ISSN 2008 - 918X

مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل مکانیزم جدید کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوّار ۱
خدیجه فرجی مهیاری- علی جعفری - سیدسعید محتسبی - علی حاجی‌احمد

حل تحلیلی کمانش ورق‌های ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در دو حالت مدار باز و بسته ۱۵
محمدعلی قاسم آبادیان - علیرضا سعیدی

بررسی تجربی تأثیر پارامترهای لیزر در شکل‌دهی ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم با استفاده از لیزر ۳۳
امیرحسین روحی - حسن مسلمی نائینی - محمد حسین‌پور - مهدی سلطان‌پور

تخمین شوک حرارتی در مسائل انتقال حرارت معکوس با استفاده از روش فیلتر کالمن ۴۵
مهدی مولوی - احمد صداقت - محمد رضا سلیم‌پور

ارتعاش ورق‌های مدرج تحت جرم گسترده با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم ۵۵
علیرضا شوشتری - رضا مطهری - محمدرضا کاری

بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر ناحیه از تحلیل ایزوژئومتریک ۷۳
احمد گنجعلی - بهروز حسنی

مطالعهٔ اثر ریزساختار و اندازهٔ دانهٔ فولاد AISI۱۰۴۵ بر میزان سخت‌شدگی سطح طی فرآیند سنگ-زنی عمیق با راندمان بالا ۸۹
حمیدرضا فضلی شهری - علی اکبر اکبری

شبیه‌سازی رایانه‌ای فرآیند ولکانش به‌منظور محاسبهٔ زمان پخت در یک قطعهٔ لاستیکی با اصلاح معادلهٔ سینتیک پخت ۱۰۷
محمدرضا عرفانیان - سید محمد جوادی - محمد مقیمان

تخریب خمشی جاذب‌های انرژی جدار نازک و ارائهٔ مدل ساده‌شدهٔ عددی (یادداشت پژوهشی) ۱۱۹
احمد رحمتی علایی - محسن غضنفری - مجید شهروی

تحلیل نظری و تجربی پس‌کمانش حرارتی ستون‌ها (یادداشت پژوهشی) ۱۲۹
حامد باقریان - حمید اختراعی طوسی

تحلیل تأثیر پارامترهای هندسی و دینامیکی کامیونت بر انحراف عرضی ناشی از نابالانسی نیروی ترمزی (یادداشت پژوهشی) ۱۴۱
موسی رضائی - امین ترقی اسگوئی - حسام الدین ارغند

سال ۲۶، شماره ۲

بهار و تابستان، ۱۳۹۴

دانشگاه فردوسی مشهد

نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

(نشریه دانشکده مهندسی)

(علمی - پژوهشی)

شماره پیاپی ۱۲

نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

علمی ـ پژوهشی

ISSN: 2008-918X

سردبیر: دکتر محمدرضا مه‌پیکر

مدیر مسؤول: دکتر حمید نیازمند

صاحب امتیاز: دانشگاه فردوسی مشهد

هیأت تحریریه:

دکتر محمد حسین ابوالبشری	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر حمید احمدیان	استاد، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مکانیک
دکتر اصغر برادران رحیمی	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر مسعود برومند	دانشیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوا فضا
دکتر محمود پسندیده فرد	دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر مهران تاج فر	دانشیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوا فضا
دکتر محمدرضا خلیلی	استاد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک
دکترمحمود سلیمی	استاد، دانشگاه اصفهان، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر ابراهیم شیرانی چهارسوقی	استاد، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی مکانیک
دکتر مسعود طهانی	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر علی عابدیان	دانشیار، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا
دکتر مهران کدخدایان	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر محمدرضا مه‌پیکر	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک
دکتر حمید نیازمند	استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

ویراستار علمی: دکتر محمدحسین ابوالبشری

مسئول دفتر نشریه: تکتم هوشمند

ویراستار ادبی: الهام دهقان

ویرایش و صفحه‌آرایی: فائزه علی‌اکبری

این نشریه در کتابخانه منطقه‌ای علوم و تکنولوژی شیراز (ISC) نمایه می‌شود. http://www.srlst.com

نشانی: مشهد- دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده مهندسی - دفتر نشریه - صندوق پستی: ۱۱۱۱-۹۱۷۷۵

