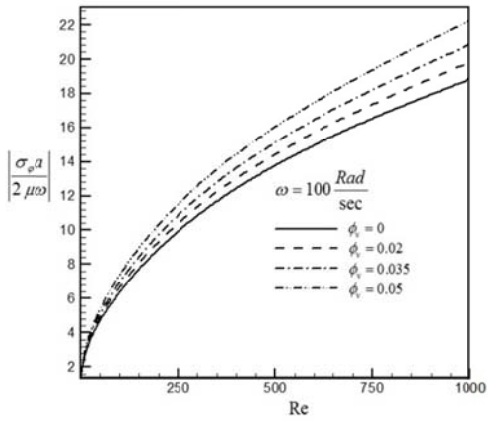


شکل ۱۱ تاثیر کسر حجمی نانوذرات برمولفه زاویه ای میدان سرعت در Re=۱۰



شکل ۱۲ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت در Re=۱۰۰

شکل (۱۳) به‌منظور بررسی اثر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی سیال در سطح استوانه ترسیم شده است. نتایج به‌ازای $\omega = 100\frac{rad}{\sec}$ ارائه شده است و نتیجهٔ جالب‌توجه این است که با افزایش کسرحجمی نانوذرات، مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی در سطح استوانه افزایش می‌یابد و کمترین مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی مربوط به سیال پایه می‌باشد.



شکل ۱۳ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی

نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال برروی استوانهٔ چرخان و انتقال

حرارت آن، در شرایطی که استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد، ارائه شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بااستفاده از متغیر تشابهی و توابع تبدیل مناسبی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و حل شده‌اند. همهٔ این نتایج در محدودهٔ اعداد رینولدز ۰/۱ تا ۱۰۰۰ و به‌ازای مقادیر مختلف کسر حجمی نانوذرات ($\phi_v = 0.02,0.035,0.05$) ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش کسر حجمی نانوذرات، باعث کاهش مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت و مؤلفهٔ محوری تنش برشی مؤثر بر دیوارهٔ استوانه می‌شود درحالی‌که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، عدد ناسلت، مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت و مؤلفهٔ زاویه‌ای تنش برشی در سطح استوانه افزایش می‌یابد.

فهرست علائم

ρ_n	چگالی نانوسیال
ϕ_v	کسر حجمی
ρ_f	چگالی سیال پایه
ρ_p	چگالی نانوذرات
d_f	قطر معادل مولکول‌های سیال پایه
d_p	قطر معادل مولکول‌های نانوذرات
μ_n	لزجت دینامیکی نانوسیال
μ	لزجت دینامیکی سیال پایه
η	متغیر تشابهی
Re_n	عدد رینولدز نانوسیال
Re	عدد رینولدز سیال پایه
$\bar{k}$	قدرت چشمه جریان
a	شعاع استوانه
r,φ,z	مؤلفه‌های مختصات استوانه‌ای
v_f	لزجت سینماتیکی سیال پایه
u	مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت
w	مؤلفهٔ محوری میدان سرعت
v	مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت
σ	تنش برشی
p	فشار
P	فشار بی‌بعد
f	تابع بی‌بعد مرتبط با مؤلفهٔ شعاعی میدان سرعت
G	تابع بی‌بعد مرتبط با مؤلفهٔ زاویه‌ای میدان سرعت
v_n	لزجت سینماتیکی نانوسیال
k_{eff}	ضریب هدایت حرارتی نانوسیال
T_{fr}	دمای انجماد سیال پایه
Re_P	عدد رینولدز نانوذرات
Pr_b	عدد پرانتل سیال پایه
Nu	عدد ناسلت
h	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی

مراجع

1. Choi, S.U.S, "Enhancing thermal conductivity of fluid with nanoparticles", *Dev. Appl Non-Newtonian Flows*, Vol. 66, pp. 99–105, (1995).
2. Maiga, S.E.B., Nguyen, C.T., Galanis, N. and Roy, G., "Heat transfer behaviors of nanofluid in a uniformly heated tube", *Superlattices Microstruct.*, Vol. 35, No. 3-6, pp. 453–462, (2004).
3. Heris, S.Z., Etemad, S.Gh. and Esfahani, M.N., "Experimental investigation of oxide nanofluid laminar forced flow convective heat transfer", *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, Vol. 33, No. 4, pp. 529–535, (2006).

4. Duangthongsuk, W. and Wongwises, S., "Heat transfer enhancement and pressure drop characteristics of TiO2-water nanofluid in a double-tube counter flow heat exchangers", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 52, No. 7-8, pp. 2059–2067, (2009).
5. Santra, A.K., Sen, S. and Chkroborty, M., "Study of heat transfer due to laminar flow of copper–water nanofluid through two isothermally heated parallel plates", *Int. J. Therm. Sci.,* Vol. 48, No. 1, pp. 391–400, (2009).
6. Nguyen, C.T., Galanis, N., Polidori, G., Fohanno, S., Pota, C.V. and Beche, A.L., "An experimental study of confined and submerged impinging jet heat transfer using Al2O3-water nanofluid", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, No. 2, pp. 401–411, (2009).
7. Kuznetsov, A.V. and Nield, D,A., "Natural convection boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 49, No. 2, pp. 243–247 (2010).
8. Kuznetsov, A.V. and Nield, D.A., "Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid: Brinkman model", *Transp. Porous Med.*, Vol. 81, No. 3, pp. 409–422, (2010).
9. Khan, W.A. and Pop, I., "Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 53, No. 11-12, pp. 2477–2483, (2010).
10. Hiemenz, K., "Die Grenzchicht an einem in den gleichformingen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden", *Kreiszylinder. Dinglers Polytech. J.*, Vol. 326, pp. 321-410, (1911).
11. Homann, F.Z., "Der Einfluss grosser Zahighkeit bei der Strmung um den Zylinder und um die Kugel", *Zeitsch. Angew. Math. Mech.*, 16153-164, (1936)
12. Howarth, L., "The boundary layer in three dimensional flow. Part II. The flow near a stagnation point", *Phil. Mag.*, Vol. 42, No. 7, pp. 1433-1440, (1951).
13. Davey, A., "Boundary layer flow at a saddle point of attachment", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 10, No. 4, pp. 593-610, (1951).
14. Wang, C., "Axisymmetric stagnation flow on a cylinder", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 2, pp. 207-213, (1974).
15. Gorla, R.S.R., "Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder", *Dev. Mec*, Vol. 9, pp.286-288, (1977).
16. Gorla, R.S.R., "Nonsimilar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 16, No. 6, pp. 397-400, (1978).
17. Gorla, R.S.R., "Transient response behaviour of an axisymmetric stagnation flow on a circular cylinder due to time dependent free stream velocity", *Int. J. Engineering science*, Vol. 16, No. 7, pp. 493- 502, (1978).
18. Gorla, R.S.R., "Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation-point on a cylinder", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 17, No. 1, pp. 87-93, (1979).
19. Gorla, R.S.R., "Heat transfer in axisymmetric stagnation flow on a cylinder", *Applied Scientific Research J.*, Vol. 32, No. 5, pp. 541-553, (1976).
20. Cunning, G.M., Davis, A.M.J. and Weidman, P.D., "Radial stagnation flow on a rotating cylinder with uniform transpiration", *Journal of Engineering mathematics*, Vol. 33, No. 2, pp. 113-128, (1998).
21. Takhar, H.S., Chamkha, A.J. and Nath, G., "Unsteady axisymmetric stagnation-point flow of a viscous fluid on a cylinder", *Int. Journal of Engineering Science*, Vol. 37, No. 15, pp. 1943-1957, (1999).
22. Saleh, R. and Rahimi, A.B., "Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous Fluid on a Moving Cylinder with Time- Dependent Axial Velocity and Uniform Transpiration", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, No. 6, pp. 997–1005, (2004).
23. Rahimi, A.B. and Saleh, R., "Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous

Fluid on a Rotating Cylinder With Time- Dependent Angular Velocity and Uniform Transpiration", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 107–115 (2007).

24. Rahimi, A.B. and Saleh, R., "Similarity Solution of Unaxisymmetric Heat Transfer in Stagnation-Point Flow on a Cylinder with Simultaneous Axial and Rotational Movements", Journal of Heat Transfer, Vol. 130, No. 5, pp. 054502-1–054502-5, (2008).
25. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Non-Axisymmetric Three- Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 131, No. 7, pp. 074501.1–074501.5, (2009).
26. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Three-Dimensional Stagnation- Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate with Transpiration", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 23, No. 3, pp. 513–521, (2009).
27. Abbasi, A.S., Rahimi, A.B. and Niazmand, H., "Exact Solution of Three-Dimensional Unsteady Stagnation Flow on a Heated Plate", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 25, No. 1, pp. 55–58, (2011).
28. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Investigation of Two-Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer Impinging on a Flat Plate", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 134, No. 6, pp. 064501-06450, (2012).
29. Mohammadiun, H. and Rahimi, A.B., "Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous, Compressible Fluid on a Cylinder", *Journal of Thermo physics and Heat Transfer*, Vol. 26, No. 3, pp. 494-502, (2012).
30. Mohammadiun, H., Rahimi, A.B. and Kianifar, A., "Axisymmetric stagnation-point flow and heat transfer of a viscous, compressible fluid on a cylinder with constant heat flux", *Scientia Iranica B*, Vol. 20, No. 1, pp. 185–194, (2013).
31. Rahimi, A.B., Mohammadiun, H. and Mohammadiun, M., "Axisymmetric stagnation flow and heat transfer of a compressible fluid impinging on a cylinder moving axially", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 138, No. 2, pp. 022201-1-022201-9, (2016).
32. Mohammadiun, H., Mohammadiun, M., Hazbehian.M. and Maddah, H., "Experimental study of ethylene glycol-based Al_2O_3 nanofluid turbulent heat transfer enhancement in the corrugated tube with twisted tapes", *Heat Mass Transfer*, Vol. 52, No. 1, pp. 141–151, (2016).
33. Freidoonimehr, N. and Rahimi, A.B, "Exact-solution of entropy generation for MHD nanofluid flow induced by a stretching/shrinking sheet with transpiration: Dual solution", *Advanced Powder Technology*, Vol. 28, No. 22, pp. 671-685, (2017).
34. Mansour, M.A., Mahdy, A.S., Ahmed, S.E. and Mohamed, S.S., "Entropy Analysis for Unsteady MHD Boundary Layer Flow and Heat Transfer of Casson Fluid over a Stretching Sheet", *Walailak J Sci & Tech*, Vol. 14, No. 2, pp. 169-187, (2017).
35. Corcione, M., "Empirical correlating equations for predicting the effective thermal conductivity and dynamic viscosity of nanofluids", *Ene. Convers. Manage*, Vol. 52, No. 1, pp. 789-793, (2011).

تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی به‌وسیلهٔ حل معکوس*

مریم شمسا[۱] محمدرضا گلبهار حقیقی[۲] پرویز ملک‌زاده[۳]

چکیده *در این مقاله پارامترهای مکانی و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای و گستردهٔ متغیر با زمان برای یک ورق مستطیلی مدرج تابعی به‌وسیلهٔ الگوریتم معکوس برمبنای روش گرادیان مزدوج تخمین زده خواهد شد. این کار به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری دما روی مرزهای ورق انجام می‌گیرد. فرض بر این است که هیچ اطلاع اولیه‌ای از مکان منبع و تابع شدت منبع حرارتی در دسترس نیست، بنابراین روند تخمین با یک حدس اولیهٔ دلخواه آغاز می‌گردد. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش اجزامحدود برای مشتقات مکانی و روش کرنک نیکلسون برای گسسته‌سازی مشتقات زمانی استفاده گردیده است. در این مقاله برای اولین‌بار به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، پرداخته شده است. علاوه‌براین در تخمین منبع حرارتی، هم منبع نقطه‌ای و هم منبع گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند.*

واژه‌های کلیدی مواد مدرج تابعی، انتقال حرارت، روش گرادیان مزدوج، مسائل معکوس، منبع حرارتی.

Simultaneous Estimation of Location and Strength of a Heat Source in a Functionally Graded Plate by Inverse analysis

M. Shamsa M.R. Golbahar Haghighi P. Malekzadeh

Abstract *In this article, an inverse algorithm based on the conjugate gradient method is applied to estimate the unknown location and time-wise varying strength of the point and distributed heat source in functionally graded rectangular plate from the knowledge of temperature measurements taken from the boundaries of plate. It is assumed that no prior information is available on the functional form of time-wise variation of the heat source strength so estimation process starts with an arbitrary initial guess. The conjugate gradient method is employed for optimization process and the finite element method is applied to solve the governing differential equations. Results show that the estimation of location and strength of point heat source can be obtained with any arbitrary initial guesses.*

Key Words Functionally Graded Materials, Heat Transfer, Conjugate Gradient Method, Inverse Problems, Heat Source.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۰/۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۵/۲ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.61392

(۱) کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر golbahar@pgu.ac.ir

(۳) استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر.

مقدمه

مواد هدفمند مواد غیرهمگنی می‌باشند که برای بهینه‌کردن تنش و مقاومت حرارتی و توزیع دما در اجزا و سازه‌هایی که در معرض حرارت بالا یا بار مکانیکی قرار گرفته‌اند مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد مدرج تابعی از انواع مواد پیشرفته با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به‌دست می‌آیند. تفاوت این مواد با مواد مرکب لایه‌ای سنتی در این است که در مواد لایه‌ای خواص مواد سازندهٔ آنها به‌صورت لایه‌ای از یک لایه به لایهٔ دیگر تغییر می‌کرد درصورتی‌که در مواد مدرج تابعی خواص به‌صورت پیوسته و تدریجی برحسب متغیر مکانی (معمولاً در راستای ضخامت) تغییر می‌کنند و باتوجه به نوع مواد به‌کاررفته و نحوهٔ قرارگیری ذرات ماده در آنها، از مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی نسبت به سایر مواد برخوردار می‌باشند. این ویژگی‌ها سبب شده است که از این مواد در ساخت سازه‌ها و ماشین‌آلات خاص ازجمله در صنایع فضایی که نیاز به اجزایی با وزن پایین و مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا می‌باشد، استفاده گردد. این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن راکتورها و توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها نیز کاربرد بسیاری پیدا کرده‌اند؛ زیرا این قطعات توانایی بالایی در برابر شکست ناشی از کمانش حرارتی دارند.

در مسائل کلاسیک به‌طور معمول با داشتن شرایط اولیه و شرایط مرزی از یک مدل فیزیکی، به بررسی تأثیرات این شرایط بر میدان حل پرداخته می‌شود. برای مثال در صنایع پیشرفتهٔ ساخت نازل موشک، دانستن شار حرارتی وارد بر بدنهٔ نازل از اهمیت فراوانی برخوردار است زیرا وجود شار حرارتی بالا در این ناحیه باعث زیاد شدن قطر گلوگاه نازل و درنتیجه کاهش کارایی پیشران نازل می‌شود که درنهایت، این عوامل کارایی موتور را کاهش می‌دهند.

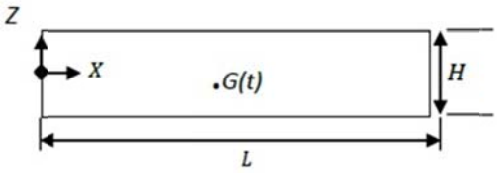
در برخی مسائل اندازه‌گیری مستقیم برخی مقادیر به‌روش تجربی، به دو دلیل امکان‌پذیر نمی‌باشد. اولاً در بعضی موارد دمای سطوح داخلی مورد اندازه‌گیری به‌اندازه‌ای بالاست که حسگرها قادر به تحمل و اندازه‌گیری نمی‌باشند (مثلاً وجود دمای بالای ۳۰۰۰ درجهٔ سانتی‌گراد در موشک‌ها)، ثانیاً در بعضی از موارد، وسایل مورد استفاده برای اندازه‌گیری بسیار پیچیده و پرهزینه می‌باشند که شاید برآوردن هدف مورد نظر از آن سیستم مقرون‌به‌صرفه نباشد. ازاین‌رو در سال‌های اخیر تحقیقاتی برروی مسائل انتقال حرارت انجام گرفته که نتایج آن منجر به ایجاد روشی جایگزین گردیده است. به‌طور کلی مسائل انتقال حرارت را می‌توان به دو دستهٔ مستقیم و معکوس تقسیم‌بندی نمود. امروزه برای تعیین برخی از پارامترهای حرارتی، از روش‌های معکوس استفاده می‌شود. استفاده از روش‌های معکوس وقتی ارزشمند است که اندازه‌گیری مستقیم پارامترهای حرارتی غیرممکن و یا پرهزینه باشد. در مسائل انتقال حرارت با روش مستقیم (Direct heat transfer problems) هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم است و هدف محاسبهٔ توزیع دما در داخل ناحیهٔ مورد بررسی بااستفاده از حل معادلات حاکم می‌باشد؛ درحالی‌که در مسائل انتقال حرارت معکوس (Inverse heat transfer problems) تعدادی از این اطلاعات نامعلوم می‌باشند و هدف تخمین آنها بااستفاده از دماهای اندازه‌گیری‌شده در مرزهای ناحیهٔ مورد بررسی می‌باشد. در این روش حجم محاسبات تجربی مورد نیاز برای به‌دست آوردن کمیت‌های ترموفیزیکی نظیر منابع حرارتی، خواص حرارتی مواد، شرایط مرزی درگیر یا توزیع شارهای حرارتی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

درزمینهٔ تخمین منبع حرارتی به‌روش معکوس، سیلوا نتو و اوزیسیک [1] در سال ۱۹۹۳ مسئلهٔ یک‌بعدی تخمین یک منبع حرارتی تابع زمان و مکان را در مواد همگن بررسی کردند. آنها شرایط مرزی را به‌صورت دو مرز عایق درنظر گرفتند و از روش گرادیانی مزدوج به‌همراه مسئلهٔ الحاقی برای حل مسئلهٔ معکوس استفاده کردند. پاسکوتی و پتیت [2] در سال ۱۹۹٤ مسئلهٔ معکوس انتقال حرارت‌گذاری دوبعدی را بوسیلهٔ روش المان مرزی بررسی کردند. آنها دما و شار حرارتی را در مواد همگن و در مرزهایی که دارای زوایای کمتر از ۱۸۰ درجه بود، تخمین زدند. یانگ [3] در سال ۱۹۹۷ از روش خطی خطای حداقل مربعات برای حل مسئلهٔ دوبعدی تخمین شدت یک منبع حرارتی خطی استفاده کرد. او مادهٔ مورد بررسی را همگن و منبع حرارتی را به‌صورت تابعی از زمان و مکان درنظر گرفت. کرمی و همتیان [4] در سال ۲۰۰۰ روش المان مرزی را برای تخمین شدت یا محل منبع های حرارتی نقطه‌ای چندگانه در حالت پایا و برای مسائل دوبعدی، ارائه دادند. آنها برای حل مسئلهٔ معکوس یک الگوریتم به نام همسایهٔ خوب پیشنهاد نمودند. البته با این روش نمی‌توان هم‌زمان محل و شدت منبع حرارتی را تعیین نمود. سو و همکاران [5] در سال ۲۰۰۱ مسئلهٔ تخمین معکوس یک منبع حرارتی را در مختصات استوانه‌ای بررسی کردند. آنها منبع تخمینی را در سه حالت تابع زمان، تابع شعاع و تابع زاویه، مورد بررسی قرار دادند. آنها جسم مورد بررسی را همگن درنظر گرفتند و برای حل مسئلهٔ معکوس از روش گرادیانی مزدوج استفاده نمودند. نرترشوسر و میلان [6] در سال ۲۰۰۱ مسئلهٔ معکوس و گذرای تخمین یک منبع حرارتی متحرک را در یک مدل سه‌بعدی همگن بررسی کردند. در این کار به‌منظور تخمین منبع از اصل برهم‌نهی استفاده گردیده است. لی نیلوت و لفور [7] در سال ۲۰۰۱ مسئلهٔ معکوس تخمین چند منبع حرارتی خطی در یک مسئلهٔ دوبعدی با مواد همگن را بررسی کردند. آنها از روش المان مرزی برای حل عددی معادلات استفاده نمودند. لفور و لی نیلوت [8] در سال ۲۰۰۲ مسئلهٔ گذرای تخمین معکوس منبع حرارتی ساکن و متحرک را در مواد همگن و به‌صورت دوبعدی و سه‌بعدی بررسی کردند. لفور و لی نیلوت [9] در سال ۲۰۰۲ مسئلهٔ تعیین منبع‌های حرارتی گذرای نقطه‌ای را در مواد همگن و در دو بعد بررسی کردند. در این مسئله از روش المان مرزی برای حل عددی معادلات استفاده گردیده است. لی نیلوت و همکاران [10] در سال ۲۰۰٤ از روش تخمین پارامتر برای حل معکوس مسئلهٔ منبع حرارتی نقطه‌ای استفاده کردند. آنها حوزهٔ کاری را همگن و محل و شدت منبع حراراتی را ثابت درنظر گرفتند. زوکو و همکاران [11] در سال ۲۰۰٦ از یک روش شبیه‌سازی شبکه‌ای برای مشخص کردن ترم منبع حرارتی وابسته به زمان برای یک مسئلهٔ دوبعدی انتقال حرارت با مواد همگن استفاده کردند. لیو [12] در سال ۲۰۰۷ از روش پرتابی برای تخمین شدت یک منبع حرارتی صفحه‌ای در یک مسئلهٔ هدایت‌گذرای یک‌بعدی با مواد همگن استفاده کرد. لیو [13] در سال ۲۰۰۸ از الگوریتم ژنتیک اصلاح‌شده برای حل مسئلهٔ معکوس تخمین یک منبع حرارتی در یک بعد استفاده کرد. در این مسئله مادهٔ مورد بررسی همگن و منبع حرارتی فقط به‌صورت تابعی از زمان درنظر گرفته شده است. لیانگ و همکاران [14] در سال ۲۰۰۸ یک روش عددی اساسی بدون شبکه را برای تخمین منبع‌های حرارتی بررسی کردند. آنها حوزهٔ کاری را یک‌بعدی و همگن و منبع حرارتی را فقط به‌صورت تابعی از زمان تعریف کردند. نیلی احمدآبادی و همکاران [15] در سال ۲۰۰۹ روش حل‌های پایه‌ای را برای حل مسئلهٔ معکوس تخمین منبع حرارتی تابع مکان در یک مسئلهٔ یک‌بعدی با مواد همگن مورد بررسی قرار دادند. میرزویسزاک و کولودزیج [16] در سال ۲۰۱۰ موضوع کاربرد روش حل‌های اساسی و توابع اساسی شعاعی را

برای حل معکوس مسئلهٔ انتقال حرارت دوبعدی ناپایدار بررسی کردند. در این کار، مادهٔ مورد بررسی همگن و منبع حرارتی به‌صورت تابعی از مکان تعریف شده است. گنگ و لین [17] در سال ۲۰۰۹ از روش تکرار متغیرها برای حل معکوس یک منبع حرارتی استفاده کردند. آنها مادهٔ مورد بررسی را همگن و منبع حرارتی را به‌صورت تابعی از زمان و مکان درنظر گرفتند. این مسئله به‌صورت یک‌بعدی و شرایط مرزی آن به‌صورت تابعی از مکان بررسی گردید. گلبهار حقیقی و همکاران [18] در سال ۲۰۰۹ بااستفاده از حل معکوس، شار حرارتی را در یک ورق ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی تخمین زده‌اند. آنها برای حل مستقیم مسئله، از ممزوج کردن دو روش دیفرانسیل کوادریچر و اجزامحدود و برای حل مسئلهٔ معکوس از روش گرادیان مزدوج بهره جسته‌اند. محمدیون و رحیمی [19] در سال ۲۰۱۱ شار حرارتی نقطه‌ای را در یک سیستم دو لایه به‌دست آوردند. آنها برای حل مستقیم مسئله از روش اختلاف محدود و برای حل مسئلهٔ معکوس از روش گرادیان مزدوج استفاده نمودند. لی و همکاران [20, 21] در سال ۲۰۱۲ در پژوهشی، از حل معکوس برای تخمین شارهای حرارتی نامعلوم متغیر با زمان در سطح درونی و بیرونی یک استوانهٔ توخالی دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند استفاده نموده‌اند. آنها از روش تبدیل لاپلاس و اختلاف محدود برای حل مسئلهٔ مستقیم و از روش گرادیان مزدوج برای حل مسئلهٔ معکوس بهره بردند. براساس اطلاعات نویسندگان، تاکنون در زمینهٔ تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق هدفمند مدرج، پژوهشی صورت نپذیرفته است. لذا در این مقاله برای اولین‌بار به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، پرداخته شده است. علاوه‌براین در تخمین منبع حرارتی، هم منبع نقطه‌ای و هم منبع گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مدل ریاضی

مسئلهٔ مورد نظر یک مسئلهٔ انتقال حرارت هدایت دوبعدی در یک ورق نازک مدرج تابعی می‌باشد که در آن ظرفیت حرارتی، ضریب هدایت و چگالی به‌عنوان مفروضات مسئله مشخص است. در شکل (۱) هندسهٔ ورق نشان داده شده است. ورق شامل یک منبع حرارتی می‌باشد که مکان آن ثابت می‌باشد، اما شدت آن با زمان تغییر می‌کند. هدف از حل این مسئله، تخمین هم‌زمان شدت و مکان منبع حرارتی بااستفاده از اطلاعات دمای اندازه‌گیری‌شده برحسب زمان در چند نقطهٔ معلوم روی مرز می‌باشد. ضرورت استفاده از حل معکوس برای حل مسئلهٔ حاضر این است که بعضی مواقع امکان تعیین مستقیم مکان و شدت منبع حرارتی وجود ندارد. در مسئلهٔ حاضر فرض می‌شود که حسگرها یک اندازه‌گیری پیوسته انجام می‌دهند. بنابراین در معادلات بیان‌شده در مراحل بعد، دمای اندازه‌گیری‌شده توسط حسگرها به‌عنوان تابعی پیوسته از زمان درنظر گرفته می‌شود. برای تعیین شدت و مکان منبع حرارتی به‌وسیلهٔ برنامهٔ کامپیوتری ابتدا چند حسگر حرارتی در نقاط مناسب قرار داده می‌شود. سپس کل بازهٔ زمانی مسئله به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شود پس از این‌که منبع حرارتی شروع به تولید انرژی کرد، تغییرات زمانی دمای نقاطی که حسگر در آنها قرار داده شده است در هر یک از زیربازه‌های زمانی، به‌وسیلهٔ حسگرها ثبت می‌شود. آن‌گاه شدت و مکان منبع حرارتی بااستفاده از اطلاعات ثبت‌شده توسط حسگرها و به‌کمک حل عددی محاسبه می‌گردد.



شکل ۱ هندسهٔ ورق

تحلیل معکوس

روند معمول برای حل این مسئله به‌روش تحلیل معکوس در ذیل بیان شده است.

فرض بر این است که یک حدس اولیه x_0 و z_0 برای مختصات منبع حرارتی در دسترس است.

- روش گرادیان مزدوج به‌همراه مسئلهٔ الحاقی برای تخمین شدت منبع حرارتی $G(t)$ را به‌عنوان یک مسئلهٔ تخمین تابع، به‌کار می‌گیریم.
- اکنون شدت منبع حرارتی $G(t)$ معلوم است و روش گرادیان مزدوج برای تخمین مختصات z_0 و x_0 منبع حرارتی به‌عنوان یک مسئلهٔ تخمین پارامترها، به‌کار گرفته می‌شود.
- با x_0 و z_0 جدید به‌دست‌آمده، مجدداً روش گرادیان مزدوج به‌منظور تخمین جدید برای $G(t)$ استفاده می‌گردد. این روند تکراری تا زمانی ادامه می‌یابد که معیار توقف مشخص‌شده در تخمین $G(t)$ و x_0 و z_0 ارضا گردد.

تخمین $G(t)$

مسئلهٔ مستقیم. یک ورق نازک دوبعدی را که مرزهای آن در شکل (۱) نشان داده شد، درنظر بگیرید. فرض بر این است که خواص حرارتی ورق یعنی ضریب هدایت، ظرفیت حرارتی و چگالی صفحه در راستای z تغییر می‌کند؛ بنابراین معادلهٔ حاکم و شرایط مرزی برای مسئلهٔ انتقال حرارت گذرا به‌صورت معادلهٔ (۱) نوشته می‌شود [22].

معادلهٔ حاکم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)=\rho(z)c(z)\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \text{on} \quad x=0 \qquad (۲\text{- الف})$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=0 \quad \text{on} \quad z=0 \qquad (۲\text{- ب})$$

$$T=T_i \quad \text{on} \quad x=L\ ,\ z=H \qquad (۲\text{- ج})$$

$$T(x,z,0)=T_0(x,z) \qquad (۲\text{- د})$$

در معادلهٔ (۱) پارامترهای T، $\rho(z)$، $c(z)$ و $k(z)$ به‌ترتیب دما، چگالی، ظرفیت گرمایی و ضریب هدایت ماده یک نقطه از مادهٔ مدرج تابعی می‌باشد. $G(t)$ نیز منبع حرارتی نقطه‌ای می‌باشد.

در مسئلهٔ مستقیم، منبع حرارتی برای زیربازه‌های زمانی مختلف حدس زده می‌شود و با فرض معلوم‌بودن منبع حرارتی و داشتن $\rho(z)$ و $c(z)$ و $k(z)$، تنها مجهول در معادلهٔ (۱) میدان دمای $T(x,y,t)$ می‌باشد. در این مقاله، از روش اجزامحدود برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده گردیده است. لذا با مش‌بندی ورق بااستفاده از روش اجزامحدود با حل معادلهٔ (۱) و درنظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه در معادلات (۲)، توزیع دما در تمام نقاط ورق به‌دست می‌آید.

با حل معادلهٔ (۱) به‌روش عددی و درنظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه، میدان دمای $T(x,y,t)$ برروی تمام نقاط صفحه به‌دست آید. با مشخص شدن میدان دمای T برروی کل صفحه، دمای محلی که حسگرها قرار دارند یعنی بردار T_m، در هر یک از زیربازه‌های زمانی ثبت می‌شود. آن‌گاه توسط حسگر حرارتی دمای واقعی نقاط یعنی Y_m نیز در هر زیربازهٔ زمانی اندازه‌گیری می‌شود. اکنون از اختلاف بین این دو دما و بااستفاده از معادلهٔ (۵) مقدار J محاسبه می‌شود. حال اگر J از معیار توقف، که در مراحل بعد تعریف خواهد شد کوچک‌تر بود، پس شدت و مکان حدسی، تخمین خوبی برای منبع حرارتی خواهد بود و اگر از معیار توقف بزرگ‌تر بود، الگوریتم حل برای اصلاح‌کردن شدت و مکان حدسی تا رسیدن به یک تخمین مطلوب، وارد مرحلهٔ بعدی می‌شود [26].

به‌دلیل پیچیدگی معادلات حاکم از یک روش عددی تقریبی برای حل استفاده می‌کنیم.

خواص حرارتی و فیزیکی مواد مدرج تابعی، به‌طور پیوسته و به‌صورت تابعی از توزیع و خواص مواد آن نوشته می‌شود. استفاده از مدل توانی ساده برای توزیع مواد مدرج تابعی متداول است؛ لذا توزیع توانی خواص مادهٔ مدرج تابعی به‌صورت معادلهٔ (۳) درنظر گرفته می‌شود.

$$G(z) = G_M + (G_C - G_M)[V_f)]^p \qquad (۳)$$

که در اینجا،

$$V_f = \left[\frac{1}{2} + (\frac{z}{h})\right]^p \qquad (٤)$$

زیرنویس‌های C و M به‌ترتیب اشاره به سرامیک و فلز دارند. V_f تابع توزیع ماده و P نیز شاخص تابع توزیع می‌باشد که یک عدد مثبت است. هر کدام از خواص ضریب هدایت، ظرفیت گرمایی و چگالی مادهٔ مدرج تابعی از رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ معکوس. هدف تحلیل معکوس، پیش‌بینی شدت و مکان منبع حرارتی متغیر با زمان به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری دما در برخی نقاط در زمان‌ها و مکان‌های دلخواه می‌باشد. فرض بر این است که به‌جز منبع حرارتی، سایر پارامترها در معادلات (۱ و ۲) معلوم می‌باشد. از طرفی خواندن دما در برخی نقاط در زمان دلخواه نیز امکان‌پذیر می‌باشد. حل این مسائل به‌وسیلهٔ یک روش بهینه‌سازی انجام می‌گیرد. طبق این روش با مینیمم‌سازی تابع مشخص‌شده در معادلهٔ (۵) توابع مجهول به‌دست می‌آیند.

$$J[G(t), x^*, z^*] = \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{M} [T_m(x,z,t) - Y_m(x,z,t)]^2 \, dt \qquad (۵)$$

در معادلهٔ (۵) پارامترهای T_m و Y_m به‌ترتیب دمای تخمینی الگوریتم حل و دمای اندازه‌گیری‌شده در محل قرارگیری حسگرها در زمان دلخواه می‌باشد. T_m با قرار دادن مقدار تخمینی $G_E(t)$ به‌جای مقدار دقیق منبع حرارتی $G(t)$ از حل معادلهٔ مستقیم (۱) که پیشتر توضیح داده شد، به‌دست می‌آید.

روش گرادیان مزدوج به‌عنوان یک روش شناخته‌شده برای کمینه‌سازی تابع هدف که با معادلهٔ (۵) مشخص شده است به‌کار گرفته می‌شود.

مسئلهٔ حساسیت. برای تعیین مسئلهٔ حساسیت، فرض می‌شود که شدت منبع حرارتی $G(t)$ به‌اندازهٔ $\Delta G(t)$ افزایش پیدا می‌کند. در اثر این افزایش، میدان دمای $T(x,z,t)$ به‌اندازهٔ $\Delta T(x,z,t)$ افزایش می‌یابد. بنابراین با جایگزین کردن $T(x,z,t)$ با $T(x,z,t) + \Delta T(x,z,t)$ و $G(x,z,t)$ با $G(x,z,t) + \Delta G(x,z,t)$ در معادلات (۱ و ۲) و کم‌کردن معادلات حاصل، از معادلات اولیهٔ آنها و صرف‌نظر کردن از ترم‌های مرتبه دو، مسئلهٔ حساسیت به‌صورت معادلهٔ (٦) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial z}\right) + \Delta G(t)\delta(x - x_0)\delta(z - z_0) = \rho(z)c(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial t} \qquad (٦)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = 0 \quad on \quad x = 0 \qquad (۷\text{– الف})$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial z} = 0 \quad on \quad z = 0 \qquad (۷\text{– ب})$$

$$\Delta T = 0 \quad on \quad x = L \ , \ \ z = H \qquad (۷\text{– ج})$$

$$\Delta T(x, z, , t_0) = 0 \qquad (۷\text{– د})$$

معادلات مسئلهٔ حساسیت به همان روش معادلات مسئلهٔ مستقیم حل می‌گردد.

مسئلهٔ الحاقی و معادلهٔ گرادیانی. برای مشخص کردن مسئلهٔ الحاقی از روش ضریب لاگرانژ بهره گرفته می‌شود. در روش ضریب لاگرانژ، تابع هدف همچنان به‌صورت یک تابع واحد باقی می‌ماند. متغیر ضریب لاگرانژ با نماد $\lambda(x,z,t)$ تعریف می‌شود. برای استفاده از این روش، ابتدا معادلهٔ حاکم که با رابطهٔ (۱) نشان داده شد، در ضریب لاگرانژ ضرب می‌شود؛ سپس از آن روی کل دامنهٔ مکانی و بازهٔ زمانی انتگرال‌گیری می‌شود. عبارت به‌دست‌آمده از این عملیات جبری به‌سمت راست تابع هدف J، یعنی معادلهٔ (۵) اضافه می‌شود تا معادلهٔ (۸) حاصل شود.

$$\hat{J}[G(t),x^*,z^*]=\int_0^{t_f}\int_0^{L}\int_0^{H}\sum_{m=1}^{M}[T_m(x,z,t)-Y_m(x,z,t)]^2\,\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)\,dxdzdt+\int_0^{t_f}\int_0^{L}\int_0^{H}\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)-\rho(z)c(z)\frac{\partial T}{\partial t}\right]dxdzdt \qquad (۸)$$

برای ایجاد فرم تغییراتی فرض می‌شود T به اندازهٔ ΔT و $G(t)$ به اندازهٔ $\Delta G(t)$ افزایش پیدا می‌کند؛ بنابراین برای ایجاد فرم تغییراتی در معادلهٔ (۸)، T با $T+\Delta T$، $G(t)$ با $G(t)+\Delta G(t)$ و $\hat{J}$ با $\hat{J}+\Delta\hat{J}$ جایگزین می‌شود. سپس معادلهٔ حاصل از معادلهٔ (۸) کم می‌شود و سرانجام با صرف‌نظر از عبارات مرتبه دو، فرم تغییراتی $\hat{J}$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\Delta\hat{J}=\int_0^{t_f}\int_0^{L}\int_0^{H}\sum_{m=1}^{M}2[T_m(x,z,t)-Y_m(x,z,t)]\Delta T\,\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)\,dxdzdt+\int_0^{t_f}\int_0^{L}\int_0^{H}\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial z}\right)+\Delta G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)-\rho(z)c(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial t}\right]dxdzdt \qquad (۹)$$

در ابتدا عبارت انتگرالی دوم در سمت راست معادلهٔ (۹) به‌وسیلهٔ انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء ساده می‌شود و سپس شرایط مرزی و اولیهٔ به‌دست‌آمده از معادلهٔ حساسیت در آن اعمال می‌شود. برای مینیمم‌کردن تابع هدف، می‌بایست تمام ضرایب در معادلهٔ (۹) مساوی صفر قرار داده شود. با مساوی صفر قراردادن ضریب ΔT، معادلهٔ ضریب لاگرانژ و شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\rho(z)c(z)\frac{\partial\lambda}{\partial t}+2[T(x,z,t)-Y(x,z,t)]\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)=0 \qquad (۱۰)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0 \quad \text{on} \quad x=0 \qquad (۱۱\text{- الف})$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0 \quad \text{on} \quad z=0 \qquad (۱۱\text{- ب})$$

$$\lambda=0 \quad \text{on} \quad x=L\ ,\ \ z=H \qquad (۱۱\text{- ج})$$

$$\lambda(x,z,,t_f)=0 \qquad (۱۱\text{- د})$$

همان‌طور که در معادلهٔ (۱۱- د) مشاهده می‌شود، ضریب لاگرانژ در انتهای بازهٔ زمانی صفر است. برای تبدیل این مسئله به یک مسئلهٔ مقدار اولیه از تغییر متغیر $\tau=t_f-t$ استفاده می‌شود. پس از آن مسئلهٔ الحاقی نیز به‌روش مسئلهٔ مستقیم حل می‌گردد. در آخر جملهٔ انتگرالی زیر باقی می‌ماند:

$$\Delta\hat{J}=\int_0^{t_f}\int_0^{L}\int_0^{H}\lambda\Delta G(t)\delta(x-x^*)\,\delta(z-z^*)\,dxdzdt \qquad (۱۲)$$

تعریف مشتق جهتی بردار $\hat{J}$ به‌صورت معادلهٔ (۱۳) می‌باشد.

$$\Delta\hat{J} = \int_0^{t_f}\int_0^{L}\int_0^{H} J'\Delta G(t)dxdzdt \qquad (۱۳)$$

حال از معادلات (۱۲ و ۱۳) می‌توان معادلهٔ گرادیانی را به‌صورت زیر نتیجه گرفت.

$$J' = \lambda\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) = \lambda(x_0,z_0,t) \qquad (۱٤)$$

رابطهٔ (۱٤) معرف مقدار λ در محل منبع حرارتی می‌باشد.

تخمین x_0 و z_0

تخمین x_0 و z_0 یک مسئلهٔ تخمین پارامتر است که برای حل آن زیرمسئله‌های ذیل که با معادلات (۱۵ و ۱٦) مشخص گردیده است، بایستی حل گردد.

معادلات گرادیانی برای تخمین مکان منبع حرارتی نقطه‌ای. برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ گرادیانی به‌منظور اصلاح مکان حدسی منبع حرارتی نقطه‌ای، بایستی از معادلهٔ (۵) به‌ترتیب نسبت به x_0 و z_0 مشتق گرفت. بنابراین J'_{x_0} و J'_{z_0} به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$J'_{x_0} = \frac{\partial J}{\partial x_0} = 2\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}(T_m - Y_m)\frac{\partial T}{\partial x_0}dt \qquad (۱۵)$$

$$J'_{z_0} = \frac{\partial J}{\partial z_0} = 2\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}(T_m - Y_m)\frac{\partial T}{\partial z_0}dt \qquad (۱٦)$$

مقادیر J'_{x_0}وJ'_{z_0} به‌روش عددی محاسبه می‌گردند.

روند تکراری برای روش گرادیان مزدوج به‌منظور تخمین شدت منبع حرارتی نقطه‌ای

روند تکراری برای روش گرادیانی به‌منظور تخمین تابع $G(t)$ به‌وسیلهٔ معادلهٔ زیر داده می‌شود.

$$G^{k+1}(t) = G^k(t) - \beta^k d^k(t) \qquad (۱۷)$$

در این معادله β^k اندازهٔ گام جستجو از مرحلهٔ kام تا مرحلهٔ $k+1$ام و $d^k(t)$ جهت گام نامیده می‌شود. بالانویس k برروی هر پارامتر نشان‌دهندهٔ مرحلهٔ تکرار الگوریتم حل می‌باشد. جهت گام $d^k(t)$ به‌صورت معادلهٔ (۱۸) تعریف می‌شود.

$$d^k(t) = J'^k + \gamma^k d^{k-1}(t) \qquad (۱۸)$$

در این معادله γ^k ضریب توأم نامیده می‌شود. ضریب توأم در مرحلهٔ اول تکرار صفر درنظر گرفته می‌شود و در مراحل بعد از رابطهٔ فلچر- ریوییز به‌صورت رابطهٔ (۱۹) به‌دست می‌آید [23, 27, 28].

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_f}(J'^k)^2dt}{\int_0^{t_f}(J'^{k-1})^2dt} \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (۱۹)$$

اندازهٔ گام نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta^k = \frac{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}(T_m{}^k - Y_m{}^k)\,\Delta T_m{}^k dt}{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}[\Delta T_m{}^k]^2\,dt} \qquad (۲۰)$$

روند تکراری برای روش گرادیان مزدوج به‌منظور تخمین شدت منبع حرارتی نقطه‌ای

برای تخمین مختصات مکان منبع حرارتی، همانند پروسهٔ تکرار که در معادلهٔ (۱۷) توضیح داده شد، خواهیم داشت:

$$x_0{}^{k+1} = x_0{}^k - \beta_{x_0}{}^k d_{x_0}{}^k(t) \qquad (۲۱)$$

$$z_0{}^{k+1} = z_0{}^k - \beta_{z_0}{}^k d_{z_0}{}^k(t) \qquad (۲۲)$$

در معادلات β^k اندازهٔ گام جستجو از مرحلهٔ kام تا مرحلهٔ $k+1$ام و $d^k(t)$ جهت گام نامیده می‌شود. بالانویس k برروی هر پارامتر نشان‌دهندهٔ مرحلهٔ تکرار الگوریتم حل می‌باشد. جهت گام $d^k(t)$ به‌صورت معادلهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$d_{x_0}{}^k(t) = J'_{x_0}{}^k + \gamma_{x_0}{}^k d_{x_0}{}^{k-1}(t) \qquad (۲۳)$$

$$d_{z_0}{}^k(t) = J'_{z_0}{}^k + \gamma_{z_0}{}^k d_{z_0}{}^{k-1}(t) \qquad (۲۴)$$

در این معادله $\gamma_\alpha{}^k(\alpha = x_0, z_0)$ در مرحلهٔ اول تکرار صفر درنظر گرفته می‌شود و در مراحل بعد از رابطهٔ فلچر- ریوییز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [23-25].

$$\gamma_{x_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f}(J'_{x_0}{}^k)^2 dt}{\int_0^{t_f}(J'_{x_0}{}^{k-1})^2 dt} \qquad k = 1,2,\dots \qquad (۲۵)$$

$$\gamma_{z_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f}(J'_{z_0}{}^k)^2 dt}{\int_0^{t_f}(J'_{z_0}{}^{k-1})^2 dt} \qquad k = 1,2,\dots \qquad (۲۶)$$

اندازهٔ گام نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta_{x_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}[T_m{}^k - Y_m{}^k]\left\{d_{x_0}^k.(\frac{\partial T}{\partial x_0})\right\}dt}{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}\left\{d_{x_0}^k.(\frac{\partial T}{\partial x_0})\right\}^2 dt} \qquad (۲۷)$$

$$\beta_{z_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}[T_m{}^k - Y_m{}^k]\left\{d_{z_0}^k.(\frac{\partial T}{\partial z_0})\right\}dt}{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}\left\{d_{z_0}^k.(\frac{\partial T}{\partial z_0})\right\}^2 dt} \qquad (۲۸)$$

معیار توقف برای روش گرادیانی مزدوج. معیار توقف برای روش گرادیانی مزدوج، به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۲۹) تعریف می‌شود [29].

$$J < \varepsilon \qquad (۲۹)$$

در این معادله ε تلورانس که خطای قابل قبول برای مسئله می‌باشد، برای حل مسئلهٔ حاضر باید طوری انتخاب شود که باتوجه به خطاهای اندازه‌گیری، حل مطلوبی به‌دست آید. حل مطلوب وقتی به‌دست می‌آید که معیار زیر ارضا شود. درادامه نتایج برای مقادیر σ از 0 تا 0.2 نشان داده می‌شود.

$$T(x_m, z_m, t_m) - Y(x_m, z_m, t_m) \approx \sigma \quad , \quad m = 1,2,\dots,M \qquad (۳۰)$$

در معادلهٔ (۳۰) σ پارامتر انحراف از معیار خطاهای اندازه‌گیری می‌باشد. ε نیز به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = M\sigma^2 t_f \qquad (۳۱)$$

پارامتر M در معادلات (۳۰ و ۳۱)، تعداد سنسورهای حرارتی می‌باشد.

نتایج عددی

در این قسمت دقت و صحت روش گرادیان مزدوج که یکی از روش‌های حل مسائل معکوس می‌باشد، برای تخمین شدت و مکان منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، با ارائه جداول و نمودارهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به بررسی صحت نتایج حاصل از حل مستقیم پرداخته می‌شود و درادامه نتایج حاصل از حل معکوس ارائه می‌گردد. به‌منظور به‌دست‌آوردن نتایج از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده شده است.

$$t^* = \frac{k_{ave} t_f}{\rho_{ave} c_{ave} L^2} \quad , \quad k^*(z) = \frac{k(z)}{k_{ave}} \quad ,$$

$$c^*(z) = \frac{c(z)}{c_{ave}} \quad , \quad \rho^*(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{ave}} \quad ,$$

$$T^* = \frac{T}{G_{max} L^2 / k_{ave}} \quad , \quad L^* = \frac{H}{L} \quad ,$$

$$G^*(t) = \frac{G(t)}{G_{max}} \qquad (۳۲)$$

مادهٔ مورد بررسی به‌صورت ترکیبی از سرامیک و فلز انتخاب گردیده است که خواص مادی هر کدام در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱ خواص ترموفیزیکی مواد

ماده	c(J/kgK)	k(W/mK)	ρ(kg /m^3)
SiC	670	65	3100
Al	896	233	2702

بررسی صحت نتایج. طبق بررسی نویسنده، تاکنون تحلیل ورق نازک مدرج تابعی برای تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی نقطه مورد بررسی قرار نگرفته است؛ لذا به‌علت نبود کارهای انجام‌شده در این زمینه، برای اثبات صحت نتایج روش حل مستقیم می‌توان در یک حالت خاص با اعمال منبع حرارتی سطحی، نتایج را با مرجع [30] مقایسه نمود؛ لذا ابتدا به مقایسهٔ نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی و نتایج ارائه‌شده توسط ردی [30] می‌پردازیم.

شرایط مرزی و اولیهٔ ورق در این مرجع، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \text{on} \quad x = 0 \qquad \text{(۳۳- الف)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad \text{on} \quad z = 0 \qquad \text{(۳۴- ب)}$$

$$T = 0 \qquad \text{on} \quad x = L \ , \ z = H \qquad \text{(۳۵- ج)}$$

$$T(x, z, 0) = 0 \qquad \text{(۳۶- د)}$$

از مقادیر بدون بعد زیر در مرجع [30] استفاده گردیده است.

$$H = 1 \ , \quad k = 1 \qquad G(t) = 1 \ , \quad L = 1 \qquad (۳۷)$$

هم‌گرایی سریع روش و هم‌خوانی بسیار نزدیک آن با جواب‌های مرجع [30] قابل‌مشاهده است. همچنین می‌توان دید که ابعاد شبکهٔ ۱۰×۱۰ برای به‌دست‌آوردن جواب‌های همگراشدهٔ قابل‌قبول کافی است.

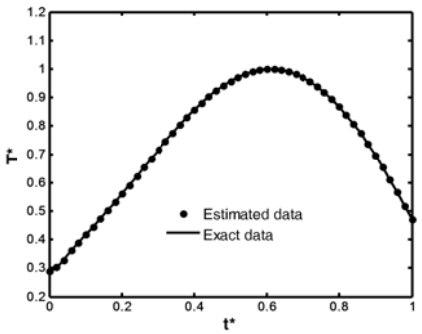
به‌منظور نمایش صحت حل مستقیم، نمونه‌ای از کانتورهای توزیع دما در شکل (۲) مربوط به مثال (۲) نمایش داده می‌شود.

نتایج تخمین منبع حرارتی نقطه‌ای. در این بخش در قسمت اول فرض بر این است که مکان منبع حرارتی در مسئلهٔ ما معلوم است اما شدت منبع مجهول می‌باشد؛ لذا به ارائهٔ نتایج براساس این شرایط می‌پردازیم. در قسمت دوم فرض بر این است که علاوه‌بر شدت منبع حرارتی، مکان منبع نیز مجهول می‌باشد؛ لذا به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای می‌پردازیم.

برای ارزیابی توانایی الگوریتم ارائه در تخمین شدت منبع حرارتی، توابع مختلفی را انتخاب می‌کنیم.

در مثال اول تابع دقیق منبع حرارتی را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

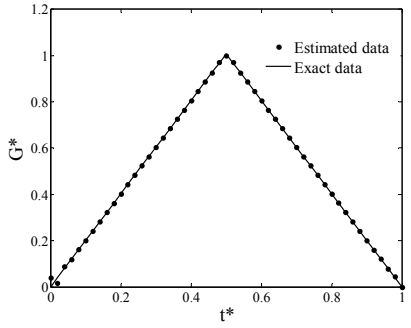
$$G(t) = \begin{cases} 2G_0\left(\frac{t}{t_f}\right) \ , & 0 \le \frac{t}{t_f} \le 0.5 \\ 2G_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \ , & 0.5 \le \frac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \qquad (۳۸)$$



شکل ۲ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی دما در مثال ۲ ($\sigma = 0$)

جدول ۲ مقایسهٔ نتایج توزیع دما با مرجع [30]

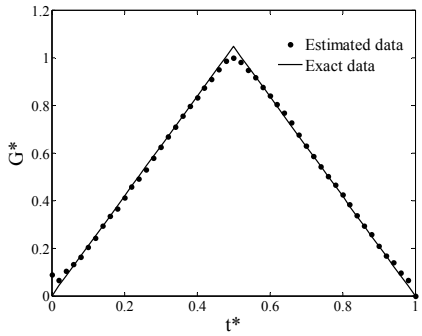
		T^*	
ابعاد شبکه	$T(0,0)$	$T(\frac{L}{2},0)$	$T(\frac{L}{2},\frac{H}{2})$
2×2	0.3107	0.2410	0.1927
4×4	0.2984	0.2322	0.1838
8×8	0.2956	0.2300	0.1818
10×10	o.2953	0.2298	0.1816
12×12	0.2953	0.2298	0.1816
[29]	0.2947	0.2293	0.1811



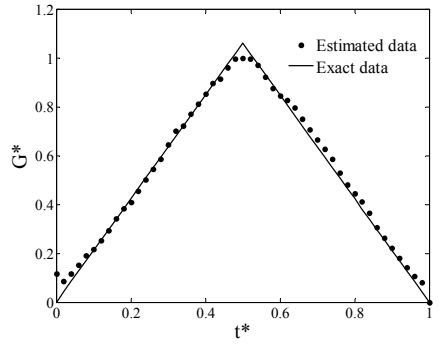
شکل ۳ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ ($\sigma = 0$)

در جدول (۳) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده براساس رابطهٔ زیر برای انحراف معیارهای مختلف مثال اول آورده شده است.

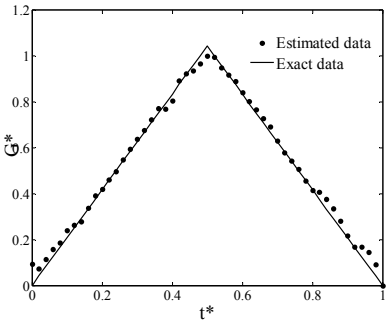
$$\text{Error} = \left[\sum_{i=1}^{N_t}\left|\frac{G(i)-G_{exact}(i)}{G_{exact}(i)}\right| \div N_t\right] \times 100 \qquad (۳۹)$$



شکل ٤ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ ($\sigma = 0.1$)



شکل ۵ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ ($\sigma = 0.2$)



شکل ٦ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ ($\sigma = 0.3$)

جدول ۳ نتایج تخمین شدت منبع حرارتی برای انحراف معیارهای مختلف (مثال ۱)

σ	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
0	18	4.23	0.89
0.1	4	3.94	1.1
0.2	3	3.94	6.83
0.3	2	3.93	7.45

در مثال دوم تابع دقیق منبع حرارتی را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

$$G(t) = G_0(t)\sin(\frac{\pi t}{t_f}) \qquad (٤٠)$$

مختصات مکان منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

$$x_0(\text{exact})=0.25$$
$$z_0(\text{exact})=0.25 \qquad (٤١)$$

حدس اولیه برای تخمین مکان منبع حرارتی به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است.

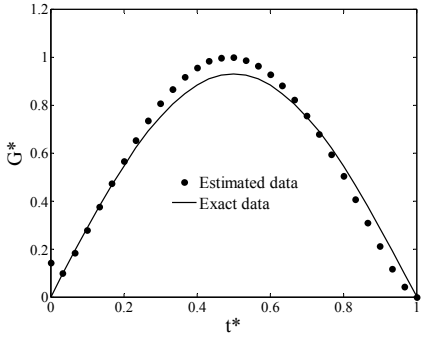
$$x_0(\text{exact})=0.2 \qquad z_0(\text{exact})=0.2 \qquad (٤٢)$$

در شکل (۷) شدت منبع حرارتی نقطه‌ای تخمین زده‌شدهٔ مثال دوم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ مقایسه شده است.

مختصات به‌دست‌آمده برای مکان منبع حرارتی بعد از ۵ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.2402 \qquad z_0(\text{exact})=0.2402 \qquad (٤٣)$$

در جدول (٤) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال دوم آورده شده است.



شکل ۷ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۲ $(\sigma = 0)$

جدول ٤ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای (مثال ۲)

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
G(t)	5	92.89	2.51
x	5	92.89	3.94
z	5	92.89	3.94

در مثال سوم تابع دقیق منبع حرارتی نقطه‌ای را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$G(t)=\begin{cases} 3G_0\left(\dfrac{t}{t_f}\right) & 0 \le \dfrac{t}{t_f} \le \dfrac{1}{3} \\ G_0 & \dfrac{1}{3} \le \dfrac{t}{t_f} \le \dfrac{2}{3} \\ 3G_0\left(1-\dfrac{t}{t_f}\right)\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \le \dfrac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \qquad (٤٤)$$

مختصات مکان منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

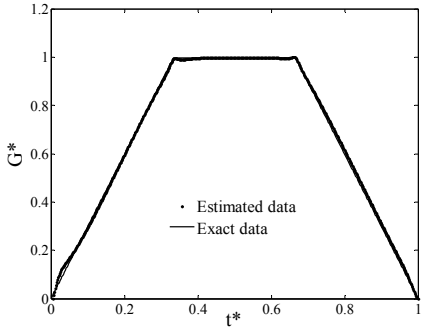
$$x_0(\text{exact})=0.25 \qquad z_0(\text{exact})=0.25 \qquad (٤٥)$$

در شکل (۸) شدت منبع حرارتی نقطه‌ای تخمین زده‌شدهٔ مثال سوم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ نشان داده شده است.

مختصات به‌دست‌آمده برای مکان منبع حرارتی بعد از ۲٦ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.2498 \qquad z_0(\text{exact})=0.2498 \qquad (٤٦)$$

در جدول (۵) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال سوم آورده شده است.



شکل ۸ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۳ $(\sigma = 0)$

جدول ۵ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای (مثال ۳)

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات(ثانیه)	درصد خطا
G(t)	26	84.47	0.44
x	26	84.47	0.09
z	26	84.47	0.09

نتایج تخمین منبع حرارتی گسترده. در این بخش فرض بر این است که علاوه‌بر شدت منبع حرارتی گسترده، پارامترهایی از مکان منبع نیز مجهول می‌باشد، لذا به تخمین هم‌زمان این پارامترهای مکانی و شدت منبع حرارتی گسترده می‌پردازیم.

عبارت منبع حرارتی در معادلهٔ حاکم (۱) برای منبع حرارتی گسترده به‌صورت رابطهٔ زیر است:

$$G(x,z,t) = G^*(t)F(x,z;x_0,z_0) \quad (۴۷\text{- الف})$$

$$F(x,z;\ x_0,z_0) = (x+x_0)^2 + (z+z_0)^2 \quad (۴۷\text{- ب})$$

در رابطهٔ (۴۷)، x_0 و z_0 معرف پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی گسترده می‌باشند. در این بخش هدف تخمین G^*، x_0 و z_0 به‌صورت هم‌زمان می‌باشد. در مثال چهارم تابع دقیق منبع حرارتی گسترده را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

$$G^*(t) = \begin{cases} 3G_0\left(\frac{t}{t_f}\right) & 0 \le \frac{t}{t_f} \le \frac{1}{3} \\ G_0 & \frac{1}{3} \le \frac{t}{t_f} \le \frac{2}{3} \\ 3G_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right)\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \le \frac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \quad (۴۸)$$

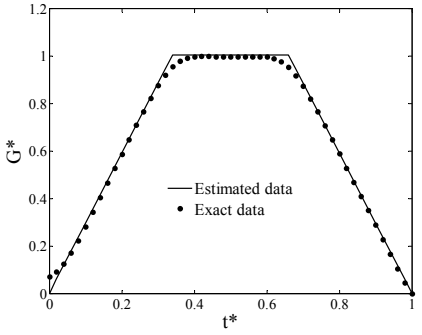
پارامترهای مجهول مکانی منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

$$x_0(\text{exact})=0.5 \quad z_0(\text{exact})=0.5 \quad (۴۹)$$

حدس اولیه برای تخمین این پارامترها را نیز به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$x_0(\text{exact})=0.7 \quad z_0(\text{exact})=0.7 \quad (۵۰)$$

در شکل (۹) شدت منبع حرارتی گستردهٔ تخمین زده‌شدهٔ مثال چهارم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ رسم گردیده است.



شکل ۹ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی گستردهٔ مثال ٤ برای $(\sigma = 0)$

مختصات به‌دست‌آمده برای پارامترهای مکانی منبع حرارتی بعد از ۲۹۱۵ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.4865 \quad z_0(\text{exact})=0.5242 \quad (۵۱)$$

در جدول (٦) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال چهارم آورده شده است.

جدول ٦ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی مثال ٤

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات(ثانیه)	درصد خطا
G(t)	2915	84.67	1.17
x	2915	84.67	2.76
z	2915	84.67	4.61

در مثال پنجم تابع دقیق منبع حرارتی گسترده را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

$$G(t)=\begin{cases} 2G_0\left(\frac{t}{t_f}\right), & 0 \le \frac{t}{t_f} \le 0.5 \\ 2G_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right), & 0.5 \le \frac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \quad (۵۲)$$

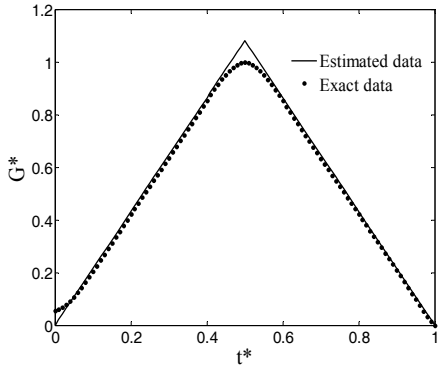
پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

$$x_0(\text{exact})=0.5$$
$$z_0(\text{exact})=0.5 \quad (۵۳)$$

حدس اولیه برای تخمین پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی نیز به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$x_0(\text{exact})=0.7$$
$$z_0(\text{exact})=0.7 \quad (۵۴)$$

در شکل (۱۰) شدت منبع حرارتی گستردهٔ تخمین زده‌شدهٔ مثال پنجم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ رسم گردیده است.



شکل ۱۰ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی گستردهٔ مثال ۵ برای $(\sigma = 0)$

مختصات به‌دست‌آمده برای پارامترهای مکانی منبع حرارتی بعد از ۱۹۹۵ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.4911$$
$$z_0(\text{exact})=0.5288 \quad (۵۵)$$

در جدول (۷) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال (۵) آورده شده است.

جدول ۷ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی مثال ۵

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات(ثانیه)	درصد خطا
G(t)	1995	98.11	1.62
x	1995	98.11	1.82
z	1995	98.11	5.45

محاسبهٔ خطای RMSE برای پارامترهای مکانی. در جداول قبل با فرض معلوم بودن انحراف معیار، خطا را از رابطهٔ (۳۹) به‌دست آوردیم. حال بااستفاده از مقادیر تخمینی به‌دست‌آمده برای پارامترهای مکانی مثال‌های ۲ تا ۵ مقدار RMS را به‌دست می‌آوریم.

$$RMSE=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{x}_i)^2} \quad (۵۶)$$

	مثال ۲	مثال ۳	مثال ٤	مثال ۵
RMSE				
x_0	0.01	0.014	2×10^{-4}	8×10^{-6}
z_0	0.01	0.014	10^{-4}	9×10^{-4}

نتیجه‌گیری

در این مقاله برای تخمین مکان و شدت منبع حرارتی از الگوریتم گرادیان مزدوج استفاده شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص گردید سرعت و دقت تخمین برای این مسئله بسیار خوب است و جزء

روش‌های پایدار می‌باشد که درصورت حل درست معادلات مستقیم و الحاقی، حتماً به جواب می‌رسد و همگرایی روش در مراجع مختلف تضمین گردیده است.

توابع مختلفی برای تخمین منبع حرارتی مورد بررسی قرار گرفت که مشاهده گردید الگوریتم محاسباتی توانایی تخمین هر تابعی را به‌عنوان منبع حرارتی دارد.

از آنجا که اندازه‌گیری‌ها همیشه دقیق نبوده است و همواره مقداری خطا در اندازه‌گیری پارامترها وجود دارد، در این مقاله خطاهای اندازه‌گیری نیز درنظر گرفته شد که نتایج نشان‌دهندهٔ این است که وجود خطا تأثیر چندانی در نتایج تخمینی برای حالت‌های مختلف ندارد.

فهرست علائم

c	ظرفیت گرمایی ویژه $(J/kg°C)$
d	جهت جستجو
G	شدت منبع حرارتی
H	ضخامت ورق (m)
J	تابع هدف
$\hat{J}$	تابع هدف اصلاح‌شده
k	ضریب هدایت گرمایی $(W/m°K)$
L	طول ورق (m)
M	تعداد سنسورها
N	تعداد تقسیمات
p	شاخص تابع توزیع
T	دما (K)
t	زمان (s)
V	تابع توزیع ماده
x_0	مختصات مکانی منبع حرارتی در راستای محور x
Y	دمای اندازه‌گیری‌شده به‌وسیلهٔ سنسور (K)
z_0	مختصات مکانی منبع حرارتی در راستای محور z

علائم یونانی

β	اندازهٔ گام جستجو
γ	ضریب گرادیانی
δ	تابع دلتای دیراک
Δt	گام زمانی
ε	معیار هم‌گرایی
λ	ضریب لاگرانژ
ρ	چگالی (kgm^{-3})
σ	انحراف معیار استاندارد

بالانویس

k	مرحله تکرار

زیرنویس‌ها

Ave	مقدار متوسط
f	نهایی
m	شمارهٔ سنسور
max	مقدار بیشینه

مراجع

1. Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N., "The estimation of space and time dependent sterength of a volumetric heat source in a one-dimentional plate", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 6, pp. 909-915, (1994).
2. Pasquetti, R. and Petit, D., "Inverse-heat-conduction problems with boundary element: analysis of a corner effect", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 13, No. 4, pp. 321–331, (1994).
3. Yang, C.Y., "Solving the two-dimensional inverse heat source problem through the linear least squares error method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, No. 2, pp. 393–398, (1998).
4. Karami, G. and Hematiyan, M.R., "A boundary element method of inverse non-linear heat conduction analysis with point and line heat sources", *Communication in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp.191–203, (2000).
5. Su, J. and Silva Neto, A.J., "Two-dimensional inverse heat conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 25, No. 10, pp. 861-782, (2001).
6. Nortershauser, D. and Millan, P., "Estimation of moving heat sources with a three dimensional unsteady inverse method", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 5, No. 8, pp. 529-540, (2001).
7. Niliot, C.L. and Lefever, F., "A method for multiple steady line heat sources identification on a diffusive system: application to an experimental 2D problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, No. 7, pp. 1425-1438, (2001).
8. Lefever, F. and Niliot, C.L., "The BEM for point heat source estimation: application to multiple static sources and moving sources", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 41, No. 6, pp. 536-545, (2002).
9. Lefever, F. and Niliot, C.L., "Multiple transient point heat sources identification in heat diffusion: Application to experimental 2D problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 9, pp. 1951-1964, (2002).
10. Niliot, C.L. and Lefever, F., "A parameter estimation approach to solve the inverse problem of point heat sources identifications", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 4, pp. 827-841, (2004).
11. Zueco, J., Alhama, F. and C. Gonza'lez Ferna'ndez, F., "Inverse determination of heat generation sources in two-dimensional homogeneous solids: Application to orthotropic medium", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, No. 1, pp. 40-55, (2006).
12. Liu, C.S., "A two-stage LGSM to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, No. 7-8, pp. 1635-1642, (2009).
13. Liu, F.B., "A modified genetic algorithm for solving the inverse heat transfer problem of estimating plane heat source", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 15-16, pp. 3745-3752, (2008).

14. Yan, L., Fu, C.L. and Yang, F.L., "The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, No. 3, pp. 216-222, (2008).
15. Nili Ahmadabadi, M., Arab, M. and Maalek Ghaini, F.M., "The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 10, pp. 1231-1235, (2009).
16. Mierzwiczak, M. and Kolodziej, J.A., "Application of the method of fundamental solutions and radial basis functions for inverse transient heat source problem", *Computer Physics Communications*, Vol. 181, No. 12, pp. 2035-2043, (2010).
17. Geng, F. and Lin, Y., "Aplication of the variational iteration method to inverse heat source problems", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11-12, pp. 2098-2102, (2009).
18. Golbahar Haghighi , M.R., Eghtesad, M., Malekzadeh, P. and Necsulescu, D.S., "Three-dimensional inverse transient heat transfer analysis of thick functionally graded plates", *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, No. 3, pp. 450-457, (2009).
19. Mohammadiun, M. and Rahimi, A.B., "Estimation of time-dependent heat flux using temperature distribution at a point in a two layer system", *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 966-973, (2011).
20. Lee, H.L., J. Chang, W., Chen, W.L. and Yang, Y.C., "Inverse heat transfer analysis of a functionally graded fin to estimate time-dependent base heat flux and temperature distributions", *Energy Conversion and Management*, Vol. 57, pp. 1-7, (2012).
21. Lee, H.L., Chang, W.J., Sun, S.H. and Yang, Y.C., "Estimation of temperature distributions and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder simultaneously subjected to inner-and-outer boundary heat fluxes", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 786-792, (2012).
22. Abou Khachfe, R. and Jarny, Y., "Estimation of heat sources within two dimensional shaped bodies", *3rd Int. Conference on Inverse Problems in Engineering*, June 13-18, Port Ludlow, Washington, USA, (1999).
23. Alifanov, O.M., "*Inverse heat transfer problems*", Springer-Velag, New York, (2000).
24. Daniel, J.W., "*The approximate minimization of functional*", Pretice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1971).
25. Fletcher, R. and Reeves, C.M., "Function minimization by conjugate gradients", *Computer Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 149-154, (1964).
26. Golbahar Haghighi, M.R., Eghtesad, M., Necsulescu, D.S. and Malekzadeh, P., "Temperature control of functionally graded plates using a feedforward–feedback controller based on the inverse solution and proportional-derivative controller", *Energy Conversion and Management*, Vol. 51, No. 1, pp. 140-146,(2010)
27. Daniel, J.W., "*The approximate Minimization of Functional*", Pretice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1971).
28. Fletcher, R. and Reeves C.M., "Function Minimization by Conjugate Gradient", *Computer J.*, 7, pp. 149-154, (1964).
29. Ozisik, M.N., "*Inverse heat transfer: fundamental and applications*", CRC Press, New York, (2000).

30. Reddy, J.N., "*An introduction to the finite element method*", Third Edition, McGraw Hill, (2006).

پایداری دینامیکی حلقه‌های اخترفیزیکی*

محمد هادی خشن[۱] محمود روشن[۲]

چکیده *هدف از این مقاله بررسی سیستم‌های حلقه‌ای در چارچوب یک نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ گرانشی می‌باشد. درحقیقت پایداری گرانشی سیستمی حلقه‌ای متشکل از N ذره با جرم‌های برابر m درحال گردش حول یک جسم مرکزی سنگین مطالعه می‌شود. برای این کار ابتدا دینامیک سیستم در حالت پایه توصیف و معادلات حرکت به‌دست می‌آید. سپس بااستفاده از آنالیز اختلالی، معادلات حرکت خطی‌شده به‌دست می‌آید. نهایتاً بااستفاده از آنالیز فوریه و معادلات خطی‌شده، معادلهٔ پاشندگی سیستم محاسبه می‌شود. بااستفاده از مقادیر تجربی پارامترهای آزاد نظریهٔ فوق‌الذکر، معادلهٔ پاشندگی را برای حالت‌های مختلف بررسی و شرایط پایداری سیستم نسبت به اختلالات کوچک پیدا می‌شود، سپس نتایج به‌دست‌آمده را با سیستم متناظر در گرانش نیوتونی مقایسه می‌شود.*

واژه‌های کلیدی ناپایداری گرانشی، نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ گرانشی.

On the Dynamical Stability of Astrophysical Rings

M.H. Khashen M. Roshan

Abstract *The purpose of this paper is to consider the ring systems in the context of a modified gravity theory. In fact, the gravitational stability of a ring system consisted of N particle with the same mass m rotating around a massive object at the center is studied. After finding the equation of motion and considering the dynamics of the system in the equilibrium state, perturbative analysis is used in order to find the linearized version of the equations of motion. Finally using the Fourier analysis, the dispersion relation of the system is derived. At the end, using the observational values of the free parameters of the above mentioned theory and also the dispersion equation the stability criterion of the system for several cases is derived. Finally, the results have been compared with the corresponding results in Newtonian gravity.*

Key Words Gravitational instability, Modified gravity.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۱۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۲/۲۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62423

(۱) کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه فردوسی، مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، دانشکدهٔ علوم دانشگاه فردوسی، مشهد. mroshan@um.ac.ir

مقدمه

حلقه‌ها و قرص‌ها از اجزای اصلی برخی سیستم‌های اخترفیزیکی هستند، بنابراین پایداری و تحولات آنها در اخترفیزیک از اهمیت بالایی برخوردار است. گرانش می‌تواند در تعیین پایداری و تحول این سیستم‌ها نقشی کلیدی بازی کند. برای مثال ثابت شده است که در حلقه‌های زحل و اورانوس خودگرانش، نسبت به عوامل مؤثر دیگر قوی‌تر است [1]؛ به‌گونه‌ای که منجر به ناپایداری‌های نامتقارن می‌شود و شرایط انتقال اندازهٔ حرکت و جرم در حلقه‌ها را فراهم می‌کند. حضور چنین ناپایداری‌های دینامیکی یک عامل مهم در تعیین ساختار حلقه است [2, 3]. به‌عنوان مثال نگاهی بر تاریخچهٔ حلقه‌های سیارهٔ زحل می‌تواند اهمیت ناپایداری‌های دینامیکی را نشان دهد. ده‌ها سال پس از این‌که حلقه‌های زحل به‌وسیلهٔ گالیله رصد شد، ماهیت حلقه‌ها یکی از موضوعات مورد بحث در محافل نجومی بود. برخی اظهار می‌کردند که آنها صفحاتی جامد از مواد هستند، درحالی‌که دیگران گمان می‌بردند حلقه‌ها متشکل از میلیون‌ها ذرهٔ کوچک هستند که هر یک شبیه به قمری فرضی اطراف زحل درحال حرکتند. رقبای نظریهٔ صفحات جامد چنین استدلال می‌کردند که فعالیت نیروهای کشندی برروی یک حلقهٔ جامد بسیار قوی است و می‌تواند طی مدتی کوتاه حلقه را از هم جدا کند، مگر این‌که به احتمال بعید حلقه از مقداری مواد بسیار چسبنده که در زمین ناشناخته هستند، تشکیل شده باشد. طرفداران نظریهٔ حلقهٔ جامد پیشنهاد کردند که درواقع حلقه از نوارهای بسیار باریک ساخته شده است، دراین‌صورت نیروهای کشندی فشار کافی برای جداسازی حلقه را نخواهند داشت. در سال ۱۶۷۵ رصدها، خطی بسیار نازک و تاریک را در میان حلقه‌ها آشکار کردند، که حلقه‌ها را به دو بخش حلقهٔ بیرونی به نام A و حلقهٔ درونی به نام B، تقسیم می‌کرد. در اواسط سال ۱۸۵۰ اخترشناسان حلقه‌ای کوچک و جدید را در میان حلقهٔ B آشکار کردند، که به‌نام حلقهٔ C شناخته می‌شود. این واقعیت به‌طور جدی نشان می‌داد که حلقه‌ها جامد نیستند [4].

ماهیت حلقه‌های زحل نهایتاً در سال ۱۸۵۷ آشکار شد. فیزیکدان اسکاتلندی جیمز کلارک ماکسول که بعدها نظریهٔ الکترومغناطیس را ارائه کرد، بااستفاده از فیزیک نیوتونی نشان داد که حلقه‌های جامد هرگز نمی‌توانند پایدار باقی بمانند؛ و بنابراین باید متشکل از ذرات ریز باشند [5]. درحقیقت وی از ساختار و ترکیب حلقه‌های زحل چیزی نمی‌دانست، اما فرض کرد که ممکن است حلقه‌ها از مایع، جامد و حتی هزاران قطعه‌سنگ تشکیل شده باشند. او بااستفاده از آنالیز پایداری دینامیکی در مکانیک نیوتنی نشان داد که حلقه‌ها با توزیع نسبتاً یکنواخت نمی‌توانند مایع یا جامد باشند؛ بنابراین، به‌دنبال سومین فرض خود برای حلقه‌های زحل رفت و با فرض این‌که جرم تمام قطعه‌سنگ‌ها یکسان است و به‌طور یکنواخت در مدارهای دایره‌ای در حال چرخش به‌دور زحل می‌باشند، نتیجه گرفت که اگر جرم قطعه‌سنگ‌ها در رابطهٔ زیر صدق کند، حلقه‌ها پایدارند [5]:

$$m \leq \frac{2.298M}{n^2} \qquad (1)$$

که در آن m جرم قطعه‌سنگ‌ها یا ذرات حلقه است و M جرم زحل یا جسم مرکزی است و n تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم است.

بعد از ماکسول پژوهش‌های متنوع دیگری نتایج او را تأیید کردند، برای نمونه چند مورد درادامه آمده است. در سال ۱۸۸۹ تیسراند فرض کرد که حلقه‌ها هیچ تأثیری روی زحل ندارند. او بااستفاده از این فرض، همان شرط ماکسول را به‌طور تحلیلی به‌دست آورد. در سال ۱۹۳۵ پندس [6] پایداری حلقه‌ها را دوباره بررسی کرد. او ثابت کرد که برای n های کوچک‌تر از ٦ (و بزرگ‌تر از ۲) حلقه‌ها حتماً ناپایدارند. در سال ۱۹۸٦ ویلردینگ [7] از نظریهٔ امواج

چگالی استفاده کرد و نشان داد که نتیجه‌ای که ماکسول به‌دست آورده است در nهای بزرگ صحیح است. در سال ۱۹۸۸ سالو و یودر [8] فرض کردند که اجسام به‌طور یکنواخت حول جسم مرکزی توزیع نشده‌اند. آنها نشان دادند که برخی ساختارهای نامتقارن پایدار نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در سال ۱۹۹۱ وین و چیرس [9] تحلیل پندس را تعمیم دادند، و نشان دادند که وقتی n کوچک است نیز آستانهٔ پایداری تابعی از n است. در سال ۱۹۹٤ مووکل [10] پایداری خطی سیستم n جسمی را وقتی به‌طور یکنواخت حول جسم مرکزی می‌چرخند بررسی کرد. او نشان داد که وقتی تعداد ذرات بزرگ‌تر از ۷ باشد حلقه‌های متقارن پایدار هستند. در سال ۲۰۰۰ رابرت [11] کار مووکل را تعمیم داد و معیاری برای پایداری حلقه‌ها تعیین کرد که با معیار وین و چیرس [9] مطابقت داشت.

هدف این مقاله بررسی پایداری حلقه‌های مشابه در نظریهٔ تعمیم‌یافته MOG است که از مجموعه‌ای از ذرات تشکیل شده‌اند. این نظریه برای حل معمای مادهٔ تاریک ارائه شده است [12]. این مشکل یکی از اساسی‌ترین چالش‌های فیزیک نظری است. به بیان دقیق‌تر رصدهای اخترفیزیکی نشان می‌دهند که شواهد مستقیمی برای اختلاف بین گرانش نیوتونی و مشاهدات وجود دارد؛ به‌عنوان مثال منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچی در فاصله‌های دور نسبت به مرکز کهکشان تخت هستند. درحالی‌که طبق گرانش نیوتنی، این منحنی‌ها به‌جای این‌که توابع تخت باشند، کاهشی هستند.

علاوه‌بر این یک مشکل جدی در جرم خوشه‌های کروی کهکشانی نیز وجود دارد. درحقیقت این خوشه‌ها تقریباً شش مرتبه پرجرم‌تر از آنچه هستند که با تلسکوپ به‌صورت مرئی رصد می‌شوند. درنتیجه فیزیک‌دانان معتقدند مادهٔ تاریک و گمشده‌ای در دنیا وجود دارد که تاکنون آشکارسازی نشده است. با این وجود، اگرچه بسیاری با روش‌های مختلف در آزمایشگاه‌های مدرن به‌دنبال این ذرات می‌گردند، اما هنوز نشانی از آنها رصد نشده است.

یک رهیافت دیگر برای حل این معما، تعمیم‌دادن نظریهٔ گرانش استاندارد است. به بیان دیگر شاید قانون گرانش استاندارد بایستی اصلاح شود و درحقیقت هیچ مادهٔ تاریکی در دنیا وجود ندارد. نظریهٔ MOG این رهیافت را دنبال می‌کند. به‌لحاظ ریاضی این نظریه به‌مراتب پیچیده‌تر از نظریهٔ نسبیت عام انیشتین است. درحقیقت MOG میدان‌های کلاسیک دیگری نیز دارد که درجات آزادی نظریه را افزایش می‌دهند. به بیان دقیق‌تر MOG یک نظریهٔ تانسور- اسکالر- برداری است و دارای دو میدان اسکالر و یک میدان برداری پروکا است. این میدان‌ها از MOG یک نظریهٔ مؤثر برای حل مشکل مادهٔ تاریک ساخته‌اند.

سیستم حلقه‌ای ذره‌ای در نظریهٔ MOG

ابتدا لازم است تا حالت زمینه یعنی سیستم بدون اختلال پیدا شود. برای این کار لازم است تا پتانسیل گرانشی تعمیم‌یافته در نظریهٔ MOG معرفی شود. می‌توان نشان داد که پتانسیل گرانشی ناشی از جرم نقطه‌ای M در این مدل عبارت است از:

$$\phi_{eff} = -\frac{GM}{r}(1 + \alpha - \alpha e^{-\mu_0 r}) \qquad (۲)$$

که در آن G ثابت جهانی گرانش نیوتن است. از طرف دیگر α و μ_0 پارامترهای آزاد نظریه هستند که توسط رصدهای مربوط به منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچی مقدار آنها به‌دست آمده است. این مقادیر به‌ترتیب عبارتند از [13]:

$$\alpha = 8.89 \pm 0.34$$
$$\mu = 0.042 \pm 0.004\ kpc^{-1}$$

با داشتن این پتانسیل، فرض می‌کنیم n ذره با جرم‌های برابر m حول جسم مرکزی سنگین با جرم M در حال چرخش هستند و حلقه‌ای به‌شعاع r تشکیل می‌دهند. مکان هر ذره در مختصات مختلط را

به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x_j = re^{i(\omega t+\frac{2j\pi}{n})} \quad (۳)$$

دراین‌صورت می‌توان نشان داد که سرعت زاویه‌ای ذرات با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} + \frac{Gm}{r^3} I_n + \frac{GM}{r^3}\alpha \left[1 - (1 + \mu_0 r)e^{-\mu_0 r} + \frac{\mu}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-e^{-2r\sin\frac{k\pi}{n}} - 2\mu_0 r e^{-2r\sin\frac{k\pi}{n}}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\right] \quad (۴)$$

که در آن،

$$I_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4\sin(k\pi/n)} \quad (۵)$$

می‌توان به‌راحتی نشان داد که‌این سرعت از سرعت متناظر در مکانیک نیوتونی اندکی بیشتر است. به‌عبارت دیگر سرعت چرخش ذره‌ای با جرم m حول جسم مرکزی با جرم M روی دایره‌ای به‌شعاع r، به نظریهٔ گرانشی وابسته است. در نظریه‌های گرانشی که برای حل معمای مادهٔ تاریک ساخته شده‌اند، گرانش نسبت به گرانش نیوتونی قوی‌تر است. بنابراین سرعت چرخش ذرات بزرگ‌تر از مکانیک نیوتونی است. لازم‌به ذکر است که قوی‌تر بودن نیروی گرانشی نسبت‌به مکانیک نیوتونی، برای توجیه منحنی چرخش تخت کهکشان‌های مارپیچی لازم است؛ حتی برای توصیف سرعت‌های تصادفی بزرگ کهکشان‌ها در خوشه‌های کهکشانی نیز امری مهم است. درحقیقت امروزه می‌دانیم که در چارچوب مکانیک نیوتونی، سرعت بزرگ کهکشان‌ها در خوشه‌های کهکشانی قابل توجیه نیست. این همان مشکل حل‌نشدهٔ مادهٔ تاریک در اخترفیزیک است.

از طرف دیگر معادلات حرکت در دستگاه استوانه‌ای (r, φ, Z) عبارتند از:

$$\begin{cases} \ddot{r}_j - r_j(\dot{\varphi}_j + \omega)^2 = \frac{\partial U_j}{\partial r_j} \\ r_j\ddot{\varphi}_j + 2\dot{r}_j(\dot{\varphi}_j + \omega) = \frac{1}{r_j}\frac{\partial U_j}{\partial \varphi_j} \quad j = 1,2,\dots,n \\ \ddot{Z}_j = \frac{\partial U_j}{\partial z_j} \end{cases} \quad (۶)$$

درحقیقت U_j به‌گونه‌ای تعریف شده است که گرادیان آن نیروی وارد بر ذرهٔ jام را به‌دست می‌دهد. ازآنجایی‌که پایداری سیستم مطالعه می‌شود، اختلالاتی به‌شکل زیر را به مختصات ذرات اعمال می‌شود:

$$r_j = 1 + \rho_j \quad (۷)$$

$$\varphi_j = 2\theta_j + \sigma_j \quad (۸)$$

$$z_j = 0 + zz_j \quad (۹)$$

در راوابط بالا ρ_j اختلال در شعاع ذرات، σ_j اختلال در زاویهٔ ذرات و zz_j اختلال در ارتفاع ذرات می‌باشد و ازآنجاکه اختلالات بسیار کوچک هستند در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \frac{\rho_j}{r_j} \ll 1 \\ \frac{\sigma_j}{\varphi_j} \ll 1 \\ \frac{zz_j}{z_j} \ll 1 \end{cases} \quad (۱۰)$$

با جای‌گذاری اختلالات در معادلات حرکت (۶) و نگه‌داشتن ضرایب تا مرتبهٔ اول اختلال، به معادلات مختل‌شدهٔ خطی زیر می‌رسیم:

$$\ddot{\rho} - 2\omega\dot{\sigma} = \omega^2\rho + A\rho + B\sigma \quad (۱۱)$$

$$\ddot{\sigma} + 2\omega\dot{\rho} = C\rho + D\sigma \quad (۱۲)$$

$$\ddot{zz} = Ezz \quad (۱۳)$$

که در آنها A, B, C, D و E ماتریس‌های ضرایب هستند. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره کردیم، پارامتر μ_0 بسیار کوچک است، بنابراین درادامه فرض می‌کنیم که $\mu_0 r \ll 1$ (r شعاع حلقه است). دراین‌صورت جملات

شامل $\mu_0 r$ را فقط تا مرتبهٔ دوم $\mu_0 r$ نگه می‌داریم؛ بنابراین داریم:

$$A_{jj} = 2 + 2\mu - \frac{\mu}{8}\sum_{k\neq j}^{n-1} csc^3(\theta k - \theta j) - 3\csc(\theta k - \theta j) - \alpha\mu_0^2 \csc(\theta k - \theta j)\left[1 + \cos\big(2(\theta k - \theta j)\big)\right]$$

$$A_{jk} = \frac{\mu}{8}\Big[csc^3(\theta k - \theta j) + \csc(\theta k - \theta j) + \alpha\mu_0^2 \csc(\theta k - \theta j)\left[1 + \cos\big(2(\theta k - \theta j)\big)\right]\Big] + 2\mu\cos(2(\theta k - \theta j))$$

$$B_{jj} = -\mu\sum_{k\neq j}^{n-1} sin\big(2(\theta k - \theta j)\big)[1 + \frac{\alpha\mu_0^2}{2} - \frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k - \theta j)} + \frac{1}{16}csc^3(\theta k - \theta j)]$$

$$B_{jk} = \mu\, sin\big(2(\theta k - \theta j)\big)[1 + \frac{\alpha\mu_0^2}{2} - \frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k - \theta j)} + \frac{1}{16}csc^3(\theta k - \theta j)]$$

$$C_{jj} = B_{jj}$$

$$C_{jk} = -\mu\, sin\big(2(\theta k - \theta j)\big)[\frac{1}{16}csc^3(\theta k - \theta j) - \frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k - \theta j)} - 2]$$

$$D_{jj} = \mu\sum_{k\neq j}^{n-1} cos\big(2(\theta k - \theta j)\big)\left[1 + \frac{\alpha\mu_0^2}{2} + \frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k - \theta j)} + \frac{1}{16}csc^3(\theta k - \theta j)\right] + \frac{3}{16}csc^3(\theta k - \theta j) + \frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k - \theta j)}$$

$$D_{jk} = -\mu cos\big(2(\theta k - \theta j)\big)\left[1 + \frac{\alpha\mu_0^2}{2} + \frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k - \theta j)} + \frac{1}{16}csc^3(\theta k - \theta j)\right] + \frac{3\mu}{16}csc^3(\theta k - \theta j) + \frac{\alpha\mu_0^2\mu}{8sin(\theta k - \theta j)}$$

$$E_{jj} = -(1+\mu)\left(1 - \frac{\alpha\mu_0^2}{2}\right) - \frac{\mu}{8}\sum_{k\neq j}^{n-1} csc^3(\theta k - \theta j) + 2\frac{\alpha\mu_0^2}{sin(\theta k - \theta j)}$$

$$E_{jk} = -\mu\left(1 + \frac{\alpha\mu_0^2}{2}\right) + \frac{\mu}{8}[csc^3(\theta k - \theta j) + 2\frac{\alpha\mu_0^2}{sin(\theta k - \theta j)}] \qquad (۱۴)$$

لازم به ذکر است که فرض کرده‌ایم GM=1 و $\mu = m/M$. برای ساده‌کردن شکل ضرایب از تغییر متغییرهای دیگری به‌شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\rho = \mathcal{F}\xi$$

$$\sigma = \mathcal{F}\eta \qquad (۱۵)$$

$$zz = \mathcal{F}\zeta$$

که در آن $\mathcal{F}$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}_{lk} = e^{2i\theta lk} \qquad (۱۶)$$

دراین‌صورت روابط (۱۳-۱۱) را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} = \omega^2\xi + \Lambda^A\xi + \Lambda^B\eta \qquad (۱۷)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = \Lambda^C\xi + \Lambda^D\eta \quad (۱۸)$$

$$\ddot{\zeta} = \Lambda^E\zeta \quad (۱۹)$$

که در آن Λ^x ماتریسی قطری از ویژه مقادیر مـاتریس x است. این ماتریس‌ها در زیر آمده‌اند:

$$\Lambda^A{}_j = 2 + \frac{\mu}{2}(c_j + d_j) + \mu\left(2J_j - \frac{1}{4}L_j\right) + \frac{\alpha\mu{\mu_0}^2}{2}a_j$$

$$\Lambda^B{}_j = \sqrt{-1}\mu(J_j + \frac{1}{8}M_j + \frac{\alpha{\mu_0}^2}{2}s_j - \frac{\alpha{\mu_0}^2}{4}b_j)$$

$$\Lambda^C{}_j = \sqrt{-1}\mu(2J_j - \tfrac{1}{8}M_j + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{4}b_j)$$

$$\Lambda^D{}_j = \mu(-J_j(1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}) + \tfrac{1}{4}N_j + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}a_j)$$

$$\Lambda^E{}_j = -(1+\mu)\left(1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}\right) - \tfrac{\mu}{12}(L_j + N_j) - \tfrac{\alpha\mu{\mu_0}^2}{2}d_j - \tfrac{\mu}{2}(1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2})S_j^E \quad (۲۰)$$

همچنین لازم به ذکر است که:

$$a_j = \sum_{k=1} \frac{cos^2(k\theta)}{\sin(k\theta)} sin^2(k\theta j)$$

$$b_j = \sum_{k=1} \cos(k\theta) sin(2k\theta j)$$

$$c_j = \sum_{k=1} \frac{cos^2(k\theta j)}{\sin(k\theta)}$$

$$d_j = \sum_{k=1} \frac{sin^2(k\theta j)}{\sin(k\theta)}$$

$$L_j = \sum_{k} \frac{1 + sink\theta^2}{sink\theta^3} \sin^2 kj\theta$$

$$N_j = \sum_{k} \frac{1 + cosk\theta^2}{sink\theta^3} \sin^2 kj\theta$$

$$M_j = \sum_{k} \frac{cosk\theta}{sin^2 k\theta} sin2kj\theta$$

$$J_j = \begin{cases} 0 & j \neq 1 \\ \mathrm{n}/2 & \mathrm{j} = 1 \end{cases}$$

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ n & j = 1, n-1 \end{cases}$$

$$S_j^E = \begin{cases} 2n-2 & \mathrm{j} = \mathrm{n} \\ -2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲۱)$$

پایداری خطی خارج از صفحه

حال که معادلات مرتبه اول اختلال را در دست داریـم، مـی‌تـوانیم تحـول ناپایـداری‌هـا را بررسـی کنـیم. در ساده‌ترین حالت، اختلالات فقط درراسـتای عمـود بـر قرص هستند؛ لذا برای پیدا کردن شرط پایداری خـارج از صفحه، فقط اختلال درراستای عمـود بـر صـفحه را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت تنهـا معادلـهٔ لازم بـرای بررسی پایداری رابطهٔ (۱۹) می‌باشد:

$$\ddot{\zeta} = \Lambda^E\zeta \quad (۲۲)$$

باتوجه به معادله واضح اسـت کـه بـرای پایـداری لازم است Λ^E منفی باشد. اجازه دهید ابتدا فرض کنـیم j مخالف n باشد، دراین‌صورت شرط پایداری عبـارت است از:

$$1 + \frac{\alpha{\mu_0}^2}{2} + \frac{\mu}{12}\left(L_j + N_j\right) + \frac{\alpha\mu{\mu_0}^2}{2}d_j > 0 \quad (۲۳)$$

از طرف دیگر برای $j = n$ شرط پایداری به‌شکل زیر است:

$$(1 + (2+n)\,\mu)(\,1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}) > 0 \quad (۲٤)$$

با ساده‌سازی رابطهٔ (۲٤) داریم:

$$\alpha{\mu_0}^2 > -2 \quad (۲۵)$$

به‌راحتی می‌تـوان نشـان داد کـه اگـر شـرط (۲۵) برقرار باشد، آن‌گـاه (۲۳) نیـز برقـرار اسـت. ازطرفـی باتوجه به این‌که مقادیر μ_0 و α مثبت هستند؛ می‌تـوان

نتیجه گرفت که همانند مکانیک نیوتونی، سیستم حلقه‌ای متشکل از ذرات، نسبت به اختلالات خارج از صفحهٔ حلقه پایدار است. این حقیقت با ماهیت جاذبهٔ نیروی گرانش کاملاً سازگار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت تفاوت مهمی بین MOG و گرانش نیوتونی در اختلالات خارج از صفحه وجود ندارد. البته می‌توان فرکانس نوسانات پایدار را محاسبه کرد. به‌نظر می‌رسد این فرکانس در دو نظریهٔ فوق متفاوت باشد. به بیان دقیق‌تر انتظار می‌رود نوسانات پایدار در راستای z در نظریهٔ MOG بزرگ‌تر از مکانیک نیوتونی باشد. این انتظار صرفاً به‌خاطر قوی بودن نیروی گرانشی در این نظریه است.

پایداری در صفحه

برای پیداکردن شرایط پایداری در صفحه باید دو معادلهٔ (۱۷ و ۱۸) را نیز درنظر بگیریم. برای این‌کار فرض می‌کنیم تحول زمانی اختلالات به‌شکل زیر باشد:

$$\xi, \eta, \zeta \sim e^{i\lambda t} \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری (۲۶) در روابط (۱۷ و ۱۸) و ترکیب دو معادله به رابطهٔ زیر می‌رسیم :

$$x^4 - qx^2 + rx + s = 0 \qquad (۲۷)$$

که در آن q, r, s توابعی از μ_0, j, μ و α به‌صورت زیر هستند:

$$q = 3 - \frac{\Lambda^A + \Lambda^D}{\omega^2} \qquad (۲۸)$$

$$r = \frac{2(\Lambda^C - \Lambda^B)}{\omega^2} \qquad (۲۹)$$

$$s = \frac{\Lambda^A \Lambda^D + \omega^2 \Lambda^D + \Lambda^B \Lambda^C}{\omega^4} \qquad (۳۰)$$

و x تابعی از λ است:

$$x = \frac{\lambda}{\omega}/ \qquad (۳۱)$$

برای پایداری باید شرایطی را بررسی کنیم که λ یا x حقیقی باشند، دراین‌صورت می‌توان نشان داد که سه شرط زیر می‌بایستی هم‌زمان برقرار باشند:

$$q > 0 \qquad (۳۲)$$

$$\Delta > 0 \qquad (۳۳)$$

$$\Gamma > 0 \qquad (۳۴)$$

که در آنها:

$$\Delta = 4q^3r^2 - 27r^4 + 16q^4s - 144qr^2s - 128q^2s^2 + 256s^3 \qquad (۳۵)$$

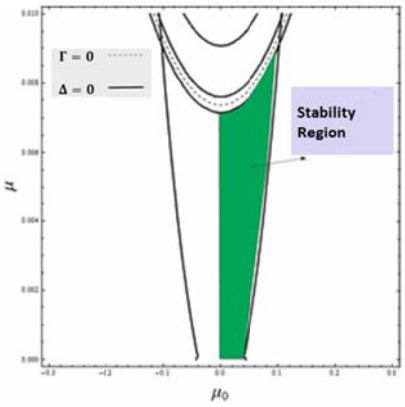
$$\Gamma = 2q(q^2 - 4s) - 9r^2 \qquad (۳۶)$$

اما چون این شرایط به‌روش تحلیلی قابل بررسی نیستند، نمودار آنها را به‌صورت عددی رسم می‌کنیم و شرایط پایداری را بررسی می‌کنیم. اجازه دهید با n=7 که مرز پایداری در مکانیک نیوتنی است، شروع کنیم. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره کردیم، میانگین α به‌طور تجربی ۸/۸۹ است. با قرار دادن این عدد نمودار موردنظر را رسم می‌کنیم.

در شکل (۱) که برای n=7 رسم شده است، ناحیه‌ای که سیستم نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی می‌ماند مشخص شده است. اگر μ_0 صفر باشد، شرط پایداری به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

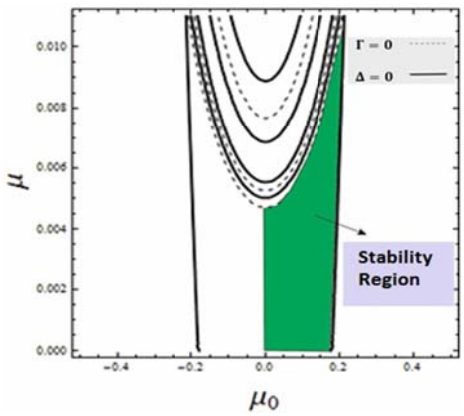
$$\mu \leq 0.00715 \qquad (۳۷)$$

که همان شرطی است که در مکانیک نیوتونی به‌دست آوردیم. بار دیگر تأکید می‌کنیم که μ نسبت جرم یک ذره در حلقه به جرم مرکزی است. جالب است که این پارامتر به‌تنهایی می‌تواند شرط پایداری مسئله را به‌دست دهد.