تلفن : ۳۸۸۰۶۰۲۴-۰۵۱ دورنگار :۳۸۷۶۳۳۰۱-۰۵۱

پست‌الکترونیکی: **ejour@um.ac.ir** وب سایت: **http://jm.um.ac.ir**

شماره نامه مجوز وزارت علوم، تحقیقات و فناوری: ۱۳۳۳۷۵ مورخ ۱۳۹۰/۷/۱۹ چاپ: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مطالب

مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل مکانیزم جدید کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوّار	خدیجه فرجی مهیاری علی جعفری سیدسعید محتسبی علی حاجی‌احمد	۱
حل تحلیلی کمانش ورق‌های ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در دو حالت مدار باز و بسته	محمدعلی قاسم‌آبادیان علیرضا سعیدی	۱۵
بررسی تجربی تأثیر پارامترهای لیزر در شکل‌دهی ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم با استفاده از لیزر	امیرحسین روحی حسن مسلمی نائینی محمد حسین‌پور گللو مهدی سلطان‌پور	۳۳
تخمین شوک حرارتی در مسائل انتقال حرارت معکوس با استفاده از روش فیلتر کالمن	مهدی مولوی احمد صداقت محمد رضا سلیم‌پور	۴۵
ارتعاش ورق‌های مدرج تحت جرم گسترده با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم	علیرضا شوشتری رضا مطهری محمدرضا کاری	۵۵
بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر ناحیه از تحلیل ایزوژئومتریک	احمد گنجعلی بهروز حسنی	۷۳
مطالعهٔ اثر ریزساختار و اندازهٔ دانهٔ فولاد AISI1045 بر میزان سخت‌شدگی سطح طی فرآیند سنگ‌زنی عمیق با راندمان بالا	حمیدرضا فضلی شهری علی اکبر اکبری	۸۹
شبیه‌سازی رایانه‌ای فرآیند ولکانش به‌منظور محاسبهٔ زمان پخت در یک قطعهٔ لاستیکی با اصلاح معادلهٔ سینتیک پخت	محمدرضا عرفانیان سید محمد جوادی محمد مقیمان	۱۰۷
تخریب خمشی جاذب‌های انرژی جدار نازک و ارائهٔ مدل ساده‌شدهٔ عددی (یادداشت پژوهشی)	احمد رحمتی علایی محسن غضنفری مجید شهروی	۱۱۹
تحلیل نظری و تجربی پس‌کمانش حرارتی ستون‌ها (یادداشت پژوهشی)	حامد باقریان حمید اختراعی طوسی	۱۲۹
تحلیل تأثیر پارامترهای هندسی و دینامیکی کامیونت بر انحراف عرضی ناشی از نابالانسی نیروی ترمزی (یادداشت پژوهشی)	موسی رضائی امین ترقی اسگوئی حسام الدین ارغند	۱۴۱

مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل مکانیزم جدید کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوّار*

خدیجه فرجی مهیاری[۱] علی جعفری[۲] سیدسعید محتسبی[۳] علی حاجی‌احمد[٤]

چکیده *مکانیزم جدید کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوّار، در واقع طرح یک سامانهٔ انتقال توان کامل می‌باشد. این سامانه می‌تواند برای مقادیر مختلف سرعت‌های زاویه‌ای ورودی به آن، سرعت خروجی تقریباً ثابت تولید نماید و به‌عنوان رابطی مناسب، بین محور توان‌دهی تراکتور و ماشین‌های کشاورزی به‌کار گرفته شود. این سامانه کاملاً مکانیکی می‌باشد. در این پژوهش، با استخراج معادلات نیرو، گشتاور و توان، عملکرد مکانیزم مدل‌سازی می‌شود. معادلات حاکم بر حرکت این مکانیزم از نوع معادلات دینامیکی غیرهولونومیک و به‌صورت معادلات دیفرانسیل- جبری با اندیس سه می‌باشد. نتایج مدل‌سازی نشان می‌دهد که با تغییر سرعت ورودی به سامانه در بازهٔ ۳۰-٪ الی ۵۰٪ ، میزان خطا در سرعت خروجی کمتر از ۱۰٪ می‌باشد.*

واژه‌های کلیدی سرعت زاویه‌ای، مجموعهٔ چرخدندهٔ سیاره‌ای، سیستم غیرهولونومیک، کنترل خودکار، معادلات دیفرانسیل- جبری.