شکل ۱ ناحیهٔ پایداری سیستم ۷ذره‌ای

ازآنجاکه اگر $\mu_0 = 0$ باشد، پتانسیل به پتانسیل نیوتونی تبدیل می‌شود، انتظار چنین شرطی را داشتیم؛ اما با زیاد شدن μ_0 این شرط تغییر می‌کند. باتوجه به این‌که با زیادشدن μ_0 نیروی جاذبهٔ بین ذرات بیشتر می‌شود، ذرات با جرم‌های بیشتر می‌توانند نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی بمانند. وجود μ_0 در پتانسیل جاذبهٔ بین ذرات را بیشتر می‌کند، به‌همین‌دلیل با افزایش آن ناحیهٔ پایداری بزرگ‌تر می‌شود، اما اگر از مقدار خاصی بزرگ‌تر باشد نیروی جاذبهٔ بین ذرات بسیار زیاد می‌شود و درصورت وجود اختلال سیستم از هم می‌پاشد؛ اما ازآنجاکه ما شعاع را یک فرض کرده‌ایم تعیین این معیار کار راحتی نیست. باتوجه به رابطهٔ (۲) اگر μ_0 منفی باشد نیرو در فواصل دور بی‌نهایت می‌شود. به‌عبارت دیگر در جواب‌های فیزیکی μ_0 نمی‌تواند منفی باشد، ازاین‌رو قسمت‌های منفی را از مناطق پایداری حذف کردیم. لازم است خاطرنشان کنیم که μ_0 نقش جرم میدان برداری موجود در نظریهٔ MOG را بازی می‌کند و انتظار داریم که جرم وابسته به میدان‌ها مثبت باشد. باتوجه به رفتار کیهان‌شناختی این مدل می‌دانیم که درواقع این کمیت می‌تواند با زمان تغییر کند و لزوماً ثابت نیست.



شکل ۲ ناحیهٔ پایدار سیستم هشت ذره‌ای

در شکل (۲) سیستم هشت ذره‌ای را بررسی کرده‌ایم. در این شکل منطقه‌ای که در آن سیستم می‌تواند نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی بماند مشخص شده است. ازآنجایی‌که μ_0 نمی‌تواند منفی باشد؛ قسمت‌هایی را که دارای μ_0 منفی است از جواب حذف کرده‌ایم. همان‌طور که انتظار داریم در $\mu_0 = 0$ به همان جوابی می‌رسیم که در سیستم نیوتونی رسیدیم.

لازم به یادآوری است که سیستم با گرانش تعمیم‌یافته در حد $\mu_0 = 0$ به سیستمی با پتانسیل گرانشی نیوتونی تبدیل خواهد شد. همان‌طور که در شکل مشخص است با افزایش μ_0 ذراتی که می‌توانند نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی بمانند، جرم بیشتری خواهند داشت؛ اما جرم ذراتی که در سیستم هشت‌ذره‌ای پایدار باقی می‌مانند از جرم ذرات متناظر در سیستم هفت‌ذره‌ای کوچک‌تر است.

نتایج و پیشنهادات

ازآنجاکه مهم‌ترین نتایج به‌دست‌آمده در بخش قبل نمودارهای انتهای بخش است، با تحلیل نمودارها شروع می‌کنیم. برای رسم نمودارها ابتدا فرض کرده‌ایم که α ثابت باشد. همان‌طور که از قبل انتظار داشتیم در حد $\mu_0 = 0$ همان نتایجی به‌دست آمد که در گرانش

نیوتونی به‌دست آمده است. می‌دانیم که μ_0 نمی‌تواند منفی باشد؛ اما با زیاد شدن μ_0 شرایط تغییر می‌کند و سیستم حلقه‌ای می‌تواند با جرم‌های بزرگ‌تر نسبت به اختلالات کوچک پایدار بماند. ازآنجاکه نیروی گرانشی در نظریهٔ MOG مقداری بزرگ‌تر از نیروی گرانشی نیوتونی است این نتیجه دور از انتظار نبود. اما این روند تا μ_0 خاصی ادامه می‌یابد و پس از آن سیستم حلقه‌ای در هر صورتی ناپایدار می‌شود.

در ابتدا فرض کردیم که شعاع سیستم حلقه‌ای یک باشد، ازآنجاکه متغیر اصلی در معادلات حرکت $\mu_0 r$ بود می‌توان نتیجه گرفت که سیستم‌های با شعاع بزرگ‌تر نسبت به سیستم‌های با شعاع کوچک‌تر ناپایدارترند. در گرانش نیوتونی سیستم حلقه‌ای با ذرات کوچک‌تر از ۷ در هر صورتی ناپایدارند. این اتفاق در نظریهٔ MOG نیز می‌افتد. اگر تعداد ذرات بیشتر شود سیستم با ذرات کم‌جرم‌تر می‌تواند پایدار بماند، البته درصورتی‌که μ_0 در دو سیستم برابر باشد.

درپایان خاطرنشان می‌کنیم که بررسی پایداری موضعی یک حلقهٔ سیالی نیز درادامهٔ این پژوهش قابل انجام است و برای توصیف ستاره‌زایی در حلقه‌های کهکشانی می‌تواند کمک کند.

تقدیر و تشکر

این پژوهش با حمایت دانشگاه فردوسی با شماره اعتبار 32039(19/09/1393) انجام شده است.

مراجع

1. Goldreich, P. and Tremaine, S., "The dynamics of planetary rings", *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 20, pp. 249-283, (1982).
2. Christodoulou, D.M. and Narayan, R., "The stability of accretion tori. IV-Fission and fragmentation of slender, self-gravitating annuli", *The Astrophysical Journal*, Vol. 388, pp. 451-466, (1992).
3. Shu, F. , "Waves in planetary rings", in IAU Colloq. 75, Planetary Rings, (1984).
4. Bond, G., "Discovery of inner dark ring of Saturn", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 11, pp. 20, (1850).
5. Maxwell, J.C., "*On the stability of the motion of Saturn's rings*", Cambridge, (1859).
6. Pendse, C., "The theory of Saturn's rings", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 234(735), pp. 145-176, (1935).
7. Willerding, E., "Theory of density waves in narrow planetary rings", *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 161, pp. 403-407, (1986).
8. Salo, H. and Yoder, C., "*Dynamics of coorbital satellite rings, in The Few Body Problem*", Springer, pp. 179-184, (1988).
9. Scheeres, D. and Vinh, N., "Linear stability of a self-gravitating ring", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 51(1), pp. 83-103, (1991).
10. Moeckel, R., "Linear stability of relative equilibria with a dominant mass", *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 6(1), pp. 37-51, (1994).
11. Roberts, G.E., "Linear stability in the 1+ n-gon relative equilibrium", *in Proceedings of the III International Symposium "Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics", eds. J. Delgado, E. Lacomba, & E. Pérez-Chavela (World Scientific, Singapore)*, (2000).
12. Vanderbei, R.J. and Kolemen, E., "Linear stability of ring systems", *The astronomical Journal*, Vol. 133(2), pp. 656, (2007).

13. Moffat, J. and Rahvar, S., "The MOG weak field approximation and observational test of galaxy rotation curves", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 436(2), pp. 1439-1451, (2013).

اثرهای معادلهٔ ایستایی و تابع ترفتز بر پاسخ‌های جزء صفحهٔ خمشی چهارپهلو*

محمد رضائی پژند[۱] معصومه ملک‌زاده گنابادی[۲] نیلوفر رجب‌زاده صفائی[۳]

چکیده *در این پژوهش، ده جزء صفحهٔ خمشی چهارپهلو کیرشهفی نو برپایهٔ تابع تغییرمکان ترفتز و برقرارنمودن معادلهٔ ایستایی پیشنهاد می‌شود. نخست، مناسب‌ترین چیدمان‌های درجه‌های آزادی و نیز گره‌های روی جزء برپایهٔ پژوهش پیشینیان به‌دست می‌آیند. پس از آن، با بهره جستن از تقارن جمله‌ها، ده جزء با تابع میدان متفاوت برای دو چیدمان برتر، معرفی خواهند شد. واکاوی‌های عددی آشکار می‌کنند که تابع میدان برگرفته از تابع‌های ناقص ترفتز درصورت انتخاب درست جمله‌ها، با شمار درجهٔ آزادی کمتر و مرتبهٔ بالاتر نسبت به جزءهای کامل، می‌توانند جزءهای مفیدی را پدید آورند. چون تابع‌های ترفتز معادلهٔ ایستایی را برقرار می‌سازند، پاسخ‌های نیرویی بیشتر جزءها، دقت فزون‌تری نسبت به پاسخ‌های جابه‌جایی‌ها دارند.*

واژه‌های کلیدی صفحهٔ خمشی نازک; معادلهٔ ایستایی; پاسخ تحلیلی; تابع ترفتز; جزء خمشی چهارپهلو; تابع درون‌یاب ناقص.

The Effect of Equilibrium Equation and Trefftz Functions on the Responses of Quadrilateral Bending Plate

M. Rezaiee-Pajand M. Malekzadeh-Gonabadi N. Rajabzadeh-Safaei

Abstract *In this study, ten novel quadrilateral Kirchhoff's bending plate elements based on the Trefftz displacement functions and satisfying equilibrium equation are suggested. First, the most suitable arrangement of degrees of freedom and nodes are achieved by benefiting from previous researches. Afterwards, using the symmetry of terms, ten elements with different interpolation functions for the two top arrangements will be introduced. Numerical tests reveal that the correct choice of the interpolation's terms from the incomplete Trefftz functions leads to more efficient elements with lower degrees of freedom and higher order than the complete elements. Since the Trefftz functions meet the equilibrium conditions, the force responses of the most cases have a higher accuracy than the displacement responses.*

Key Words Thin bending plate; equilibrium equation; analytical solution; Trefftz function; quadrilateral bending element; incomplete interpolation function.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۴/۷/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۴/۷ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.50733

(۱) نویسندهٔ مسئول، استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی، مشهد. rezaiee@um.ac.ir

(۲) کارشناس ارشد مهندسی عمران-سازه، دانشگاه فردوسی، مشهد.

(۳) دانشجوی دکترای عمران-سازه، دانشگاه فردوسی، مشهد.

مقدمه

در صفحه‌های نازک خمشی پدیدآمده برپایهٔ نگرهٔ کیرشهف، از اثر تغییرشکل‌های برشی در جابه‌جایی سازه چشم‌پوشی می‌شود؛ درحالی‌که نگرهٔ رایزنر- میندلین [۱] این اثر را وارد تحلیل می‌کند. بنابراین، این نگره برای صفحه‌های ضخیم که تغییرشکل‌های برشی قابل‌توجهی دارند، پاسخ مناسبی را به‌دست می‌دهد.

در دسته‌ای از روش‌ها، نخست بنا به نگرهٔ کیرشهف رابطه‌های صفحهٔ نازک نوشته می‌شوند؛ سپس، با وارد کردن اثر تغییرشکل برشی، آنها را برای صفحهٔ ضخیم نیز کارا می‌سازند. در سال ۲۰۰۰، جزئی چهارپهلو با ۱۲ درجهٔ آزادی برای صفحه‌های بسیار نازک، نازک و ضخیم توسط سوه و همکارانش [2] پیشنهاد شد. در آن جزء، دوران و کرنش برشی روی پهلوها با نگرهٔ تیر تیموشنکو به‌دست آمدند. همچنین، دوران، انحنا و کرنش برشی درون جزء با فن درون‌یابی بهبودیافته در دسترس قرار گرفتند.

در نگرهٔ میندلین- رایزنر، پیوستگی مرتبه یکم C^0 کافی است و با مستقل‌شدن تغییرمکان‌ها پیوستگی بین جزئی تأمین می‌شود. شیخ و همکارانش در سال ۲۰۰۱ [3] با سه میدان تغییرمکان مستقل خیز و دو دوران برشی به‌جای دوران‌های خمشی، جزئی مثلثی برای صفحه‌های همسان‌گرد و ضخیم پدید آوردند. راهکار میدان سازگار روشی دیگر است که از پدیدهٔ قفل جلوگیری می‌کند [4, 5]. با نازک‌شدن صفحه‌ها، کرنش برشی به‌سوی صفر می‌گراید. این فرآیند با تغییر ضخامت در صفحه‌های ضخیم نیز باید دیده شود. در سال ۲۰۰۲، شیخ و همکاران [6]، با روش جزء محدود تغییرمکانی و بهره‌جویی از راهکار میدان سازگار، دو تابع میدان مستقل را با مرتبهٔ ناهمسان برای تغییرمکان جانبی و دوران خمشی به‌کار بردند.

راهکار قالب جزء محدود یا رابطه‌سازی آزاد روشی نو برای دستیابی به ماتریس سختی جزءهای محدود است. رضایی پژند و محمدزاده [7] در مقاله‌ای با این شیوه ماتریس سختی جزء چهارپهلوی خمشی را پیشنهاد دادند. باتوژ و کاتیلی [8] نیز با راهکار رابطه‌سازی آزاد، جزء چهارپهلوی صفحهٔ کیرشهف ناپیوسته DKQ را پدید آوردند. رزاقپور و همکارانش در سال ۲۰۰۳ [9]، جزء چهارپهلوی ٤ گرهی بهبودیافته برپایهٔ پنداشت‌های نگرهٔ کیرشهف گسسته با ۱۲ درجهٔ آزادی به نام IDKQ برای صفحه‌های نازک پیشنهاد دادند. باتوژ و همکارش [10] این پنداشت‌ها را برای مرزها و خط‌های مرکزی جزء QUAD9 به‌کار گرفتند و رفتار این جزء را بهبود بخشیدند.

در سال ۱۹۲٦، ترفتز نگره‌ای نو برپایهٔ فن تغییراتی با به‌کارگیری تابع‌نخستین‌گیری‌های (انتگرال گیری‌های) مرزی را پیشنهاد داد. در این نگره، تابع‌های درون‌جزئی در معادله‌های دیفرانسیلی حاکم بر صفحه‌های نازک صدق می‌کرد. همچنین، شرط‌های مرزی و پیوستگی درون جزئی با تابع‌نخستین‌گیری به‌روش مانده‌های وزنی تأمین می‌شدند [11]. باید آگاه بود، نخستین تلاش‌ها برای ساخت یک جزء ترفتزی به سال ۱۹۷۷ برمی‌گردد [12]. زمانی که شمار تابع‌های مستقل اصلی بیش از یک باشد، نام روش پیوندی به میان می‌آید [13]. تابع‌های پیوندی می‌توانند تابع‌های تغییرمکان مستقل باشند و یا این‌که تابع تنش جداگانه‌ای فرض شود. برای بهبود تنش‌ها و نیروهای درونی در جزءها برپایهٔ تغییرمکان، می‌توان از روش تنش پیوندی بهره جست و تابعی جداگانه برای تنش‌ها پنداشت [14, 15]. در سال ۲۰۰۲، سن و همکارانش [16] تغییرمکان‌ها را با روش مشابه سوه و همکارانش در سال ۲۰۰۱ [2] به‌دست آوردند. آنها برای یافتن تنش‌ها از شیوهٔ پیوندی استفاده کردند؛ ازاین‌رو، پاسخ‌های این پژوهشگران، هم برای تغییرمکان و هم برای تنش مطلوب بود.

هرگاه دو تابع تغییرمکان مستقل، یکی در درون جزء، که معادلهٔ ایستایی را برقرار کند، و دیگری روی

مرزها، که شرط‌های سازگاری و پیوستگی بین جزءها را تأمین نماید، تعریف شود، نام «ترفتز پیوندی» به جزءها داده می‌شود [14,17-19]. باید دانست، تابع‌های ترفتز مختلط هستند و به‌راحتی تمام معادله‌های دیفرانسیلی ایستایی را برقرار می‌سازند. دیگر ویژگی روش ترفتز پیوندی این است که جمله‌های حرکت جسم سخت جایی در تابع شکل درونی جزء ندارند [21,14,20]؛ حتی در شبکه‌بندی‌های درشت، جزءهای مرتبه‌بالای ترفتز، مانند جزءهای چهارپهلو با ۸ گره و مثلثی با ٦ گره از دقت بالایی، برخوردارند [22]. در سال ۲۰۱٤، با بهره‌جویی از این‌گونه جزءها و فن ترفتز پیوندی، رضایی پژند و کارکن [23] دو جزء مثلثی و چهارپهلوی مرتبه‌بالا ساختند. برای بهبود توانایی جزء، تابع شکل تیر اولر- برنولی سه‌گرهی را برای هر پهلوی جزء به‌کار بردند. پیش از این و در سال ۲۰۱۲، رضایی پژند و همکارانش [24] همین جزءهای مثلثی و چهارپهلو را با ۳ و ٤ گره نیز ساخته بودند.

در این اثر، برای رابطه‌های جزءهای محدود صفحهٔ خمشی کیرشهفی، از تابع ترفتز برای خیز بهره‌جویی خواهد شد. به‌خاطر باید سپرد، در تمامی جزءهای خانوادهٔ ترفتز، تابع میدان درونی، معادلهٔ دیفرانسیلی حاکم بر جزء را برقرار می‌کند. دو بخش عمومی و خصوصی در پاسخ‌های معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر صفحه وجود دارند. ازاین‌رو، تابع میدان نیز از جمع این پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. تابع ترفتز برای پاسخ بخش همگن به‌کار می‌رود و اثر چگونگی انتخاب جمله‌های این تابع در دقت پاسخ‌های خیز و لنگر، هدف اصلی این مقاله است. برای انجام این پژوهش، دو خانوادهٔ جزء با دو آرایش درجهٔ آزادی متفاوت و پس از حذف گونه‌های ناشایسته انتخاب می‌شوند. باید دانست، برای هر یک از آرایش درجه‌های آزادی و چیدمان گره‌ها روی جزء، می‌توان تابع میدان‌های متفاوتی را به‌کار برد که این ویژگی در پژوهش کارکن [۱] وجود ندارد. هر یک از این تابع‌ها، با نگهداری تقارن جمله‌ها و حذف شماری از جمله‌های ترفتز به‌دست می‌آیند. در مجموع، ٦٧٤ جزء صفحهٔ خمشی جدید در این مقاله بررسی شده‌اند. از این میان، ده جزء که پاسخ‌های برتری دارند معرفی خواهند شد. چهار جزء از خانوادهٔ نخست آرایش درجهٔ آزادی و شش جزء از خانوادهٔ دوم انتخاب می‌شوند و شمار زیادی آزمون عددی برروی آنها انجام می‌گیرد. از مقایسهٔ جزءهای ناقص پیشنهادی با دو جزء کامل، می‌توان دریافت، که برخلاف تصور معمول، کامل بودن تابع‌های انتخابی شرط لازم برای دست‌یابی به دقت بالا نمی‌باشد. به سخن دیگر، درصورت انتخاب درست تابع‌های ناقص ترفتز، می‌توان به جزءهای با شمار درجهٔ آزادی کمتر و مرتبهٔ بالاتر دست یافت که نسبت به جزءهای کامل پیشینیان کاراترند. این یافته برتری جزءهای ناقص پیشنهادی را نسبت به پژوهش کارکن و اختری، که دارای تابع‌های میدان کامل‌اند، نشان می‌دهد [۱،۲٦]. این مقاله آشکار خواهد کرد، چون تابع میدان معادلهٔ ایستایی را برقرار می‌کند، پاسخ‌های نیرویی بیشتر جزءها، دقت بیشتری نسبت به تغییرمکان‌ها دارند.

معادلهٔ ایستایی صفحهٔ کیرشهف

همان‌گونه که آمد، تابع‌های ترفتز درحقیقت پاسخ‌های معادلهٔ ایستایی هستند. معادلهٔ دیفرانسیل صفحهٔ خمشی مرتبهٔ چهار و به سیمای زیر می‌باشد:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad , \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۱)$$

در اینجا، ∇ کارگر نابلا، w تابع میدان تغییرمکان جزء، p(x,y) تابع بار و D سفتی صفحه می‌باشد. همانند معادلهٔ زیر، تابع میدان جزء دارای دو بخش است:

$$w = w_p + w_c = w_p + \sum_{j=1}^{m} w_j c_j = w_p + [w_c]\{c\} \quad (۲)$$

در این برابری، w_c و w_p و m، به‌ترتیب، پاسخ بخش همگن، پاسخ خصوصی معادلهٔ ایستایی صفحه و شمار مجهول‌های گرهی می‌باشند. همچنین، $\{c\}$ بردار ضریب‌های مجهول نام دارد. با حل تحلیلی معادلهٔ حاکم در مختصه‌های قطبی و تبدیل به مختصه‌های دکارتی، پاسخ همگن به‌صورت تابع‌های ترفتز زیر در دسترس قرار می‌گیرد [1,25]:

$$\begin{cases} w_{k+1} = r^2\, \mathrm{Re}(z^k) \\ w_{k+2} = r^2\, \mathrm{Im}(z^k) \\ w_{k+3} = \mathrm{Re}(z^{k+2}) \\ w_{k+4} = \mathrm{Im}(z^{k+2}) \end{cases} , \quad k = 0,1,2,... \quad (۳)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \ , \ z = x + iy \quad (۴)$$

پاسخ‌های خصوصی برای بارگذاری‌های متفاوت در بخش آزمون‌های عددی ارائه خواهد شد. همچنین، جمله‌های تابع ترفتز برای دسته‌های با شمارهٔ k در پیوست مقاله آمده است. یکی از ویژگی‌های تابع‌های ترفتز، افزون بر برقرار کردن معادلهٔ لاپلاس، کامل بودن آنها است. به سخن دیگر، تابع‌های ترفتز به‌گونه‌ای هستند که تمامی پاسخ‌های ممکن را به‌صورت دسته‌ای از پاسخ‌ها دارند. ازاین‌رو، در تابع ترفتز جمله‌های $1, r\cos\theta, r\sin\theta, ..., r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta$ در دستگاه مختصه‌های قطبی به‌کار گرفته شده‌اند. معادلهٔ لاپلاس نخست در دستگاه مختصه‌های قطبی حل می‌شود و پس از آن، پاسخ‌ها به مختصه‌های دکارتی منتقل خواهند شد.

رابطه‌سازی جزء صفحهٔ خمشی

با داشتن تابع‌های ترفتز، می‌توان رابطه‌های جزء محدود را نوشت. پس از انتخاب تابع میدان، رابطه‌های بردار کرنش و جابه‌جایی جزء به‌دست می‌آیند [27,1]:

$$\varepsilon = z(\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\}) \ , \ u = \tilde{u} + N_q\{c\} \quad (۵)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \left[-\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (۶)$$

$$B_q = \left[-\frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w_c}{\partial x \partial y} \right]^T$$

$$\tilde{u} = \left[w_p, -\frac{\partial w_p}{\partial x}, \frac{\partial w_p}{\partial y} \right]^T \quad (۷)$$

$$N_q = \left[w_c, -\frac{\partial w_c}{\partial x}, \frac{\partial w_c}{\partial y} \right]^T$$

با جایگذاری مختصه‌های گره‌ها در ماتریس N_q، تغییرمکان‌های گرهی به‌صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$D = \tilde{D} + \hat{G}_q\{c\}, \hat{D} = \hat{G}_q\{c\} \quad (۸)$$
$$\{c\} = \hat{G}_q^{-1}\hat{D}$$

از سوی دیگر، با قرار دادن $\{c\}$در بردارهای کرنش و جابه‌جایی‌های گرهی، معادله‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$u = \tilde{u} + N_q\{c\} = \tilde{u} + N_q\hat{G}_q^{-1}\hat{D} \quad (۹)$$
$$\hat{N} = N_q\hat{G}_q^{-1}$$

$$\varepsilon = z(\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\}) = z(\tilde{\varepsilon} + B_q\hat{G}_q^{-1}\hat{D}) \quad (۱۰)$$
$$\hat{B} = B_q\hat{G}_q^{-1}$$

بر این پایه، تابعی کارمایهٔ نهفته (تابعی انرژی پتانسیل) برحسب ماتریس کشسانی D_m برروی میان صفحهٔ Ω به‌صورت زیر برپا می‌گردد:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\})^T . D_m . (\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\}) . d\Omega - \int_\Omega u^T . F . d\Omega \quad (۱۱)$$

$$D_m = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

برای یافتن پاسخ، کارمایهٔ نهفته باید کمینه گردد. با قرار دادن رابطه‌های (۹ و ۱۰) در تابعی کارمایهٔ نهفته و تابع‌نخستین‌گیری نسبت به تغییرمکان‌های گرهی، رابطهٔ زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \hat{D}} = 0 \qquad (۱۲)$$

$$\left(\int_\Omega \hat{B}^T.D_m.\hat{B}\ d\Omega\right)\hat{D} = \int_\Omega \hat{N}^T.F\ d\Omega - \int_\Omega \hat{B}^T.D_m.\tilde{\varepsilon}\ d\Omega \qquad (۱۳)$$

سرانجام، ماتریس سختی K و بردار بارهای گرهی P به‌دست می‌آیند:

$$K = \int_\Omega \hat{B}^T.\ D_m.\ \hat{B}\ d\Omega \qquad (۱٤)$$

$$P = \int_\Omega (\hat{N}^T.\ F - \hat{B}^T.\ D_m.\ \tilde{\varepsilon})d\Omega \qquad (۱۵)$$

آرایش درجه‌های آزادی جزءهای ناقص

در نخستین گام این پژوهش، گزینش آرایش درجه‌های آزادی و گره‌ها برای آفرینش جزئی نو انجام می‌پذیرد. پژوهشگران آشکار ساخته‌اند که فقط انتخاب یک تابع با درجهٔ بالا و شماری نقطهٔ گرهی و درجهٔ آزادی کافی نیستند و باید این کارها با هوشیاری ویژه‌ای انجام پذیرند. افزون بر آن، درجه‌های آزادی را باید مناسب با جایگاه هر گره برگزید. ازاین‌رو، زمانی که پاره‌ای عبارت‌ها از دسته‌های تابع ترفتز به دلایلی انتخاب نشوند، آن جزء ناقص نامیده می‌شود. نتیجه‌های پژوهش اختری به‌شرح زیر می‌باشند [۲٦]:

۱- انتخاب شمار زیاد نقطهٔ گرهی، برای رسیدن به پاسخ مناسب کافی نیست.

۲- انتخاب درست درجه‌های آزادی برای گره‌ها نسبت به گزینش جایگاه گره‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار است. باید دانست، شمار کمتر نقطهٔ گرهی با درجه‌های آزادی مناسب از تعداد بیشتر نقطهٔ گرهی دارای درجهٔ آزادی نامناسب، پاسخ‌های بهتری به‌دست می‌دهد.

۳- زیاد بودن شمار گره‌ها بر پهلوی جزء همیشه مناسب نخواهد بود و به‌سبب محدود کردن گزینش درجه‌های آزادی جزء، دقت خوبی نخواهد داشت.

٤- برای داشتن درجهٔ آزادی دورانی در گره‌های گوشه باید از $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ بهره جست و از کاربرد $\frac{\partial w}{\partial t}$ و $\frac{\partial w}{\partial n}$ پرهیز کرد. زیرا، این درجه‌ها به امتداد پهلوی هر جزء وابسته می‌باشند و در گره‌های گوشه تعریف یکتایی ندارند. در گره‌های گوشه درجه‌های آزادی w، $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ به‌طور معمول کاربرد دارند و همیشه مناسبند.

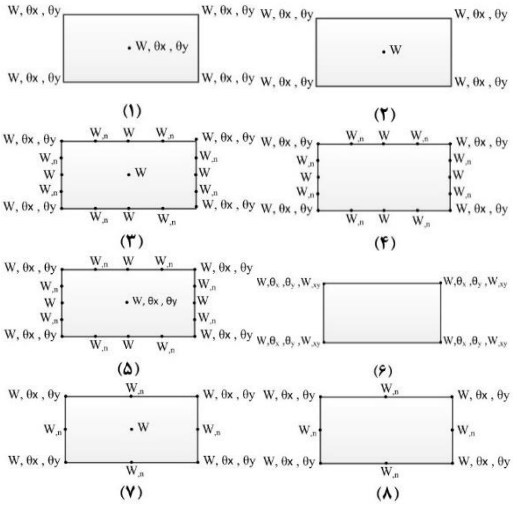
۵- برای گره‌های میان‌پهلویی، انتخاب درجه‌های آزادی $\frac{\partial w}{\partial t}$ و $\frac{\partial w}{\partial n}$ مفیدتر از گزینش درجه‌های آزادی $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ می‌باشد و پاسخ‌های بهتری به‌دست می‌آید.

٦- برای گره‌های میان‌پهلویی، درجهٔ آزادی $\frac{\partial w}{\partial n}$ مفیدتر از سایر درجه‌های آزادی می‌باشد. بااین‌حال، وجود شمار زیاد این درجهٔ آزادی در جزء سبب افت دقت می‌شود و برای دسترسی به پاسخ مناسب باید تعداد آن محدود باشد.

۷- برای گره‌های میان‌پهلویی درجهٔ آزادی w به‌تنهایی مفید نیست ولی ترکیب دو درجهٔ آزادی w و $\frac{\partial w}{\partial n}$ در این گره‌ها دارای نتیجه‌های بهتری می‌باشد.

۸- برای دسترسی به ترکیب مناسب درجه‌های آزادی w و $\frac{\partial w}{\partial n}$، باید در هر پهلو، افزون بر گره گوشه، سه گره میان‌پهلو نیز گزینش شود. در گره میانی، از درجهٔ آزادی w، و در دو گره دیگر باید از $\frac{\partial w}{\partial n}$ بهره جست. تاکنون، این نوع انتخاب درجهٔ آزادی بهترین نتیجه را داشته است.

برای آفرینش جزءهای نو، آرایش درجه‌های آزادی باتوجه به نتیجه‌های پژوهش اخیری انجام می‌پذیرد [۲۶]. خاطرنشان می‌شود، حفظ تقارن در چینش درجه‌های آزادی نسبت به نکته‌های این بخش، در اولویت قرار دارند. شکل (۱) هشت آرایش برگزیده را نمایش می‌دهد. از میان آنها، آرایش‌های ۷ و ۸ نتیجه‌های مناسب دارند که پاسخ‌های آنها در بخش آزمون‌های عددی می‌آیند. سایر آرایش‌ها به‌دلیل نتیجهٔ نامطلوب حذف می‌شوند. پاسخ‌های نیرویی با خطای زیاد یا هم‌گرا به عدد نادرست و تغییرمکان‌های با خطای نامطلوب از دلیل‌های نامناسب دانستن جزءهای حذفی می‌باشند. باید افزود، در تمام آرایش‌های حذفی، شمار درجه‌های آزادی و گره‌ها خیلی کم یا خیلی زیاد بودند. برپایهٔ تجربه‌های عددی، همیشه شمار زیاد گره و درجهٔ آزادی تضمین‌کنندهٔ دقت بالا در جزء نخواهد بود. باید افزود، آرایش‌های ۷ و ۸ نسبت به آرایش‌های دیگر از دیدگاه شمار گره و درجهٔ آزادی در یک وضعیت میانه قرار دارند. برخلاف تصور همگان، واکاوی‌های این مقاله نشان خواهد داد که تنها شمار درجه‌های آزادی ملاک نمی‌باشد، بلکه جایگاه گره‌ها و درجه‌های آزادی و گونهٔ آنها از اهمیت بیشتری برخوردارند.



شکل ۱ آرایش‌های درجهٔ آزادی جزءهای ناقص

با مقدار دادن به k در رابطهٔ (۳)، سی و یک جملهٔ نخست پاسخ همگن برپایهٔ پیوست یکم در جدول (۱۸) می‌آیند. باید افزود، در روش ترفتز، شمار جمله‌های انتخابی تابع ترفتز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [۱, 14]:

$$m_T \geq N_{DOF} - m_{RIG} \qquad (۱۶)$$

در اینجا، N_{DOF} شمار درجهٔ آزادی، m_{RIG} تعداد حرکت‌های جسم سخت و m_T شمار جمله‌های انتخابی ترفتز می‌باشد. در شیوهٔ ترفتز، شرط‌های پیوستگی توسط تابع‌های مرزی تأمین خواهد شد و وجود حرکت‌های جسم سخت در تابع میدان درونی باعث پیدایش حالت‌های صفر و نادرست کارمایهٔ کرنشی و کمبود رتبهٔ ماتریس سختی می‌شود. به‌همین دلیل، در روش ترفتز جمله‌های حرکت جسم سخت از تابع میدان درونی جسم حذف می‌گردند. در این پژوهش، به‌دلیل نبود تابع مرزی و برای برقرار ساختن شرط‌های پیوستگی، جمله‌های حرکت جسم سخت (1,x,y) در تابع میدان به‌کار می‌روند. شمار جمله‌هایی که از جدول باید گزینش شوند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$m_T = N_{DOF} - m_{RIG} \quad (۱۷)$$

در گزینش جمله‌های تابع ترفتز برای جزءهای ناقص، عبارت‌های پیاپی و کامل هر دستهٔ ترفتز برای تابع خیز به‌کار نمی‌روند. باوجود این، کوشش بر حفظ تقارن مرتبهٔ تابع میدان نسبت به x و y خواهد بود. سرانجام، برای هر کدام از هشت شکل آرایش درجهٔ آزادی، شماری جزء با تابع‌های میدان متفاوت پیشنهاد می‌شوند. درمجموع، برای این آرایش‌های هشت‌گانه ٦٧٤ عدد تابع میدان متفاوت گزینش خواهد شد. از میان اینها، ٢٢٧ جزء ماتریس هندسی ویژه دارند و حذف می‌شوند. از ٤٤٧ جزء باقی‌مانده، در گام نخست، ٦٧ جزء با دقت بهتر انتخاب می‌گردند. پس از انجام آزمون‌های عددی فراوان، ده جزء دارای پاسخ‌های برتر با آرایش تابع میدان جدول (١) معرفی خواهند شد. از این ده جزء، چهار عدد ١٧ درجهٔ آزادی دارند و مانند شکل (١-٧) و با نام‌های ICTF-17-1 تا ICTF-17-4 می‌باشند. شش جزء دیگر، آرایش ١٦ درجهٔ آزادی را همانند شکل (١-٨) دارند و با ICTF-16-1 تا ICTF-16-6 نام‌گذاری شده‌اند. به کوتاه سخن، ده جزء که پاسخ‌های برتر دارند در این پژوهش معرفی می‌گردند.

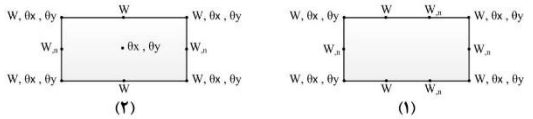
جدول ١ آرایش جمله‌های تابع میدان جزءهای ناقص

نام جزء	آرایش جمله‌های تابع میدان
ICTF-16-1	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ١١ ١٣ ١٤ ١٩ ٢١ ٢٢ ٢٥ ٢٦]
ICTF-16-2	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ١١ ١٣ ١٤ ١٩ ٢١ ٢٢ ٢٥ ٢٧]
ICTF-16-3	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ١٠ ١٣ ١٤ ١٨ ٢١ ٢٢ ٢٥ ٢٦]
ICTF-16-4	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ٩ ١٠ ١٤ ١٥ ١٨ ١٩ ٢١ ٢٢]
ICTF-16-5	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ١٠ ١٣ ١٤ ١٨ ٢١ ٢٢ ٢٥ ٢٧]
ICTF-16-6	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ١٠ ١٤ ١٥ ١٨ ٢١ ٢٢ ٢٥ ٢٧]
ICTF-17-1	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ٩ ١٠ ١٤ ١٥ ١٧ ١٩ ٢١ ٢٢ ٢٧]
ICTF-17-2	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ٩ ١١ ١٤ ١٥ ١٧ ١٩ ٢١ ٢٢ ٢٧]
ICTF-17-3	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ٩ ١٠ ١٤ ١٥ ١٦ ١٨ ٢١ ٢٢ ٢٧]
ICTF-17-4	[١ ٢ ٣ ٦ ٧ ١٠ ١٤ ١٥ ١٧ ٢١ ٢٢ ٢٧ ٢٩ ٣٠]

برای ارزیابی توانایی جزءهای پیشنهادی در یافتن مقدار دقیق تنش و کرنش ثابت، آزمون وصله انجام می‌پذیرد. در این آزمون، جزءهای نویسندگان پاسخ‌های دقیق را به‌دست می‌دهند. به سخن دیگر، جزءهای پیشنهادی به‌سادگی آزمون‌های وصله را می‌گذرانند.

جزءهای کامل

در این بخش، به آفرینش یک جزء نو با تابع میدان کامل پرداخته می‌شود. هدف از این کار، بررسی اثر کامل بودن تابع میدان ایجادشده درمقایسه با جزءهای ناقص است. جمله‌های تابع میدان از دسته‌های پیاپی تابع ترفتز انتخاب خواهند شد و تمامی عبارت‌های هر دسته را باتوجه به شمار درجه‌های آزادی دربر می‌گیرد. پس از آن، برمبنای تابع میدان تشکیل‌شده و شمار جمله‌ها، آرایش درجه‌های آزادی جزء به‌دست می‌آید. تابع میدان جزء کامل پیشنهادی از مرتبهٔ ٥ می‌باشد که ١٥ عبارت نخست از تابع‌های ترفتز (چهار دستهٔ نخست پیوست یکم) را دربر می‌گیرد و با سه حرکت جسم سخت، شمار درجه‌های آزادی ١٨ می‌شود. شکل (٢-١) و (٢-٢)، دو آرایش درجه‌های آزادی برگزیده‌شده برای جزءهای، به‌ترتیب، CTF-18-1 و CTF-18-2 را نشان می‌دهد. باید دانست، نام‌گذاری جزءهای ICTF و CTF برگرفته از عبارت‌های "Incomplete Trefftz Function" و "Complete Trefftz Function" می‌باشند.



شکل ٢ آرایش‌های درجهٔ آزادی جزءهای کامل

خاطرنشان می‌شود، در جزءهای کامل، انتخاب آرایش درجهٔ آزادی وابسته به شمار جمله‌های تابع میدان است. درحالی‌که، تابع میدان جزءهای ناقص پس از انتخاب آرایش‌های درجهٔ آزادی برپایهٔ معیارهای

درجه‌های آزادی برتر، به‌دست می‌آید. ازاین‌رو، پس از آزمودن آرایش‌های ممکن، گونه‌هایی که ماتریس هندسی ویژه و کمبود رتبه دارند حذف می‌شوند. از میان آنها، دو آرایش شکل (۲) درنهایت انتخاب شده‌اند.

آزمون‌های عددی

در این بخش، حل چند نمونهٔ عددی برای راستی‌آزمایی جزءهای پیشنهادی می‌آید. با بارگذاری‌های متقارن و نامتقارن، مانند بار گستردهٔ یکنواخت، بار متمرکز، بار سینوسی و بار مثلثی، آزمون‌های گوناگونی انجام می‌پذیرد. گونه‌های متفاوت شرط‌های تکیه‌گاهی مانند تکیه‌گاه‌های گیرداری، ساده، لبهٔ آزاد و ستون در گوشه‌ها به‌صورت متقارن و نامتقارن به‌کار می‌روند. باید دانست، پاسخ‌های خصوصی جدول (۲) فقط به بارگذاری جزء بستگی دارد و شرط‌های تکیه‌گاهی برروی آنها بی‌اثر می‌باشد. در آزمون‌هایی که نسبت پواسون ذکر نشده است برابر با ۰/۳می باشد. خاطرنشان می‌شود، پاسخ‌های دقیق مسئله‌ها در دست هستند [27]. باید افزود، در حالت تکیه‌گاه‌های تمام‌گیردار و تمام‌ساده، پاسخ‌ها برای بار گسترده با نتیجهٔ جزءهای DKQ[28,13] (جزء چهارپهلوی صفحهٔ کیرشهف ناپیوسته)، ARS-T9[29] (جزء سه‌پهلو با ۹ درجهٔ آزادی برپایهٔ نگرهٔ رایزنر- میندلین) و ARS-Q12[2] (جزء چهارپهلو با ۱۲ درجهٔ آزادی برپایهٔ نگرهٔ میندلین- رایزنر) و همچنین، برای بارگذاری متمرکز گرهی با جزءهای DKQ[13,28]، ACM[30] (جزء چهارپهلوی ناسازگار صفحهٔ کیرشهف با ۱۲ درجهٔ آزادی) و RGC-12[30] (جزء چهارپهلوی سازگار صفحهٔ خمشی نازک با ۱۲ درجهٔ آزادی) مقایسه خواهند شد. باید افزود، در تمامی آزمون‌ها خیز و لنگر بی‌بعد و مستقل از اندازهٔ شدت بار و بعدهای صفحه هستند.

صفحهٔ مربعی با بار گستردهٔ یکنواخت

در نخستین آزمون، صفحه‌ای مربعی با پهلوی a زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت q، با شرط‌های تکیه‌گاهی متفاوت تحلیل می‌گردد. نتیجهٔ جابه‌جایی و لنگر مرکز صفحهٔ مربعی (a=b) برای جزءهای پیشنهادی در حالت‌های گوناگون در جدول‌های (۳ و ٤) آمده‌اند. همچنین، شکل‌های (۵-۳)، نمودارهای هم‌گرایی خیز و لنگرها برای حالت یک‌لبه‌گیردار و سه‌لبه‌ساده را نشان می‌دهند.

جدول ۲ پاسخ‌های خصوصی صفحهٔ مستطیلی با بارگذاری‌های متفاوت

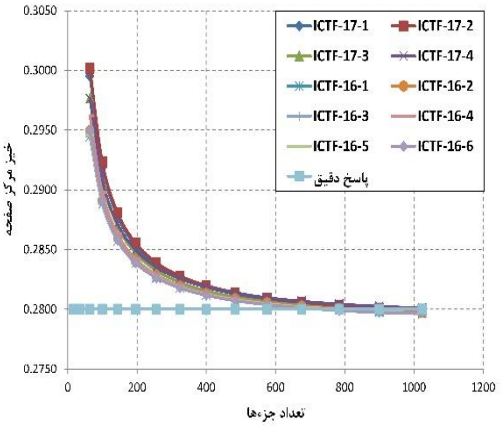
پاسخ خصوصی معادلهٔ ایستایی	بارگذاری
$W_p = \frac{q}{64D}(x^2+y^2)^2$	بار گستردهٔ یکنواخت با شدت q
$W_p = \frac{q}{64D} r_p^{\,2} \mathrm{Ln}(r_p^{\,2}) \quad r_p^{\,2} = (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2$	بار متمرکز P با محل اثر (x_p, y_p) در صفحه
$W_p = (q_0 \Big/ \pi^4 D(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}))\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi y}{b})$	بار سینوسی روی صفحهٔ مستطیلی به بعدهای a و b
$W_p = \frac{q_0}{192aD} x(x^2+y^2)^2$	بار مثلثی روی صفحهٔ مربعی با طول پهلوی a

جدول ۳ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت $(w_c/(qa^4/100D))$

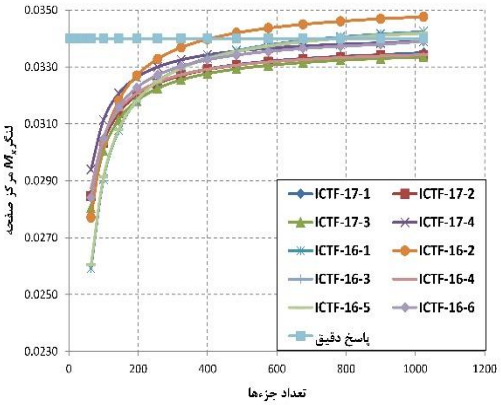
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۴۴۵۸	۰/٤١٦١	۰/٤٠٨٥
ICTF-17-2	۰/٤٤٦١	۰/٤١٦٢	۰/٤٠٨٦
ICTF-17-3	۰/٤٤٦٧	۰/٤١٦٧	۰/٤٠٩٠
ICTF-17-4	۰/٤٤٤٤	۰/٤١٥٨	۰/٤٠٨٦
ICTF-16-1	۰/٤٤٣٧	۰/٤١٥٧	۰/٤٠٨٧
ICTF-16-2	۰/٤٤٤٠	۰/٤١٥٩	۰/٤٠٨٨
ICTF-16-3	۰/٤٤٣٧	۰/٤١٥٧	۰/٤٠٨٧
ICTF-16-4	۰/٤٤٣٧	۰/٤١٥٦	۰/٤٠٨٦
ICTF-16-5	۰/٤٤٣٨	۰/٤١٥٧	۰/٤٠٨٧
ICTF-16-6	۰/٤٤٢٩	۰/٤١٥٤	۰/٤٠٨٤
DKQ	۰/٤٠٦٠	۰/٤٠٦٢	۰/٤٠٦٢
ARS-T9	۰/۳۹۷۳	۰/٤٠٤١	۰/٤٠٥٧
ARS-Q12	۰/٤٠٦٠	۰/٤٠٦٢	۰/٤٠٦٢
پاسخ دقیق	۰/٤٠٦٢		

جدول ٤ لنگر در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت $(M_c/(qa^2/10))$

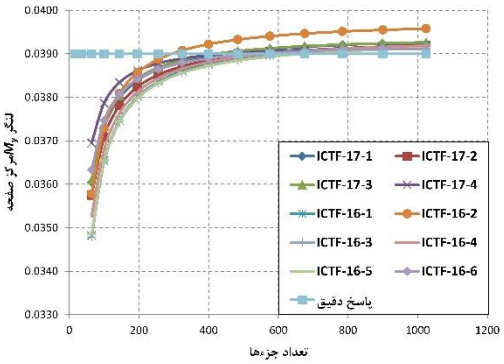
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۴۵۵	۰/۰٤٧٥	۰/۰٤٧٩
ICTF-17-2	۰/۰٤٥٥	۰/۰٤٥٧	۰/۰٤٧٩
ICTF-17-3	۰/۰٤٦٣	۰/۰٤٧٤	۰/۰٤٧٧
ICTF-17-4	۰/۰٤٥١	۰/۰٤٧٣	۰/۰٤٧٩
ICTF-16-1	۰/۰٤٤٧	۰/۰٤٧٣	۰/۰٤٧٩
ICTF-16-2	۰/۰٤٥٥	۰/۰٤٧٨	۰/۰٤٨٤
ICTF-16-3	۰/۰٤٤٥	۰/۰٤٧٢	۰/۰٤٧٩
ICTF-16-4	۰/۰٤٤٦	۰/۰٤٧٢	۰/۰٤٧٩
ICTF-16-5	۰/۰٤٤٦	۰/۰٤٧٢	۰/۰٤٧٩
ICTF-16-6	۰/۰٤٥٧	۰/۰٤٧٤	۰/۰٤٧٨
DKQ	۰/۰٤٨٤	۰/۰٤٨٠	۰/۰٤٧٩
ARS-T9	۰/۰٤٨٢	۰/۰٤٨٠	۰/۰٤٧٩
ARS-Q12	۰/۰٤٨٤	۰/۰٤٨٠	۰/۰٤٧٩
پاسخ دقیق	۰/۰٤٧٩		



شکل ۳ هم‌گرایی خیز مرکز صفحهٔ مربعی با یک تکیه‌گاه گیردار و سه تکیه‌گاه ساده و بار گسترده یکنواخت $(w_c/(qa^4/100D))$



شکل ٤ هم‌گرایی لنگر M_x در مرکز صفحهٔ مربعی با یک تکیه‌گاه گیردار و سه تکیه‌گاه ساده و بار گسترده یکنواخت $(M_c/(qa^2/10))$



شکل ۵ هم‌گرایی لنگر M_y مرکز صفحهٔ مربعی با یک تکیه‌گاه گیردار و سه تکیه‌گاه ساده و بار گستردهٔ یکنواخت $(M_c/(qa^2/10))$

نتیجهٔ جدول‌های (۳ و ٤)، برتری جزءهای پیشنهادی را نشان می‌دهند. آشکار است، جزءهای ICTF با شبکهٔ ١٦*١٦ هم پاسخ‌های بسیار قابل‌قبولی ارائه می‌دهند که این ویژگی را جزءهای DKQ[28,13]، ARS-T9[29] و ARS-T12[2] ندارند. از سوی دیگر، با مقایسهٔ دوبه‌دوی آرایش جزءهای ICTF-16-1 و ICTF-16-2 و همچنین ICTF-16-3 و ICTF-16-5، ICTF-16-1 و ICTF-16-3، ICTF-16-2 و ICTF-16-5 که دوبه‌دوی آنها فقط در یک عبارت از دستهٔ زوج تفاوت دارند، می‌توان دریافت که عبارت‌های دربرگیرندهٔ جمله‌های x^n و y^n پاسخ‌های سخت‌تری دارند. همچنین، این اثرها با بالا رفتن مرتبه افزایش می‌یابند.

جدول ٥ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار زیر اثر بار متمرکز میانی ($w_c/(pa^2/100D)$)

شبکه	٨*٨	١٦*١٦	٣٢*٣٢
ICTF-17-1	۰/۵۵۴۴	۰/۵۵۹۰	۰/۵۶۰۵
ICTF-17-2	۰/۵۵٤۷	۰/۵۵۹۳	۰/۵۶۰۶
ICTF-17-3	۰/۵٤۵۷	۰/۵۵٦٤	۰/۵۶۰۰
ICTF-17-4	۰/۵۵۳۹	۰/۵۵۹٦	۰/۵۶۱۵
ICTF-16-1	۰/۵۳۷۹	۰/۵۵٤٤	۰/۵۵۹۲
ICTF-16-2	۰/۵٤۱۰	۰/۵۵۵۵	۰/۵۵۹۷
ICTF-16-3	۰/۵۳٦۵	۰/۵۵٤۱	۰/۵۵۹۲
ICTF-16-4	۰/۵۳۸٤	۰/۵۵٤۳	۰/۵۵۹۹
ICTF-16-5	۰/۵۳۹۳	۰/۵۵٤۸	۰/۵۵۹۵
ICTF-16-6	۰/۵۳۳۵	۰/۵۵۲۷	۰/۵۵۹۰
DKQ	۰/۵۸۹۵	–	–
ACM	۰/۵۸۰۳	۰/۵۶۷۲	–
RGC-12	۰/۵۵۵۰	۰/۵۵۹٦	–
پاسخ دقیق	۰/۵٦۰۵		

جدول ٦ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده زیر اثر بار متمرکز میانی ($w_c/(pa^2/10D)$)

شبکه	٨*٨	١٦*١٦	٣٢*٣٢
ICTF-17-1	۰/۱۱۵۴	۰/۱۱۵۸	۰/۱۱٦۰
ICTF-17-2	۰/۱۱۵۵	۰/۱۱۵۸	۰/۱۱٦۰
ICTF-17-3	۰/۱۱٤٦	۰/۱۱۵٦	۰/۱۱۵۹
ICTF-17-4	۰/۱۱۵۷	۰/۱۱٦۰	۰/۱۱٦۱
ICTF-16-1	۰/۱۱٤۰	۰/۱۱۵٤	۰/۱۱۵۹
ICTF-16-2	۰/۱۱٤۲	۰/۱۱۵۵	۰/۱۱۵۹
ICTF-16-3	۰/۱۱۳۸	۰/۱۱۵٤	۰/۱۱۵۹
ICTF-16-4	۰/۱۱۳۹	۰/۱۱۵٤	۰/۱۱۵۹
ICTF-16-5	۰/۱۱٤۱	۰/۱۱۵٤	۰/۱۱۵۹
ICTF-16-6	۰/۱۱۳۵	۰/۱۱۵۲	۰/۱۱۵۹
DKQ	۰/۱۱۹٤	–	–
ACM	۰/۱۱۸۳	۰/۱۱٦۷	–
RGC-12	۰/۱۱۵۵	۰/۱۱۵۹	–
پاسخ دقیق	۰/۱۱٦۰		

صفحهٔ مربعی با بار متمرکز میانی

در این بخش، سازهٔ آزمون پیشین برای بار متمرکز P در مرکز صفحه واکاوی می‌شود. تمام تکیه‌گاه‌های صفحه گیردار و یا ساده می‌باشند. جدول‌های (۵ و ٦) پاسخ‌های خیز در مرکز صفحه را در دسترس قرار می‌دهند. باید دانست، لنگر در مرکز سازه و در نقطهٔ محل اثر بار متمرکز به بی‌نهایت میل می‌کند و قابل محاسبه نیست.

همانند مثال پیشین با بار گسترده، در حالت بارگذاری متمرکز نیز، جزءهای پیشنهادی از جزءهای DKQ[13,28]، ACM[30] و RGC-12[30] تواناتر بودند. همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، جزءهای ICTF-16-3 و ICTF-16-5 در انتخاب عبارت‌های دستهٔ ٦ متفاوت هستند. همچنین، آرایش جزءهای ICTF-17-1 و ICTF-17-2، تفاوتی مشابه در عبارت‌های انتخابی دستهٔ ۲ دارند. با بررسی دو جزء ICTF-17-1 و ICTF-17-2 ، آشکار می‌شود که به‌دلیل

اختلاف در دستهٔ مرتبهٔ پایین، پاسخ‌ها تفاوت چندانی ندارند. از سوی دیگر، این اثر در مقایسهٔ جزءهای ICTF-16-3 و ICTF-16-5، که تفاوت در عبارت‌های دستهٔ مرتبهٔ بالا دارند، بیشتر دیده می‌شود.

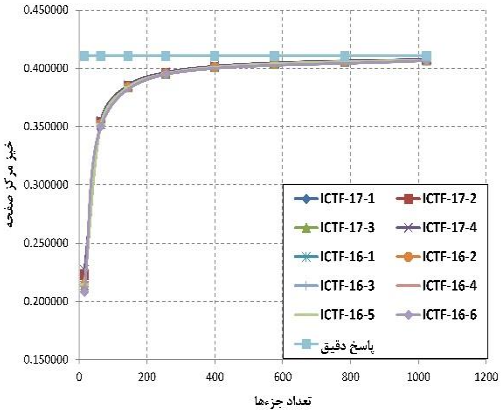
جدول ۷ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار زیر اثر بار سینوسی دوطرفه ($w_c/(q_0a^4/100D)$)

شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۹۰۵	۰/۰۹۱۱	۰/۰۹۱٤
ICTF-17-2	۰/۰۹۰٦	۰/۰۹۱۲	۰/۰۹۱٤
ICTF-17-3	۰/۰۸۹٤	۰/۰۹۰۸	۰/۰۹۱۲
ICTF-17-4	۰/۰۹۰۲	۰/۰۹۱۲	۰/۰۹۱٤
ICTF-16-1	۰/۰۸۸٦	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-2	۰/۰۸۸۹	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-3	۰/۰۸۸٦	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-4	۰/۰۸۸۷	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-5	۰/۰۸۸۸	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-6	۰/۰۸۷۹	۰/۰۹۰۵	۰/۰۹۱۱
پاسخ دقیق	۰/۰۹۱۳		

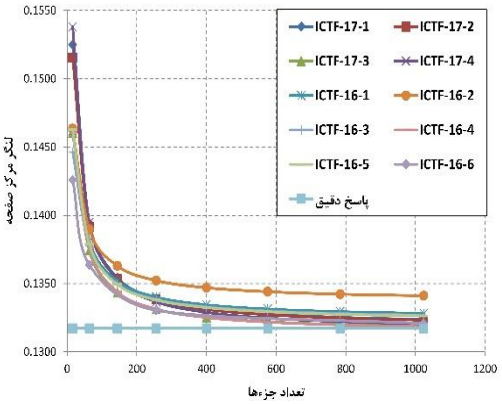
صفحهٔ مربعی با بار سینوسی دوطرفه

در این آزمون، یک صفحهٔ مربعی با پهلوی a زیر اثر بار سینوسی دوطرفه، $q = q_0 \sin(\pi x / a)\sin(\pi y / b)$، با دو حالت تکیه‌گاهی ساده و گیردار تحلیل می‌گردد. نتیجهٔ جابه‌جایی مرکز صفحهٔ مربعی (a=b) برای جزءهای پیشنهادی در جدول (۷) درج شده‌اند. از سوی دیگر، نمودارهای هم‌گرایی خیز و لنگر برای صفحهٔ تکیه‌گاه‌های ساده، در شکل‌های (٦ و ۷) نمایان می‌باشد. نسبت پواسون نیز، برابر با ۰/۲ است.

پس از حل چندین مسئله و بررسی آرایش جزءها، بهتر است که جمله‌های تابع خیز از دسته‌های با شمارهٔ فرد هم‌وزن باشند. چون در دسته‌های فرد هر عبارت به‌تنهایی متقارن نیست، انتخاب دو عبارت بهتر خواهد بود، به‌گونه‌ای که تمامی جمله‌ها از آن مرتبه را دربرگیرد.



شکل ٦ هم‌گرایی خیز در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار سینوسی دوطرفه

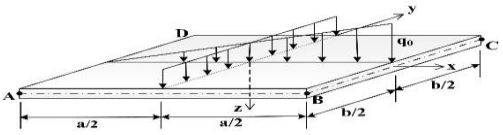


شکل ۷ هم‌گرایی لنگر در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار سینوسی دوطرفه

صفحهٔ مربعی زیر اثر فشار مثلثی

این بار، صفحهٔ مربعی با پهلوی a زیر اثر فشار مثلثی $q = q_0 x / a$، با تکیه‌گاه‌های متقارن تمام‌ساده و همچنین نامتقارن یک‌لبه‌گیردار و سه‌لبه‌ساده تحلیل می‌گردد. باید دانست، در حالت یک‌لبه‌گیردار و سه لبه‌ساده، پهلوی BC در شکل (۸) گیردار خواهد بود. پاسخ‌های خیز و لنگر گره میانی صفحه در جدول‌های (۱۰-۸) نمایش داده شده‌اند. همچنین، نمودار هم‌گرایی خیز و لنگر در حالت تکیه‌گاه ساده در

شکل‌های (۹ و ۱۰) آمده است. باید افزود، در حالتی که چهارپهلوی صفحه تکیه‌گاه ساده دارند، نسبت پواسون برابر ۰/۲ درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۸ صفحهٔ مربعی با بارگذاری مثلثی

جدول ۸ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با یک لبهٔ گیردار و سه لبهٔ ساده زیر اثر بار مثلثی $(w_c/(q_0a^4/100D))$

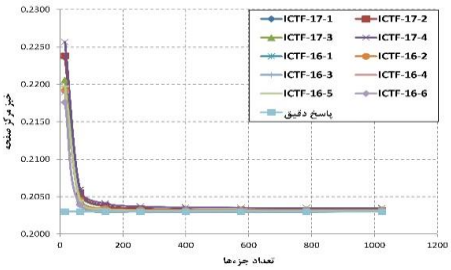
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۱۲۸۹	۰/۱۲۸٤	۰/۱۲۸٤
ICTF-17-2	۰/۱۲۹۰	۰/۱۲۸٤	۰/۱۲۸٥
ICTF-17-3	۰/۱۲٦۷	۰/۱۲۸۰	۰/۱۲۸۳
ICTF-17-4	۰/۱۲۹۹	۰/۱۲۸۷	۰/۱۲۸۷
ICTF-16-1	۰/۱۲۸٤	۰/۱۲۸۳	۰/۱۲۸٤
ICTF-16-2	۰/۱۲۸٦	۰/۱۲۸٤	۰/۱۲۸٤
ICTF-16-3	۰/۱۲۸٤	۰/۱۲۸۳	۰/۱۲۸٤
ICTF-16-4	۰/۱۲۷٦	۰/۱۲۸۰	۰/۱۲۸۳
ICTF-16-5	۰/۱۲۸٥	۰/۱۲۸۳	۰/۱۲۸٤
ICTF-16-6	۰/۱۲۷۱	۰/۱۲۷۹	۰/۱۲۸۳
پاسخ دقیق	۰/۱۳		

جدول ۹ لنگر M_x در مرکز صفحهٔ مربعی با یک لبهٔ گیردار و سه لبهٔ ساده زیر اثر بار مثلثی $(M_c/(q_0a^2))$

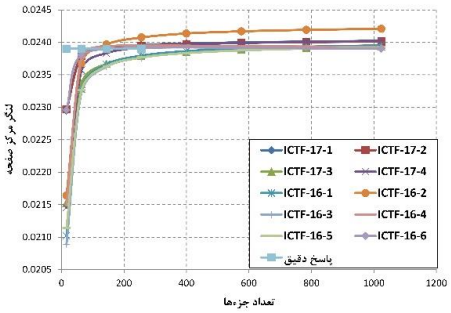
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۸۹
ICTF-17-2	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۸۹
ICTF-17-3	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸
ICTF-17-4	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۹۰
ICTF-16-1	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳
ICTF-16-2	۰/۰۱۹۱	۰/۰۱۹٥	۰/۰۱۹٦
ICTF-16-3	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳
ICTF-16-4	۰/۰۱۸٤	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۸
ICTF-16-5	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳
ICTF-16-6	۰/۰۱۸٥	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۹۰
پاسخ دقیق	۰/۰۱۹۰		

جدول ۱۰ لنگر M_y در مرکز صفحهٔ مربعی با یک لبهٔ گیردار و سه لبهٔ ساده زیر اثر بار مثلثی $(M_c/(q_0a^2))$

شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۹
ICTF-17-2	۰/۰۱۵٦	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۹
ICTF-17-3	۰/۰۱۵٦	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۸
ICTF-17-4	۰/۰۱٦۰	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-1	۰/۰۱۵٤	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-2	۰/۰۱۵٦	۰/۰۱٦۰	۰/۰۱٦۰
ICTF-16-3	۰/۰۱۵۳	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-4	۰/۰۱۵۱	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-5	۰/۰۱۵٤	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-6	۰/۰۱۵٥	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
پاسخ دقیق	۰/۰۱٦		



شکل ۹ هم‌گرایی خیز در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار مثلثی



شکل ۱۰ هم‌گرایی لنگر در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار مثلثی

پس از انجام واکاوی‌های گسترده، نتیجه‌های زیر در دسترس قرار گرفتند:

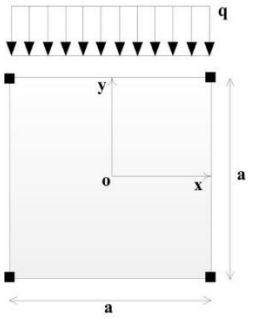
۱- در آرایش ۷ از شکل (۱)، به‌سبب وجود گره میانی و افزایش شمار درجهٔ آزادی نسبت به آرایش شکل (۸-۱)، با ریز شدن شبکه‌بندی، پاسخ‌ها به مقدار دقیق نزدیک‌تر می‌شوند.

۲- از بررسی رفتار جزء ICTF-17-4 نسبت‌به سایر جزءها می‌توان نتیجه گرفت، بهره‌جویی از دسته‌های بالاتر پاسخ معادلهٔ ایستایی و افزایش مرتبهٔ جمله‌ها در تابع میدان، به بهبود نرخ هم‌گرایی کمک می‌کند. باید افزود، دسته‌های با شمارهٔ k در جدول (۱۸) پیوست مشخص شده‌اند و منظور از دسته‌های بالاتر، دستهٔ با شمارهٔ k بزرگ‌تر است.

۳- در دسته‌های با شمارهٔ k زوج در جدول (۱۸)، هر یک از چهار عبارت دسته، جمله‌هایی با مرتبهٔ متقارن دارند. ازاین‌رو، انتخاب تنها یک عبارت از آن دسته می‌تواند کافی باشد و انتخاب شمار بیشتر آنها اختیاری است.

٤- در دسته‌های زوج عبارتی که دارای جمله‌های x^n و y^n می‌باشد، پاسخ‌های سخت‌تری نسبت به آنهایی که این جمله‌ها را دربر نمی‌گیرند، نتیجه می‌دهد. باید دانست، زمانی که نمودار هم‌گرایی از بالا به پاسخ دقیق نزدیک شده است، این جزء سریع‌تر هم‌گرا می‌شود. از سوی دیگر، برای حالتی که هم‌گرایی از پایین باشد، نرخ هم‌گرایی کاهش می‌یابد. خاطرنشان می‌شود، در دسته‌های بالاتر، اثر این عامل بیشتر است.

۵- درصورت انتخاب دو عبارت از دسته‌های زوج، آن دو تایی برداشته می‌شوند که تمامی جمله‌ها از آن مرتبه را دربرگیرند. برای نمونه، در دستهٔ شمارهٔ ٦، دو عبارت ۲۵ و ۲٦ یا ۲٦ و ۲۷ از ۲۵ و ۲۷ بهتر هستند.



شکل ۱۱ صفحهٔ مربعی با چهار ستون در گوشه‌ها زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت

جدول ۱۱ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با چهار ستون در گوشه‌ها زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت ($w_c/(qa^4/10D)$)

شبکه	۸*۸	۱٦*۱٦	۲۰*۲۰
ICTF-17-1	۰/۲٦۵۸	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۹
ICTF-17-2	۰/۲٦۵۸	۰/۲۵۷۹	۰/۲۵٦۹
ICTF-17-3	۰/۲٦۵۷	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۸
ICTF-17-4	۰/۲٦٦۱	۰/۲۵۸۳	۰/۲۵۷۳
ICTF-16-1	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-2	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۹	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-3	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۹	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-4	۰/۲٦۵۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۸
ICTF-16-5	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-6	۰/۲٦۵٤	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۸
T 13-5[31]	۰/۲۵۷۳		
BCIZ[32]	۰/۲٤٤		
Cheung[33]	۰/۲۳٦		

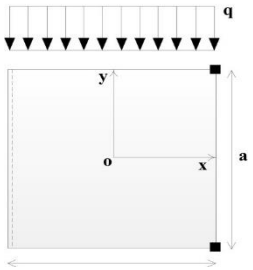
صفحهٔ مربعی با چهار ستون در گوشه‌ها

در این مثال همانند شکل (۱۱) صفحه‌ای مربع‌شکل، که بر روی چهار ستون در گوشه‌های سازه قرار دارد، تحلیل می‌گردد. بار وارد بر صفحه به‌صورت گستردهٔ یکنواخت به شدت q می‌باشد. طول هر پهلوی صفحه برابر با a است. تکیه‌گاه‌های صفحه فقط در چهار گوشه هستند و تکیه‌گاه ساده فرض می‌شوند. شرط‌های مرزی در این نقطه‌ها فقط صفر بودن تغییرمکان قائم می‌باشد (w=0). جدول (۱۱)

دربرگیرندهٔ نتیجهٔ خیز مرکز صفحه درادامه آمده است. در این جدول پاسخ جزءهای پیشنهادی با پاسخ جزء محدود رضائی پژند و اختری [31] با ۷۲ جزء مثلثی و BCIZ [32] با ۷۲ جزء و Cheung و Chan [33] با ۱٦ جزء ۸گرهی مقایسه شده‌اند و می‌توان دریافت که پاسخ جزءهای پیشنهادی با جزء های شناخته‌شده هم‌خوانی دارد.

صفحهٔ مربعی با دو ستون در گوشه‌ها و یک لبه تکیه‌گاه ساده

در این مثال، صفحه‌ی مربعی شکل (۱۲) با تکیه‌گاه ساده در پهلوی سمت چپ و دو ستون در دو گوشهٔ روبه‌رو و بار گستردهٔ یکنواخت با شدت q مورد تحلیل قرار می‌گیرد. جدول (۱۲) گویای نتیجه‌های به‌دست‌آمده برای خیز میانهٔ صفحه می‌باشد. پاسخ‌ها با شبکهٔ ۸جزئی (جزءهای ۱۰گرهی) Cheung و Chan [33] و ۷۲جزئی رضائی پژند و اختری [31] مقایسه شده‌اند و مشاهده می‌شود که نتیجه‌ها نسبت به یکدیگر خطای کمی دارند.



شکل ۱۲ صفحهٔ مربعی با دو ستون در گوشه‌ها و یک لبه تکیه‌گاه ساده و بار گستردهٔ یکنواخت

مقایسهٔ جزءهای کامل و جزءهای ناقص

در این بخش، پاسخ جزءهای کامل و جزءهای ناقص با حل یک مسئله با یکدیگر مقایسه می‌شوند. صفحهٔ مربعی آزمون‌های پیشین، با دو تکیه‌گاه گیردار در دو پهلوی روبه‌رو و دو تکیه‌گاه ساده در دو لبهٔ دیگر و بارگذاری گستردهٔ یکنواخت تحلیل می‌گردد. همان‌گونه که جدول‌های (۱۳ و ۱٤) نشان می‌دهند، نرخ هم‌گرایی جزءهای کامل بسیار کندتر از جزءهای ناقص است. به‌خاطر باید سپرد که شمار درجه‌های آزادی جزءهای کامل بیشتر می باشد.

جدول ۱۲ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با دو ستون در گوشه و یک لبهٔ ساده و بار گستردهٔ یکنواخت ($w_c/(qa^4/10D)$)

شبکه	۸*۸	۱٦*۱٦	۲۰*۲۰
ICTF-17-1	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۸
ICTF-17-2	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-17-3	۰/۱۹۱۷	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۸
ICTF-17-4	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-1	۰/۱۹۱۸	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-2	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵۷	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-3	۰/۱۹۱۸	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-4	۰/۱۹۱۷	۰/۱۸۵۵	۰/۱۸٤۸
ICTF-16-5	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-6	۰/۱۹۱۵	۰/۱۸۵۵	۰/۱۸٤۸
T 13-5[31]	۰/۱۸۵۲		
Cheung&Chan[33]	۰/۰/۱۷۵		

جدول ۱۳ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده و گیردار و بار گستردهٔ یکنواخت ($w_c/ (qa^4/100D)$)

شبکه	۸*۸	۱٦*۱٦	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۱۹۸۹	۰/۱۹۳۵	۰/۱۹۲۰
ICTF-17-2	۰/۱۹۹٦	۰/۱۹۳۷	۰/۱۹۲۱
ICTF-17-3	۰/۱۹۷۱	۰/۱۹۳۱	۰/۱۹۲۱
ICTF-17-4	۰/۱۹۷۷	۰/۱۹۳٤	۰/۱۹۲۳
ICTF-16-1	۰/۱۹۳۵	۰/۱۹۲۲	۰/۱۹۱۹
ICTF-16-2	۰/۱۹۳۹	۰/۱۹۲٤	۰/۱۹۲۰
ICTF-16-3	۰/۱۹۳٦	۰/۱۹۲۳	۰/۱۹۱۹
ICTF-16-4	۰/۱۹۵٤	۰/۱۹۲۷	۰/۱۹۲۰
ICTF-16-5	۰/۱۹۳۸	۰/۱۹۲۳	۰/۱۹۱۹
ICTF-16-6	۰/۱۹٤۵	۰/۱۹۲٤	۰/۱۹۱۹
CTF-18-1	۰/۲۰۵٦	۰/۱۹٦۷	۰/۱۹۳۳
CTF-18-2	۰/۲۲۳۸	۰/۱۹۹۹	۰/۱۹۳۳
پاسخ دقیق	۰/۱۹۲۰		

جدول ١٤ لنگر M_x در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده و گیردار و بار گستردهٔ یکنواخت $(M_c/qa^2/10)$

شبکه	٨*٨	١٦*١٦	٣٢*٣٢
ICTF-17-1	٠/٠١٨١	٠/٠٢٢٨	٠/٠٢٤٣
ICTF-17-2	٠/٠١٨١	٠/٠٢٢٨	٠/٠٢٤٣
ICTF-17-3	٠/٠١٧٦	٠/٠٢٢٧	٠/٠٢٤٠
ICTF-17-4	٠/٠١٨٥	٠/٠٢٣١	٠/٠٢٤٣
ICTF-16-1	٠/٠١٥٦	٠/٠٢٢٨	٠/٠٢٤٦
ICTF-16-2	٠/٠١٧٣	٠/٠٢٣٥	٠/٠٢٥١
ICTF-16-3	٠/٠١٥٧	٠/٠٢٢٩	٠/٠٢٤٦
ICTF-16-4	٠/٠١٨١	٠/٠٢٢٨	٠/٠٢٣٩
ICTF-16-5	٠/٠١٥٧	٠/٠٢٢٩	٠/٠٢٤٦
ICTF-16-6	٠/٠١٨١	٠/٠٢٣١	٠/٠٢٤٣
CTF-18-1	٠/٠١٩٨	٠/٠٢٣٤	٠/٠٢٤٢
CTF-18-2	٠/٠٢٠٤	٠/٠٢٣٤	٠/٠٢٤١
پاسخ دقیق	٠/٠٢٤٤		

رتبه‌بندی جزءهای پیشنهادی

در هر نمونهٔ عددی، پاسخ‌های جزءها برپایهٔ دو معیار نیرو و تغییرمکان، با واکاوی ١٦ نمونهٔ عددی، رتبه‌بندی شده‌اند. به‌دلیل گستردگی حجم کار، تنها به ارائهٔ چند نمونهٔ مهم و کارا در این مقاله بسنده گردید. در تمامی مسئله‌ها، دو رتبهٔ نیرویی و تغییرمکانی از ١ تا ١٠ به هر جزء داده شده است که بهترین جزء در رتبهٔ یک قرار دارد. این رده‌بندی برپایهٔ خطای پاسخ و نرخ هم‌گرایی استوار می باشد. در جدول‌های (١٥ و ١٦)، k_{ij} شمار مسئله‌هایی را نشان می‌دهد که در آنها جزء i رتبهٔ j را گرفته است. بر این پایه، مرتبهٔ کلی جزء در ارائهٔ نیرو و تغییرمکان از رابطه‌های (١٨ و ١٩) به‌دست می‌آیند و در جدول (١٧) نشان داده شده است. باید دانست، از ١٦ نمونهٔ عددی تنها برای ١١ مسئله نیروها حساب شدند و تنها در سه نمونه، مقدار M_x و M_y برابر نبودند.

$$R_i = 100\sum_{j=1}^{10} k_{ij} \times (11-j)/140 \qquad (١٨)$$

$$R_i = 100\sum_{j=1}^{10} k_{ij} \times (11-j)/160 \qquad (١٩)$$

جدول ١٥ رتبه‌بندی جزءها برپایهٔ نیرو

i	نام جزء	k_{ij}										R_i
		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10	
1	ICTF-16-1	٠	١	١	٢	٢	١	٢	٢	٣	٠	۴٨
2	ICTF-16-2	٠	٠	٠	٢	١	٠	٠	٠	٢	٩	٢٣
3	ICTF-16-3	٠	١	١	٠	١	٣	٣	٢	٢	١	۴٣
4	ICTF-16-4	٣	٠	١	٠	٠	٢	٢	۴	١	١	۵٠
5	ICTF-16-5	٢	٠	١	٠	٣	٢	۴	٢	٠	٠	۵۵
6	ICTF-16-6	٠	۵	١	٢	٢	٣	٠	١	٠	٠	۶٩
7	ICTF-17-1	١	۵	٢	٢	٠	٢	١	١	٠	٠	٧٣
8	ICTF-17-2	٢	١	۵	٢	١	٠	٢	١	٠	٠	٧١
9	ICTF-17-3	٠	١	٠	٢	٢	٠	٠	٠	۶	٣	٣۵
10	ICTF-17-4	۶	٠	٢	٢	٢	١	٠	١	٠	٠	٧٨

جدول ۱۶ رتبه بندی جزءها برپایهٔ تغییرمکان

i	نام جزء	k_{ij}										R_i
		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10	
1	ICTF-16-1	۲	۱	۰	۲	۰	۶	۲	۳	۰	۰	۵۶
2	ICTF-16-2	۰	۰	۰	۴	۳	۱	۰	۳	۴	۱	۴۳
3	ICTF-16-3	۰	۲	۲	۰	۱	۰	۶	۱	۴	۰	۴۷
4	ICTF-16-4	۰	۱	۰	۲	۰	۳	۰	۵	۵	۰	۳۹
5	ICTF-16-5	۰	۰	۲	۱	۶	۴	۱	۰	۰	۰	۵۲
6	ICTF-16-6	۲	۰	۰	۳	۱	۰	۱	۰	۱	۸	۳۸
7	ICTF-17-1	۲	۷	۳	۰	۰	۲	۰	۲	۰	۰	۷۷
8	ICTF-17-2	۵	۳	۴	۰	۰	۰	۱	۱	۲	۰	۷۵
9	ICTF-17-3	۰	۰	۲	۳	۲	۰	۲	۱	۱	۵	۴۲
10	ICTF-17-4	۵	۲	۳	۱	۱	۰	۲	۰	۰	۲	۷۲

جدول ۱۷ رتبه‌بندی نهایی جزءها

ملاک رتبه بندی	R_i				
	1	2	3	4	5
برپایهٔ نیرو	ICTF-17-4	ICTF-17-1	ICTF-17-2	ICTF-16-6	ICTF-16-5
برپایهٔ تغییرمکان	ICTF-17-1	ICTF-17-2	ICTF-17-4	ICTF-16-1	ICTF-16-5

دست‌آوردها

در این پژوهش، تابع ترفتز برای الگوسازی خیز صفحه‌های کیرشهفی به‌کار رفت. این تابع پاسخ بخش همگن معادلهٔ حاکم بر رفتارسازه می‌باشد. هدف یافتن اثر جمله‌های تابع ترفتز در دقت پاسخ‌های خیز و لنگر صفحه‌های خمشی بود. درآغاز، برپایهٔ دست‌آوردهای پیشینیان و با تلاش در حفظ تقارن آرایش درجه‌های آزادی و گره‌ها، از میان هشت گونه چینش متفاوت، دو جزء مستطیلی با ۱۷ و ۱۶ درجهٔ آزادی انتخاب شدند. تابع میدان این جزءها، با ثابت پنداشتن چیدمان درجه‌های آزادی و انتخاب چند تابع ترفتز ناقص به‌دست آمدند. در رابطه‌سازی جزء کامل، یک تابع میدان مرتبه‌پنج از جمله‌های تابع ترفتز گزینش شد. این تابع میدان، ۱۵ جملهٔ پیاپی ترفتز را دربر می‌گیرد که با سه حرکت جسم سخت، شمار جمله‌های تابع میدان به ۱۸ می‌رسد. همچنین، دو آرایش متفاوت با ۱۸ درجهٔ آزادی انتخاب شدند. در جزءهای ناقص، تابع‌های میدان پس از برپایی چینش‌های مناسب درجه‌های آزادی به‌دست آمدند. برای جزءهای کامل، نخست تابع میدان کامل برپا شد و پس از آن، آرایش درجه‌های آزادی متناسب با آن انتخاب شد.

از این میان، ده جزء با پاسخ‌های برتر معرفی گردیدند. برپایهٔ رتبهٔ هر جزء در جدول (۱۷)، جزءهای ICTF-17-1، ICTF-17-2 و ICTF-17-4 هم در نیرو و هم در تغییرمکان بهترین رفتار را داشتند. می‌توان وجود یک گره و یک درجهٔ آزادی بیشتر نسبت به جزءهای گروه ICTF-16 را دلیل برتری آنها دانست. بنابراین، همان‌گونه که از رتبه‌بندی جزءهای گروه ICTF-16 برمی‌آید، چینش مناسب گره‌ها و شمار درجه‌های آزادی اهمیت بیشتری نسبت به نحوهٔ انتخاب جمله‌های تابع میدان دارند. با مقایسهٔ پاسخ این جزءها با پاسخ جزءهای کامل، آشکار گردید که در بهره جستن از تابع ترفتز، انتخاب تمامی جمله‌ها لازم نیست. ازاین‌رو، می‌توان برای بالابردن مرتبهٔ تابع میدان بدون افزایش شمار درجه‌های آزادی از تابع ناقص نیز بهره جست و به پاسخ‌های دقیق‌تر دست یافت. چون تابع میدان معادلهٔ ایستایی را برقرار می‌کند، پاسخ‌های نیرویی بیشتر جزءها، دقت فزون‌تری نسبت به پاسخ‌های جابه‌جایی‌ها دارند.

مراجع

۱. کارکن، محمد، «واکاوی خطی و ناخطی هندسی صفحه‌ها برپایهٔ پاسخ تحلیلی»، پایان‌نامهٔ دکترای تخصصی عمران (سازه)، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۹۳).

2. Soh, A.K., Cen, S., Long, Y.Q. and Long, Z.F., "A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 20(2), pp. 299-326, (2001).
3. Sheikh, A.H., Haldar, S. and Sengupta, D., "A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes", *Composite Structures*, Vol. 55(3), pp. 329-336, (2002).
4. Prathap, G. and Viswanath, S., "An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19(6), pp. 831-840, (1983).
5. Somashekar, B.R., Prathap, G. and Babu, C.R., "A field-consistent, four-noded, laminated, anisotropic plate/shell element", *Computers & structures*, Vol. 25(3), pp. 345-353, (1987).
6. Sheikh, A.H., Haldar, S. and Sengupta, D., "A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes", *Composite Structures*, Vol. 55(3), pp. 329-336, (2002).
7. Rezaiee-Pajand, M. and Mohamadzade, H., "A finite element template for four-sided kirchhoff plate bending element", *J. Civil Environ. Eng.*, Vol. 40, pp. 25–38, (2010), (in Persian).
8. Batoz, J.L. and Katili, I., "On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35(8), pp. 1603-1632, (1992).
9. Razaqpur, A.G., Nofal, M. and Vasilescu, A., "An improved quadrilateral finite element for analysis of thin plates", *Finite elements in analysis and design*, Vol. 40(1), pp. 1-23, (2003).
10. Batoz, J.L. and Tahar, M.B., "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18(11), pp. 1655-1677, (1982).
11. Jirousek, J. and Wroblewski, A., "T-elements: state of the art and future trends", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 3(4), pp. 323-434, (1996).
12. Jirousek, J. and Leon, N., "A powerful finite element for plate bending", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12(1), pp. 77-96, (1977).
13. Pian, T.H. and Wu, C.C., "A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26(10), pp. 2331-2343, (1988).
14. De Miranda, S. and Ubertini, F., "A simple hybrid stress element for shear deformable plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65(6), pp. 808-833, (2006).
15. Spilker, R.L. and Munir, N.I., "The hybrid-stress model for thin plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15(8), pp. 1239-1260, (1980).
16. Cen, S., Long, Y. and Yao, Z., "A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates", *Computers & structures*, Vol. 80(9), pp. 819-833, (2002).
17. Jirousek, J., "Hybrid-Trefftz plate bending elements with p-method capabilities", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 24(7), pp. 1367-1393, (1987).

18. Jirousek, J., Wróblewski, A. and Szybinski, B., "Alternative displacement frame formulations in hybrid-Trefftz Kirchhoff plate p-elements", *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 4, pp. 417-452, (1997).
19. Jirouseka, J. and Guex, L., "The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23(4), pp. 651-693, (1986).
20. Qin, Q.H., "Trefftz finite element method and its applications", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58(5), pp. 316-337, (2005).
21. Petrolito, J., "Analytical formulation of hybrid-Trefftz thick plate elements", *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 10(4), pp. 575-586, (2003).
22. Dhananjaya, H.R., Pandey, P.C. and Nagabhushanam, J., "New eight node serendipity quadrilateral plate bending element for thin and moderately thick plates using Integrated Force Method", *Structural engineering and mechanics*, Vol. 33(4), pp. 485-502, (2009).
23. Rezaiee-Pajand, M. and Karkon, M., "Two higher order hybrid-Trefftz elements for thin plate bending analysis", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 85, pp. 73-86, (2014).
24. Rezaiee-Pajand, M., Yaghoobi, M. and Karkon, M., "Hybrid trefftz formulation for thin plate analysis", *International Journal of Computational Methods*, Vol. 9(04), pp. 1250053(1-29), (2012).
25. Herrera, I., "*Boundary methods: an algebraic theory*", Pitman Advanced Pub. Program, (1984).
۲۶. اختری، محمدرضا، «اثر محل گره و نوع درجهٔ آزادی در جزء مثلثی صفحهٔ خمشی»، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد مهندسی عمران (سازه)، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۷۵).
27. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., "*Theory of plates and shells*", McGraw-hill, New York, (1959).
28. Wanji, C. and Cheung, Y.K., "Refined quadrilateral discrete Kirchhoff thin plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40(21), pp. 3937-3953, (1997).
29. Soh, A.K., Long, Z.F. and Cen, S., "A new nine DOF triangular element for analysis of thick and thin plates", *Computational Mechanics*, Vol. 24(5), pp. 408-417, (1999).
30. Yu-qiu, L. and Ke-gui, X., "Generalized conforming element for bending and buckling analysis of plates", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 5(1), pp. 15-30, (1989).
31. Rezaiee-Pajand, M. and Akhtary, M.R., "A family of 13-node plate bending triangular elements", *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 14(6), pp. 529-537, (1998).
32. Zeinkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., "*The Finite Element Method*", 4th Edition, Volume 2, McGraw-Hill, London, (1991).
33. Cheung, Y.K. and Chan, H.C., "A family of rectangular bending elements", *Computers & Structures*, Vol. 10(4), pp. 613-619, (1979).

پیوست یکم- جمله‌های تابع ترفتز

جدول ۱۸ جمله‌های تابع ترفتز

جمله‌های تابع ترفتز	شماره عبارت	مقدار k	جمله‌های تابع ترفتز	شمارهٔ عبارت	مقدار k
$x^6-5x^4y^2-5x^2y^4+y^6$	۱۶	٤	x^2+y^2	۱	۰
$4x^5y-4xy^5$	۱۷		0	–	
$x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6$	۱۸		x^2-y^2	۲	
$6x^5y-20x^3y^3+6y^5x$	۱۹		$2xy$	۳	
$x^7-9x^5y^2-5x^3y^4+5xy^6$	۲۰	٥	x^3+xy^2	٤	۱
$5x^6y-5x^4y^3-9x^2y^5+y^7$	۲۱		x^2y+y^3	٥	
$x^7-21x^5y^2+35x^3y^4-7xy^6$	۲۲		x^3-3xy^2	٦	
$7x^6y-35x^4y^3+21x^2y^5-y^7$	۲۳		$3x^2y-y^3$	۷	
$x^8-14x^6y^2+14x^2y^6-y^8$	۲٤	٦	x^4-y^4	۸	۲
$6x^7y-14x^5y^3-14x^3y^5+6xy^7$	۲٥		$2x^3y+2xy^3$	۹	
$x^8-28x^6y^2+70x^4y^4-28x^2y^6+y^8$	۲٦		$x^4-6x^2y^2+y^4$	۱۰	
$8x^7y-56x^5y^3+56x^3y^5-8xy^7$	۲۷		$4x^3y-4xy^3$	۱۱	
$x^9-20x^7y^2+14x^5y^4+28x^3y^6-7xy^8$	۲۸	۷	$x^5-2x^3y^2-3xy^4$	۱۲	۳
$7x^8y-28x^6y^3-14x^4y^5+20x^2y^7-y^9$	۲۹		$3x^4y+2x^2y^3-y^5$	۱۳	
$x^9-36x^7y^2+126x^5y^4-84x^3y^6+9xy^8$	۳۰		$x^5-10x^3y^2+5xy^4$	۱٤	
$9x^8y-84x^6y^3+126x^4y^5-36x^2y^7+y^9$	۳۱		$5x^4y-10x^2y^3+y^5$	۱٥	

ارائهٔ روش خمکاری لوله‌ها به‌کمک ماندرل سیمی به‌عنوان روشی جدید*

(یادداشت پژوهشی)

محمدرضا رجبی[۱] مسعود رضایی‌زاده[۲] سید یوسف احمدی بروغنی[۳]

چکیده *لوله‌های خمکاری‌شده به‌طور گسترده در صنایع مختلف استفاده می‌شوند. در این تحقیق مواد مختلفی به‌عنوان ماندرل استفاده شده است و این نتیجه به‌دست آمد که استفاده از یک دسته سیم انعطاف‌پذیر به‌عنوان ماندرل نسبت به سایر روش‌ها مفیدتر می‌باشد. ازجمله مزیت‌های مهم ماندرل سیمی دوام، کاربرد ساده و خارج شدن آسان پس از فرایند خمکاری است. تغییرشکل سطح مقطع، کاهش ضخامت و ایجاد ترک در شعاع بیرونی خم، چروکیدگی در شعاع داخلی خم، برگشت فنری و تغییرضخامت ازجمله عیوب رایج به‌همراه فرایند خمکاری لوله‌ها می‌باشند. در این مطالعه به بررسی تأثیر ماندرل سیمی برروی پارامترهای ذکرشده به دو روش شبیه‌سازی المان‌محدود و آزمایشگاهی پرداخته می‌شود.*

واژه‌های کلیدی خم لوله; ماندرل سیمی; تغییرشکل سطح مقطع; برگشت فنری; تغییر ضخامت.

A New Method for Representation of Pipe Bending Process Using Wire Mandrel

M.R. rajabi M. rezaei zadeh S.Y. Ahmadi brooghani

Abstract *Bent pipes have been widely used in industrial usage. In this work different materials have been used as mandrel and it is realized that a bunch of flexible wire is more preferable to optimize bending parameters. This way doesn't need laborious adjustments and because common flexible wires have plastic deformation even during excessive bending angles, they can be used so many times and also they are easy to remove after bending process. Cross section distortion, cracking at the extrados, wrinkling at the intrados, spring back phenomenon and wall thickness change are issues associated with pipe bending. In this work the effect of flexible wires on bending parameters has been analyzed and the results are confirmed with finite element simulation.*

Key Words pipe bending; wire mandrel; cross section distortion; spring back; wall thickness change

*تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۵/۶ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۲/۱۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i1.37810

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشجوی دکتری مکانیک گرایش طراحی کاربردی، دانشگاه بیرجند. mrr23mrr@yahoo.com

(۲) استادیار، دانشگاه تحصیلات تکمیلی و علوم پیشرفتهٔ صنعتی، کرمان.

(۳) استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند.

مقدمه

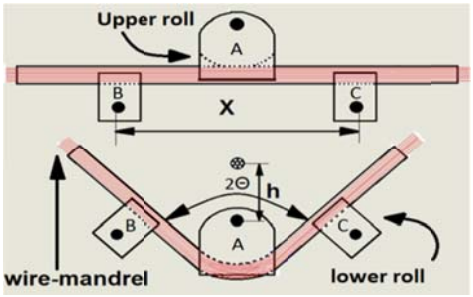
در سال‌های اخیر خم‌های لوله با وزن پایین و کیفیت بالا در صنایع مختلف کاربرد زیادی پیدا کرده‌اند، بنابراین چندین روش متفاوت برای بهبود کیفیت خمکاری لوله پیشنهاد شده است. روشی که برای این منظور استفاده می‌شود باید مؤثر، دقیق، با محدودیت کم، و دارای کاربرد ساده و آسان باشد. تانگ [2000] در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده است که هر چه اصطکاک بین قالب نگهدارندهٔ لوله و قالب خمکاری لوله با لوله بیشتر باشد، کیفیت خمکاری افزایش پیدا می‌کند. همچنین هرچه اصطکاک بین لوله و ماندرل زیادتر باشد کیفیت خمکاری کمتر می‌شود. ژانگ [2003] به‌صورت عددی تأثیر فشار داخلی و اصطکاک را برروی خم‌های لوله مورد بررسی قرار داده است و این نتیجه حاصل شده است که خم‌های با شعاع کم را می‌توان با روان‌کاری و فشار داخلی مشخصی به‌دست آورد. لین [2003] پارامترهای ماندرل توپی را برروی کیفیت خمکاری لوله‌هایی با جنس‌های مختلف مورد بررسی قرار داد. ماندرل‌های توپی تنظیمات حساسی دارند و بعضی اوقات خارج کردن آنها از ناحیهٔ خم مشکل‌ساز می‌شود و به سیستم هیدرولیکی خاصی برای خروج توپی‌ها از ناحیهٔ خمکاری نیاز می‌باشد. ژانگ[2005] برروی خمکاری به‌کمک لیزر مطالعاتی را انجام داد. این روش دارای مزیت‌هایی ازقبیل سرعت بالا و عدم تماس با ناحیهٔ خمکاری می‌باشد ولی این روش برای خمکاری لوله‌های جدار نازک و با شعاع خمکاری کم دارای محدودیت است. آشیماس [2007] به‌کمک شبیه‌سازی به بررسی هیدروفرمینگ پرداخت. گودرزی [2007] روش خمکاری برشی را برای دستیابی به شعاع‌های خمکاری کم مورد مطالعه قرار داد. در این روش برای خمکاری لوله، تغییرشکل برشی در ناحیهٔ خمکاری ایجاد می‌شود. یان [2010] تأثیر اعمال کردن نیروی محوری به لوله برای بهبود کیفیت خمکاری را مورد بررسی قرار داد.

در این تحقیق ماندرل سیمی به‌عنوان یک روش مؤثر و ساده برای بهبود کیفیت خمکاری معرفی می‌شود و مورد بررسی قرار می‌گیرد. ماندرل سیمی متشکل از یک دسته از سیم‌های انعطاف‌پذیر است که در درون لوله قرار می‌گیرد. نتایج آزمایش و شبیه‌سازی نشان می‌دهد که ماندرل سیمی به‌میزان زیادی می‌تواند کیفیت خمکاری لوله را افزایش دهد. ماندرل سیمی می‌تواند به‌راحتی استفاده شود و پس از خمکاری می‌توان به‌راحتی آن را از ناحیهٔ خمکاری‌شده خارج نمود و به‌دلیل این‌که سیم‌ها دچار تغییرشکل پلاستیک نمی‌شوند، قابلیت استفادهٔ مجدد را دارا می‌باشند.

علاوه‌بر مورد ذکرشده روان‌کاری فضای بین ماندرل سیمی و لوله باعث می‌شود که پس از خمکاری بتوان به‌راحتی و توسط نیروی یک دست سیم‌ها را از درون خم به بیرون کشید. بدین ترتیب که با خارج کردن یکی از سیم‌ها از درون لوله فضا باز می‌شود و سایر سیم‌ها به‌سادگی خارج می‌شوند. مزیت دیگر ماندرل سیمی این است که می‌توان این روش را برای لوله‌های با قطر کم یا زیاد، جدار نازک یا ضخیم و لوله‌های غیر دایروی در شعاع‌های خمکاری کم نیز استفاده نمود. کیفیت خمکاری با افزایش تعداد سیم‌های درون لوله افزایش پیدا می‌کند، بنابراین قبل از خمکاری باید در حد امکان لوله را از ماندرل سیمی پر کرد. ماندرل‌های سیمی برخلاف ماندرل‌های توپی محدودیت قطر ندارند و با تغییر قطر لوله‌ای که نیاز به خمکاری دارد می‌توان تعداد سیم‌ها را کم یا زیاد کرد. همچنین این روش محدودیت زاویهٔ خمکاری ندارد و می‌توان خم‌های با زاویهٔ خیلی کم مثلاً صفر درجه را به‌راحتی ایجاد نمود و به‌دلیل انعطاف‌پذیر بودن سیم‌ها می‌توان از آنها مجدداً استفاده کرد.

اصول خمکاری فشاری

دستگاهی که برای خمکاری استفاده شد متشکل از غلطک‌های ثابت B و C است، درحالی‌که غلطک A می‌تواند با بازوی پرس جابه‌جا شود (شکل ۱). برای انجام دادن خمکاری، لوله برروی غلطک‌های B و C قرار می‌گیرد و این در حالی است که غلطک A به‌صورت عمود بر لوله حرکت می‌کند و باعث می‌شود لوله خم شود. شعاع و زاویهٔ خمکاری توسط پارامترهای x و h کنترل می‌شوند. فاصلهٔ بین غلطک‌های B و C می‌تواند با جابه‌جایی افقی غلطک‌ها صورت بگیرد. سه غلطک برروی سطحی قرار گرفته‌اند و لوله می‌تواند بین آنها قرار بگیرد. ابعاد غلطک‌ها متناسب با قطر لوله می‌باشد. شعاع خمکاری مستقل از شعاع غلطک‌ها است و به موقعیت سه غلطک بستگی دارد. بااستفاده از این روش می‌توان شعاع‌های خمکاری مختلفی را با غلطک‌های یکسان به‌دست آورد. شعاع خمکاری را بااستفاده از x و h می‌توان محاسبه نمود. 2θ زاویهٔ خم می‌باشد و h فاصلهٔ پیموده‌شده توسط غلطک A است. ماندرل سیمی در (شکل ۲) نشان داده شده است. قطر سیم‌های ماندرل $1.8mm$ بوده است. برای انجام فرایند خمکاری لوله توسط ماندرل سیمی پر می‌شود و روان‌کاری نیز صورت می‌پذیرد.

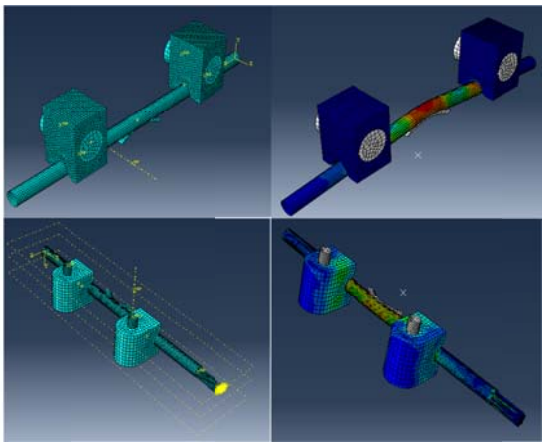


شکل ۱ خمکاری فشاری لوله بااستفاده از ماندرل سیمی

شکل ۲ ماندرل سیمی

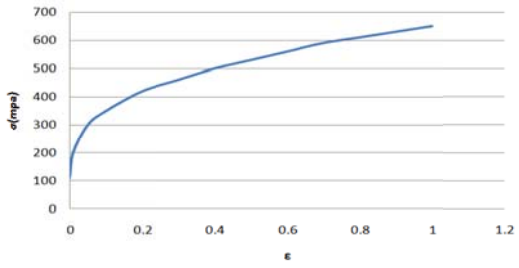
شبیه‌سازی المان‌محدود

مدل‌سازی المان‌محدود توسط نرم‌افزار آباکوس برای بررسی تأثیر ماندرل سیمی به‌منظور بهینه‌سازی عیوب رایج خمکاری لوله و بررسی پارامترهایی که با روش‌های آزمایشگاهی امکان‌پذیر نبود، انجام شد. فرایند خمکاری لوله بااستفاده و بدون استفاده از ماندرل سیمی به‌شکل یک فرایند سه‌بعدی الاستیک- پلاستیک شبیه‌سازی گردید. قالب‌ها به‌صورت صلب مدل شده‌اند، جنس لوله فولاد OLT 35(STAS 8183 – 87) می‌باشد، مدول الاستیک $E = 2.1x10^5\ [N/mm2]$ و ضریب پواسون 0.3 است. ضریب اصطکاک بین غلطک‌ها و لوله ۰/۱ اعمال گردید. ماندرل سیمی به‌شکل "Wire" مدل شده است و رفتار آن به‌صورت الاستیک می‌باشد. قطر لوله "1/2 با ضخامت 1mm است. نهایتاً مدل المان‌محدود خمکاری همانند (شکل ۳) ایجاد شد.



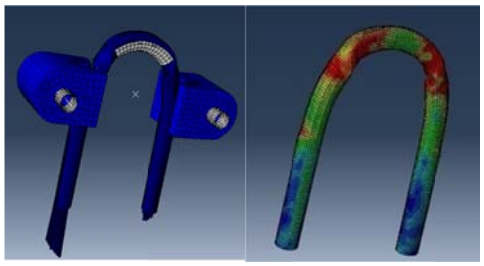
شکل ۳ شبیه‌سازی فرایند خمکاری لوله بااستفاده از ماندرل سیمی

برای به‌دست آوردن خواص مکانیکی لوله، آزمایش کشش برای آن صورت گرفته است و شکل (٤) منحنی تنش (σ)- کرنش (ε) حقیقی را برای توصیف رفتار ماده طی فرایند شبیه‌سازی نشان می‌دهد. مدل کرنش سختی به‌شکل $\bar{\sigma} = 723.1\bar{\varepsilon}^{0.3}$ می‌باشد.