Dynamics Modeling and Analysis a New Mechanism for Automatic Control of Angular Velocity of a Rotary Axis

Kh. Faraji Mahyari A. Jafari S. S. Mohtasebi A. Hajiahmad

Abstract *Actually a new mechanism presented for automatic control of angular velocity of a rotary axis is a complete power transmission system. This system can produce an almost constant output speed for different values of the angular velocity input, and can be employed as a suitable coupling between tractor P.T.O. shaft and agricultural machineries. This system is quite mechanical. In this study, equations of force, torque and power of the mechanism were extracted and mechanism performance were modeled. The equations of motion of mechanism are non-holonomic dynamical and differential algebraic equations with an index of three. Modeling results showed that changing the input velocity in the range of -30% to 50%, variations of output velocity would less than 10%.*

Key Words Angular Velocity, Planetary Gear Set, Nonholonomic System, Automatic Control, Differential-Algebric Equation.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۱۱/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/٤/۲۳ می‌باشد.

(۱) کارشناس‌ارشد، مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج.

(۲) نویسندهٔ مسئول، استاد، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج jafarya @ut.ac.ir

(۳) استاد، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج.

(٤) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج.

مقدمه

در بسیاری از سامانه‌های مهندسی دوار، توان از یک ورودی با سرعت دورانی غیریکنواخت تأمین می‌شود. یکنواخت نبودن سرعت ورودی باعث ایجاد نوسان در خروجی سامانه می‌گردد. بدین ترتیب راندمان سیستم متغیر خواهد بود. در سیستم‌های دوار، توان سیستم دارای دو مؤلفهٔ سرعت دورانی و گشتاور می‌باشد و از حاصل‌ضرب آن دو تعیین می‌شود. معمولاً طراحی سیستم‌ها براساس میزان سرعت دورانی یا گشتاور مشخص صورت می‌گیرد. از این‌رو، راندمان بیشینه تنها در آن سرعت دورانی یا گشتاور خاص حاصل می‌گردد. به‌طور مثال، در توربین‌های بادی و آبی، سرعت دورانی ورودی به‌طور طبیعی غیریکنواخت می‌باشد. در بعضی سیستم‌ها نیز، که توان مورد نیاز خود را از یک منبع غیرطبیعی مانند موتورهای درون سوز دریافت می‌کنند، ثابت نگه‌داشتن سرعت دورانی محور ورودی به‌سادگی امکان‌پذیر نیست. در این میان، می‌توان به بسیاری از ماشین‌های کشاورزی هم اشاره کرد که توان مورد نیاز برای به حرکت در آوردن اجزای خود را از محور توان‌دهی (Power Take Off) تراکتور تأمین می‌کنند. محور توان‌دهی تراکتور واسطه‌ای است که حرکت دورانی را برای ادوات کشاورزی تأمین می‌نماید و سرعت دورانی آن براساس استاندارد ASABE S207.12 [1] می‌بایست ۵۴۰ و ۱۰۰۰ دور در دقیقه، در دور مشخصهٔ موتور باشد. اگر دور موتور کمتر یا بیشتر از مقدار مشخصه باشد، سرعت دوران محور توان‌دهی نیز تغییر خواهد کرد. بالا یا پایین بودن سرعت زاویه‌ای محور توان‌دهی نسبت به مقدار استاندارد، می‌تواند موجب کاهش بازده ماشین شود، به قطعات متحرک آسیب برساند و یا مشکلاتی چون گیرکردن محصولات کشاورزی را پدید آورد [۲].

سیستم‌های کنترل، هم‌زمان با ابداع و اختراع سیستم‌های صنعتی همواره فکر بشر را به خود مشغول داشته است. این امر، به‌خصوص برای مواقعی که عمل کنترل بدون دخالت انسان مطرح بوده است، اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. گاورنر (Fly-ball governor) مکانیکی اولین سیستم کنترلی خودکار است که در سال ۱۷۹۰ به‌منظور کنترل سرعت دورانی موتور بخار توسط جیمز وات (James Watt) ارائه شد [3]. این سیستم مکانیکی، در طراحی مکانیزم کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوّار الهام‌بخش بوده است.

یک سیستم متعادل‌کنندهٔ سرعت زاویه‌ای وظیفه دارد در هر لحظه، نسبت سرعت ورودی به خروجی را به‌گونه‌ای تغییر دهد تا سرعت خروجی هم‌چنان ثابت بماند. جعبه‌دنده‌های سرعت متغیر پیوسته یکی از انواع سیستم‌های متعادل‌کنندهٔ سرعت زاویه‌ای می‌باشند. جعبه‌دنده‌های سرعت متغیر پیوسته نیز می‌توانند به‌منظور فراهم آوردن توان ورودی با یک سرعت ثابت برای ژنراتور، بین موتور و ژنراتور استفاده شوند به‌طوری که ژنراتور قدرتی در ولتاژ ثابت تولید کند [4, 5].