شکل ٤ منحنی تنش- کرنش حاصل از تست کشش ماده

بااستفاده از ماندرل سیمی می‌توان زوایای خمکاری بسیار کم را به‌دست آورد (شکل ٥).

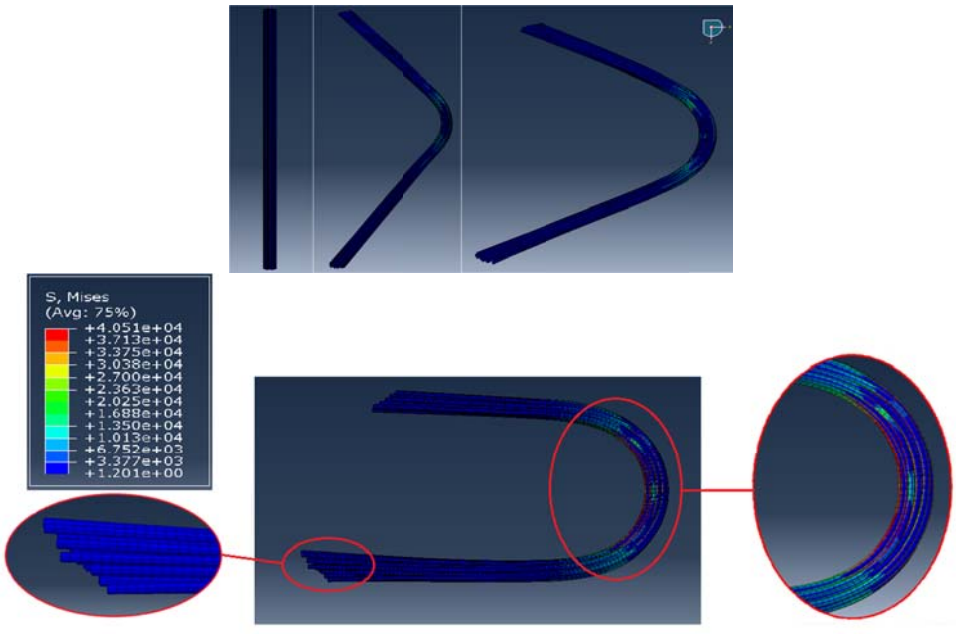


شکل ٥ خمکاری با زوایای بسیار کم توسط ماندرل سیمی

نتایج آزمایش (شکل ٦) بیانگر این است که ماندرل سیمی به‌میزان چشم‌گیری کیفیت خمکاری لوله را افزایش می‌دهد.

شکل ٦ نمونه‌ای از خم‌های به‌دست‌آمده توسط آزمایش (خم بااستفاده از ماندرل سیمی در پایین و خم بدون استفاده از ماندرل سیمی در بالا نشان داده شده است)

به‌دلیل عدم تغییرشکل پلاستیک سیم‌ها و انعطاف‌پذیر بودن آنها، قابلیت استفادهٔ مجدد را دارا می‌باشند. ماندرل سیمی همچنین باید از استحکام کافی برخوردار باشد تا بتواند تنش‌های موجود را تحمل نماید و درنتیجه کیفیت خمکاری را افزایش دهد. محاسبهٔ تنش‌های اعمالی بر ماندرل سیمی به‌صورت تجربی امکان‌پذیر نبود و این کار توسط نرم‌افزار شبیه-سازی شده است. انعطاف‌پذیری ماندرل سیمی و توزیع تنش در ناحیهٔ خمکاری در (شکل ۷) نشان داده شده است.

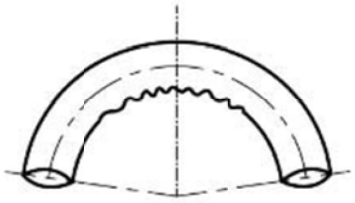


شکل ۷ انعطاف‌پذیری ماندرل سیمی و توزیع تنش روی آن

بررسی عیوب رایج در خمکاری لوله

معمولاً در فرایند خمکاری عیوب مختلفی نظیر ترک، چروکیدگی، بیضی‌شدن مقطع، برگشت فنری و کاهش ضخامت در ناحیهٔ خمکاری به‌وجود می‌آید که این عیوب بر یکدیگر تأثیر متقابل دارند. در این تحقیق وضعیت عیوب مذکور در خم‌های مختلف بررسی شده و همچنین تأثیر ماندرل‌های سیمی بر عیوب مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

چروکیدگی. در حین خمکاری جدارهٔ شعاع داخلی خم به‌دلیل تنش‌های مضاعف صفحه‌ای ضخیم می‌شود و پس از رسیدن این تنش‌ها به حد بحرانی، امکان ایجاد چروکیدگی وجود دارد. چروکیدگی نه‌تنها مقاومت لوله را کاهش می‌دهد بلکه روی استحکام و عمر خستگی آن نیز تأثیر می‌گذارد. چروکیدگی به‌عنوان یک محدودیت برای خمکاری می‌تواند باعث آسیب رسیدن به ابزار خمکاری بشود. یکی از دلایل ناپایداری چروکیدگی در اثر وجود تنش محوری ناشی از انتخاب ابعاد نامناسب قالب‌های خمکاری می‌باشد. شماتیک چروکیدگی در (شکل ۸) نشان داده شده است.

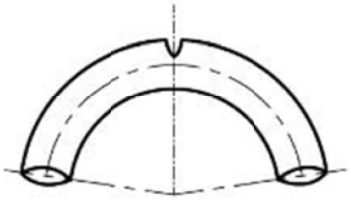


شکل ۸ چروکیدگی در شعاع داخلی خم

پدیدهٔ چروکیدگی به عوامل زیادی همانند خواص ماده، ابعاد لوله، نوع بارگذاری و شرایط تماس بستگی دارد. همچنین این پدیده در شعاع‌های خمکاری کم و لوله‌های با قطر زیاد رایج‌تر می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی و آزمایش نشان می‌دهد که ماندرل سیمی به‌میزان قابل ملاحظه‌ای از تمرکز چروکیدگی جلوگیری می‌کند و سطح لوله در شعاع داخلی خم را صاف و یکنواخت می‌نماید (شکل ۹). اصطکاک، میزان لقی بین لوله و ابزار و همچنین کافی بودن تعداد سیم‌های ماندرل ازجمله پارامترهای کلیدی برای برطرف نمودن چروکیدگی هستند.

شکل ۹ چروکیدگی در شعاع داخلی خم [خم ایجادشده بااستفاده از ماندرل سیمی (پایین) و خم ایجادشده بدون استفاده از ماندرل سیمی (بالا)]

کاهش ضخامت. کاهش ضخامت در شعاع خارجی جدارهٔ لوله پدیده‌ای دیگر است که همیشه با خمکاری لوله همراه می‌باشد. کاهش ضخامت در جدارهٔ لوله بر میزان فشار داخلی که لوله تحمل می‌کند، تأثیر می‌گذارد و قابلیت اطمینان لوله را کم می‌کند. شماتیک کاهش ضخامت و ایجاد ترک در جدارهٔ لوله در (شکل ۱۰) نشان داده شده است.

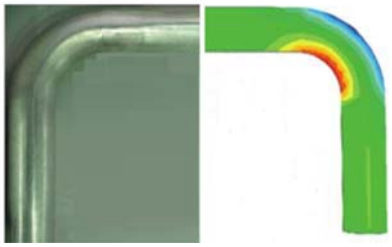


شکل ۱۰ کاهش ضخامت در شعاع خارجی خم

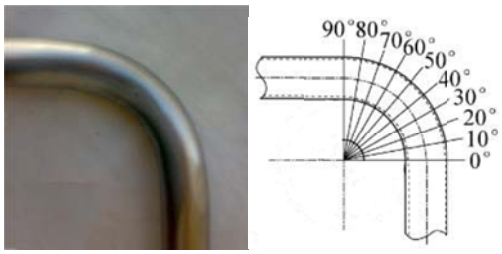
با توجه به قرارداشتن شعاع خارجی خم در معرض تنش کششی، جدارهٔ آن نازک می‌شود. این در حالی است که شعاع داخلی خم به‌دلیل اعمال تنش فشاری بر آن ضخیم می‌شود. درصد کاهش ضخامت در خم لوله (T) از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

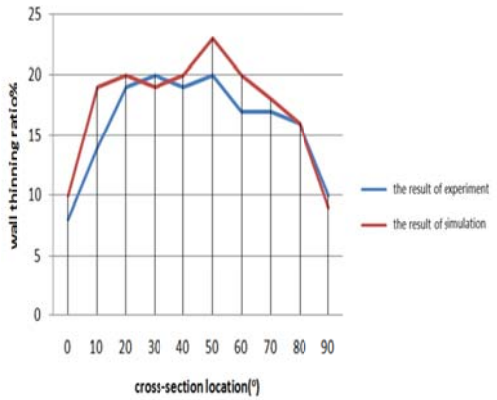
$$T = 100\% \times (t_0 - t_{\min}) / t_0 \qquad (۱)$$

Contour plot توسط شبیه‌سازی برای توزیع ضخامت در لوله و همچنین مدل آزمایشگاهی متناظر با آن در (شکل ۱۱) نشان داده شده است. خم 90° با قطر ½" و ضخامت $1mm$ می‌باشد و توسط ماندرل سیمی ایجاد شده است.



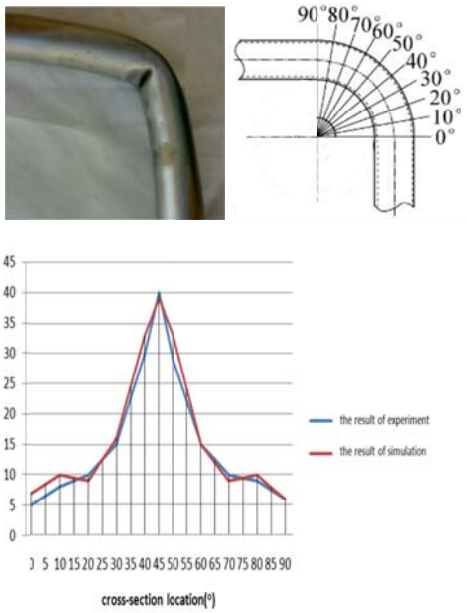
شکل ۱۱ نتایج شبیه‌سازی و آزمایش





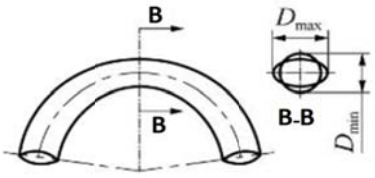
شکل ۱۲ مقایسهٔ درصد کاهش ضخامت در شعاع خارجی خم لوله برای خم آزمایشگاهی و شبیه‌سازی‌شده بااستفاده از ماندرل سیمی

شکل کلی منحنی درصد کاهش ضخامت برای قطرهای مختلف لوله تقریباً یکسان است. همان‌طور که در (شکل‌های ۱۲ و ۱۳) نشان داده شده است، کاهش ضخامت برای خم‌های بدون ماندرل سیمی در زاویهٔ 45° متمرکز است و این در حالی است که باوجود ماندرل سیمی کاهش ضخامت در سراسر شعاع داخلی خم توزیع می‌شود و یکنواخت‌تر می‌باشد. همچنین باوجود ماندرل سیمی درصد کاهش ضخامت به‌میزان ۱۷.۵% نسبت به وضعیت بدون ماندرل سیمی کاهش یافته است. نتایج شبیه‌سازی المان‌محدود بیانگر این است که ماندرل سیمی حداکثر میزان کاهش ضخامت در جدارهٔ لوله را 46.5% کاهش داده است و همچنین نتایج آزمایش این مقدار را 50% نشان می‌دهد.



شکل ۱۳ مقایسهٔ درصد کاهش ضخامت در شعاع خارجی خم لوله برای خم آزمایشگاهی و شبیه‌سازی‌شده بدون استفاده از ماندرل سیمی

تغییرشکل سطح مقطع. عیب دیگری که با فرایند خمکاری همراه است، تغییرشکل سطح مقطع لوله می‌باشد. در این حالت مقطع خم از حالت دایروی خارج می‌شود و شعاع خارجی خم دچار فرورفتگی می‌شود. این پدیده برروی عبور جریان سیال در لوله تأثیر می‌گذارد. شماتیک تغییرشکل سطح مقطع در (شکل ١٤) نشان داده شده است.



شکل ١٤ تغییرشکل سطح مقطع خم

ماندرل سیمی به‌میزان چشم‌گیری از تغییرشکل مقطع لوله و فرورفتگی شعاع خارجی خم جلوگیری می‌کند (شکل ١٥).

شکل ١٥ فرورفتگی شعاع خارجی خم [خم ایجادشده بااستفاده از ماندرل سیمی (پایین) و خم ایجادشده بدون استفاده از ماندرل سیمی (بالا)]

بیشترین میزان تغییرشکل سطح مقطع با (Q) نشان داده می‌شود که این ترم درصد بیضی‌شدگی نیز نامیده می‌شود (معادلهٔ ٢).

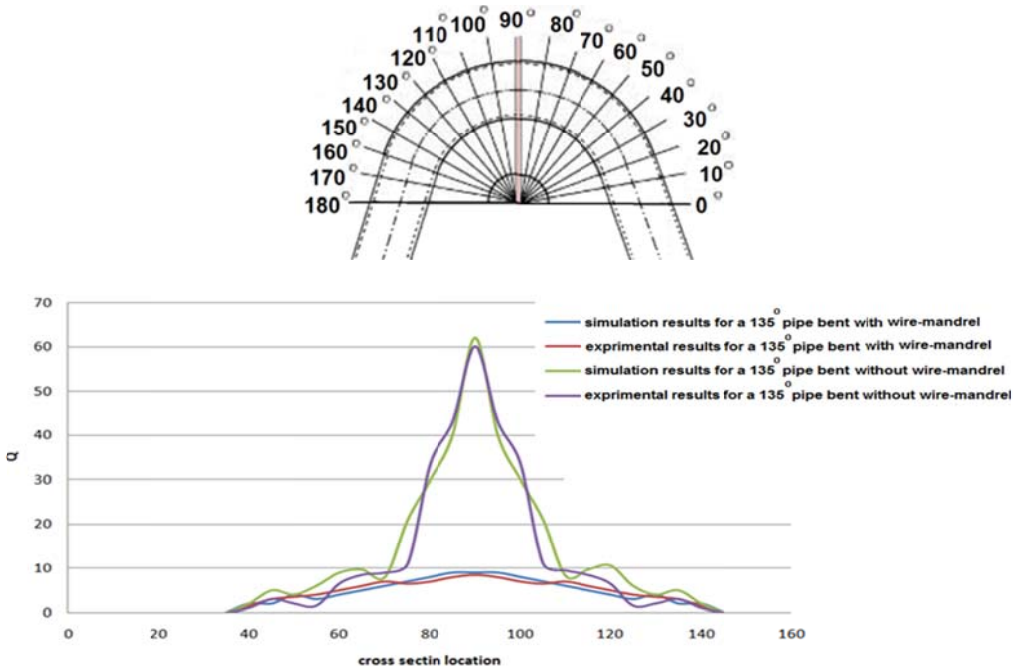
$$Q = 100\% \times (D0 - D') / D0 \qquad (٢)$$

ترم Q برای خم $^{\circ}$١٣٥، $^{\circ}$٩٠، $^{\circ}$٤٥ در شکل‌های (١٨-١٦) نشان داده شده است.

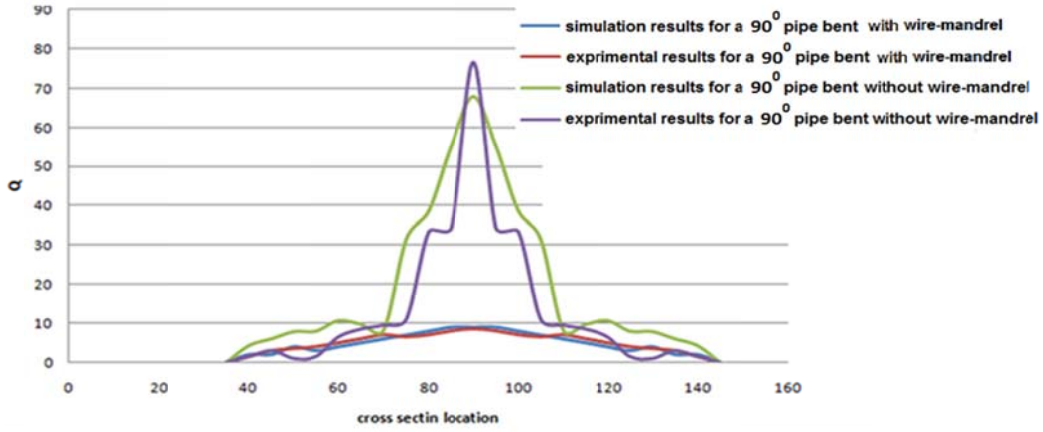
برای خم 135° نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که ماندرل سیمی بیشترین میزان بیضی‌شدگی را 90% کاهش می‌دهد و همچنین این درصد کاهش برای نتایج آزمایش 92% است.

برای خم 90° نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که ماندرل سیمی بیشترین میزان بیضی‌شدگی را 87% کاهش می‌دهد و همچنین این درصد کاهش برای نتایج آزمایش 88% می‌باشد.

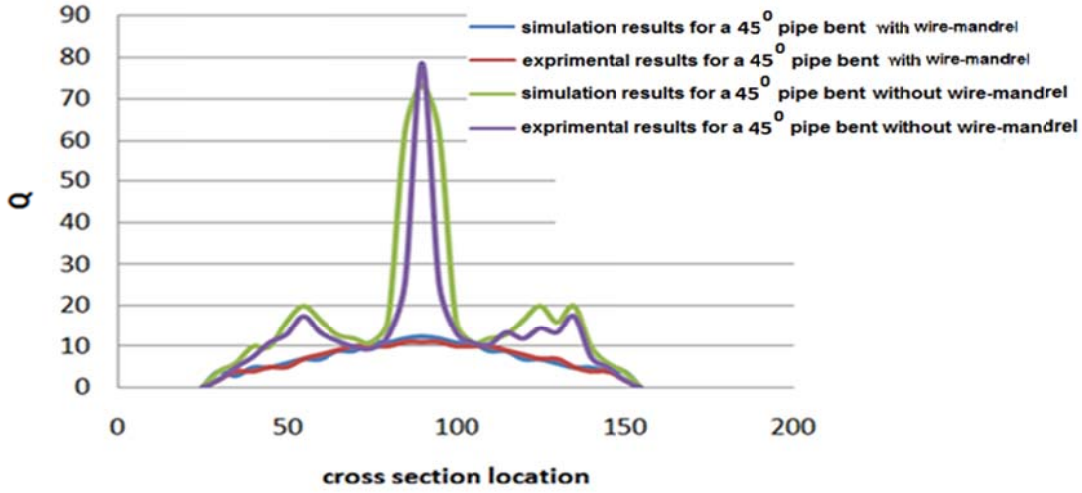
برای خم 45° نتایج شبیه‌سازی بیانگر این است که ماندرل سیمی بیشترین میزان تغییرشکل مقطع را 86% کاهش می‌دهد و همچنین این درصد کاهش برای نتایج آزمایش 88% می‌باشد.



شکل ١٦ نتایج شبیه‌سازی و آزمایش برای خم $^{\circ}$١٣٥ برای لوله با قطر "1/2

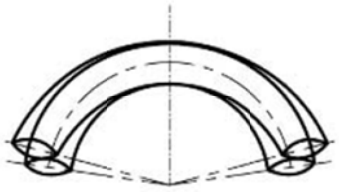


شکل ۱۷ نتایج شبیه‌سازی و آزمایش برای خم ۹۰° برای لوله با قطر"1/2



شکل ۱۸ نتایج شبیه‌سازی و آزمایش برای خم ٤٥° و برای لوله با قطر "1/2

برگشت فنری. برگشت فنری ناشی از برگشت ناحیهٔ الاستیک ماده پس از باربرداری است. پس از باربرداری شعاع خارجی خم در اثر تنش کششی و شعاع داخلی خم در اثر تنش فشاری مقداری تغییرشکل پیدا می‌کند و درنتیجه شعاع و زاویهٔ خمکاری مقداری زیاد می‌شود. برگشت فنری از این منظر دارای اهمیت است که برروی دقت، هندسهٔ خمکاری، اتصال و آب‌بندی خم با سایر اجزا تأثیر می‌گذارد. شماتیک برگشت فنری در شکل (۱۹) نشان داده شده است.



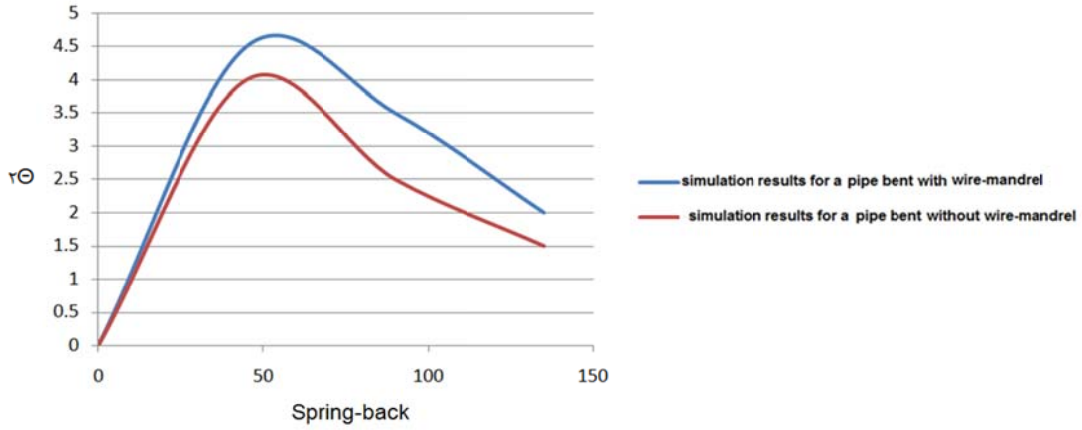
شکل ۱۹ برگشت فنری در خم

پدیدهٔ برگشت فنری یکی از معایبی است که از کیفیت خمکاری کم می‌کند و هزینهٔ قالب خمکاری و محصول را افزایش می‌دهد و همچنین کارایی تولید را دچار ضعف می‌نماید. باتوجه به نتایج به‌دست‌آمده از تحقیقات، درصورتی‌که زاویهٔ خمکاری بزرگ باشد

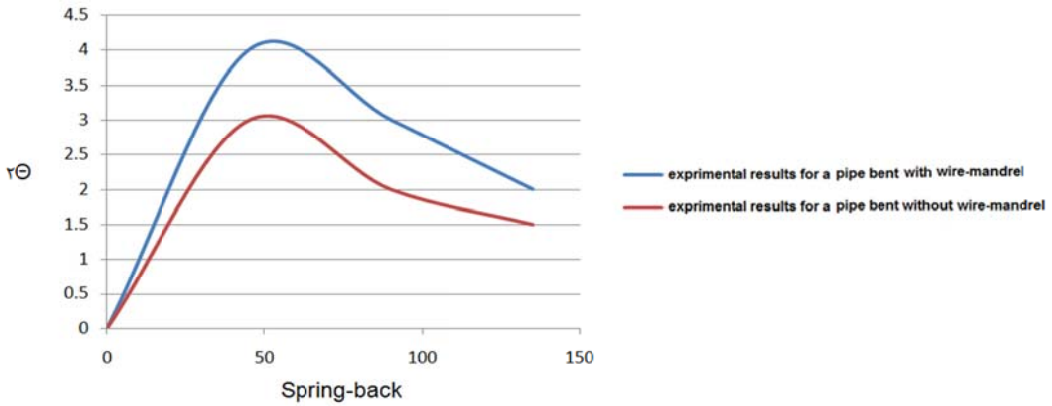
برگشت فنری رابطهٔ خطی با زاویهٔ خمکاری دارد. نتایج تجربی درمورد برگشت فنری درصورتی قابل اعتماد می‌باشند که برای شرایط خمکاری یکسان استفاده شود. کورشی (1999) بااستفاده از شبیه‌سازی المان‌محدود به‌همراه نتایج آزمایشگاهی به این نتیجه رسید که در شرایط خمکاری یکسان توان کارسختی تأثیر کمی برروی برگشت فنری دارد.

نتایج شبیه‌سازی و آزمایش نشان می‌دهد (شکل‌های ۲۰ و ۲۱) که میزان برگشت فنری برای خم حاوی ماندرل سیمی خیلی متفاوت از برگشت فنری برای خم بدون ماندرل سیمی نمی‌باشد و دلیل عمدهٔ این موضوع انعطاف‌پذیری سیم‌ها است.

این موضوع کاملاً روشن و طبیعی است که درصورت استفاده از هرگونه ماندرل در داخل لوله برگشت فنری مقداری بیشتر از حالت بدون استفاده از ماندرل سیمی می‌شود. در شرایط یکسان خمکاری میزان برگشت فنری برای ماندرل سیمی نسبت به سایر انواع رایج ماندرل بیشتر نیست و دلیل این موضوع انعطاف‌پذیری سیم‌ها است. درصورتی‌که سیم‌ها انعطاف‌پذیر نباشند برگشت فنری سیم‌ها با برگشت فنری لوله جمع می‌شود و میزان کلی برگشت فنری افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۲۰ نتایج شبیه‌سازی برای برگشت فنری لوله



شکل ۲۱ نتایج آزمایشگاهی برای برگشت فنری لوله

نتیجه‌گیری

در این تحقیق تأثیر ماندرل سیمی بر کیفیت خمکاری لوله به‌عنوان یک روش ساده و کارا مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی المان‌محدود و آزمایشگاهی بیانگر این است که ماندرل سیمی تأثیر زیادی بر بهبود عیوب رایج در خمکاری و افزایش کیفیت خم دارد. چروکیدگی در شعاع داخلی خم، کاهش ضخامت و فرورفتگی در شعاع خارجی خم، تغییرشکل مقطع و برگشت فنری در دو حالت خمکاری با و بدون استفاده از ماندرل سیمی مورد بررسی قرار داده شد و این نتیجه حاصل گردید که ماندرل سیمی از کاهش مقطعی ضخامت به‌میزان ۱۷.۵% جلوگیری می‌کند و همچنین توزیع ضخامت را در طول خم یکنواخت می‌نماید. میزان تغییرشکل مقطع 90% کاهش می‌یابد و فرورفتگی شعاع خارجی خم کاملاً حذف می‌گردد. در شرایط یکسان خمکاری میزان برگشت فنری برای خمکاری بااستفاده از ماندرل سیمی کمتر از ۱/۳ برابر برگشت فنری برای حالت بدون استفاده از ماندرل سیمی است و این مقدار نسبت به سایر انواع رایج ماندرل بیشتر نیست و دلیل این موضوع انعطاف‌پذیری سیم‌ها می‌باشد.

مراجع

1. Liu, Z.Y., Teng, B.G. and Yuan, S.J., "Effect of internal pressure on thin-walled tubes bending with internal pressure", *Journal of Plasticity Engineering*, 16(4), pp. 35-38, (2009).
2. Zeng, Y.S. and Li, Z.Q,. "Numerical simulation of the internal pressure bending process of small bend radius aluminum alloy tubular parts", *Journal of Plasticity Engineering*, 10(2), pp.14-17, (2003).
3. Lin, Y., Yang, H., Li, H. and Zhan, M., "Influence of forming parameters on the wrinkling during the NC thin-walled tube bending process", *Acta Aeronauticaet Astronautica Sinica*, 24(5), pp. 456-461, (2003).
4. Zhang, W.W., Jones, M. and Graham, M., "Large diameter and thin wall laser tube bending", *24th International Congress on Applications of Lasers and Electro-Optics*, ICALEO 2005Congress Proceedings, pp. 64-73, Denver, Colorado, USA, July 17–21, (2005).
5. Achimas, Gh., Ceclan, V.A., Lazarescu, L. and Groze, F., "Experimental research concerning the influence of the bending radius on the wall thickness of the bent pipes micro CAD", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, pp. 7-11, (2007).
6. Goodarzi, M., Kuboki, T. and Murata, M., "Effect of initial thickness on shear bending process of circular tubes", *Journal of Materials Processing Technology*, 191(1-3), pp. 136-140, (2007).
7. Yan, J., Yang, H., Zhan, M. and Li, H., "Forming characteristics of Al-alloy large-diameter thin-walled tubes in NC bending under axial compressive loads", *Chinese Journal of Aeronautics*, 23(4), pp. 461-469, (2010).
8. Al-Qureshi, H.A., "Elastic-plastic analysis of tube bending", *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 39(1), pp. 87-104, (1999).
9. E.D.X., Ning, R. X., Gu, T., "Experiment and analysis on the distortion of cross-section of bended-tube", *Acta Armamentarii*, 27(4), pp. 698-701, (2006).
10. Li, H., Yang, H., Yan, J. and Zhan, M., "Numerical study on deformation behaviors of thin-walled tube NC bending with large diameter and small bending radius", *Computational Materials Science*, 45(4), pp. 921-934, (2009).
11. Stachowicz, F., "Bending with upsetting of copper tube elbows", *Journal of Materials Proc. Tech.*, Vol. 100, pp. 236-240, (2000).
12. Tang, N.C., "Plastic-deformation analysis in tube bending", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 77(12), pp. 751-759, (2000).

اصلاح پروفیل چرخ‌دندهٔ ساده به‌منظور کاهش خطای انتقال استاتیکی*

(یادداشت پژوهشی)

شیدا محقق[۱] مهرداد پورسینا[۲]

چکیده *در پژوهش حاضر، تأثیر اصلاح پروفیل دندانهٔ چرخ‌دندهٔ ساده روی خطای انتقال استاتیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. خطای انتقال مهم‌ترین عامل ایجاد سروصدا در یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار محسوب می‌شود. درابتدا خطای انتقال با تخمین نرمی دندانه به‌صورت تحلیلی محاسبه می‌گردد. نرمی چرخ‌دنده با درنظر گرفتن دندانه به‌صورت تیر یک‌سرگیردار، انعطاف‌پذیری بدنهٔ چرخ‌دنده و اثرات تماسی هرتزین، تعیین می‌گردد. پس از تخمین خطای انتقال استاتیکی، به اصلاح پروفیل دندانه به چهار صورت اصلاح سردندانهٔ چرخ‌دنده، سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده، سردندانهٔ پینیون و چرخ‌دنده و سر و ریشهٔ دندانهٔ پینیون و چرخ‌دنده پرداخته می‌شود. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ پینیون و چرخ‌دنده بهترین روش برای کاهش خطای انتقال می‌باشد.*

واژه‌های کلیدی چرخ‌دندهٔ ساده؛ سروصدا؛ خطای انتقال؛ اصلاح پروفیل.

Spur Gear Profile Modification for the Reduction of Static Transmission Error

Sh. Mohaghegh M. Poursina

Abstract *In the present study, the effect of tooth profile modifications on the static transmission error is investigated. The most important factor for investigating noise between two gears is the transmission error. First, the static transmission error is analytically calculated by estimating tooth compliance. The compliance of gear is calculated considering tooth as cantilever beam deflection; rigid body tooth rotation at its base and Hertzian contact. After estimating the static transmission error, tooth profile is modified in four ways: tip relief on the gear teeth only, tip and root relief on the gear teeth only, tip relief on both the gear and pinion teeth and tip and root relief on both the gear and pinion teeth. The results indicate the tip and root relief on both the gear and pinion tooth is the best way for transmission error reduction.*

Key Words Spur gear; Noise; Transmission Error; Profiles Modification.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱/۱۴ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۵/۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.54799

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، گروه مهندس مکانیک، دانشگاه اصفهان.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، گروه مهندس مکانیک، دانشگاه اصفهان. poursina@eng.ui.ac.ir

مقدمه

زندگی پر از صداست و انسان همیشه طالب شنیدن صداهای خوش و حیاتی است و از صداهای نامطلوب و خطرناک گریزان است؛ ازجمله این صداها آلودگی صوتی است. یکی از شایع‌ترین منابع ایجاد صداهای صوتی در صنایع، صداهای برخاسته از برخورد اشیا با یکدیگر، ازجمله تماس نامناسب دو چرخ دنده است. چرخ‌دنده‌ها به‌عنوان یکی از منابع مهم ارتعاشات و ایجاد صدا در سیستم‌های دوار صنعتی شناخته شده‌اند. این در حالی است که به‌دلیل حساسیت زیاد سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای به پارامترهای مختلف طراحی، کنترل آن دشوار است. چرخ‌دندهٔ ساده، ساده‌ترین نوع چرخ‌دنده است و معمولاً طراحی این سیستم‌ها براساس میزان سرعت دورانی یا گشتاور مشخص می‌شود. از مزایای این نوع چرخ‌دنده درمقایسه با چرخ‌دنده‌های مارپیچ، قیمت ارزان و سادگی مونتاژ جعبه دنده است؛ اما ازجمله معایب آن وجود صدای زیاد آنها در حین کار است که باعث کاهش عمر و بازدهی آنها می‌شود.

صدای جعبه‌دنده یک مسئلهٔ تاریخی است که اولین‌بار در سال ۱۹۴۹ توسط باکینگهام مطرح شد [1]. تلاش برای انتقال توان کامل از یک چرخ‌دنده به چرخ‌دندهٔ دیگر به‌منظور کاهش میزان خطا در سرعت خروجی نیز انجام گرفته است [۲]؛ اما موضوعی که همیشه میان طراحان و سازندگان مانند فعالان صنعت خودرو، مورد توجه قرارگرفته است صدای یک جعبه‌دنده می‌باشد و سؤالی که مطرح می‌شود این است که چرا جعبه‌دنده‌ها صدای زیادی تولید می‌کنند. عامل اصلی صدای جعبه‌دنده از چرخ‌دنده‌های آن و در اثر تماس دندانه‌ها، هنگامی که نیرو و حرکت از یک چرخ‌دنده به چرخ‌دندهٔ دیگر منتقل می‌شود، سرچشمه می‌گیرد. درواقع یکی از مهم‌ترین مکانیزم‌های تحریک ارتعاش و صدای چرخ‌دنده را خطای انتقال ((TE Transmission Error) می‌توان دانست.

مفهوم اولیهٔ خطای انتقال توسط هریس [3] معرفی شد و گفته می شود که تئوری آن، با هر نوع مشخصات و تحت هر بار انتقالی قابل اجرا است. مارک [4] در تحقیق خود توضیح داده است که یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار با سختی یکسان، تمایل به انتقال کامل حرکت زاویه‌ای دارد، اما درعمل به‌طور قطعی این‌چنین نیست و این فرض نقض می‌شود و حرکت زاویه‌ای یکنواخت انتقال نمی‌یابد.

مطالعات متعددی انجام شده است که ارتباط بین خطای انتقال و صدای چرخ‌دنده را نشان می دهد [5]، اما پژوهش‌های عمده در این زمینه بیشتر به بررسی تجربی خطای انتقال بر تأثیر صدا معطوف شده است. به‌عنوان نمونه می‌توان به پژوهش هاسر و اوسوالد [6] اشاره نمود. آنها توان صدا از چند چرخ‌دندهٔ ساده و مارپیچ را اندازه‌گیری کردند و با پیش‌بینی خطای انتقال نشان دادند که رابطه‌ای معقول بین این دو وجود دارد. آکربلوم و پارسین [7] به بررسی تجربی تأثیر عملیات نهایی مختلف مانند پرداخت‌کاری و سنباده‌زنی روی صدای چرخ‌دندهٔ ساده و مارپیچ بااستفاده از ارتعاشات اندازه‌گیری‌شدهٔ آنها پرداختند و به این نتیجه رسیدند که عواملی که باعث کاهش سروصدا می‌شود سنباده‌زنی و افزایش پهنای دندانهٔ چرخ‌دنده است و عواملی که صدا را افزایش می‌دهد پرداخت ناهموار سطح و افزایش زاویهٔ مارپیچ چرخ‌دنده می‌باشد. بل‌ساک و پرزلج [8] به‌صورت تجربی به بررسی کاهش عمر چرخ‌دندهٔ ساده دراثر صدای زیاد پرداختند. توکلی و هاسر [9] به بهینه‌کردن چرخ‌دندهٔ ساده بااستفاده از بررسی تابع هارمونیک فوریه در یک جفت چرخ‌دندهٔ ساده گیردار پرداختند. بونری و همکاران [10] به بهینه‌کردن چرخ‌دنده‌های ساده برای کاهش صدا و ارتعاش بااستفاده از الگوریتم ژنتیک پرداختند.

دیارن و والتون [11] بـه بررسـی تجربـی تـأثیر جـنس چرخ‌دنده در صدای ایجادشده توسط آنهـا پرداختنـد و بیان داشـتند کـه چـرخ‌دنـده‌هـای پلیمـری کـامپوزیتی کم‌صداترین چرخ‌دنـده‌هـا مـی باشـند. کیسـلینگ [12] بااستفاده از نرم‌افزار المان‌محدود به تأثیر اصلاح پروفیل چرخ دنده در کاهش خطای انتقال پرداخـت و بـه ایـن نتیجه رسید که اصلاح پروفیل چرخ دنده تأثیر بسـیاری درنتیجـهٔ خطـای انتقـال دارد. پـالمر و فـیش [13] بـه بررسی تأثیر اصلاح سردندانه در کاهش خطـای انتقـال قدرت پرداختند.

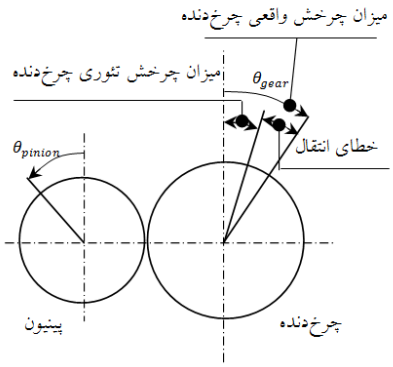
در اکثر پژوهش‌های انجـام‌شـده بررسـی تحلیلـی خطای انتقال کمتر مورد توجه قـرار گرفتـه اسـت؛ لـذا باتوجه به اهمیت آن، در این پژوهش به محاسبهٔ خطای انتقال استاتیکی پرداختـه شـده اسـت. تخمـین خطـای انتقال براساس نرمی دندانـه و تعیـین تغییرمکـان کلـی دندانه با صرف‌نظر کردن از خطـای هندسـی و خطـای ساخت چرخ‌دنده محاسبه مـی‌گـردد. اصـلاح پروفیـل دندانه نیز به‌منظور کاهش صدا در یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار به‌صورت تحلیلی بـرروی خطـای انتقـال مـورد مطالعه قرار گرفته است.

خطای انتقال

میزان چرخش تئوری چرخ‌دنده، θ_{gear}، بایـد بـه‌انـدازهٔ چرخش پینیون، θ_{pinion}، باشد امـا در عمـل ایـن‌چنـین نیست. تفاوت بین سرعت زاویه‌ای تئوری چـرخ‌دنـده، با سرعت زاویـه‌ای واقعـی، بـه‌صـورت خطـای انتقـال تعریف می‌شود (شکل ۱).

انـواع مختلفـی از خطـای انتقـال وجـود دارد کـه تفاوت اندکی نسبت به یکدیگر دارند و عبارتند از:

- خطای انتقال ساخت (Manufacturing TE). درک این نوع خطای انتقال بسیار ساده اسـت. ازآنجـایی کـه هندسهٔ دندانه‌های چرخ‌دنـده بـه‌طـور مسـتقیم بـرروی موقعیـت زاویـه‌ای چـرخ‌دنـدهٔ خروجـی، بـرای یـک موقعیت چرخ‌دندهٔ ورودی تأثیر می گذارد، بنابراین هـر تغییری در نقطهٔ تماس دندانه هـا ممکـن اسـت باعـث افزایش خطای انتقال شود. این تغییر براسـاس سـاخت چرخ‌دنـده هـا اسـت و خطـای انتقـال سـاخت نامیـده می‌شود. این تنها نوع از خطای انتقال است کـه از یـک چرخ‌دنده اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۱ تعریف خطای انتقال

- خطای انتقال استاتیکی (Static TE). خطای انتقال تحت بارگذاری و سرعت کم، خطای انتقال اسـتاتیکی نامیده می‌شود.
- خطای انتقـال حرکتـی (Kinematic TE). خطـای انتقال حرکتی از خطای انتقال ساخت حاصل می شـود، درحالی‌که ناهمواری‌های موجود در سـطح نیـز درنظـر گرفته می شود که با چشم غیرمسلح قابل رؤیت نیست. تفاوت بسیار کمی بین خطای انتقال ساخت و حرکتـی وجود دارد.
- خطای انتقال دینامیکی (Dynamic TE). زمانی که بار و سرعت متغیر باشد خطای انتقال دینامیکی تعریف می‌شود [14].

محاسبهٔ نرمی دندانه

روند محاسبهٔ خطای انتقـال اسـتاتیکی در یـک جفـت چرخ‌دندهٔ گیردار به این صورت می‌باشد که ابتدا نرمـی جفت دندانه‌های گیردار به‌دست آورده می‌شود؛ سـپس بااستفاده از نرمی، خطای انتقال تخمـین زده مـی‌شـود.

روش محاسبهٔ نرمی در دندانهٔ چرخ‌دندهٔ ساده تا حد زیادی توسط وبر [15] توسعه یافته است و شامل سه فرض است:

الف) نرمی ناشی از تغییرمکان سردندانه با درنظر گرفتن آن مانند تیر یک‌سرگیردار.

ب) نرمی ناشی از تغییرمکان دندانه به‌علت انعطاف‌پذیری بدنهٔ چرخ‌دنده.

پ) نرمی ناشی از تغییرمکان به‌علت تماس هرتزین بین دو دندانه.

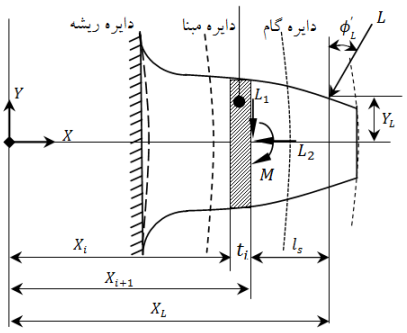
شایان ذکر است از آنجایی که تمام دندانه‌های یک چرخ‌دنده شبیه هستند برای محاسبهٔ نرمی هر یک از جفت چرخ‌دندانه‌های گیردار کافی است نرمی یک دندانه محاسبه گردد. درادامه هر یک از موارد مذکور تشریح می‌شود.

الف) نرمی ناشی از تغییرمکان سردندانه با درنظر گرفتن آن مانند تیر یک‌سرگیردار. اولین گام برای محاسبهٔ نرمی چرخ‌دنده، درنظر گرفتن دندانه به‌صورت تیر یک‌سرگیردار و محاسبهٔ تغییرمکان ناشی از نیروی وارد بر آن می‌باشد. برای به‌دست آوردن این تغییرمکان با اعمال نیرو در نقطهٔ گیرداری دو دندانه و تجزیهٔ این نیرو به دو مؤلفهٔ شعاعی و مماسی، دو تغییرمکان ایجاد می‌شود؛ اولین تغییرمکان به‌علت خمش و دومین تغییرمکان ناشی از نیروی برشی (مؤلفهٔ مماسی نیرو) است.

حال به محاسبهٔ تغییرمکان ناشی از هر یک از دو عامل فوق پرداخته می‌شود و تغییرمکان کلی این حالت از برهم‌نهی هر دو تغییرمکان به‌دست می‌آید. قابل ذکر است که تغییرمکان خمشی نیز خود به دو علت خمش ایجادشدهٔ ناشی از ممان و خمش ایجادشدهٔ ناشی از نیروی برشی می‌باشد.

تغییرمکان خمشی ناشی از ممان. برای محاسبهٔ تغییرمکان ناشی از ممان، نیروهای مماسی و شعاعی مطابق شکل (۲) به جزء بخش i انتقال می‌یابد که این انتقال سبب ایجاد ممانی به‌صورت رابطهٔ زیر می‌گردد:

$$M = L\,Cos(\emptyset'_L)l_s - L\,Sin(\emptyset'_L)Y_L \qquad (۱)$$



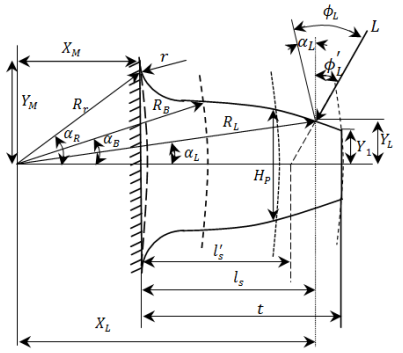
شکل ۲ مدل دندانهٔ چرخ‌دندهٔ ساده به‌صورت تیر یک‌سرگیردار [15]

تغییرمکان خمشی ناشی از ممان در سر تیر، D_m، با درنظر گرفتن شرایط مرزی، متوسط ممان اینرسی سطح، $\bar{I}$، و مدول الاستیسیتهٔ مؤثر، E_e، به‌صورت رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود [15]:

$$D_m = \delta + l_s\theta = \frac{M}{2EI}(t^2) + \frac{M}{EI}(t)l_s = \frac{L\left(l_s\,Cos\left(\phi'_L\right) - Y_L\,Sin\left(\phi'_L\right)\right)}{2E_e\bar{I}}\,(t^2 + 2\,tl_s) \qquad (۲)$$

البته قابل ذکر است همان‌طور که از شکل (۳) مشخص است؛ L نیروی وارد در نقطهٔ گیرداری دو دندانه، ϕ'_L زاویهٔ نیرو با محور قائم دستگاه مختصات دندانه، l_s بازوی ممان درراستای افقی محور مختصات، δ جابه‌جایی قائم دندانه در محل نیرو، θ شیب، X_i مختصهٔ طولی جزء بخش i، X_{i+1} مختصهٔ طولی جزء بخش i+1، X_L مختصهٔ طولی نقطهٔ گیرداری، Y_L مختصهٔ عرضی نقطهٔ گیرداری و t ارتفاع کلی دندانه است. محاسبهٔ $\bar{I}$ نیز با درنظر گرفتن این موضوع که سطح مقطع هر دندانه به‌صورت مستطیل فرض شده است و ممان اینرسی متوسط برابر با میانگین ممان اینرسی سطحی در سردندانه و پای دندانه

است، محاسبه می‌گردد.



شکل ۳ شماتیک دندانه همراه با پارامترهای مورد استفاده

برای محاسبهٔ ϕ'_L و l_s از روابط زیر کمک گرفته می‌شود [15]:

$$R = \frac{1}{2} m.N \qquad (۳)$$

$$R_B = R\,Cos\phi_P \qquad (٤)$$

$$\alpha_B = \frac{H_P}{2R} + Tan\,\phi_P - \phi_P \qquad (٥)$$

$$R_L^2 = S^2 + 2R\,Sin\,\phi_P\,S + R^2 \qquad (٦)$$

$$\alpha_L = \alpha_B - Tan\,\phi_L + \phi_L \qquad (٧)$$

$$\phi'_L = \phi_L - \alpha_L \qquad (٨)$$

$$\bar{R}^2 = (R_r + r)^2 - 2r\sqrt{(R_r + r)^2 - R_B^2} \quad + r^2 \qquad (٩)$$

$$h_L = 2R_L Sin\alpha_L \qquad (١٠)$$

$$Cos\bar{\phi} = \frac{R_B}{\bar{R}} \qquad (١١)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha_B - Tan\,\bar{\phi} + \bar{\phi} \qquad (١٢)$$

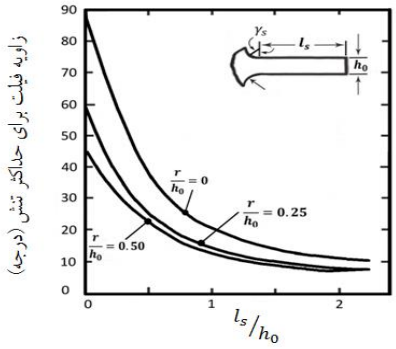
$$\bar{\gamma} = \overline{\phi'} = \bar{\phi} - \bar{\alpha} \qquad (١٣)$$

$$l_o = R_L\,Cos\alpha_L - \left(\frac{h_L\,Tan\,\phi'_L}{2}\right) - (\bar{R}\,Cos\bar{\alpha} + r\,Sin\,\bar{\gamma}) \qquad (١٤)$$

$$l'_s = l_o + r\,Sin(\gamma_s) \qquad (١٥)$$

$$l_s = l'_s + \frac{h_l\,Tan(\phi'_L)}{2} \qquad (١٦)$$

ϕ'_L از رابطهٔ (۸) و l_s از رابطهٔ (١٦) به‌دست می‌آیند. در روابط فوق R_r شعاع دایرهٔ پای‌دنده، r شعاع فیلت، R_B شعاع دایرهٔ مبنا و H_P ضخامت دندانه در نقطهٔ گام است؛ همچنین γ_s در رابطه (١٥) زاویهٔ فیلت برای حداکثر تنش است. از نمودار شکل (٤)، با داشتن نسبت موقعیت نیرو به ضخامت سردندانه، $\frac{l_s}{h_0}$، روی محور افقی و منحنی نسبت شعاع فیلت به ضخامت سردندانه، $\frac{r}{h_0}$؛ γ_s از محور قائم به‌دست می‌آید.



شکل ٤ نمودار تعیین γ_s [15]

مقدار E_e بستگی به درنظر گرفتن دندانه به‌صورت تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای برحسب مدول الاستیسیتهٔ چرخ‌دنده، E، به‌ترتیب مطابق روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$E_e = E \qquad (١٧)$$

$$E_e = \frac{E}{(1 - \upsilon^2)} \qquad (١٨)$$

شرط کرنش صفحه‌ای بودن دندانه برحسب پهنای دندانه، F، و ضخامت دندانه در نقطهٔ گام، H_P، به‌صورت رابطهٔ زیر تخمین زده می‌شود [15]:

$$R = \frac{F}{H_P} > 5 \qquad (١٩)$$

درصورتی که در رابطهٔ (۱۹) مقدار $R < 5$ باشد محاسبات دندانه به‌صورت تنش صفحه‌ای صورت می‌پذیرد.

تغییرمکان خمشی ناشی از نیروی برشی. همان‌طور که از شکل (۲) مشخص است نیروی برشی L_1 باعث ایجاد یک خمش به‌صورت رابطهٔ زیر می‌گردد:

$$V = L\,Cos\,(\phi_L') \qquad (۲۰)$$

با درنظر گرفتن شرایط مرزی، ممان اینرسی سطح، $\bar{I}$، و مدول الاستیسیتهٔ مؤثر، E_e، تغییرمکان خمشی ناشی از نیروی برشی، D_t، برای یک دندانه به‌صورت رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$D_t = \delta + l_s\theta = \frac{V}{3EI}(t^3) + \frac{V}{2EI}(t^2)l_s = \frac{L\,Cos(\phi_L')}{2E_e\bar{I}}(2t^3 + 3t^2 l_s) \qquad (۲۱)$$

تغییرمکان برشی. نیروی برشی L_1 در شکل (۲) باعث ایجاد تغییرمکانی روی جزء i می‌شود. تغییرمکان سردندانهٔ ناشی از نیروی برشی، D_s، برحسب متوسط سطح دندانه، $\bar{A}$، و مدول برشی، G، به‌صورت رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$D_s = \frac{1.2\,L\,t\,Cos(\phi_L')}{G\bar{A}} \qquad (۲۲)$$

عدد ۱/۲ در رابطهٔ (۲۲) ضریب نیروی برشی ناشی از درنظر گرفتن سطح مقطع مستطیلی برای چرخ‌دنده است.

از روابط (۲۲ و ۲۱،۲) تغییرمکان کلی دراثر خمش و برش درراستای اعمال نیرو، D_b، و نرمی ناشی از آن، Q_b، به‌ترتیب با روابط زیر بیان می‌گردد:

$$D_b = (D_t + D_m + D_s)Cos(\phi_L') \qquad (۲۳)$$

$$Q_b = \frac{D_b}{L} \qquad (۲۴)$$

قابل ذکر است که روابط فوق یک‌بار برای پینیون و یک‌بار برای چرخ‌دنده باید محاسبه گردند.

ب) نرمی ناشی از تغییرمکان دندانه به‌علت انعطاف‌پذیری بدنهٔ چرخ‌دنده. گام بعدی برای محاسبهٔ خطای انتقال، محاسبهٔ نرمی دندانهٔ ناشی از انعطاف‌پذیری بدنهٔ چرخ‌دنده است. ازآنجایی که بدنهٔ چرخ‌دنده به‌طور کامل صلب نیست و دارای خاصیت الاستیک می‌باشد، از انعطاف‌پذیری و تغییرمکان بدنه چرخ‌دنده در محل ریشهٔ دندانه نمی‌توان صرف‌نظر کرد. درواقع فرض ثابت بودن تکیه‌گاه در محل ریشه در گام نخست فرض کاملی نیست و باید تغییرمکان ناشی از انعطاف‌پذیری بدنهٔ چرخ‌دنده نیز منظور گردد.

ماتوس و همکاران [16] کران بالا و پایینی از این تغییرمکان را برای تیری متصل به یک تکیه‌گاه الاستیک و برای توزیع‌های مختلف به‌دست آوردند، ایشان همچنین نشان دادند که حل به‌دست‌آمده با نتایج تجربی تطابق خوبی دارد. این تغییرمکان به‌وسیلهٔ ضرایبی بیان می‌شود.

باتوجه به شکل (۵- الف) چرخش زاویه‌ای دراثر ممان M و نیروی برشی V برای تیر نگه‌داشته‌شده توسط تکیه‌گاه انعطاف‌پذیر به‌ترتیب مطابق رابطه‌های زیر تخمین زده می‌شود:

$$\theta_M = K_1 M \qquad (۲۵)$$

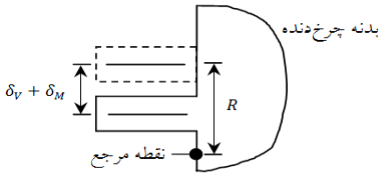
$$\theta_V = K_2 V \qquad (۲۶)$$

همچنین باتوجه به شکل (۵- ب) تغییرمکان دراثر ممان M و نیروی برشی V برای تیر نگه‌داشته‌شده توسط تکیه‌گاه انعطاف‌پذیر مطابق

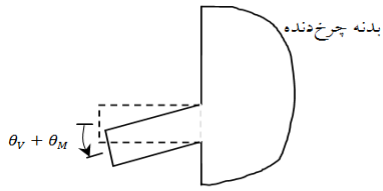
رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردد [16]:

$$\delta_M = K_3 M \quad (۲۷)$$

$$\delta_V = K_4 V \quad (۲۸)$$



الف) تغییر مکان در اثر نیروی برشی و ممان



ب) چرخش زاویه‌ای در اثر نیروی برشی و ممان

شکل ۵ شماتیک تغییرمکان و چرخش دراثر ممان و نیروی برشی

ضرایب به‌دست‌آمده توسط مرجع [16] برای تیر با تکیه‌گاه ارتجاعی تحت نیروی برشی V و ممان خمشی M با رابطه‌های زیر بیان می‌شوند:

$$K_1 = \frac{16.67}{F\pi E {h_m}^2} \quad (۲۹)$$

$$K_1 = \frac{16.67(1-\upsilon^2)}{F\pi E {h_m}^2} \quad (۳۰)$$

$$K_2 = \frac{(1-\upsilon)}{FEh_m} \quad (۳۱)$$

$$K_2 = \frac{(1-\upsilon-2\upsilon^2)}{FEh_m} \quad (۳۲)$$

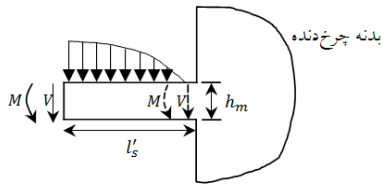
$$K_3 = \frac{(1-\upsilon)}{FEh_m} \quad (۳۳)$$

$$K_3 = \frac{(1-\upsilon-2\upsilon^2)}{FEh_m} \quad (۳۴)$$

$$K_4 = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{R}{h_m}+\frac{1}{2}\right) ln\left(\frac{R}{h_m}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{R}{h_m}-\frac{1}{2}\right) ln\left(\frac{R}{h_m}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right] \quad (۳۵)$$

رابطه‌های (۲۹، ۳۱ و ۳۳) برای تنش صفحه‌ای و رابطه‌های (۳۰، ۳۲ و ۳٤) برای کرنش صفحه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. همان‌طور که از شکل (۵) واضح است، K_1 به علت چرخش ناشی از ممان، K_2 به علت چرخش ناشی از برش، K_3 به علت جابه‌جایی ناشی از ممان و K_4 به‌علت جابه‌جایی ناشی از برش است و R فاصله از یک نقطهٔ مرجع برای تغییرمکان براساس برش می‌باشد.

باتوجه به شکل (٦) و رابطه‌های (۲٤ و ۲۹) تغییرمکان براساس چرخش ناشی از ممان در h_m برای حالت تنش صفحه‌ای مطابق رابطهٔ (۳٦) محاسبه می‌گردد. با دقت به رابطه‌های (۲٦)و ۳۱) تغییرمکان براساس چرخش مطابق رابطهٔ (۳۷) تخمین زده می‌شود. بااستفاده از رابطه‌های (۲۷)۲۷ و ۳۳) تغییرمکان براساس جابه‌جایی ناشی از ممان مطابق رابطهٔ (۳۸) می‌باشد. با کمک گرفتن از رابطه‌های (۲۸ و ۳۵) تغییرمکان براساس جابه‌جایی ناشی از برش با فرض $R = \sqrt{2}h_m$، مطابق رابطهٔ (۳۹) به‌دست می‌آید.



شکل ٦ شماتیک اتصال دندانه به تیر یا بدنهٔ چرخ‌دنده

$$y_1 = \frac{L\,Cos^2(\phi'_L)}{F.E}\left\{5.306\left(\frac{l'_s}{h_m}\right)^2\right\} \quad (۳٦)$$

$$y_2 = \frac{L\,Cos^2(\phi'_L)}{F.E}\left\{(1-\upsilon)\left(\frac{l'_s}{h_m}\right)\right\} \quad (۳۷)$$

$$y_3 = \frac{L\,Cos^2(\phi'_L)}{F.E}\left\{(1-\upsilon)\left(\frac{l'_s}{h_m}\right)\right\} \quad (۳۸)$$

$$y_4 = \frac{L\,Cos^2(\phi'_L)}{F.E}\{1.534\} \quad (۳۹)$$

$$y_5 = \frac{L\,Cos^2(\phi'_L)}{F.E}\left\{1.534\frac{Tan^2(\phi'_L)}{2(1+\upsilon)}\right\} \quad (٤۰)$$

باتوجه به جابه جایی‌های فوق و همچنین درنظر گرفتن جابه جایی ناشی از نیروی برشی در پای دندانه به‌صورت رابطهٔ (٤٠)، جابه‌جایی کل ناشی از انعطاف‌پذیری بدنه چرخ‌دنده برای تنش صفحه‌ای به‌صورت رابطهٔ زیر می‌باشد:

$$D_f = \frac{L\,Cos^2(\phi_L')}{F.E}\left\{5.306\left(\frac{l'_s}{h_m}\right)^2 + 2(1-\upsilon)\left(\frac{l'_s}{h_m}\right) + 1.534\left(1+\frac{0.4167\,Tan^2(\phi_L')}{1+\upsilon}\right)\right\} \quad (٤١)$$

به همین ترتیب برای کرنش صفحه‌ای برابر است با:

$$D_f = \frac{LCos^2(\phi_L')}{F.E}(1-\upsilon^2)\left\{5.306\left(\frac{l'_s}{h_m}\right)^2 + 2\left(\frac{1-\upsilon-2\upsilon^2}{1-\upsilon^2}\right)\left(\frac{l'_s}{h_m}\right) + 1.534\left(1+\frac{0.4167\,Tan^2(\phi'_L)}{1+\upsilon}\right)\right\} \quad (٤٢)$$

در روابط فوق h_m دو برابر Y_M، مختصهٔ عرضی محل برخورد پروفیل اینولوت و دایرهٔ مبنا است. در نتیجه نرمی ناشی از انعطاف‌پذیری بدنهٔ چرخ‌دنده مطابق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Q_f = \frac{D_f}{L} \quad (٤٣)$$

پ) نرمی ناشی از تغییرمکان دندانه به علت تماس بین دو دندانه. برای این‌که تغییرمکانی که به‌دست می‌آید به تغییرمکان یک جفت دندانهٔ چرخ‌دندهٔ گیردار کاملاً منطبق باشد، گام سوم درنظر گرفتن حالت اینولوت و منحنی بودن دندانه‌هاست.

هر گاه دو جسم با سطوح خمیده به یکدیگر فشرده شوند، نقطه یا خط تماسشان به سطح تماس تبدیل می‌شود و تنش‌های سه‌بعدی در آن دو پدید می‌آید؛ درنتیجه تنش ایجادشده باعث تغییرمکانی درراستای نیرو خواهد شد. چنین مسئله‌ای در گیرداری دندانه‌های چرخ‌دنده نیز پیش می‌آید. تماس بین دو دندانه نیز به‌نوبهٔ خود باعث ایجاد تغییرمکانی در دندانه می‌شود که این تغییرمکان را می‌توان با سه روش به‌دست آورد:

- استفاده از تقریب هرتز.
- تقریب نیمه‌تجربی توسعه‌یافته توسط پالمگرن [17].
- روش توسعه‌یافته توسط وبر [17].

ازآنجایی که تقریب هر سه روش فوق به هم نزدیک می‌باشد، در این پژوهش از تقریب نیمه‌تجربی پالمگرن استفاده می‌گردد. درنتیجه تغییرمکان تماسی بین دو دندانه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [17]:

$$D_h = \frac{1.275\,L^{0.9}}{E^{0.9}F^{0.8}} \quad (٤٤)$$

درنهایت نرمی تماسی به‌صورت رابطهٔ زیر در خواهد آمد:

$$Q_h = \frac{1.275}{E_{12e}^{0.9}\,F^{0.8}\,L^{0.1}} \quad (٤٥)$$

$$E_{12e} = \frac{2E_{1e}E_{2e}}{E_{1e}+E_{2e}} \quad (٤٦)$$

نرمی کل دندانه از برهم‌نهی هر سه نرمی ذکرشده در رابطه‌های (٢٤ و ٤٣ و ٤٥) به‌صورت رابطهٔ زیر بیان می‌گردد:

$$Q_l = Q_b + Q_f + Q_h \quad (٤٧)$$

محاسبهٔ خطای انتقال استاتیکی

پس از آن‌که نرمی پینیون و چرخ‌دنده بااستفاده از رابطهٔ

(٤٧) به‌دست آورده شد، حال خطای انتقال استاتیکی، E_t، بار منتقل‌شده بر جفت دندانهٔ اول، L_1، و بار منتقل‌شده بر جفت دندانهٔ دوم، L_2، برای نسبت گیرداری کمتر از ۲ از حل هم‌زمان روابط زیر محاسبه می‌گردد [9]:

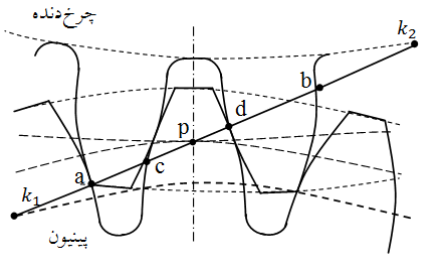
$$(Q_l^P L^P + Q_l^G L^G)_1 + E_t = E_p^P \quad (٤٨)$$

$$(Q_l^P L^P + Q_l^G L^G)_2 + E_t = E_p^G + E_{s1,2} \quad (٤٩)$$

$$L_1 + L_2 = L \quad (٥٠)$$

قابل ذکر است که در روابط فوق اندیس ۱ و ۲ به جفت دندانه‌های گیردار اشاره دارد؛ تغییر پروفیل در پینیون، E_p^P، و چرخ‌دنده، E_p^G، و همچنین خطای فضای بین یک جفت دندانه دنبال هم، $E_{s1,2}$، صفر فرض شده است.

هندسهٔ گیرداری یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار در شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل ۷ هندسه گیرداری یک جفت چرخ‌دنده ساده

باتوجه به شکل (۷)، نخستین نقطهٔ گیرداری، آغاز تماس بیخ دندهٔ پینیون با نوک دندهٔ چرخ‌دنده نقطه a است که دایرهٔ سر چرخ‌دنده با خط فشار را قطع می‌کند. با ادامهٔ گیرداری دو دنده، نقطهٔ تماس از کنار دندهٔ پینیون به‌سوی نوک دنده می‌خزد و درست پیش از آن‌که تماس پایان یابد، نوک دندهٔ پینیون در تماس خواهد بود. پس نقطهٔ گیرداری نهایی جای تلاقی دایرهٔ سر چرخ پینیون با خط فشار یعنی b است. ab خط عمل است، p نقطه گام، c پایین‌ترین نقطهٔ تماسی یک دندانهٔ پینیون (LPSTC: Lowest Point of Single Tooth Contact) و d به بالاترین نقطهٔ تماسی یک دندانهٔ پینیون (HPSTC: Highest Point of Single Tooth Contact) اشاره دارند. این در حالی است که بین c و d تنها یک جفت از دندانه‌های چرخ‌دنده در تماس قرار می‌گیرد و خارج از این محدوده دو جفت از دندانه‌ها در تماس می‌باشد [18]. اندازهٔ خط‌های ab، ap ، pb ، ac و cd از روابط زیر به‌دست می‌آیند [19]:

$$ab = ap + pb \quad (٥١)$$

$$ap = \sqrt{R_{aG}^2 - R_G^2\, Cos^2\phi_l} - R_G\, Sin\phi_l \quad (٥٢)$$

$$pb = \sqrt{R_{aP}^2 - R_P^2\, Cos^2\phi_l} - R_P\, Sin\phi_l \quad (٥٣)$$

$$CR = \frac{ab}{\pi\, m\, Cos\phi_l} \quad (٥٤)$$

$$ac = (CR - 1)\pi\, m\, Cos\phi_l \quad (٥٥)$$

$$cd = (2 - CR)\pi\, m\, Cos\phi_l \quad (٥٦)$$

زمانی که دو جفت از دندانه‌های چرخ‌دنده با هم گیردارند تغییرمکان جفت دندانهٔ اول، $(Q_l^P L^P + Q_l^G L^G)_1$، با تغییرمکان جفت دندانهٔ دوم، $(Q_l^P L^P + Q_l^G L^G)_2$، برابر است، بنابراین خطای انتقال از رابطه‌های (۵۷ و ۵۸) به‌دست می‌آید. اما هنگامی که یک جفت از دندانه‌ها باهم گیردارند، خطای انتقال برابر است با مجموع تغییرمکان دندانه‌های پینیون و چرخ‌دنده و مطابق رابطهٔ (۵۹) تخمین زده می‌شود. در حالتی که دو جفت دندانه گیردار است نیروی بین هر جفت از دندانه‌های گیردار مطابق رابطهٔ (۵۸) محاسبه می‌گردد. L_1 نیروی جفت دندانهٔ اول و L_2 نیروی جفت دندانهٔ دوم است. زمانی که یک جفت دندانهٔ گیردار است نیرو برابر با نیروی کلی یعنی رابطهٔ (٦٠) است و T گشتاور اعمالی بر پینیون است.

$$E_t = (Q_l^P L^P + Q_l^G L^G)_1 = (Q_l^P L^P + Q_l^G L^G)_2$$
$$= (\frac{Q_l^P Q_l^G}{Q_l^P + Q_l^G})_1 L_1 = (\frac{Q_l^P Q_l^G}{Q_l^P + Q_l^G})_2 L_2 \quad (۵۷)$$

$$L_1 + L_2 = L_t \quad (۵۸)$$

$$E_t = Q_l^P L^P + Q_l^G L^G = \frac{Q_l^P Q_l^G}{Q_l^P + Q_l^G} L_t \quad (۵۹)$$

$$L_t = \frac{T}{R_P \, Cos\phi_l} \quad (۶۰)$$

تصحیح پروفیل دندانه

همان‌طور که اشاره گردید تأثیر اصلاح پروفیل دندانهٔ چرخ‌دنده برروی خطای انتقال استاتیکی، موضوع اصلی مورد بحث در پژوهش حاضر می‌باشد. در این بخش به بررسی تأثیر اصلاح پروفیل دندانهٔ چرخ‌دنده برروی خطای انتقال استاتیکی پرداخته می‌شود.

خطای ساخت چرخ‌دنده، تغییرمکان شافت در هنگام نصب و خمش دندانه تحت بارگذاری از تماس صحیح اینولوت در هنگام گیرداری چرخ‌دنده جلوگیری می‌کند؛ درنتیجه تماس‌های نابهنگام دندانه‌ها باعث افزایش صدا و شکست چرخ‌دنده می‌شود. برای کاهش این صدا اصلاح پروفیل دندانه یک عمل معمول است [20].

برای کاهش ارتعاش و صدای یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار دو حالت اصلاح وجود دارد:

۱) اصلاح ماکرو- هندسی (Macro-Geometric). این اصلاح ازجمله تغییر شکل‌های گران‌قیمت در یک جفت چرخ‌دنده به‌حساب می‌آید و فقط در اولین گام فرایند طراحی امکان‌پذیر می‌باشد. برای انجام این اصلاح می‌توان از تغییر پارامترهای تعداد دندانه‌ها، قطرها، زاویهٔ فشار و لقی استفاده نمود. درصورتی که پژوهش‌ها نشان داده است این تغییرشکل علاوه بر هزینهٔ زیاد، تأثیرش برروی کاهش صدا و ارتعاش ناامیدکننده بوده است.

۲) اصلاح میکرو- هندسی (Micro-Geometric). شامل حذف مواد از کنارG دندانه است.

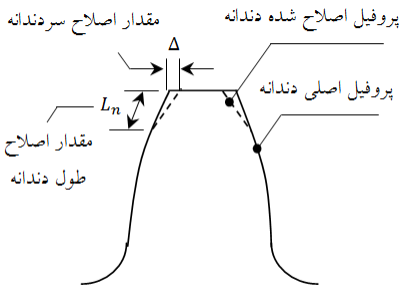
چندین طرح برای اصلاح میکرو- هندسی پروفیل چرخ‌دنده‌های ساده به‌منظور بهینه‌سازی پیشنهاد شده است. این طرح‌ها انتخاب‌های مختلفی از اصلاح سردندانه، اصلاح ریشهٔ دندانه هم برای پینیون و هم برای چرخ‌دنده را شامل می‌شود. گزینه‌های مختلف برای بهینه‌سازی به این شرح است:

- اصلاح سردندانهٔ چرخ‌دنده.
- اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده.
- اصلاح سردندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون.
- اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون.

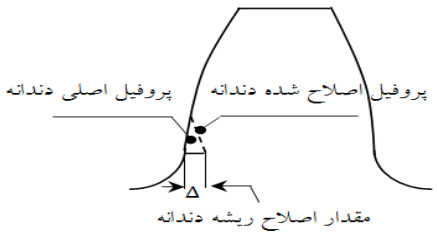
درادامه انواع اصلاح‌های فوق توضیح داده می‌شود.

همان‌طور که از شکل (۸) مشخص است اصلاح سردندانه به‌صورت کاهش در اندازهٔ سردندانه خواهد بود. اصلاح ریشهٔ دندانه مطابق شکل (۹) به‌صورت کاهش در اندازهٔ ریشهٔ دندانه انجام می‌پذیرد و اصلاح در سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده ترکیب دو حالت فوق می‌باشد (شکل ۱۱).

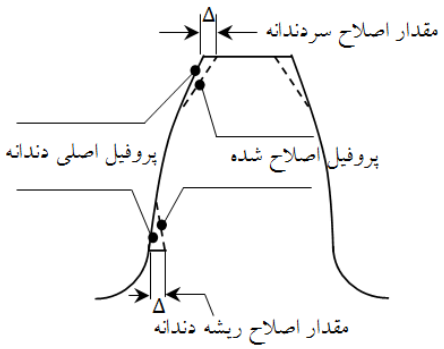
لازم به ذکر است که استفاده از روش اصلاح سردندانه‌ها راحت‌تر از ریشهٔ دندانه می‌باشد و احتمال خطا نیز در آن کمتر است. همچنین هنگامی که نیاز باشد پروفیل یکی از چرخ‌دنده‌ها بدون تغییر بماند معمولاً از اصلاح سر یا سر و ریشهٔ چرخ‌دنده استفاده می‌شود [10].



شکل ۸ پروفیل اصلاح‌شدهٔ سردندانه



شکل ۹ پروفیل اصلاح‌شدهٔ ریشهٔ دندانه



شکل ۱۰ پروفیل اصلاح‌شدهٔ سر و ریشهٔ دندانه

کمینه مقدار اصلاح، Δ_{min}، مطابق رابطهٔ (٦١) مساوی با دوبرابر بیشینه خطای فضایی، $E_{s1,2,max}$، به‌علاوه تغییرمکان بالاترین نقطهٔ یک جفت دندانهٔ گیردار، y_{HPSTC} است؛ و بیشینه مقدار اصلاح دوبرابر این مقدار پیشنهاد شده است.

$$\Delta_{min}= 2E_{s1,2,max} + y_{HPSTC} \qquad (٦١)$$

دقت شود مقدار خطای فضایی صفر فرض شده است و y_{HPSTC} از روابط (٢٣ و ٤١ و ٤٥) و شعاع این نقطه مطابق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [21]:

$$r_{HPSTC} = \sqrt{k_1 d^2 + R_{BP}^2} \qquad (٦٢)$$

$$k_1 d = k_1 a + \frac{2\pi R_{BP}}{N_P} \qquad (٦٣)$$

$$k_1 a = (R_P + R_G)Sin\phi_l - \sqrt{R_{aG}^2 - R_{bG}^2} \qquad (٦٤)$$

باتوجه به شکل (٧)، k_1 محل برخورد خط عمل با دایرهٔ مبنای پینیون و k_2 محل برخورد خط عمل با دایرهٔ مبنای چرخ‌دنده می‌باشد.

طول اصلاح اینولوت دندانه مطابق رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$L_n = \frac{EAP - SAP - P_b}{(2 - \frac{LQ}{\Delta})} \qquad (٦٥)$$

در رابطهٔ (٦٥)، SAP (Start Active Profile) شروع پروفیل فعال و EAP (End Active Profile) پایان پروفیل فعال است که برحسب گام مبنای P_b، و گام دایره‌ای P، مطابق روابط زیر تخمین زده می‌شوند [13]:

$$EAP = \frac{\sqrt{R_a^2 - R_b^2}}{R_B} \qquad (٦٦)$$

$$SAP = \frac{(R_P + R_G)Sin\emptyset_p - \sqrt{R_a^2 - R_b^2}}{R_B} \qquad (٦٧)$$

$$P_b = P\,Cos\,\emptyset_p \qquad (٦٨)$$

شبیه‌سازی و بررسی نتایج

در این بخش به‌منظور بررسی اصلاح پروفیل در خطای انتقال استاتیکی، مدل چرخ‌دنده‌ای مطابق جدول (١) درنظر گرفته شده است و پس از ترسیم خطای انتقال استاتیکی با تبدیل روابط (٦٠-١) به یک کد برنامه‌نویسی بااستفاده از نرم‌افزار متلب (Matlab)، تأثیر اصلاح پروفیل روی خطای انتقال مورد بحث قرار گرفته است.

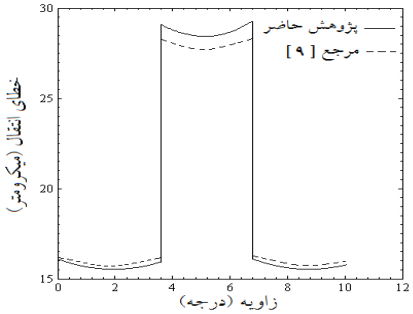
نمودار خطای انتقال استاتیکی داده‌های جدول (١) برای چرخش یک دندانهٔ گیردار، در شکل (١١) رسم گردیده است.

مقدار چرخش برای یک دندانهٔ گیردار برابر با $\frac{360}{N_P}$ است. همان‌طور که از شکل (١٢) مشخص است ناحیهٔ اول نمودار خطای انتقال متعلق به گیرداری چرخ‌دنده درحالتی که دو جفت دندانه در شروع گیرداری است، می‌باشد. ناحیهٔ دوم متعلق به گیرداری یک جفت از

دندانه‌های چرخ‌دنده می‌باشد و مقدار خطای انتقال برای این حالت بیشترین مقدار را دارد، زیرا در این حالت تمام نیروی انتقالی توسط چرخ‌دنده به این جفت دندانه اعمال شده است. ناحیهٔ سوم نمودار نیز متعلق به گیرداری چرخ‌دنده درحالتی که دو جفت دندانه در پایان گیرداری است، می‌باشد.

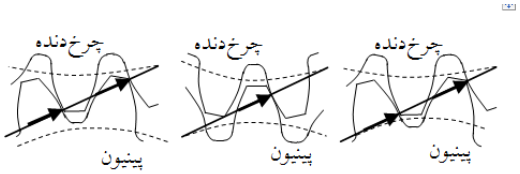
جدول ۱ مشخصات چرخ‌دندهٔ مورد استفاده [9]

پارامترهای چرخ‌دنده	پینیون	چرخ‌دنده
تعداد دندانه	۳٤	۳۵
شعاع بیرونی (mm)	۷۷/۷۲	۷۹/۵۰
شعاع دایره ریشه (mm)	٦۷/۳۱	٦۹/۳٤
پهنای دندانه (mm)	۲۸/٤۵	۲۸/٤۵
ضخامت (mm)	۷/۳۷	۷/۳۷
شعاع فیلت (mm)	۱/۲۷	۱/۲۷
نسبت تماس	۱/٦۸	۱/٦۸
مدول (۱/mm)	۰/۲٤	۰/۲٤
زاویهٔ فشار (deg)	۲۰	۲۰
فاصلهٔ مرکز تا مرکز (mm)	۱٤۸/۱	۱٤۸/۱
گشتاور (Nm)	۷۹۱	۷۹۱
مدول الاسیسیته (GPa)	۲۰٦	۲۰٦
ضریب پواسون	۰/۳	۰/۳



شکل ۱۱ نمودار خطای انتقال

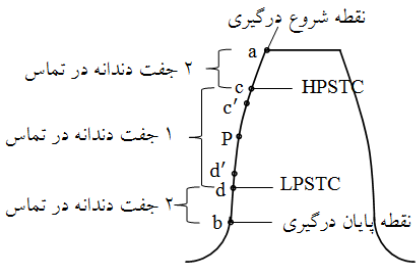
برای صحت‌سنجی نمودار خطای انتقال پژوهش حاضر با مرجع [9] مقایسه گردیده است. همان‌طور که از شکل (۱۱) مشخص است مقدار بیشینه خطای انتقال در مرجع [9] معادل ۲۸ میکرومتر و در پژوهش حاضر ۲۹ میکرومتر تخمین زده شده است. درنتیجه خطای انتقال پژوهش حاضر نسبت به مرجع فوق در حدود سه درصد است و این میزان خطا تأثیری درنتیجهٔ جواب و انتخاب بهترین حالت اصلاح پروفیل ندارد.



الف) درگیری دو جفت دندانه در پایان درگیری
ب) درگیری یک جفت دندانه
ج) درگیری دو جفت دندانه در شروع درگیری

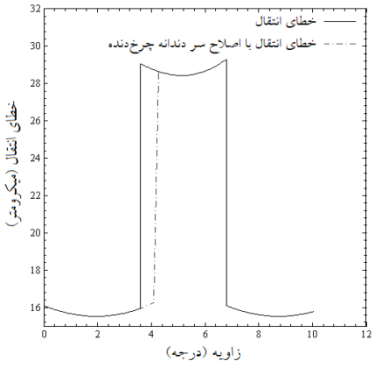
شکل ۱۲ تقسیم‌بندی نیرو در یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار در یک سیکل [22]

پس از صحت‌سنجی خطای انتقال به تأثیر اصلاح پروفیل روی نمودار خطای انتقال استاتیکی پرداخته می‌شود. درابتدا تأثیر اصلاح پروفیل سردندانهٔ چرخ‌دنده مورد بررسی قرار می‌گیرد. درصورتی که اصلاح پروفیل روی سردندانهٔ چرخ‌دنده انجام گیرد، به این علت که گیرداری یک جفت دندانه مطابق شکل (۱۳) از سردندانه شروع می‌شود ناحیهٔ $a-c$ به‌اندازهٔ طول اصلاح، L_n، افزایش می‌یابد. ازآنجایی که این بازه متعلق به ناحیهٔ دوجفت دندانهٔ گیردار می‌باشد درنتیجه با افزایش این بازه قسمت $c-d$، ناحیهٔ متعلق به یک جفت دندانهٔ گیردار، به بازهٔ $c'-d$ کاهش می‌یابد. نمودار خطای انتقال با اصلاح سردندانه مطابق شکل (۱٤) خواهد شد.



شکل ۱۳ نقاط گیرداری در طول پروفیل دندانه

با دقت در شکل (۱٤) مشاهده می‌گردد ناحیهٔ یک جفت دندانهٔ گیردار نسبت به حالت بدون اصلاح ۱٤/۳ درصد کاهش می‌یابد. به‌دلیل این‌که حداکثر خطای انتقال متعلق به بازهٔ $c-d$ است بنابراین با کاهش این بازه صدا نیز کاهش می‌یابد. درواقع اصلاح پروفیل دندانه باعث می‌شود که گیرداری دو دندانه به‌صورت نرم‌تر و یکنواخت‌تری اتفاق افتد و این نرم‌تر و یکنواخت‌تر شدن باعث کاهش خطا و کاهش سروصدا خواهد شد و هر چه مقدار این خطا کمتر باشد صدای چرخ‌دنده کاهش بیشتری می‌یابد.

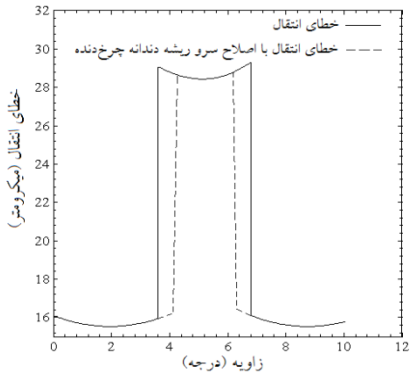


شکل ۱٤ نمودار خطای انتقال با اصلاح سردندانهٔ چرخ‌دنده

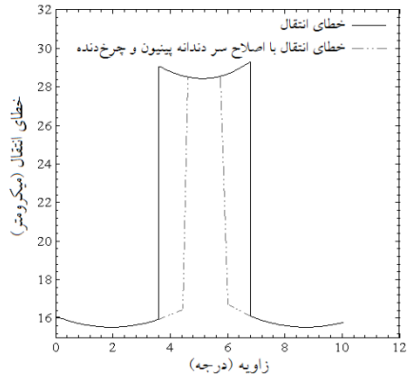
حالت دوم تأثیر اصلاح پروفیل روی سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده می‌باشد. در این حالت علاوه بر اتفاقی که برای سردندانه می‌افتد همان حالت نیز برای ریشهٔ دندانه پیش‌می‌آید. بازهٔ $b-d$ به بازهٔ $b-d'$ و بازهٔ $a-c$ به $a-c'$ افزایش می‌یابد. با دقت در نمودار خطای انتقال اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده، شکل (۱۵)، مشاهده می‌گردد که بازهٔ یک جفت دندانهٔ گیردار ۳۷/۲ درصد کاهش می‌یابد.

حالت سوم تأثیر اصلاح پروفیل روی سردندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون می‌باشد. در این صورت نمودار خطای انتقال آن مطابق شکل (۱٦) خواهد شد. مطابق این شکل ناحیهٔ یک جفت دندانهٔ گیردار حدود ۵۷ درصد کاهش می‌یابد. علت نیز این است که همان حالتی که برای سردندانهٔ چرخ‌دنده پیش می‌آید، برای سردندانهٔ پینیون نیز اتفاق می‌افتد.

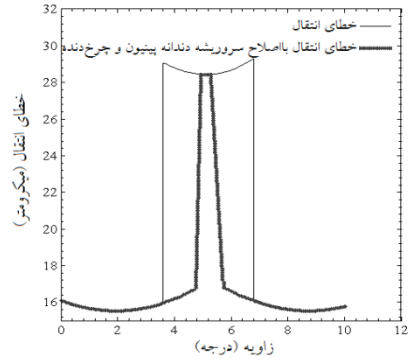
حالت چهارم تأثیر اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون می‌باشد. این حالت درواقع ترکیب حالت‌های فوق خواهد بود و باتوجه به نمودار خطای انتقال آن (شکل ۱۷)، بازهٔ یک جفت ناحیهٔ گیردار به‌اندازهٔ ۷۱ درصد کاهش یافته است.



شکل ۱۵ نمودار خطای انتقال با اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده



شکل ۱٦ نمودار خطای انتقال با اصلاح سردندانهٔ پینیون و چرخ‌دنده



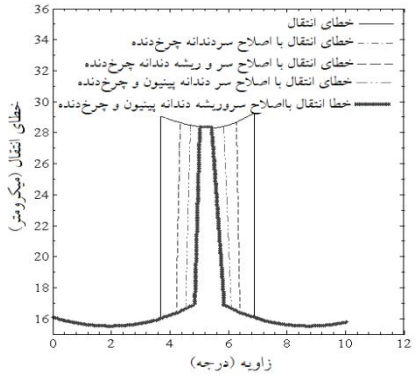
شکل ۱۷ نمودار خطای انتقال با اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ پینیون و چرخ‌دنده

همان‌طور که قبلاً ذکر گردید هرقدر میزان کاهش ناحیهٔ گیرداری بیشتر باشد، سروصدای چرخ‌دنده کاهش بیشتری می‌یابد که هدف اصلی این پژوهش نیز کاهش سروصدا می‌باشد.

باتوجه به استفادهٔ چرخ‌دنده در صنعت و تمایل به اصلاح پروفیل دندانه‌های یکی از چرخ‌دنده‌ها یا هر دو چرخ‌دنده یکی از حالت‌های اصلاح انتخاب می‌شود. همان‌طور که از نمودار شکل (۱۸) مشخص است اصلاح پروفیل روی سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون بهترین حالت اصلاح می‌باشد. درواقع درحالتی که اصلاح روی سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون انجام گیرد مقدار خطای انتقال در جایی که یک جفت دندانه گیردار است کمترین بازه را دارد، درنتیجه سروصدا نیز کاهش می‌یابد. مرجع [9] به بررسی تأثیر اصلاح پروفیل دندانه بااستفاده از تابع هارمونیک پرداخته است و این نتیجه به‌دست آمده که اصلاح سر و ریشهٔ دندانه بهترین حالت اصلاح است که تطابق قابل قبولی بین نتایج تحلیلی پژوهش حاضر و نتایج این مرجع مشاهده می‌گردد.

این درحالی است که اصلاح سردندانه با این‌که باعث کاهش خطای انتقال و به‌تبع آن کاهش صدا می‌شود اما باعث کاهش متوسط ممان اینرسی سطح نیز می‌شود. باتوجه به رابطهٔ زیر کاهش ممان باعث افزایش تنش در سردندانه خواهد شد که این افزایش تنش احتمال شکست سردندانه را افزایش خواهد داد. اصلاح ریشه نیز باعث افزایش تنش در ریشه خواهد شد که شکست را در ریشه افزایش می‌دهد.

$$\sigma = \frac{M}{I/c} \qquad (۶۹)$$



شکل ۱۸ مقایسهٔ انواع مختلف اصلاح پروفیل دندانه

نتیجه‌گیری

هدف از این پژوهش اصلاح پروفیل چرخ‌دندهٔ ساده به‌منظور کاهش خطای انتقال استاتیکی است. خطای انتقال استاتیکی مبنی بر نرمی دندانه به‌روش تحلیلی محاسبه شده است. برای محاسبهٔ نرمی یک دندانه سه فرض تغییر شکل تیر بر اثر نیروی خمشی و برش، نرمی با فرض صلب بودن بدنهٔ چرخ‌دنده و نرمی تماسی بااستفاده از تئوری هرتز درنظر گرفته شد.

سپس به تأثیر اصلاح پروفیل دندانه در کاهش خطای انتقال پرداخته شد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد اصلاح سر و ریشهٔ دندانهٔ چرخ‌دنده و پینیون بهترین حالت اصلاح می‌باشد و این اصلاح باعث کاهش حدود ۷۰ درصد ناحیهٔ یک، شکل(۱۲)، جفت دندانهٔ گیردار می‌شود.

ازآنجایی که خطای انتقال رابطهٔ مستقیمی با صدای یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار دارد، هر عاملی که باعث کاهش خطای انتقال شود صدای چرخ‌دنده‌های گیردار را نیز کاهش می‌دهد.

قابل ذکر است که اصلاح پروفیل دندانه با این‌که باعث کاهش خطای انتقال استاتیکی یک جفت چرخ‌دندهٔ گیردار می‌شود، اما تنش و احتمال شکست دندانه را افزایش می‌دهد.

مراجع

1. Buckingham, E., "*Analytical mechanics of gears*", Courier Corporation, New York: Dover Publications, INC., (1988).
۲. فرجی مهیاری، خدیجه، «مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل مکانیزم جدید کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوار»، مجلهٔ علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، سال ۲۶، شمارهٔ دو، (۱۳۹٤).
3. Harris, S.L., "Dynamic loads on the teeth of spur gears", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 172, No. 1, pp. 87-112, (1958).
4. Mark, W.D., "Analysis of the vibratory excitation of gear systems: basic theory", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 63, No. 5, pp. 1409-1430, (1978).
5. Athavale, S.M., Krishnaswami, R. and Kuo, E.Y., "Estimation of statistical distribution of composite manufactured transmission error", *A precursor to gear whine, for a helical planetary gear system*, No. 2001-01-1507, SAE Technical Paper, (2001).
6. Houser, D.R., Fred B.O., Mark J.V., Raymond J.D. and Joseph W.L. "Comparison of transmission error predictions with noise measurements for several spur and helical gears", *In Proceedigns, 30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, AIAA Paper# 94, Vol. 3366, (1994).
7. Åkerblom, M. and Pärssinen, M., "A study of Gear Noise and Vibration", *Proceedings OST-99 Symposium on Machine Design*, SE–100 44 Stockholm, ISSN 1400-1179, pp. 183–229, (2002).
8. Belsak, A. and Prezelj, J., "Identification of Noise Emission in a Gear Unit", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 123, No. 5, pp. 2039-2044, (2008).
9. Tavakoli, M.S. and Houser, D.R., "Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, No. 1, pp. 86-94, (1986).
10. Bonori, G., Barbieri, M. and Pellicano, F., "Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms", *Journal of sound and vibration*, Vol. 313, No. 3, pp. 603-616, (2008).
11. Dearn, K.D. and Walton, D., "Acoustic emissions from polymeric gears", *Proceedings of the World Congress on Engineering*, Vol. 2, No.1, pp. 978-988, (2009).
12. Kissling, E.U., "Effects of Profile Corrections on Peak-to-Peak Transmission Error", *Gear Technology*, pp. 52-61, July (2010).
13. Palmer, D. and Fish, M., "Evaluation of methods for calculating effects of tip relief on transmission error, noise and stress in loaded spur gears", *Gear Technology*, pp. 56-67, January/February (2012).
14. Tharmakulasingam, R., "Transmission error in spur gears: Static and dynamic finite-element modeling and design optimization", PhD, Diss. Brunel University School of Engineering and Design, London, (2010).
15. Cornell, R.W., "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, No. 2, pp. 447-459, (1981).
16. Matusz, J.M., O'donnell, W.J. and Erdlac, R.J., "Local flexibility coefficients for the built-in ends of beams and plates", *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 91, No. 3, pp. 607-613, (1969).
17. Laskin, I., Orcutt, F.K. and Shipley, E.E., "Analysis of noise generated by UH-1 helicopter transmission", No. MTI-67TR83, Mechanical Technology INC Latham NY, (1968).
18. Hua, D.Y. and Khonsari, M.M., "Application of transient elastohydrodynamic lubrication analysis for gear transmissions", Tribology transactions,Vol. 38, No. 4, pp. 905-913, (1995).

19. Kumar, P., Saini, P.K. and Tandon, P., "Transient elastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear using couple-stress fluid, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers", *Part J, Journal of Engineering Tribology*, Vol. 221, No. 6, pp. 743-754, (2007).
20. Dudley, D.W., "*Dudley's gear handbook*", Second Edittion, Boca Raton, London, New York: CRC Press, (2012).
21. Lin, H.H., Dennis, P.T. and Oswald, F.B., "Profile modification to minimize spur gear dynamic loading", *Design Engineering Technical Conference NTIS*, Orlando, Florida, September 24-28, (1988).
22. Hiroaki, E. and Nader, S., "*Gearbox Simulation Models with Gear and Bearing Faults*", First Edittion, USA: Intech Open Access Publisher, (2012).

بالانس دینامیکی کامل نیرویی یک روبات موازی کروی جدید با ساختار 3(RPSP)-S با افزودن یک مکانیزم چندمیله‌ای*

(یادداشت پژوهشی)

مهدیه حیدری[۱] جواد انفرادی[۲]

چکیده *در این مقاله بررسی شرایط بالانس دینامیکی نیرویی یک روبات موازی کروی جدید بااستفاده از روش افزودن مکانیزم اضافه انجام می‌شود. در روش پیشنهادی از یک مکانیزم اضافه و اتصال آن به هر شاخه روبات به‌گونه‌ای استفاده می‌شود که باعث حذف شتاب‌های کوریولیس و درنتیجه حذف نیروهای لرزشی ناشی از رفت‌وبرگشت جرم لغزنده در معادلات بالانس دینامیکی نیرویی روبات شود. سپس با افزودن سه وزنه به هر شاخه روبات، بالانس نیرویی روبات انجام می‌شود. درپایان، با تحلیل دینامیکی روبات بااستفاده از نرم‌افزار آدامز، نشان داده می‌شود که بااستفاده از روش ارائه‌شده، نیروهای لرزشی منتقل‌شده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x ۹۸٪، درراستای y، ۷۹٪ و درراستای z، ۹۹.٤٪ کاهش خواهند یافت.*

واژه‌های کلیدی بالانس دینامیکی نیرویی؛ روبات موازی کروی؛ نیروی لرزشی؛ جرم افزوده.

Complete Dynamic Shaking Force Balancing of a 3(RPSP)-S Spherical Parallel Robot Using Extra Linkage

M. Heydari J. Enferadi

Abstract *In this paper, an approach for reducing the shaking force of a spherical parallel robot using extra mechanisms is proposed. The proposed method vanishes the Coriolis acceleration terms due to moving the slider links on each branch from force balancing equation. For this purpose, two links are added to each branch of the manipulator as an extra linkage mechanism. Next, three weights are added to each branch of the robot for reducing the applied shaking forces on the base platform. Finally, the dynamic numerical simulations is performed using ADAMS software. The results show a reduction in the applied shaking forces on the base as much as 98%, 79% and 99.4% along the X, Y and Z axes, respectively.*

Key Words Shaking force; Force balancing; Spherical parallel robot; Inverse kinematics.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۸/۲۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۳/۲۷ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.60400

(۱) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد. enferadi5637@mshdiau.ac.ir

مقدمه

مکانیزم‌های موازی به‌عنوان مکانیزم‌هایی تعریف می‌شوند که صفحهٔ متحرک آنها توسط شاخه‌های سینماتیکی متعدد به پایهٔ ثابت متصل می‌شود و هر شاخه نیز می‌تواند به‌عنوان یک مکانیزم سری درنظر گرفته شود. روبات‌های موازی به‌وسیلهٔ مک کالیون و فم [1] پیشنهاد داده شد و هانت [2] مطالعات مقدماتی ترکیب‌بندی‌های روبات‌های موازی مختلف را انجام داد. درمقایسه با مکانیزم‌های سری مکانیزم‌های موازی اینرسی حرکتی کمتر، سفتی بالاتر، نسبت قدرت به وزن بالاتر و... دارند. ازاین‌رو مکانیزم‌های موازی برای کاربردهای روباتیکی پیشرفته با سرعت بالا بسیار مناسب هستند. نظیر سایر وسایل روباتیکی، آنها نیز نیروها و گشتاورهایی را به پایهٔ خود در حین این حرکت‌های سریع وارد می‌کنند و باعث خستگی، ارتعاش، صدا و خرابی در ساختارهای حمایتی مکانیزم می‌شوند.

در طول چند دههٔ گذشته روبات‌های موازی راه خود را به صنعت برای برنامه‌های کاربردی نظیر کارهای برداشت و گذاشت سریع، پیدا کرده‌اند. تقاضای مداوم برای افزایش سرعت عملیاتی این روبات‌ها، طراح را با مسائل مختلف به چالش می‌کشد؛ یکی از این مسائل ارتعاش شدید در پایهٔ روبات به‌علت نیروهای لرزشی و گشتاورهای لرزشی یعنی نیروها و گشتاورهای اینرسی اعمال‌شده توسط روبات به پایه می‌باشد که در عمل باعث آسیب‌هایی به سیستم‌های مکانیکی و سیستم کنترل روبات و همچنین ماشین‌آلات مجاور می‌شود.

بالانس مکانیزم‌ها یک موضوع تحقیقاتی بسیار مهم در چند دههٔ اخیر بوده است [3-8]. یک مکانیزم بالانس‌شده خصوصیات دینامیکی بهتری دارد و ارتعاشات کمتری در حین حرکت به پایهٔ روبات وارد می‌کند. ازاین‌رو کارهای مختلفی روی مطالعهٔ بالانس دینامیکی روبات‌های موازی صفحه‌ای شده است؛ اما دربارهٔ بالانس نیرویی و گشتاوری روبات‌های موازی کروی کارهای قابل‌توجهی انجام نشده است و بالانس دینامیکی روبات‌های موازی فضایی چند درجه آزادی به‌دلیل پیچیده بودن مسئله، اصلاً مورد توجه محققان نبوده است.

برای از بین بردن نیروهای لرزشی تاکنون روش‌هایی مانند: افزودن ساختارهای اضافه [9]، اضافه کردن اعضای الاستیک [10]، کنترل شتاب مرکز جرم کلی مکانیزم [3, 4] ارائه شده‌اند.

همچنین برای از بین بردن مومنتوم لرزشی نیز روش‌هایی مانند: استفاده از چرخش‌های معکوس [11]، اضافه کردن لینک‌های چهار عضوی [12]، به‌کارگیری مکانیزم افزونه که مسیرهای بهینهٔ لینک‌های حرکتی را تولید می‌کند [13]، چرخش معین مجری نهایی [14] و بالانسینگ توسط اضافه کردن یک چرخ لنگر اینرسی چرخشی با یک سرعت زاویه‌ای معین [5,15] ارائه شده‌اند.

باوجود این‌که بیش از یک قرن است که موضوع بالانس دینامیکی مکانیزم‌ها در حال بررسی است [16]، بالانس دینامیکی روبات‌ها و به‌ویژه بالانس روبات‌های موازی به‌تازگی آغاز شده است. چونگ و چو [17] بالانس نیروی لرزشی روبات سری پوما ۷۶۰ را در سال ۱۹۸۸ مورد مطالعه قرار دادند. آنها معادلات دینامیکی حرکت را براساس روش لاگرانژ به‌دست آوردند و از طریق افزودن وزنه و یک مکانیزم ویژه روبات را بالانس کردند. در سال ۲۰۰۰ ریکارد و گسلین [12] بالانس دینامیکی روبات‌های موازی را برای اولین‌بار در یک راه‌حل کلی‌تر ارائه دادند. روش آنها بر این اساس بود که از مکانیزم‌های چهار لینکی که بالانس دینامیکی شده بودند برای ساختن هر کدام از پایه‌های روبات سه درجه آزادی صفحه‌ای استفاده کردند. ایشان از مکانیزم‌هایی استفاده کردند که طبق اندازه‌های سینماتیکی و شکل اولیهٔ خاص خود بالانس

هستند و هیچ جرم اضافه‌ای یا چرخش معکوس اضافه‌ای به سیستم اضافه نمی‌کنند و شرایط بالانس برطبق ثابت ماندن مومنتوم خطی و زاویه‌ای روبات را به‌دست آوردند [12].

اگرچه مقالات مختلفی پس از آن نیز منتشر شده است، اما در مجموع حجم متون مربوط به این حوزه قابل توجه نیست. علاوه بر این، بسیاری از مقالات به بررسی بالانس روبات‌های چند درجه آزادی بااستفاده از راه‌حل‌های تعادل برای مکانیزم‌ها پرداخته‌اند که معایب قابل‌توجهی مانند افزودن جرم اضافی و اینرسی اضافی دارند [19-17]. اینرسی بیشتر باعث می‌شود که توان بیشتری برای حرکت محرک‌ها مورد نیاز باشد و جرم بیشتر به‌معنی نیاز داشتن توان بیشتر برای بالا بردن و کنترل مجری نهایی در فضای کاری است. ویجک و هردر [20] در مقاله‌ای به مرور، مقایسه و ارزیابی تعدادی از روش‌ها که جرم و اینرسی چرخشی معکوس به روبات اضافه می‌کنند، پرداخته‌اند و یک شاخص نرمال‌شده برای قضاوت درمورد انواع روش‌های ارائه‌شده معرفی کرده‌اند. به‌تازگی راه‌حل‌های بالانس که استفاده از ساختار موازی روبات‌ها را دربر می‌گیرد، نشان داده است که روش کارامدی است. ویجک و هردر [9] بااستفاده از روش فیشر به بیان روش‌هایی برای به‌دست آوردن مرکز جرم یک مکانیسم در یک نقطهٔ تغییرناپذیر برروی یکی از لینک‌ها پرداختند. بااستفاده از این روش مکانیزم را بدون اضافه کردن جرم چرخشی معکوس و با اضافه کردن ساختارهایی به ساختار اولیهٔ مکانیزم بالانس کردند.

آراکلیان و همکاران [21] به بیان روشی برمبنای روش‌های کنترلی پرداختند. آنها چند مسیر مختلف برای حرکت موردنظر مجری نهایی درنظر گرفتند و مسیری که پتانسیل کمتری دارد را انتخاب کرده و با طراحی کنترلر، روبات را از مسیر بهینه حرکت دادند، به‌صورتی که کمترین نیرو و مومنتوم لرزشی به پایهٔ روبات وارد می‌شد. بروت و آراکلیان [22] برای بالانس یک مکانیزم چهار میله از مکانیزم دیگری که به‌طور دینامیکی بالانس است، استفاده کردند و درنهایت فقط با اضافه کردن چند جرم چرخشی معکوس، مکانیزم بدون اضافه کردن هیچ اینرسی چرخشی معکوسی، هم بالانس نیرویی و هم بالانس مومنتومی شده است. وو و گسلین [23] یک روبات سه درجه آزادی و یک روبات شش درجه آزادی را توسط اضافه کردن یک مکانیزم متوازی‌السطوح به پایه‌های روبات و اضافه کردن جرم و اینرسی چرخشی معکوس به این مکانیزم بالانس نیرویی و مومنتومی کردند.

الیسی و شیرین‌زاده [24] بااستفاده از جرم‌های اضافه و متصل کردن دو عدد فنر به لینک‌های محرک، بالانس استاتیکی روبات موازی دو درجه آزادی صفحه‌ای 5R را انجام دادند. آنها در مقالهٔ دیگری [25] بالانس دینامیکی همین روبات را با اضافه کردن چهار میله که به انتهای آنها جرمی اضافه شده بود، انجام دادند. همچنین درسیگ و دین [26] طراحی و بهینه‌سازی همین روبات را با درنظر گرفتن دو شرط ایزوتروپی سینماتیکی و بالانس استاتیکی آن انجام داده‌اند. یکی دیگر از روش‌های مورد استفاده که برای بالانس کامل دینامیکی نیروها و گشتاورهای لرزشی مکانیزم‌های صفحه‌ای به‌کار گرفته شده است، استفاده از یک جسم صلب متحرک است [27]. بالانس کامل دینامیکی نیروها و گشتاورهای لرزشی یک روبات موازی صفحه که قابلیت دوران نامحدود حول محور عمود بر صفحه را دارد نیز بااستفاده از افزودن جرم‌های اضافه به مکانیزم انجام شده است [28]. حداقل‌سازی نیروها و گشتاورهای لرزشی دینامیکی مکانیزم‌های صفحه‌ای حلقه بسته بااستفاده از بهینه‌سازی شکل لینک‌های مکانیزم نیز در مرجع [29] انجام شده است. بهینه‌سازی سازی شکل لینک‌های این مکانیزم توسط نقاط کنترلی منحنی‌های

بی- اسپیلاین صورت پذیرفته است. بالانس دینامیکی یک روبات افزونهٔ صفحه‌ای موازی با ساختار 4-RRR به‌صورت تحلیلی و آزمایشگاهی در مراجع [30, 31] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین بالانس دینامیکی برای حداقل‌سازی نیروهای لرزشی دینامیکی به پایهٔ روبات سه درجه آزادی موازی دلتا با اضافه کردن سه جرم متعادل‌کننده و استفاده از دو لینک اضافی انجام شده است .[32]

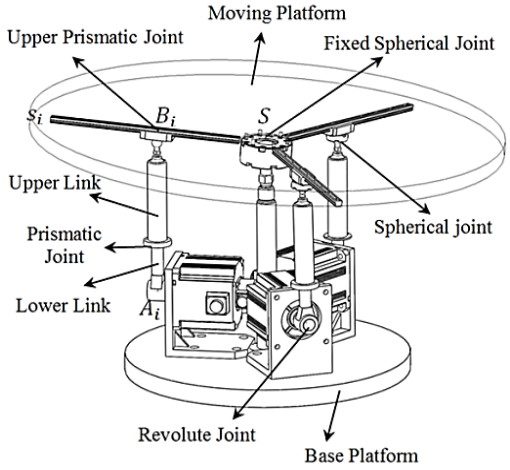
در روبات‌هایی که قید رفت‌وبرگشتی دارند، حذف نیروهای اینرسی منتقل‌شده به پایهٔ روبات یک چالش اساسی برای این‌گونه روبات‌ها محسوب می‌شود. در روبات موردنظر اگر بخواهیم از روش معمول افزودن وزنه استفاده کنیم به‌دلیل وجود قید رفت‌وبرگشتی باید وزنه‌ای را اضافه کنیم که به تناسب حرکت رفت‌وبرگشتی قید مربوط، حرکت کند که کار بسیار دشواری می‌باشد و اگر بخواهیم هم‌زمان بالانس گشتاور لرزشی را نیز انجام بدهیم این روش صحیح نیست، بنابراین ما ابتدا یک مکانیزم اضافه را به پایهٔ روبات اضافه می‌کنیم که مشکل قید رفت و برگشتی و ظاهر شدن ترم‌های سرعت و شتاب‌های شعاعی در نیروهای لرزشی را رفع می‌کند، سپس از روش افزودن وزنه برای بالانس روبات استفاده می‌کنیم. درانتها بااستفاده از نرم‌افزار آدامز نتایج بررسی می‌شود و مشاهده می‌گردد که بااستفاده از روش ارائه‌شده نیروهای لرزشی منتقل‌شونده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x، ۹۸ درصد، درراستای y، ۷۹ درصد و درراستای z، ۹۹ درصد کاهش خواهند یافت؛ البته با این روش جرم ربات نسبت به حالت اولیه زیادتر می‌شود.

معرفی روبات کروی 3(RPSP)-S

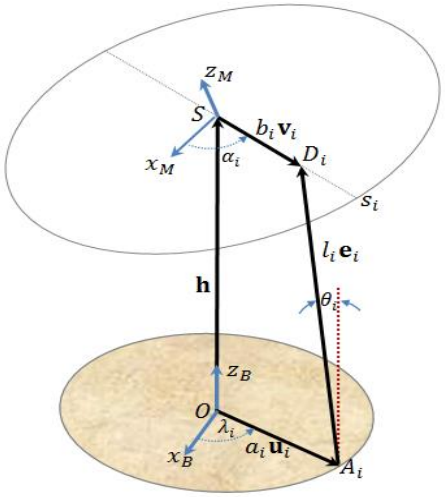
در روبات موازی کروی جدید 3(RPSP)-S صفحهٔ ثابت و صفحهٔ متحرک از طریق سه زنجیرهٔ سینماتیکی با ساختار مشابه به یکدیگر متصل شده‌اند. همچنین یک پایهٔ ثابت که در انتهای آن یک مفصل کروی درنظر گرفته شده است به‌طور مستقیم به صفحهٔ متحرک به یکدیگر متصل شده است. مانند ساختار اکثر روبات‌های موازی این زنجیره‌های سینماتیک با ساختارهای گوناگون اما یکسان و تکرارپذیر با تعداد مختلف با یکدیگر ترکیب می‌شوند و باعث به‌وجودآمدن سیستم‌های گوناگون در طراحی روبات‌های موازی می‌شوند. در روبات کروی موازی موردنظر سه شاخهٔ سینماتیکی با ساختارهای یکسان وجود دارد. در هر زنجیرهٔ سینماتیکی به‌ترتیب یک مفصل محرک چرخشی، یک مفصل کشویی، یک مفصل کروی و یک مفصل کشویی درنظر گرفته شده است.

در شکل (۱) روبات موازی کروی 3(RPSP)-S با محرک‌های زاویه‌ای نشان داده شده است. همچنین یکی از زنجیره‌های سینماتیکی این روبات نیز به‌صورت برداری در شکل (۲) نشان داده شده است.

در این روبات بردار $\mathbf{h}$ نشان‌دهنده طول و راستای ستون وسط روبات، $\mathbf{v}_i$ بردار یکه روی صفحهٔ متحرک (که برای نشان دادن جهت و راستای هر یک از مفاصل لغزشی صفحهٔ متحرک به‌کار برده می‌شود)، $\mathbf{u}_i$ بیانگر بردار یکه نشان‌دهندهٔ راستای دوران مفصل چرخشی متصل به پایهٔ روبات، $\mathbf{e}_i$ بردار یکه نشان‌دهندهٔ راستای بازوی متحرک اتصال‌دهندهٔ دو صفحهٔ ثابت و متحرک، b_i بیانگر مقدار عددی فاصله میان اتصال کروی مرکزی تا انتهای هر یک از مفاصل لغزشی روی صفحهٔ متحرک، a_i نشان‌دهندهٔ مقدار عددی فاصله میان اتصال مفصل چرخشی تا ستون وسط روبات، l_i برابر با طول هر شاخه روبات و θ_i بیانگر مقدار چرخش مفصل چرخشی محرک هستند.



شکل ۱ روبات 3(RPSP)-S با محرک زاویه‌ای



شکل ۲ مشخصات هندسی و پارامترهای یک شاخه روبات 3(RPSP)-S

سینماتیک معکوس روبات 3(RPSP)-S

قبل از انجام تحلیل سینماتیک معکوس روبات، لازم است دستگاه‌های مختصات به‌کار گرفته‌شده معرفی شوند. در تحلیل این روبات از دو سیستم دستگاه مختصات استفاده شده است. دستگاه مختصات ثابت {B} که متصل به پایهٔ ثابت روبات است و مبدأ آن در مرکز صفحهٔ ثابت درنظر گرفته شده است. محور x_B این دستگاه درراستای بردار یکه $\mathbf{u}_1$ و محور z_B آن درراستای $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{i+1}$ درنظر گرفته شده است و محور y_B آن نیز بااستفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود. دستگاه مختصات متحرک {M} که به صفحهٔ متحرک متصل شده است و مبدأ آن در مرکز صفحهٔ متحرک (مفصل کروی پایه‌ثابت) قرار گرفته است. محور x_M این دستگاه درراستای بردار یکه $\mathbf{v}_1$ و محور z_M آن درراستای $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}$ درنظر گرفته شده‌اند و محور y_M آن نیز می‌تواند با قانون دست راست تعیین شود. برای ارتباط این دو دستگاه با یکدیگر، از ماتریس دورانی که برحسب زوایای اویلر ثابت XYZ که با رول (φ_x)، پیچ (φ_y) و یاو (φ_z) مشخص می‌شوند، استفاده می‌گردد. بنابراین این ماتریس را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$
{}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{M}}\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\varphi_z)\mathbf{R}_Y(\varphi_y)\mathbf{R}_X(\varphi_x) =
\begin{bmatrix}
c\varphi_z c\varphi_y & c\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x - s\varphi_z c\varphi_x & c\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x + s\varphi_z s\varphi_x \\
s\varphi_z c\varphi_y & s\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x + c\varphi_z c\varphi_x & s\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x - c\varphi_z s\varphi_x \\
-s\varphi_y & c\varphi_y s\varphi_x & c\varphi_y c\varphi_x
\end{bmatrix}
\tag{۱}
$$

سینماتیک معکوس شامل محاسبهٔ مقادیر متغیرهای محرک‌ها برای جهت‌گیری معلوم صفحهٔ متحرک نسبت به صفحهٔ ثابت است. برای روبات موازی کروی 3(RPSP)-S که دارای سه زنجیرهٔ سینماتیکی است، برای هر زنجیرهٔ سینماتیکی می‌توان نوشت:

$$\mathbf{h} + b_i\mathbf{v}_i = a_i\mathbf{u}_i + l_i\mathbf{e}_i \tag{۲}$$

باتوجه به این‌که مقادیر بردار $\mathbf{v}_i$ در دستگاه {M} معلوم است، به‌کمک ماتریس دوران ${}^{B}_{M}\boldsymbol{R}$ به‌آسانی می‌توان بردار $\mathbf{v}_i$ را در دستگاه $\{B\}$ توصیف کرد. بنابراین می‌توان رابطهٔ (۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{h} + b_i\,{}^{B}_{M}\mathbf{R}^{M}\mathbf{v}_i = a_i\mathbf{u}_i + l_i\mathbf{e}_i \tag{۳}$$

$$\mathbf{u}_i = [\cos\lambda_i \quad \sin\lambda_i \quad 0]^T \tag{٤}$$

که در آنها زاویهٔ λ_i بیانگر زاویهٔ بین بردارهای یکه $\mathbf{u}_i$ و محور x_B است. همچنین بردارهای ${}^M\mathbf{v}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$ {}^M\mathbf{v}_i = [\cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad 0]^T \qquad (۵) $$

که در آن α_i بیانگر زاویهٔ بین بردارهای یکه $\mathbf{v}_i$ و محور x_M است. ازآنجاکه در تحلیل بالانس نیرویی محاسبهٔ مقدار طول هر شاخه لازم است، برای یافتن مقادیر l_i ابتدا باید مقادیر b_i به‌دست آورده شود؛ بنابراین با ضرب طرفین رابطهٔ (٤) در $\mathbf{u}_i^T$ می‌توان نوشت:

$$ \mathbf{u}_i^T\mathbf{h} + b_i\mathbf{u}_i^T\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i = a_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i + l_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{e}_i \qquad (٦) $$

ازطرفی باتوجه به ساختار روبات و باتوجه به شکل (۲) می‌توان نوشت:

$$ \mathbf{u}_i^T\mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = 1, \quad \mathbf{u}_i^T\mathbf{e}_i = 0 \qquad (۷) $$

با جای‌گذاری روابط فوق در رابطهٔ (٤) مقدار b_i به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$ b_i = a_i / \mathbf{u}_i^T\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i \qquad (۸) $$

با معلوم شدن b_i می‌توان l_i را به‌صورت ذیل محاسبه کرد:

$$ l_i = \|l_i\mathbf{e}_i\| = \left\|\mathbf{h} + b_i\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i - a_i\mathbf{u}_i\right\| \qquad (۹) $$

با محاسبهٔ l_i بردار یکه $\mathbf{e}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$ \mathbf{e}_i = (\mathbf{h} + b_i\,{}^B_M\mathbf{R}\,{}^M\mathbf{v}_i - a_i\mathbf{u}_i)/l_i \qquad (۱۰) $$

بااستفاده از فرمول رودریگز [33] داریم:

$$ \begin{aligned} \mathbf{e}_i = \mathbf{R}(\mathbf{u}_i,\theta_i)\mathbf{k} &= cos\theta_i\mathbf{k} \\ &+ (1-cos\theta_i)\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{k} \\ &+ \sin\theta_i(\mathbf{u}_i\times\mathbf{k}) \end{aligned} \qquad (۱۱) $$

ازآنجایی‌که بردار یکه $\mathbf{k}$ عمود بر بردارهای یکه $\mathbf{u}_i$ است، می‌توان نوشت:

$$ \begin{aligned} \mathbf{e}_i &= cos\theta_i\mathbf{k} + \sin\theta_i(\mathbf{u}_i\times\mathbf{k}) \\ &= [u_{iy}sin\theta_i \quad -u_{ix}sin\theta_i \quad cos\theta_i]^T \end{aligned} \qquad (۱۲) $$

بنابراین مقدار دوران هر موتور را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

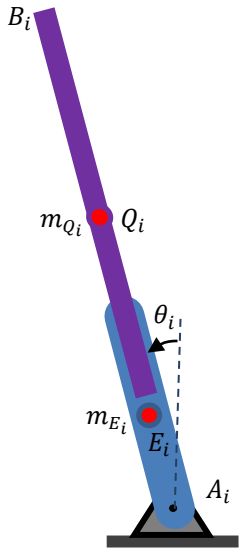
$$ \theta_i = Atan2\left(-\frac{e_{iy}}{u_{ix}}, e_{iz}\right) \; for \; i = 1,2,3 \qquad (۱۳) $$

در این مقاله، مقدار دوران موتورها بااستفاده از حل مسئلهٔ سینماتیک برای مسیر داده‌شده برحسب زمان به‌دست می‌آید و سپس برای محاسبهٔ نیروهای لرزشی به‌عنوان ورودی مفاصل محرک در نرم‌افزار ADAMS مورد استفاده قرار می‌گیرد.

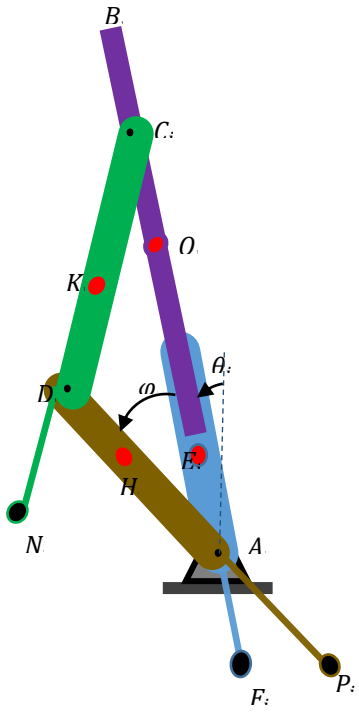
بالانس نیرویی روبات کروی 3(RPSP)-S

ازآنجاکه صفحهٔ متحرک حول یک مفصل کروی دوران می‌کند، بنابراین درصورتی‌که مرکز جرم آن بر مرکز مفصل کروی نیز منطبق نباشد، به‌آسانی می‌توان با اضافه کردن جرم نامیزان در طرف دیگر نیروی لرزشی ناشی از آن را به حداقل رسانید. بنابراین در این روبات، ارائهٔ روشی برای بالانس شاخه‌های روبات که دارای لینک‌های دورانی و لغزشی است، از اهمیت برخوردار است. برای این منظور پارامترهای جرمی روبات را قبل از بالانس نیرویی مطابق شکل (۳) درنظر می‌گیریم. مدل جرمی لینک‌ها برای بالانس نیرویی روبات، به‌صورت جرم متمرکز درنظر گرفته شده است. در این شکل جرم لینک دورانی (m_{E_i}) در نقطهٔ E_i، و جرم لینک لغزنده (m_{Q_i}) در نقطهٔ Q_i فرض شده است.

در شکل (۳) یک پایهٔ روبات قبل از بالانس نشان داده شده است.



شکل ۳ پارامترهای جرمی یک شاخه روبات قبل از بالانس نیرویی روبات



شکل ٤ لینک‌های کمکی اضافه‌شده و پارامترهای جرمی یک شاخه روبات برای بالانس نیرویی روبات

اکنون می‌توانیم نیروی لرزشی اعمالی به پایهٔ هر شاخه روبات که ناشی از اینرسی لینک‌ها است، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_i = m_{Q_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i} + m_{E_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i} \qquad (۱٤)$$

که به‌آسانی می‌توان گفت که ترم شتاب کوریولیس در $\ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i}$ مستتر است؛ بنابراین چنان‌چه خواسته باشیم از روش معمول اضافه‌کردن وزنه برای بالانس نیرویی استفاده کنیم، امکان پیچیده‌شدن بالانس روبات وجود دارد. به‌همین دلیل دو لینک کمکی به هر شاخه روبات به‌گونه‌ای اضافه می‌کنیم که بتواند باعث حذف نیروهای اینرسی ناشی از شتاب کوریولیس شود.

در شکل (٤) لینک‌های کمکی اضافه‌شده A_iD_i و D_iC_i به هر شاخه روبات نشان داده شده است. جرم لینک A_iD_i برابر با m_{H_i} و جرم لینک D_iC_i نیز برابر با m_{K_i} و به‌صورت متمرکز به‌ترتیب در نقاط H_i و K_i درنظر گرفته شده‌اند. برای بالانس جرمی هر شاخه نیز سه وزنهٔ بالانسی m_{P_i}، m_{N_i} و m_{F_i} به‌ترتیب در نقاط P_i، N_i و F_i درنظر گرفته شده است.

بنابراین نیروی لرزشی وارد به پایهٔ هر شاخه روبات را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i = {} & m_{H_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{H_i} + m_{P_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{P_i} + m_{K_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{K_i} + m_{N_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{N_i} \\ & + m_{Q_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i} + m_{E_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i} + m_{F_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{F_i}\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\ddot{\boldsymbol{d}}_{H_i}$، $\ddot{\boldsymbol{d}}_{P_i}$، $\ddot{\boldsymbol{d}}_{K_i}$، $\ddot{\boldsymbol{d}}_{N_i}$، $\ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i}$، $\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i}$ و $\ddot{\boldsymbol{d}}_{F_i}$ به‌ترتیب شتاب جرم‌های m_{H_i}، m_{P_i}، m_{K_i}، m_{N_i}، m_{Q_i}، m_{E_i} و m_{F_i} هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{H_i} = r_{H_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} \qquad (۱٦)$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{P_i} = r_{P_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} \qquad (۱۷)$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{K_i} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{K_i/D_i} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + r_{K_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} \qquad (۱۸)$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{N_i} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{N_i/D_i} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + r_{N_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} \quad (۱۹)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i} &= \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{Q_i/C_i} \\ &= \ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} + r_{Q_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i}\end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_{F_i} = r_{F_i}\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i} \quad (۲۱)$$

در روابط فوق پارامترهای بی‌بعد ضرایب شتاب نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r_{H_i} = \|\boldsymbol{d}_{A_iH_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iD_i}\| \quad (۲۲)$$

$$r_{P_i} = -\|\boldsymbol{d}_{A_iP_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iD_i}\| \quad (۲۳)$$

$$r_{K_i} = \|\boldsymbol{d}_{D_iK_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{D_iC_i}\| \quad (۲۴)$$

$$r_{N_i} = -\|\boldsymbol{d}_{D_iN_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{D_iC_i}\| \quad (۲۵)$$

$$r_{Q_i} = -\|\boldsymbol{d}_{C_iQ_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iE_i}\| \quad (۲۶)$$

$$r_{F_i} = -\|\boldsymbol{d}_{A_iF_i}\|/\|\boldsymbol{d}_{A_iE_i}\| \quad (۲۷)$$

با جای‌گذاری روابط (۲۷-۱۶) در معادلهٔ (۱۵) و ساده‌سازی آن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i = &\left(m_{H_i}r_{H_i} + m_{P_i}r_{P_i} + m_{K_i} + m_{N_i} + m_{Q_i}\right)\ddot{\boldsymbol{d}}_{D_i} \\ &+\left(m_{K_i}r_{K_i} + m_{N_i}r_{N_i} + m_{Q_i}\right)\ddot{\boldsymbol{d}}_{C_i/D_i} \\ &+\left(m_{Q_i}r_{Q_i} + m_{E_i} + m_{F_i}r_{F_i}\right)\ddot{\boldsymbol{d}}_{E_i}\end{aligned} \quad (۲۸)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در معادلهٔ فوق ترمی که شامل شتاب کوریولیس باشد، وجود ندارد. بنابراین برای حداقل‌سازی نیروی لرزشی و بالانس نیروی مکانیزم باید روابط زیر برقرار باشد:

$$m_{F_i} = -\left(m_{Q_i}r_{Q_i} + m_{E_i}\right)/r_{F_i} \quad (۲۹)$$

$$m_{N_i} = -\left(m_{K_i}r_{K_i} + m_{Q_i}\right)/r_{N_i} \quad (۳۰)$$

$$\begin{aligned}m_{P_i} = &\left(m_{K_i}r_{K_i} + \left(1 - r_{N_i}\right)m_{Q_i}\right)/\left(r_{P_i}r_{N_i}\right) \\ &-\left(m_{H_i}r_{H_i} + m_{K_i}\right)/r_{P_i}\end{aligned} \quad (۳۱)$$

در معادلات فوق تعدادی از پارامترها که مربوط به شاخه روبات است، ثابت هستند و تعداد دیگری از پارامترهای جرمی و ابعادی مربوط به لینک‌های اضافه‌شده را می‌توان به دلخواه و یا براساس محدودیت‌های طراحی انتخاب کرد.

مطالعهٔ موردی

در این قسمت برای بررسی صحت بالانس دینامیکی و حداقل‌سازی نیروی لرزشی، براساس مشخصات هندسی، ابعادی و جرمی روبات و بااستفاده از روابط پیش‌گفته، جرم وزنه‌های بالانس را به‌دست می‌آوریم و سپس بااستفاده از آنها صفحهٔ متحرک را در یک مسیر دلخواه نسبت به زمان حرکت می‌دهیم. آن‌گاه بااستفاده از حل مسئلهٔ سینماتیک معکوس، مقدار تغییرات محرک‌ها را برحسب زمان به‌دست می‌آوریم و از آنها به‌عنوان ورودی مدل ایجادشده در نرم‌افزار ADAMS بهره می‌گیریم. درپایان، نیروهای تکیه‌گاهی را برای این حرکت در دو حالت بدون مکانیزم بالانس و با مکانیزم بالانس مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

الف) پارامترهای هندسی، ابعادی و جرمی روبات برای $i = 1,2,3$

$$\alpha_i = \lambda_i = \frac{2(i-1)\pi}{3} rad$$
$$a_i = 0.303\ m$$
$$h = 0.215\ m$$
$$A_iE_i = 0.1\ m$$
$$B_i = 0.12\ m$$
$$m_p = 10\ kg$$
$$m_{Q_i} = 1.2\ kg$$
$$m_{E_i} = 2.25\ kg$$

ب) پارامترهای ابعادی و جرمی لینک‌های اضافه‌شده برای $i = 1,2,3$

$$A_iD_i = D_iC_i = 0.25\ m$$
$$m_{H_i} = 3.27\ kg$$
$$m_{K_i} = 3.3\ kg$$
$$r_{H_i} = r_{K_i} = 0.5$$
$$r_{P_i} = r_{F_i} = -0.5$$
$$r_{N_i} = -1$$
$$r_{Q_i} = 0$$

ج) محاسبهٔ جرم وزنه‌های بالانس.

بااستفاده از روابط پیش‌گفته جرم‌های بالانسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$m_{P_i} = 17.61\ kg, m_{N_i} = 2.76\ kg \quad , m_{F_i} = 4.5\ kg$$

د) حرکت رول (φ_x)، پیچ (φ_y) و یاو (φ_z) صفحهٔ متحرک.

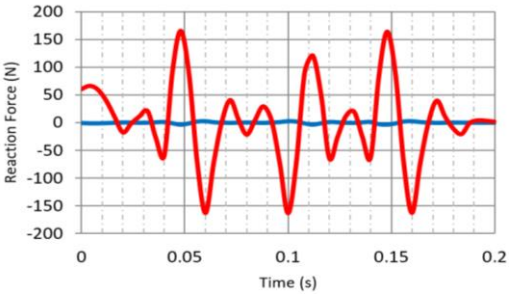
برای شبیه‌سازی حرکت، فرض می‌کنیم که تغییرات حرکت رول، پیچ و یاو صفحهٔ متحرک نسبت به زمان برحسب رادیان به‌صورت زیر باشد:

$$\varphi_x = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$
$$\varphi_y = 0$$
$$\varphi_z = \frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{0.125\pi t}{T}\right)$$

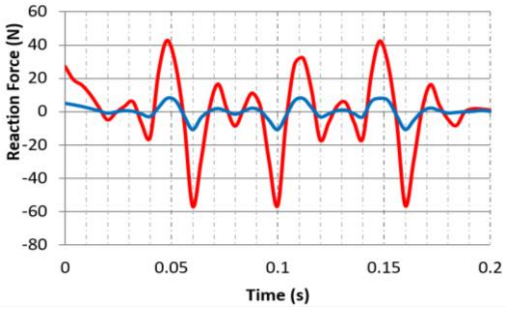
که در آن $T = 2\pi$ درنظر گرفته شده است.

ه) شبیه‌سازی دینامیکی.

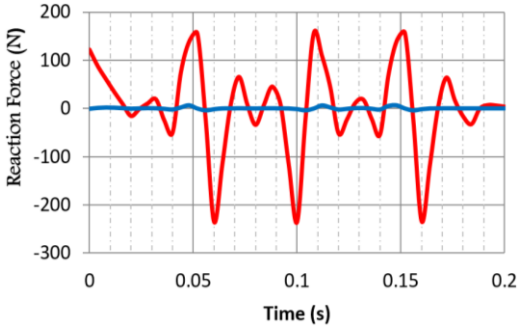
ابتدا با حل مسئلهٔ سینماتیک معکوس براساس پارامترهای هندسی و ابعادی داده‌شدهٔ روبات، تغییرات مفاصل محرک روبات را برحسب زمان به‌دست می‌آوریم. سپس آنها را به‌عنوان ورودی برای دو مدل ساخته‌شده در نرم‌افزار ADAMS به‌کار می‌گیریم. یکی از مدل‌ها، مدل اصلی روبات است و در مدل دیگر لینک‌های اضافه‌شده با جرم‌های بالانسی نیز مدل شده است. برای هر کدام از دو مدل نیروهای اعمالی به پایهٔ روبات از طرف هر سه شاخه روبات در جهت‌های مختلف به‌دست آورده شده است. این نیروها در شکل‌های (۷-۵) به‌ترتیب درراستای محور x، y و z برای حالت‌های قبل از بالانس و پس از بالانس نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نیروهای اعمالی به پایهٔ روبات به‌صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است. برای مقایسهٔ بهتر، مقادیر نیروهای تکیه‌گاهی در دستگاه ثابت {B} در زمان‌های مختلف برای هر دو مدل در جدول‌های (۳-۱) در جهت‌های مختلف آورده شده است. همچنین در این جدول‌ها درصد کاهش نیروهای تکیه‌گاهی نیز آورده شده است. این نتایج نشان می‌دهد که نیروهای لرزشی منتقل‌شده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x، ۹۸ درصد، درراستای y، ۷۹ درصد و درراستای z، ۹۹.٤ درصد کاهش یافته است.



شکل ۵ نیروی لرزشی کل وارد به روبات پیش و پس از بالانس درراستای **X** (نمودار قرمز پیش از بالانس و نمودار آبی پس از بالانس را نشان می‌دهد)



شکل ٦ نیروی لرزشی کل وارد به روبات پیش و پس از بالانس درراستای **Y** (نمودار قرمز پیش از بالانس و نمودار آبی پس از بالانس را نشان می‌دهد)



شکل ۷ نیروی لرزشی کل وارد به روبات پیش و پس از بالانس درراستای Z (نمودار قرمز پیش از بالانس و نمودار آبی پس از بالانس را نشان می‌دهد)

جدول ۱ مقایسهٔ نیروهای لرزشی پیش و پس از بالانس درراستای محور **X**

درصد کاهش	نیروی لرزشی بعد از بالانس	نیروی لرزشی قبل از بالانس	زمان
۹۸.۹۵۱۷	−۰.٦۳۵۹	٦۰.٦۵۹۷	۰
۹۸.۵۵۰۵	−۱.۲۸٦۷	۸۸.۷٦۸۱	**۰.۰۵۲**
۹۸.٤۹٦۵	۲.٤۵۱۵	−۱٦۳.۰۵۳	**۰.۱**
۹۸.۵۱٤۷	−۱.۳۲٤۱	۸۹.۱٤٤٦	**۰.۱۵۲**
۹۸.۳۱۱۹	−۰.۰۳۲	۱.۸۹۵٦	**۰.۲**

جدول ۲ مقایسهٔ نیروهای لرزشی پیش و پس از بالانس درراستای محور **Y**

درصد کاهش	نیروی لرزشی بعد از بالانس	نیروی لرزشی قبل از بالانس	زمان
۸۱.۵۱۷٦	۵.۰۲٤٤	۲۷.۱۸٤۸	۰
۷٦.۷٦٤٤	٦.۵٦٤	۲۸.۲٤۹۷	**۰.۰۵۲**
۸۰.۹۵۸۲	−۱۰.۷٦۰۳	−۵٦.۵۰۸۷	**۰.۱**
۷٦.٤۵۵	٦.٦٤۹۲	۲۸.۲٤۰٤	**۰.۱۵۲**
۸۲.۹۹۷۵	۰.۱٦۷۹	۰.۹۸۷۵	**۰.۲**

جدول ۳ مقایسهٔ نیروهای لرزشی پیش و پس از بالانس درراستای محور **Z**

درصد کاهش	نیروی لرزشی بعد از بالانس	نیروی لرزشی قبل از بالانس	زمان
۹۹.۲۲۵٦	−۰.۹٤٤۳	۱۲۱.۸۹۸٦	۰
۹۹.٦۹۵۳	−۰.٤۷۳	۱۵۵.۲۳۲۲	۰.۰۵۲
۹۹.۳۱٦	−۱.٦۱۳۷	−۲۳۵.۹۳٦	۰.۱
۹۹.۷٤۷۸	−۰.۳۹٤	۱۵٦.۲۱۱۵	۰.۱۵۲
۹۹.٤۲۹	۰.۰۱۹۷	۳.٤٤۹۹	۰.۲

نتایج

در این مقاله بالانس نیرویی روبات موازی کروی با ساختار 3RPSP-S بااستفاده از روش افزودن مکانیزم اضافه بررسی شد. حذف نیروهای اینرسی منتقل‌شده به پایهٔ روبات یک چالش اساسی برای این‌گونه روبات‌ها محسوب می‌شود. در روبات موردنظر به‌دلیل استفاده از مفاصل لغزشی و وجود قید رفت‌وبرگشتی، از روش معمول افزودن وزنه استفاده نشد بلکه از یک مکانیزم اضافه و اتصال آن به هر شاخه روبات به‌گونه‌ای استفاده شد که باعث حذف شتاب‌های کوریولیس و درنتیجه حذف نیروهای لرزشی ناشی از رفت‌وبرگشت جرم لغزنده در معادلات بالانس نیرویی روبات شد. سپس با افزودن سه وزنه به مکانیزم اضافه‌شده و هر شاخه روبات، بالانس نیرویی روبات انجام گردید. سپس با حل مسئلهٔ سینماتیک معکوس براساس پارامترهای هندسی و ابعادی داده‌شدهٔ روبات، تغییرات مفاصل محرک روبات را برحسب زمان به‌دست آمد و آنها به‌عنوان ورودی برای دو مدل ساخته‌شده در نرم‌افزار آدامز به‌کار گرفته شد و نشان داده شد که بااستفاده از روش ارائه‌شده، نیروهای لرزشی منتقل‌شده به پایهٔ روبات به‌طور میانگین درراستای x، ۹۸ درصد، درراستای y، ۷۹ درصد و درراستای z، ۹۹.٤ درصد کاهش یافته است. لازم به ذکر است که می‌توان از این روش برای هر روبات دیگری که قید رفت‌وبرگشتی داشته باشد، استفاده کرد و همچنین می‌توان به‌عنوان کارهای آینده یک روش بهینه‌سازی روی این روش پیاده کرد که نسبت افزایش جرم و کاهش نیروی لرزشی به‌صرفه باشد.

مراجع

1. MacCallion, H., Pham, D. T., "The analysis of a six-degree-of-freedom workstation for mechanized assembly", *Proceeding of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montreal, Canada, July 8-13, (1979).

2. Hunt, K.H., "Structural Kinematics In-Parallel-Actuated Robot Arms", *Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 105, pp. 705-712, (1983).
3. Briot, S., Arakelian, V.G. and Le Baron, J.P., "Shaking force minimization of high-speed robots via centre of mass acceleration control", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 57, pp. 1–12, (2012).
4. Arakelian, V.G. and Smith, M.R., "Shaking force and shaking moment balancing of mechanisms: a historical review with new examples", *Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 334-339, (2005).
5. Arakelian, V.H. and Smith, M.R., "Design of planar 3-DOF 3-RRR reactionless parallel manipulators", *Mechatronics*, Vol. 18, pp. 601-606, (2008).
6. Agrawal, S.K. and Fattah, A., "Reactionless space and ground robots: novel designs and concept studies", *Mechanism and Machine theory*, Vol. 39, pp. 25-40, (2004).
7. Gosselin, C.M. and Laliberté, T., "Static balancing of spatial parallel platform mechanisms—revisited", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, pp. 43-51, (2000).
8. Chaudhary, K. and Chaudhary, H., "Dynamic balancing of planar mechanisms using genetic algorithm", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, pp. 4213, (2014).
9. Van der Wijk, V. and Herder, J.L., "Synthesis method for linkages with center of mass at invariant link point—pantograph based mechanisms", *Mechanism and machine theory*, Vol. 48, pp. 15-28, (2012).
10. Alici, G. and Shirinzadeh, B., "Optimum force balancing with mass distribution and a single elastic element for a five-bar parallel manipulator", *Proceedings of ICRA'03. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 4, (2003).
11. Nehemiah, P., Rao, B.S.S. and Ramji, K., "Shaking force and shaking moment balancing of planar mechanisms with high degree of complexity", *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, Vol. 6, pp. 17-24, (2012).
12. Ricard, R. and Gosselin, C.M., "On the development of reactionless parallel manipulators", *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*, Baltimore, Maryland, US, September 10-14, (2000).
13. Papadopoulos, E. and Abu-Abed, A., "Design and motion planning for a zero-reaction manipulator", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1554-1559, San Diego, USA, May 8-13, (1994).
14. Fattah, A. and Agrawal, S.K., "On the design of reactionless 3-DOF planar parallel mechanisms", *Mechanism and Machine theory*, Vol. 41, pp. 70-82, (2006).
15. Van der Wijk, V. and Herder, J.L., "Active dynamic balancing unit for controlled shaking force and shaking moment balancing", *ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences (IDETC) and Computers and Information in Engineering Conference (CIE)*, pp. 1515-1522, Montréal , Canada, August 15-18, (2010).
16. Arakelian, V. and Smith, M.R., "Shaking force and shaking moment balancing of mechanisms: a historical review with new examples", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 334-339, (2005).
17. Chung, W.K. and Cho, H.S., "On the dynamic characteristics of a balance PUMA-760 robot", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 35, pp. 222-230, (1988).
18. Ebert-Uphoff, I. and Johnson, K., "Practical Considerations for the Use of Static Balancing for Parallel Kinematic Machines", *IMechE Journal of Multi-body Dynamics: Part K*, 216, pp. 73-85, (1997).

19. Russo, A., Sinatra, R. and Xi, F., "Static balancing of parallel robots", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 40, pp. 191-202, (2005).
20. Wijk, V. and Herder, J.L., "*Guidelines for low mass and low inertia dynamic balancing of mechanisms and robotics*", *Advances in Robotics Research: Theory, Implementation, Application*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, (2009).
21. Briot, S., Arakelian, V., Sauvestre, N. and Baron, J.P., "Shaking forces minimization of high-speed robots via an optimal motion planning", *ROMANSY 18 Robot Design, Dynamics and Control*, Springer-Verlag Wien, (2010).
22. Briot, S. and Arakelian, V., "Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 57, pp. 13-26, (2012).
23. Wu, Y. and Gosselin, C., "Design of reactionless 3-DOF and 6-DOF parallel manipulators using parallelepiped mechanisms", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, pp. 821-833, (2005).
24. Alici, G. and Shirinzadeh, B., "Optimum force balancing of a planar parallel manipulator", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 217, pp. 515-524, (2003).
25. Alici, G. and Shirinzadeh, B., "Optimum synthesis of planar parallel manipulators based on kinematic isotropy and force balancing", *Robotica*, Vol. 22, pp. 97-108, (2004).
26. Dresig, H. and Dien, N.P., "Complete shaking force and shaking moment balancing of mechanisms using a moving rigid body", *Technische Mechanik*, Vol. 31, pp. 121-131, (2011).
27. Arakelian, V., Briot, S., Yatsun, S. and Yatsun, A., "A new 3-DoF planar parallel manipulator with unlimited rotation capability", *Proceedings of 13th World Congress in Robot and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, June 19-23, (2011).
28. Chaudhary, K. and Chaudhary, H., "Optimal dynamic balancing and shape synthesis of links in planar mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 93, pp. 127-146, (2015).
29. Van Der Wijk, V., Krut, S., Pierrot, F. and Herder, J., "Generic method for deriving the general shaking force balance conditions of parallel manipulators with application to a redundant planar 4-RRR parallel manipulator", *Proceedings of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, June 19-23, (2011).
30. Van Der Wijk, V., Krut, S., Pierrot, F. and Herder, J.L., "Design and experimental evaluation of a dynamically balanced redundant planar 4-RRR parallel manipulator", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 32, pp. 744-759, (2013).
31. Arakelian, V. and Briot, S., "*Balancing of linkages and robot manipulators: advanced methods with illustrative examples*", Springer International Publishing Switzerland, (2015).
32. Van der Wijk, V. and Herder, J.L., "*Dynamic balancing of Clavel's Delta robot*", Computational Kinematics. Springer, Berlin, Heidelberg, (2009).
33. Wampler, C.W., "On a rigid body subject to point-plane constraints", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 128, pp. 151-158, (2006).

3- Numerical results

In this section, some numerical tests are presented to examine the suggested elements' efficiency. Different loading cases, such as, point loading, uniform distributed loading, sinusoidal and hydrostatic loading, and also different boundary conditions, such as, clamped edge, simply supported, free edge and column in corners either symmetric or asymmetric have been used. For each load case, the particular solution is not dependent on the boundary conditions. Furthermore, the verification for both displacement and force responses has been made. In the Figs. 2 and 3, the convergence rates of displacement and moment at the middle of a simply supported square plate under hydrostatic loading are shown. The results confirm the rapid convergence at a mesh of 16*16.

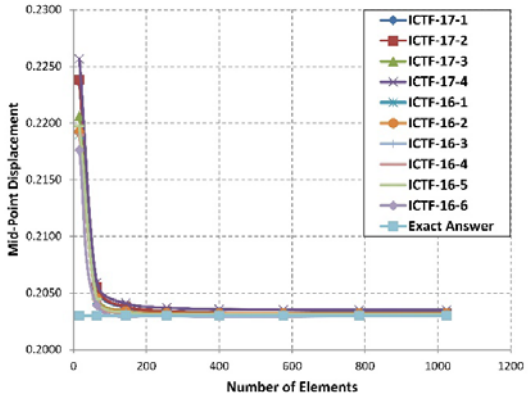


Fig. 2. Displacement convergence of a simply-supported plate under hydrostatic load.

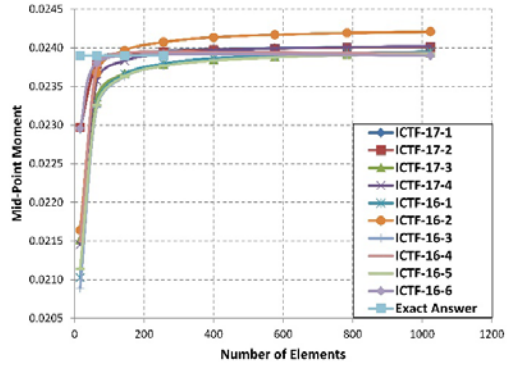


Fig. 3. Moment convergence of a simply-supported plate under hydrostatic load.

4- Conclusion

In this study, Trefftz functions was employed to model the lateral displacement of a Kirchhoff's bending plate. Shape functions were obtained by adding 1, x, y terms to the T-functions to ensure that the element represents the rigid body motions. Therefore, some elements with symmetric arrangements of degrees of freedom, based on the previous researches, were evaluated. After eliminating some of them due to the weak convergence of stiffness matrix instability, the top 10 elements were selected. It should be noted that some terms of Trefftz solutions are removed to represent the high-order element with fewer degrees of freedom.

In a T-complete function, each group of solutions is identified by the category number (k). Each solution of an even group (k=0, 2, 4,…) is symmetric with respect to x and y, but not in odd groups (k=1, 3,…). Therefore, choosing a right couple solution per odd group and one solution per even group may be appropriate. In addition, the solutions containing x^n and y^n will results in more stiff answers. Also, the effect of solutions with a low group number is negligible.

By adopting the displacement-based and force-based ranking process, elements ICTF-17-1, 17-2 and 17-4 gained the highest rating. The reason for their superiority is the presence of a middle node and a higher degree of freedom than ICTF-16 group elements. Thus, according to the rating of the ICTF-16 group's elements, the appropriate nodes' positioning and the number of degrees of freedom are more important than the choice of the shape functions. Comparing the answers of these elements with the complete elements' responses, it became evident that it was not necessary to choose all terms in the use of the Trefftz function. Hence, it is possible to use the incomplete function to raise the order of the shape function without increasing the number of degrees of freedom, and to obtain more precise answers.

The Effect of Equilibrium Equation and Trefftz Functions on the Responses of Quadrilateral Bending Plate

M. Rezaiee-Pajand[1], M. Malekzadeh-Gonabadi[2], N. Rajabzadeh-Safaei[3]

1- Introduction

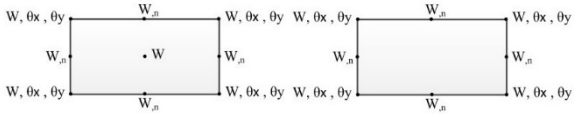
The finite element formulation of thin plate bending is based on the Kirchhoff's assumptions. In this theory, in contrast to Reissner-Mindlin's theory, the effects of shear deformation are neglected. Also, quadrilateral elements have a high efficiency in the modeling of bending plates due to their simple computations and acceptable accuracy. In conventional bending plate finite elements, increasing the number of degrees of freedom and raising the rank of interpolation polynomial lead to the more precise responses. This approach causes complex and time-consuming computations that are not so appealing to researchers. To overcome this issue, different methods have been employed so far. Among these attempts, finite element templates, hybrid and mixed formulations, such as, the hybrid-Trefftz finite element method have achieved a relative success.

In 1926, Trefftz suggested a new theory based on the variational principles and boundary integrations. In the T-type (Trefftz-type) finite element formulations, the internal fields are chosen so as to satisfy the governing differential equation analytically. In addition, interelement continuity and boundary conditions are enforced in an integral weighted residual way. Methods with more than one of the independent functions are called hybrid methods. In hybrid-Trefftz elements, two independent displacement functions are defined for internal field and boundaries. Another feature of hybrid-Trefftz elements is eliminating the rigid body motions, as it represents spurious zero energy modes and deficiency of the rank of the stiffness matrix.

In the present study, to improve the efficiency of the plate bending elements, the analytical solution of the governing differential equations is selected as the displacement interpolation functions. Depending on the type of loading, the analytical answer consists of general and particular solutions. The interpolation functions are derived from particular solutions, and Trefftz function is used as the answer of homogeneous part. Afterwards, due to the lack of boundary functions, the rigid body motions should be added to the Trefftz functions.

To achieve this aim, several groups of elements are studied and deficient versions are removed. The reason of eliminating these elements was the divergence of answers or singular stiffness matrix. Then, two groups of elements with two different arrangements of degrees of freedom are chosen. If the arrays of degrees of freedom and the arrangements of nodes are considered to be fixed, different functions can be employed in accordance to Trefftz function. Each function is derived by considering symmetry and removing some of the terms. Finally, four elements of the first group and six elements from the second group are selected. After conducting numerical tests, the results show that the completion of selected functions is not a necessary condition to increase the answers' accuracy. Comparing with complete functions, incomplete functions with fewer degrees of freedom, as long as they are properly selected, can produce more useful elements.

Since the interpolation functions meet the equilibrium conditions; forces are much more precise than displacements in many cases.



(a) **(b)**

Fig. 1. Arrangement of degrees of freedom for incomplete elements.

2- Finite element formulation

In the previous section, it was mentioned that the general analytical solution of governing fourth-order differential equation can be expressed as the form of Trefftz functions. T-complete solutions are a series of functions being complete in the sense of containing all possible solutions in a given solution domain which satisfy equilibrium equation. Therefore, each category of solutions has all terms with the order related to its category.

Subsequently, the finite element relations are formed by employing the minimum potential energy rules. The incomplete elements' shape functions are derived, based on the selected terms of Trefftz functions. Six elements are arranged similar to Fig. 1(b) with the name of ICTF-16-1 to 16-6 and four others (ICTF-17-1 to 17-4) have the Fig. 1(a) arrangement. Maintaining the symmetry of element's arrangement and type of degrees of freedom are the selection criteria. Previous researches have shown that $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y, w$ and $w, \partial w/\partial n$ are suitable for the unknowns at the corners and sides, respectively.

Two complete elements (CTF-18-1, CTF-18-2) with fifth order shape function (fifth order T-complete function) are created for comparison. It should be noted that the arrangements of degrees of freedom of these elements are different.

[1] Corresponding Author: Professor, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran. Email: rezaiee@um.ac.ir

[2] Master of Science, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

[3] Ph.D. Student, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

linearizing the governed differential equations, a dispersion relation for the propagation of the perturbations is found. As in any first order stability analysis, the dispersion relation is the most important result of the calculations.

3- Results and discussion

As usual one may use this relation in order to find the stability criterion. However, the dispersion relation is complicated and the stability criteria cannot be analytically derived. Therefore, a numeric procedure is used to find the criterion for two different cases:

a) Out-of-plane perturbations: In this case the particles only in the direction perpendicular to the plane of the ring are perturbed. It is shown that the ring is stable against these perturbations. In other words if the particles in this direction are perturbed, they will oscillate and the ring will retain its stability. It is also the case in Newtonian gravity. However, in principle the frequency of the oscillations will be different in these theories. More specifically one may expect that perturbations oscillates more rapidly in MOG than in Newtonian case.

b) In-plane perturbations: In this case the particles in the azimuthal and radial directions are perturbed. Since the analysis cannot be done for arbitrary number of particles n, two different cases of n=7 and n=8 are studied. The results have been shown in Figs. 1 and 2. It is necessary to mention that MOG possesses two free parameters α and μ_0 which their observational value have been measured using rotation curves data of spiral galaxies. It is assumed that $\alpha = 8.89$ and different values of μ_0 are investigated. On the other hand, the parameter μ is the ratio of a point mass in the ring to the central mass.

As it is clear in Fig. 1, when $\mu_0 = 0$ the Newtonian stability criterion, i.e. $\mu \leq 0.00715$, is recovered. On the other hand by increasing the magnitude of μ the stability criterion is changed and more massive particles get also stable against these perturbations. In other words, MOG makes the ring more stable against all kind of small perturbations. However, as it is shown in the Fig. 1, the stability region does not cover large values of μ. In fact when this parameter is larger than 0.1 the gravitational force grows rapidly and makes the ring unstable. The current value of μ is small enough to lay in the stability region.

A similar behavior for an eight-particle system is found. The stability region has been illustrated in Fig. 2. In this case also one may recover the Newtonian stability criterion by setting the free parameter to zero. The stability region is wider and include larger values for μ_0 and μ.

For a more real analysis one may study a fluid ring system. In this case one may linearize the Euler's equation, continuity equation and the modified Poisson equation in MOG; and investigate the local and global stability of the ring. Such a study would help to interpret the star formation rates in the galactic rings.

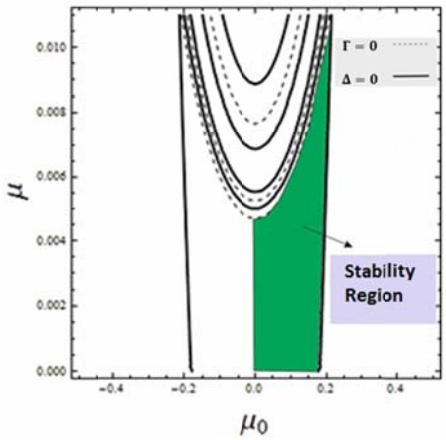


Fig. 2: The stability region for a n=8 system in MOG.

Dynamical Stability of Astrophysical Rings

M.H. Khashen[1] , M. Roshan[2]

1- Introduction

In this paper the gravitational stability of a self-gravitating ring composed of n particles with mass m which are on a circular orbit around a central mass M is investigated. The first order perturbation analysis in the context of a modified theory of gravity known as MOG in the relevant literature is used. This theory has been introduced to address the dark matter problem. This problem is one of the serious challenges in the theoretical physics. More specifically astrophysical measurements show that there are evident deviations between Newton's gravitational theory and the observations. For example the rotation curves of spiral galaxies at large distances from galactic center are flat. While using the standard Newtonian gravity, these rotation curves should be decreasing function of radial distance.

There is also a serious mass discrepancy in the spherical galaxy clusters. In fact these clusters are almost six times more massive than what can be seen by telescopes. Consequently, physicists believe that there is a dark and unseen matter component in the universe which has not been detected yet. However although there are several advanced laboratories which use different techniques, the dark matter particles have not been observed yet.

Another approach to solve this enigma is the modified gravity. In other words, may be the current standard gravitational theory should be modified and there is no dark matter particle in the universe. MOG is a theory which follows the last picture. Mathematically this theory is more complicated than Einstein's general theory of gravity. In fact MOG in addition to the metric tensor possesses other classic fields which increase the degrees of freedom of the theory. More specifically MOG is a scalar-tensor-vector theory of gravity and includes two scalar field and a Proca vector field. These fields make MOG an effective theory to address the above mentioned dark matter problem.

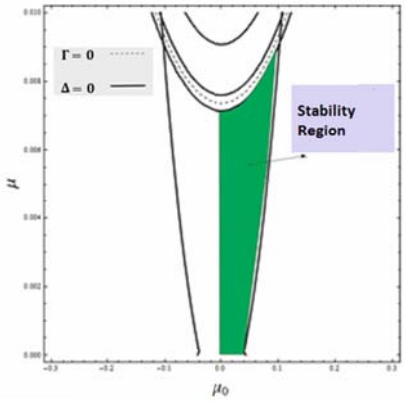


Fig. 1: The stability region for a n=7 system in MOG

2- Problem definition

This theory in the weak field limit where the gravity is not too strong and consequently the matter velocities are small compared to the speed of light, leads to a different gravitational potential. Therefore the gravitational force between point masses in this theory is different from the Newtonian case. More specifically the force in MOG is slightly stronger than the Newtonian gravitational force. For our ring system with radius r, MOG's circular velocity is larger and consequently the stability analysis of the system is, in principle, different from the standard case. On the other hand, the stability analysis in astrophysical systems leads to a better understanding of the underlying physical phenomena. For example using the stability analysis one can show that the Saturn's ring cannot be solid and should be consisted of small matter pieces. Moreover the stability analysis of galactic disks helps to investigate the origin and evolution of the spiral patterns. Using this approach astrophysicists have shown than spiral patterns are density waves which propagate on the surface of galactic disks as a small perturbation. Also stability issues help to understand the evolution and growth of the stellar bars in the center of disk galaxies. Moreover, several secular processes exist in the astrophysical systems which can be explained with the stability analysis.

As it already mentioned, in this paper the global stability of a ring around a massive spherically symmetric object, in the context of MOG is investigated. The final results may be extended to include MOG effects on the evolution of local stabilities in the real and large galactic rings. However, we restrict ourselves to a stellar system instead of a fluid ring.

In order to study the dynamical and global stability of the stellar ring system, first, the equilibrium state is derived. In other words, for a given radius of the ring the circular velocity and the positions of all point masses are found. The center of mass reference frame and complex coordinate system is used to reduce the mathematical difficulties. Then the first order perturbations to the position and velocities of the point masses is applied. By

[1] M.Sc., Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
[2] Corresponding Author: Assistant Professor Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. Email: mroshan@um.ac.ir

In the second example, the following heat source at the center of plate is considered

$$G(t)=\begin{cases} 3G_0\left(\dfrac{t}{t_f}\right) & 0\le\dfrac{t}{t_f}\le\dfrac{1}{3} \\ G_0 & \dfrac{1}{3}\le\dfrac{t}{t_f}\le\dfrac{2}{3} \\ 3G_0\left(1-\dfrac{t}{t_f}\right) & \dfrac{2}{3}\le\dfrac{t}{t_f}\le 1 \end{cases} \qquad (4)$$

The estimated intensity of heat source in the second example is drawn in Fig. 3. Also, the location of the heat source is estimated as

$x_0(\text{exact})=0.4865$, $z_0(\text{exact})=0.5242$ (5)

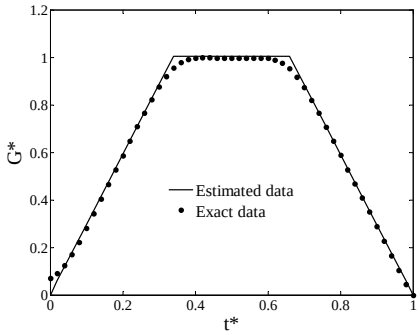


Fig. 3 Comparison of the exact and estimated value of strength of the distributed heat source in example 4 for ($\sigma = 0$).

6. Conclusion

In this paper, the conjugate gradient algorithm was employed to estimate the location and intensity of the point heat source. It was found that the rate of convergence and accuracy of the method for this problem is very good and it is a stable method. Different functions were considered for the heat source and it was observed that the computation algorithm can estimate them.

Estimating Simultaneously Location and Intensity of Heat Source in a Functionally Graded Plate using Inverse Solution

M. Shamsa[1], M.R. Golbahar Haghighi[2],
P. Malekzadeh[3]

1- Introduction

In some problems, the direct measurement of some parameters is experimentally impossible because of two reasons. Firstly, in some cases the temperature of internal surfaces is very high and sensors are not able to measure them and sustain their integrity. Secondly, the measurement equipment are too complicated and expensive. Today the inverse methods are used to estimate some thermal parameters.

The problem under investigation in this paper is the estimation of intensity and location of a point heat source by using the measured temperature at some known points on the boundary. The necessity of employing this approach arises from the impossibility of direct measuring of the location and intensity of point heat source in sometimes.

2. Mathematical modeling

We have a two-dimensional heat conduction problem of a thin FG plate under an unknown time varying intensity and location point heat source (Fig. 1). The heat capacity, thermal heat conductivity and density are assumed to be known. In continuation, the solution procedures of problem are explained.

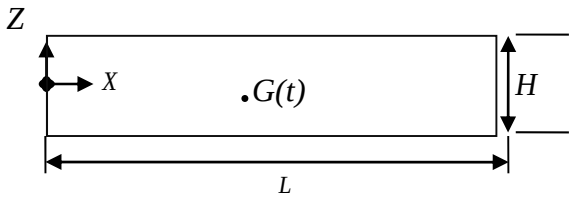


Fig. 1 Geometry of plate.

3. Solution stages of inverse problem

- The conjugate gradient method together with adjoint problem are employed to estimate the intensity of the heat source.
- The conjugate gradient method is applied to determine coordinate (x_0, z_0) of the heat source.

The new coordinate and the conjugate gradient method is employed to estimate the new value of heat source intensity. This iterative procedure is continued until the convergence criteria are satisfied.

4. Direct problem

The governing equation, boundary and initial conditions for the transient heat transfer problem are, respectively [22].

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+G\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \text{on } x=0 \tag{2.a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=0 \quad \text{on } z=0 \tag{2.b}$$

$$T=T_i \quad \text{on } z=H \tag{2.c}$$

$$T(x,z,0)=T_0(x,z) \tag{2.d}$$

Equation (1) is solved using the finite element method.

5. Numerical results

In the first example the following heat source at the center of the plate is considered

$$G(t)=\begin{cases}2G_0\left(\dfrac{t}{t_f}\right) & 0\le\dfrac{t}{t_f}\le 0.5\\ 2G_0\left(1-\dfrac{t}{t_f}\right) & 0.5\le\dfrac{t}{t_f}\le 1\end{cases} \tag{3}$$

In Fig. 2. the estimated intensity of heat source of the first example without considering the measurement errors is shown.

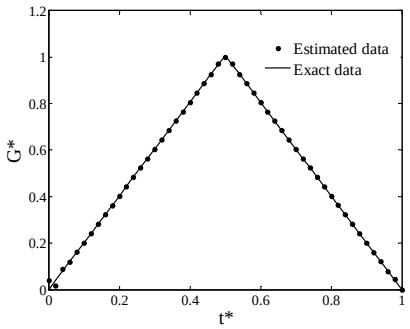


Fig. 2 Comparison of the exact and estimated value of the strength for the point heat source in example 1(σ = 0).

[1] Master of Science, Department of Mechanical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iarn.
[2] Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iarn.
Email: golbahar@pgu.ac.ir
[3] Professor, Department of Mechanical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iarn.

In these equations,

$$\mathrm{Re}_n = \beta \frac{\bar{k}\, a^2}{2\upsilon_f} \tag{7}$$

$$\beta = [1 - 34.87(\frac{d_p}{d_f})^{-0.3} \phi_v^{1.03}](1 - \phi_v + \phi_v \frac{\rho_p}{\rho_f}) \tag{8}$$

To transform the energy equation into a non-dimensional form, we introduce dimensionless temperature θ when the wall temperature or wall heat flux is constant

$\theta(\eta) = \dfrac{T(\eta) - T_\infty}{T_w - T_\infty}$: when the wall temperature is constant

$\theta(\eta) = \dfrac{T(\eta) - T_\infty}{\dfrac{aq_w}{2k_{bf}}}$: when the wall heat flux is constant

By using Corcione's correlation and introducing Γ as

$$\Gamma = 4.4(\frac{2\rho_{bf} K_b}{\pi \mu_{bf}^{\ 2} d_p})^{0.4} \frac{1}{T_{fr}^{\ 10}} (\frac{k_p}{k_f})^{0.03}$$

The final form of energy equation for constant wall temperature and constant wall heat flux is introduced by Eqs. 9 and 10, respectively.

$$\begin{aligned} &\left\{1 + \Gamma \phi_v^{\ 0.66}\, \mathrm{Pr}_{bf}^{\ 0.66} [T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta]^{10.4}\right\} \\ &[(\eta+1)\theta'' + \theta'] + 10.4[T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta]^{9.4} \\ &(T_w - T_\infty)\Gamma \phi_v^{\ 0.66}\, \mathrm{Pr}_{bf}^{\ 0.66} (\eta+1)(\theta')^2 \\ &+ \left\{1 - \phi_v + \phi_v [\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}]\right\} \mathrm{Re}_{bf}\, \mathrm{Pr}_{bf}\, f\theta' = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\left\{1 + \Gamma \phi_v^{\ 0.66}\, \mathrm{Pr}_{bf}^{\ 0.66} [T_\infty + \frac{aq_w}{2k_{bf}}\theta]^{10.4}\right\} \\ &[(\eta+1)\theta'' + \theta'] + 10.4[T_\infty + \frac{aq_w}{2k_{bf}}\theta]^{9.4} \\ &\frac{aq_w}{2k_{bf}} \Gamma \phi_v^{\ 0.66}\, \mathrm{Pr}_{bf}^{\ 0.66} (\eta+1)(\theta')^2 + \\ &\left\{1 - \phi_v + \phi_v [\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}]\right\} \mathrm{Re}_{bf}\, \mathrm{Pr}_{bf}\, f\theta' = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

4- Results

The effect of variations of particle fraction factor on the dimensionless function $\dfrac{2\upsilon \mathrm{Re}}{a^2\omega} G(\eta)$ against η for Re=10 is depicted in Fig. 2. As the particle fraction increases, the value of the dimensionless function $\dfrac{2\upsilon \mathrm{Re}}{a^2\omega} G(\eta)$ increases and increasing the value of this function means increasing the angular component of the fluid velocity field.

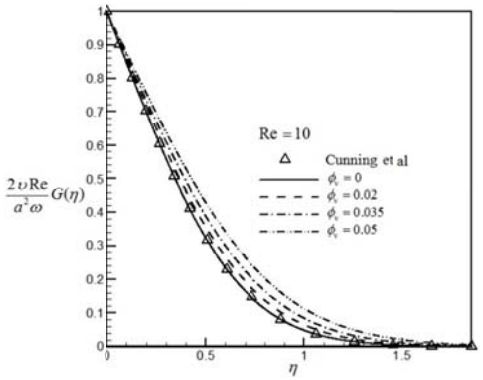


Fig. 2. Effect of particle fraction on angular component of the fluid velocity field.

Effect of variations of particle fraction factor on $\theta(\eta)$ function against η for $T_w = 450K$ and Re=0.1 is presented in Fig. 3. For $\phi_v = 0$, base fluid, the result of Gorla is extracted; it is interesting to note that, as ϕ_v increases, the absolute value of the dimensionless temperature gradient is decreased at surfaces; nevertheless, this decreasing rate is negligible compared to that of increasing rate in the thermal conductivity. Therefore, the heat transfer coefficient is increased through addition of nanoparticles.

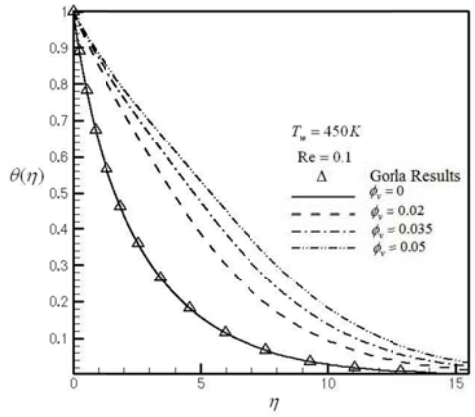


Fig. 3. Effect of particle fraction on dimensionless temperature.

5- Conclusion

In the present study, similarity solution of axisymmetric stagnation point flow and heat transfer of Nanofluid on rotating cylinder with constant angular velocity is presented. Results show that:

- Increasing the particle fraction would decrease radial component of velocity field and axial component of wall shear stress.
- Increasing the particle fraction would increase heat transfer coefficient, angular component of velocity field and angular component of wall shear stress.

Similarity Solution of Axisymmetric Stagnation Point Flow of Nanofluid on Rotating Cylinder

H. Mohammadiun[1]

1- Introduction

Nanofluid is a name first applied by Choi, referring to fluids containing solid suspended nanoparticles smaller than 100 nm with volume fraction of less than 5 percent. It can enhance heat transfer performance compared to pure liquids. Nanofluids can be used to improve thermal management system in many engineering applications such as heat transfer, micromechanics and instrument, HVAC system and cooling devices.

In this research, similarity solution of axisymmetric stagnation-point flow and heat transfer of Nanofluid impinging on rotating cylinder with uniform angular velocity has been presented for the first time. Flow is considered in cylindrical coordinates (r,φ,z) with corresponding velocity components (*u*,*v*,*w*) as Fig. 1.

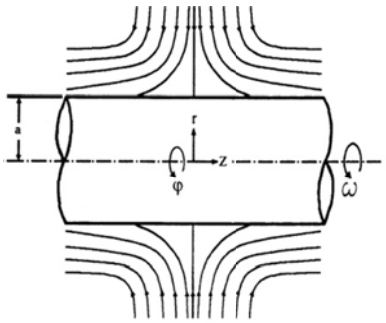


Fig. 1. Schematic of stagnation point flow on rotating cylinder.

2- Properties of Nanofluid

The aluminum oxide $(\gamma\, Al_2O_3)$ nanoparticles used in this research have the following characteristics:

Density ρ_m = 3,880 kg/m^3, mean particle diameter is 44 nm.

2-1 Nanofluid density

It is assumed that the density of the aluminum oxide nanoparticles is constant in the entire range of considered temperature. The following relation is used to calculate the nanofluid density:

$$\rho_n = (1-\phi_v)\rho_f + \phi_v \rho_p \tag{1}$$

where subscripts *n*, *f* and *p* denote the nanofluid, base fluid and the particles respectively, and ϕ_v is the particle fraction.

2-2 Dynamic viscosity of Nanofluid

The viscosity of the nanofluid can be estimated with the existing relations for the two phase mixture. In 2011, Massimo Corcione proposed empirical correlation for predicting the relative viscosity,

$$\frac{\mu_n}{\mu} = \frac{1}{1-34.87(\frac{d_p}{d_f})^{-0.3}\phi_v^{1.03}} \tag{2}$$

where d_f is the equivalent diameter of a base fluid molecule, given by:

$$d_f = 0.1(\frac{6M}{N\pi\rho_{f0}})^{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

in which, *M* is the molecular weight of the base liquid, *N* is the Avogadro number, and ρ_{f0} is the mass density of the base liquid calculated at temperature $T_0 = 293k$.

2-3 Thermal conductivity coefficient of Nanofluid

The following relation is used to calculate thermal conductivity of Nanofluid:

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = 1 + 4.4\,\mathrm{Re}_p^{\,0.4}\,\mathrm{Pr}_{bf}^{\,0.66}(\frac{T}{T_{fr}})^{10}(\frac{k_p}{k_f})^{0.03}\phi_v^{\,0.66} \tag{4}$$

where $\mathrm{Re}_p = \dfrac{2\rho_{bf}k_bT}{\pi\mu_{bf}^{\,2}d_p}$ & $\mathrm{Pr}_{bf} = \dfrac{\mu_{bf}(c_p)_{bf}}{k_{bf}}$

3- Governing equations

A reduction of the Navier-Stokes equations is obtained by the following coordinate separation of the velocity field and by introducing $\eta = (\frac{r}{a})^2 - 1$, we have:

$$u = -\bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta+1}}f(\eta)\ ,\ v = \bar{k}\frac{a}{\sqrt{\eta+1}}G(\eta),\quad w = 2\bar{k}\,f'(\eta)\,z,\quad P = \rho_n\bar{k}^2a^2p \tag{5}$$

Transformations (5) yields an ordinary differential equation system in terms of *f* and *G* as

$$(\eta+1)f''' + f'' + \mathrm{Re}_n[1-(f')^2 + f\,f''] = 0$$
$$(\eta+1)G'' + \mathrm{Re}_n\,f\,G' = 0 \tag{6}$$

[1] Assistant Professor in Department of Mechanical Engineering, Shahrood branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran. Email: hmohammadiun@IAU-Shahrood.ac.ir

temperature in laminar and turbulent flow regimes, respectively.

The outlet temperature increases in both laminar and turbulent regimes owing to reduction of thermal capacity with increasing volume fraction. In a laminar flow, different nanoparticle shapes have an approximately equal outlet temperature. In the turbulent flow, blade and brick nanoparticles have a slightly higher outlet temperature because of their higher heat transfer coefficients.

Due to the reduction of photovoltaic temperature with increasing volume fraction in laminar flow, the electrical energy and exergy efficiency increase, but they decrease in the turbulent flow as the photovoltaic temperature increases in this flow regime. In the laminar flow, the thermal energy efficiency rises because of increasing the output temperature. But in a turbulent flow, reducing the thermal capacity reduces the thermal energy efficiency when the volume fraction increases. The thermal exergy efficiency is more affected by the outlet temperature and increases with increasing volume fraction in both flow regimes.

Increasing the electrical and thermal energy efficiency in laminar flow leads to an increase in total energy efficiency with volume fraction, while in turbulent regime the total energy efficiency decreases due to decrement of electrical and thermal energy efficiencies. The cylindrical nanoparticles in laminar flow and brick nanoparticles in turbulent flow have the highest energy efficiency.

The total exergy efficiency increases in the laminar flow as electrical and thermal exergy efficiencies increase. In the turbulent flow, total exergy efficiency of platelet, cylindrical, and blade shaped nanoparticles decrease because of decreasing the electrical exergy efficiency. But for the brick nanoparticles which has the highest electrical and thermal exergy output in the turbulent flow, the contrast between the effects of decreasing the electrical exergy efficiency and increasing the thermal exergy efficiency leads to exergy efficiency increases first and then decreases, as shown in Fig. 2.

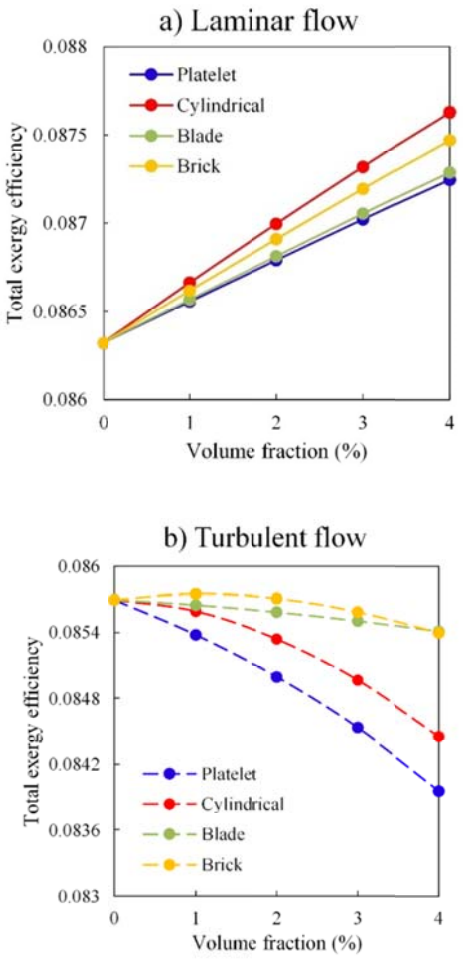


Fig.2. Variation of total exergy efficiency with volume fraction for different nanoparticle shapes in laminar and turbulent regimes.

5- Conclusion

In this research, a linear parabolic trough concentrating photovoltaic/thermal system was modeled. The effect of using Al_2O_3/ethylene glycol-water 50:50 on photovoltaic temperature, outlet temperature and energy and exergy efficiencies of the system were evaluated. Also, the effect of nanoparticle concentration was studied for various nanoparticles' shape of platelet, cylindrical, blade and brick. The summary of the results is as follows:

- As the volume fraction of nanoparticles increases, the photovoltaic temperature decreases in the laminar flow and increases in the turbulent flow, but the outlet temperature increases in both flow regimes.
- The lowest photovoltaic temperature in the laminar and turbulent flow regime was associated with the cylindrical nanoparticle and the brick-shaped nanoparticle, respectively.
- In the laminar flow, the shape of the aluminum oxide nanoparticles does not affect the outlet temperature. But in the turbulent flow, nanofluids containing blade and brick nanoparticles result in higher outlet temperature.
- The total energy efficiency increases in laminar flow and decreases in turbulent flow.
- The total exergy efficiency increases in the laminar flow, while in the turbulent flow, total exergy efficiency of platelet, cylindrical and blade nanoparticles decreases.
- The use of cylindrical nanoparticles in laminar flow and brick-shaped nanoparticles in turbulent flow lead to highest total energy and exergy efficiencies.

Nanoparticle Shape Effect on a Nanofluid-Based Parabolic Trough Concentrating Photovoltaic/Thermal System

F. Yazdanifard[1], E. Ebrahimnia-Bajestan[2*], M. Ameri[3]

1- Introduction

The limited resources of fossil fuels and their pollutant emissions reveal the necessity of renewable energies. Solar energy is the most important renewable energy source, which shows the greatest potential for energy production among other renewable energies in Iran. Among solar technologies, photovoltaic/thermal (PV/T) systems are capable of producing electrical and thermal energy, simultaneously. In addition, concentrating photovoltaic/thermal (CPV/T) systems are a category of PV/T systems which are used to concentrate sunlight using Fresnel lenses, parabolic, compound parabolic and hyperbolic concentrators. The CPV/T systems are able to generate more electricity and higher quality of the thermal energy.

Recently, nanofluids have been introduced as one of the innovative ways to improve the efficiency of solar energy systems. The nanofluid is defined as the suspension of nanosized particles (less than 100 nm) in conventional fluids, which exhibits better heat transfer properties compared to the base fluids. However, there are few studies on the use of the nanofluid as a coolant in CPV/T systems.

Among the works that have been done so far, effects of using nanofluids with different nanoparticles' shapes on the performance of linear parabolic trough concentrating CPV/T system has not been evaluated, yet. Accordingly, the purpose of the current study is to investigate and compare the effect of using nanofluids with four nanoparticle shapes including platelet, cylindrical, blade and brick on the performance of this system from the first and second law of thermodynamics standpoint in both laminar and turbulent flow regimes. Furthermore, the study of the present base fluid in the CPV/T system has been done for the first time.

2- Mathematical modeling

The studied linear parabolic trough concentrating photovoltaic/thermal system to provide a mathematical model is shown in Fig. 1. In order to drive the energy equations for different components of this system, a differential element of length of dx and width of w was considered. The assumptions used to write the energy equations were steady and one-dimensional heat transfer, constant thermo-physical properties of all components of the system, and the neglecting the specific heat capacity of all components except the nanofluid inside the pipe.

In this research, the 4th-order Runge–Kutta method was used to solve energy balance equations. The base fluid was an ethylene glycol-water mixture with a ratio of 50:50, where aluminum oxide was employed as nanoparticles material.

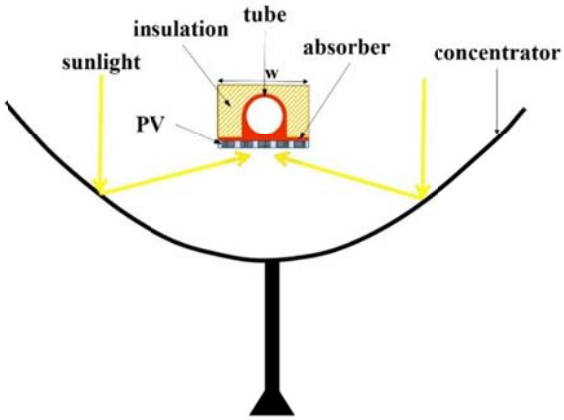


Fig. 1. Concentrating photovoltaic/thermal system.

3- Validation

The numerical model was validated using the available experimental data for a CPV/T system with an effective linear parabolic mirror aperture area of 1.95m^2, a concentration ratio of 16.92, photovoltaic/thermal receiver with 1.5m×0.12m×0.09m dimensions and pipe diameter of 0.03m. According to the comparison, there is a very good agreement between the results of the proposed model of the present study with the measured temperature reported by Ji et al.

4- Results and discussion

The results indicated that, due to increasing the volume fraction of nanoparticles, viscosity and thermal conductivity increase, but the thermal capacity decreases. The variations of viscosity and thermal conductivity with volume fraction lead to a reduction of the Nusselt number in both flow regimes. On the other hand, the heat transfer coefficient is proportional to the Nusselt number and the thermal conductivity. In the laminar flow, the superior effect of increasing thermal conductivity leads to heat transfer coefficient increase. While in the turbulent regime, a sharp decrease in the Nusselt number with a volume fraction reduces the heat transfer coefficient. Finally, the increase in the heat transfer coefficient in a laminar flow reduces the photovoltaic temperature, but the reduction of the heat transfer coefficient in the turbulent flow increases the photovoltaic temperature. The cylindrical nanoparticles and brick nanoparticle cause lower photovoltaic

1- PhD. Student, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University, Kerman, Iran.
2- Corresponding Author: Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Quchan University of Advanced Technology, Quchan, Iran. email: e.ebrahimnia@qiet.ac.ir.
3-Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University, Kerman, Iran.

distribution of the nanoparticles is presented. As can be seen, there is a very good agreement between them that indicates the correctness and accuracy of the numerical method.

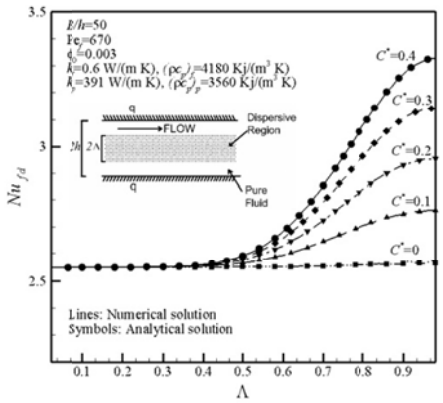


Fig. 3. Comparison between the numerical and analytical results.

In Fig. 4, the effect of the dispersion coefficient on the Nusselt number in the channel output (thermally fully developed region) is shown for the central distribution and different values of the injected nanoparticles thickness and Peclet numbers.

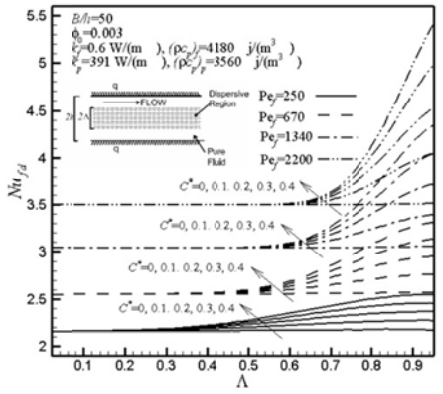


Fig. 4. Effects of the dispersion coefficient, Peclet number and the thickness of injected nanoparticles region on the Nusselt number at thermally fully developed conditions for the central distribution.

The maximum of Nusselt number on the wall occurs for the highest amount of dispersion coefficient. This trend is exacerbated with a further increase in the thickness of injected nanoparticles region. On the other hand, the direct consequence of increasing the Peclet number is rising the Nusselt number on the wall.

The effect of the dispersion coefficient on the Nusselt number in the channel output for the boundary distribution and different values of the injected nanoparticles thickness and Peclet numbers is shown in the Fig. 5. The important point is that, unlike the central arrangement, the Nusselt number in the thermally fully developed region is almost unchanged for small amounts of injected nanoparticles thickness. In the boundary arrangement, these values are different for all values of the injected nanoparticles thickness.

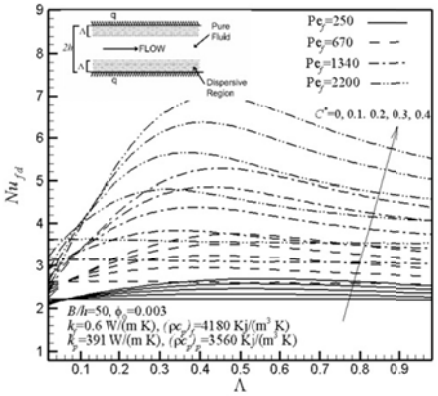


Fig. 5. Effects of the dispersion coefficient, Peclet number and the thickness of injected nanoparticles region on the Nusselt number at thermally fully developed conditions for the boundary distribution.

4- Conclusion

In this paper improvement in the heat transfer inside a channel filled with fluid with different thermal dispersion characteristics has been studied. Various distributions can be considered for nanoparticles such as central and boundary distributions. Attention to the structure and distribution of injected nanoparticle and its effects on thermal properties is most important result of this study. According to the presented results, increasing of the injected nanoparticles thickness in the central distribution increases the Nusselt number, uniformly. But in the boundary distribution, increasing of the injected nanoparticles thickness will give a downward-downward trend to the Nusselt number. Therefore in this distribution, a special thickness for the injected nanoparticles along the boundary can be considered as the optimal amount which leads to the highest Nusselt number.

Numerical and Analytical Investigation of Thermal Dispersion Effects on the Heat Transfer of Nanofluid flow inside a Channel

H.-O. Sayehvand [1*], A. Basiri Parsa[2]

1- Introduction

Increasing the coefficient of heat transfer is important for all industrial applications. Ultra-high-performance can be obtained by suspending ultrafine solid particles in a convectional fluid. The thermal conductivity of solid metals is larger than fluids; therefore suspending these particles can increase thermal conductivity and heat transfer performance. This enhancement becomes more stronger as the flow speed increases and ultimately leads to an increase in the mixing effects associated with the Brownian motion of the nanoparticles. The mixing effect is called in literature as the thermal dispersion effect. This significant increase indicates that thermal dispersion is the main mechanism for convection heat transfer.

In the present study, the heat transfer of nanofluid flow inside a channel with different arrangements of nanoparticles injection (dispersive elements) is investigated. In the heat transfer phenomena, nanoparticles presence in the fluid flow is known as one of the most important factor for the thermal dispersion. In this work, the distribution of dispersive elements or nanoparticles in the channel is considered to be uniformly distributed in the central region and near the walls. The validation of results is verified by the analytical solution for a simple status of the problem and also by comparison with previous published papers. The presence of the nanoparticles in the center region, increase the Nusselt number and heat transfer characteristics with an ascending form. For the boundary arrangement, increasing the thickness of injected nanoparticles lead to an ascending-descending behavior for Nusselt number. Therefore in this distribution, the optimum thickness for dispersive elements is obtained. Also it can be seen that the presence of the nanoparticles with parabolic distribution increase the Nusselt number with a univocal form. For the exponential arrangement, especially for large values of dispersive coefficient, increasing the Nusselt number has a nonlinear behavior that is the most important distinction of these two distribution functions.

2- Mathematical Modeling

Consider the steady flow of a two-dimensional incompressible viscous nanofluid through a channel bounded by two solid horizontal walls separated by a distance of $2h$ and the length of B. According to Fig. 1, the x-axis corresponds to the central channel of the channel and the y-axis is perpendicular to it. The properties of nanofluid are assumed to be constant except for the thermal conductivity to account for thermal dispersion effects. The nanofluid flow enters the channel with uniform temperature of T_1. The uniform heat flux of q is applied to two channel walls.

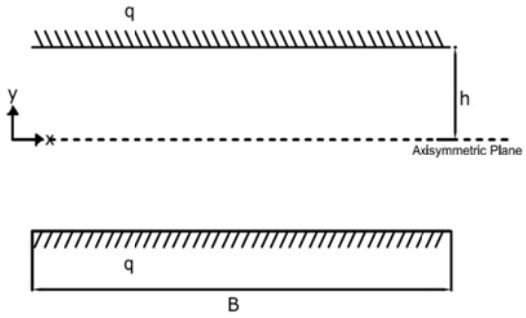


Fig. 1. Schematic diagram and the coordinate system.

The two different distributions for the injected nanoparticles into the channel are considered as shown in Fig 2. In the central distribution, the nanoparticles are injected in a region with height of $2l$ around the channel's centerline. In the boundary distribution, the nanoparticles is injected in the two region with height of l attached to the channel's plates.

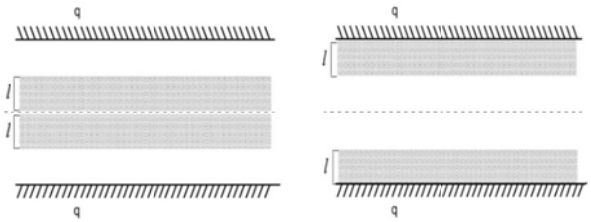


Fig. 2. The central distribution (left) and the boundary distribution (right) for injected nanoparticles.

The energy equation in this situation for the pure and nanofluid regions is presented for these distributions, separately. After the non-dimensionalizing with the suitable dimensionless variables, obtained equations are solved numerically with finite difference method. Moreover, for a special and simple case of problem includes the uniform and hydrodynamically fully developed flow, the analytical solution has been done.

3- Results

In Fig. 3, a precise comparison between the numerical and analytical results for the effect of the dispersion coefficient difference on the Nusselt number in the thermally fully developed region in the central

[1] Corresponding Author: Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran. hsayeh@basu.ac.ir.
[2] PhD. Student, Department of Mechanical Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

4- Conclusion

In this study, it is indicated that the cycles with intermediate-stage combustion chambers at higher speeds perform better than those of conventional cycles. In turbofan engine, the cycles with the secondary combustion chamber have a higher specific thrust and lower specific fuel consumption and lower pollution compared to ordinary cycles. By increasing their fan pressure ratio, the specific thrust ascends and specific fuel consumption descends. In fact, the cycles can support engines that have high bypass ratio and can increase their efficiency. Generally, the cycles with less input temperature in high pressure turbine can reduce the specific fuel consumption of the cycle. It is found that due to the unavailability of the curve of the engine's characteristics, using the scaling method is proper for estimating functional curves. In this method, constant coefficients of the design point of the engine are analyzed and the obtained curves are closer to each other and the error in simulation results is reduced.

Simulation of the Secondary Combustion Chamber of Turbofan Engine in Off-design Point

S. Jafaripanah[1], F. Ommi[2*], S. Khezrpour[3]

1- Introduction

The main objective of this study is a parametric investigation of twin spool unmixed flow turbofan engines for 6-person light aircraft. Obtaining the engine performance curves and mathematical modeling of the off-design function of the engine by using the Serial Nested Loops method is studied. Despite the complexity of mathematical modeling, the performance of off-design turbofan engine is investigated and Twin Spool modeling of unmixed flow is presented. The design choices for specific fuel consumption and specific thrust are examined. The performance parameters of the turbofan engine with constant geometry contain thrust, specific fuel consumption, engine intake air, component efficiency, component pressure ratio, turbine inlet and outlet temperature. For cycles, the static or flight performance is analyzed and the performance matching of each engine component is determined.

2- Engine Modeling

To facilitate the simulation of the turbofan engine performance, the engine is numbered according to the location of the main components of the engine, Table 1.

Table 1. Marking number turbofan engine with a secondary combustion chamber

item	Number	Description
1	0	Free flow conditions
2	2	Inlet Air
3	13	Inlet Low Pressure Compressor
4	17	Inlet Fan
5	18	Outlet Fan
6	2.5	Inlet high Pressure Compressor
7	3	Inlet Combustion Chamber
8	4	Inlet high Pressure Turbine
9	4.5	Inlet Secondary Combustion Chamber
10	4.8	Inlet low Pressure Turbine
11	5	outlet low Pressure Turbine
12	7	Inlet nozzle engine core
13	8	outlet nozzle engine core

In Fig. 1, the numbering is related to the state of the engine without the secondary combustion chamber and according to Fig. 2; the secondary combustion chamber is located between the low and high pressure turbines. The air outlet from the high pressure turbine is heated up again and then enter to the low pressure turbine. This results an increase in the special output of the low pressure turbine, thus increase the specific thrust.

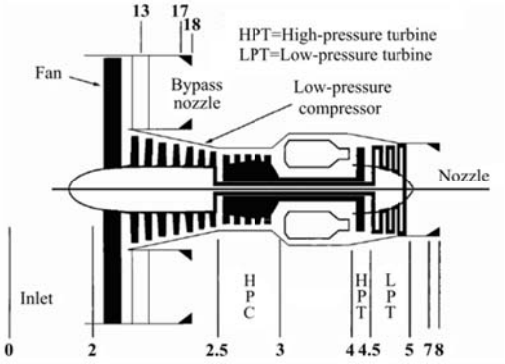


Fig. 1. Different stations turbofan engines without secondary combustion chamber.

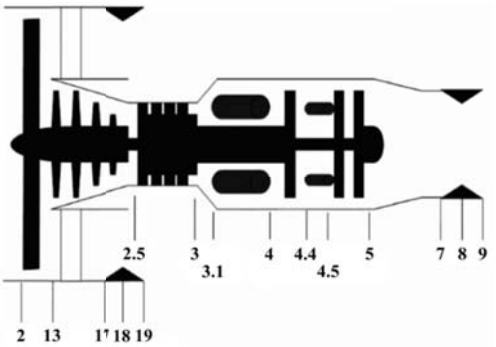


Fig. 2. Different stations turbofan engine with a secondary combustion chamber.

3- Discussion of Result

In Fig. 3, a simulated model and GSP (Gas Turbine Simulation Program) software is compared. As seen on the right side of figure, the matching error has a high error in the low period. However, as the RPM increases, the error is reduced until the error rate reaches less than 20% in over than 90% RPM. It indicates that the simulated model in the high RPM has an acceptable accuracy. At the design point, the error is minimum but as the RPM decreases or increases, the error increases which is due to the application of the scale method.

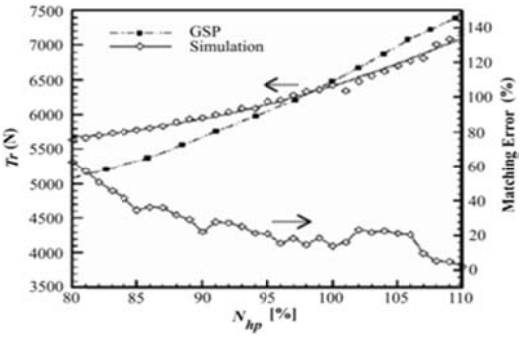


Fig. 3. The effect of Reynolds number on the distribution of time-averaged local Nusselt number.

[1]- Ph.D. student in Department of Aerospace Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
[2]- Corresponding Author: Associate professor, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. fommi@modares.ac.ir
[3]- Master of Science in Department of Aerospace Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

CONTENTS

Simulation of the Secondary Combustion Chamber Application of Turbofan Engine in Off-design Point	S. Jafaripanah F. Ommi S.S. Khezrpour	1
Numerical and Analytical Investigation of Thermal Dispersion Effects on the Heat Transfer of Nanofluid flow inside a Channel	H.-O. Sayehvand A. Basiri Parsa	21
Nanoparticle Shape Effect on a Nanofluid-Based Parabolic Trough Concentrating Photovoltaic/Thermal System	F. Yazdanifard E. Ebrahimnia-Bajestan M. Ameri	41
Similarity Solution of Axisymmetric Stagnation Point Flow of Nanofluid on Rotating Cylinder	H. Mohammadiun	57
Simultaneous Estimation of Location and Strength of a Heat Source in a Functionally Graded Plate by Inverse Analysis	M. Shamsa M.R. Golbahar Haghighi P. Malekzadeh	71
On the Dynamical Stability of Astrophysical Rings	M.H. Khashen M. Roshan	89
The Effect of Equilibrium Equation and Trefftz Functions on the Responses of Quadrilateral Bending Plate	M. Rezaiee-Pajand M. Malekzadeh-Gonabadi N. Rajabzadeh-Safaei	99
A New Method for Representation of Pipe Bending Process Using Wire Mandrel (Reaserch Note)	M.R. Rajabi M. Rezaei Zadeh S.Y. Ahmadi Brooghani	119
Spur Gear Profile Modification for the Reduction of Static Transmission Error (Reaserch Note)	Sh. Mohaghegh M. Poursina	129
Complete Dynamic Shaking Force Balancing of a 3(RPSP)-S Spherical Parallel Robot Using Extra Linkage (Reaserch Note)	M. Heydari J. Enferadi	145

Ferdowsi University of Mashhad

JOURNAL OF APPLIED AND COMPUTATIONAL SCIENCES IN MECHANICS

ISSN: 2008-918X

Editor- in-Chief: Dr. M.R. Mahpeykar
General Director: Dr. H. Niazmand
Published: Ferdowsi University of Mashhad

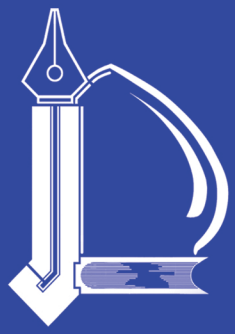
Editorial Board:

M.H. Abolbashari	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
H. Ahmadian	Professor	Iran University of Science & Technology
A. Baradaran Rahimi	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
M. Boroomand	Professor	AmirKabir University of Technology
M. Pasandideh Fard	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
M. Taj Far	Associate professor	AmirKabir University of Technology
M.R. Khalili	Professor	K.N. Toosi University of Technology
M. Salimi	Professor	Isfahan University
E. Shirani	Professor	Isfahan University of Technology
M. Tahani	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
A. Abedian	Associate professor	Sharif University of Technology
M. Kadkhodayan	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
M.R. Mahpeykar	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
H. Niazmand	Professor	Ferdowsi University of Mashhad

Text Editor: Dr. M.H. Abolbashari and E. Dehghan **Administrative Director:** T. Hooshmand

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics
Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad
P. O. Box: 91775-1111, Mashhad, I.R. IRAN
Tel : +98 511 8806024 Fax : +98 511 8763301
Email: ejour@um.ac.ir Web site: http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir
Indexed in: ISC, SID, Magiran, EBSCO

ISSN 2008 - 918X



Ferdowsi University
of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

(Journal of Faculty of Engineering)

Serial No. 18

Simulation of the Secondary Combustion Chamber Application of Turbofan Engine in Off-design Point 1
S. Jafaripanah - F. Ommi - S.S. Khezrpour

Numerical and Analytical Investigation of Thermal Dispersion Effects on the Heat Transfer of Nanofluid flow inside a Channel 21
H.-O. Sayehvand - A. Basiri Parsa

Nanoparticle Shape Effect on a Nanofluid-Based Parabolic Trough Concentrating Photovoltaic/Thermal System 41
F. Yazdanifard - E. Ebrahimnia-Bajestan - M. Ameri

Similarity Solution of Axisymmetric Stagnation Point Flow of Nanofluid on Rotating Cylinder 57
H. Mohammadiun

Simultaneous Estimation of Location and Strength of a Heat Source in a Functionally Graded Plate by Inverse Analysis 71
M. Shamsa - M.R. Golbahar Haghighi
P. Malekzadeh

On the Dynamical Stability of Astrophysical Rings 89
M.H. Khashen - M. Roshan

The Effect of Equilibrium Equation and Trefftz Functions on the Responses of Quadrilateral Bending Plate 99
M. Rezaiee-Pajand - M. Malekzadeh-Gonabadi
N. Rajabzadeh-Safaei

A New Method for Representation of Pipe Bending Process Using Wire Mandrel (Reaserch Note) 119
M.R. Rajabi - M. Rezaei Zadeh
S.Y. Ahmadi Brooghani

Spur Gear Profile Modification for the Reduction of Static Transmission Error (Reaserch Note) 129
Sh. Mohaghegh - M. Poursina

Complete Dynamic Shaking Force Balancing of a 3(RPSP)-S Spherical Parallel Robot Using Extra Linkage (Reaserch Note) 145
M. Heydari - J. Enferadi

Vol. 29, No.2
Sprinng & Summer, 2018