در سال ۱۹۷۵ یک جعبه‌دندهٔ سرعت متغیر پیوستهٔ تمام چرخ‌دنده‌ای اختراع شد. در این جعبه‌دنده از مجموعه چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای استفاده شده بود [6]. از مزایای چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای این است که به علت ماهیت مکانیکی، توان انتقال قدرت آن بالا است و می تواند دامنه وسیعی از حرکات خروجی غیر یکنواخت را تولید نمایند [7]. از ویژگی‌های سیستم‌های دارای مجموعه چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای این است که بیش از یک درجه آزادی دارند و برای به‌دست آوردن خروجی قابل پیش‌بینی، می‌بایست درجات آزادی آن‌ها را با ورودی‌های معلوم کنترل نمود [8]. در کنترل، اگر درجات آزادی قابل کنترل مساوی با درجات آزادی سیستم باشد آنگاه سیستم هولونومیک است و اگر درجات آزادی قابل کنترل کمتر از درجات آزادی

سیستم باشد سیستم غیرهولونومیک خواهد بود. دیفرانسیل خودرو، که به‌واسطهٔ یک قید غیرهولونومیک، اختلاف سرعت زاویه‌ای بین دو واحد خروجی را کنترل می‌کند از این نوع می‌باشد [9].

در سال ۲۰۰۱، یک جعبه‌دندهٔ سرعت متغیر پیوسته ارائه شد که متشکل از یک مجموعه پولی دور متغیر متصل به یک مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای بود [10]. در سال بعد، یک جعبه‌دندهٔ سرعت متغیر پیوسته، متشکل از مجموعه چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای اول و دوم معرفی شد [11]. در سال ۲۰۱۰، یک مکانیزم ICT (Independently Controllable Transmission) برای توربین‌های بادی سرعت متغیر ارائه گردید [12]. این مکانیزم ترکیبی از دو مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای است و سرعت ثابتی به خروجی منتقل می‌کند و یک سروو موتور (Servo Motor) وظیفهٔ کنترل را به‌عهده دارد، به‌گونه‌ای که روتور دچار نوسان سرعت نشود.

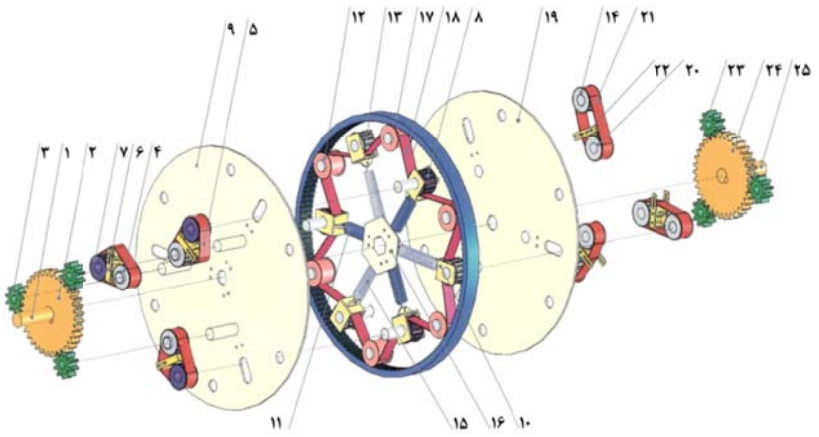
هدف از این پژوهش ارائه و مدل‌سازی دینامیکی یک سیستم انتقال توان با قابلیت کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوار می‌باشد که بتواند رابط مناسبی بین محور توان‌دهی تراکتور و ماشین‌های کشاورزی باشد. درنهایت تأثیر برخی پارامترهای مهم و مؤثر بر عملکرد این مکانیزم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ساختار مکانیزم کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای

این سیستم، که اساس کار آن رابطهٔ مستقیم میان نیروی جانب مرکز و سرعت زاویه‌ای می‌باشد ($F = mr\omega^2$)، با الهام از اولین سیستم کنترل دور (گاورنر) و با بهره‌گیری از مجموعه چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای طراحی شده است.

همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، این سیستم شامل دو مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای و دو مجموعه پولی‌های معلق سنگین و سبک می‌باشد. این مجموعه‌ها توسط تسمه با یکدیگر در ارتباط می‌باشند. درضمن، هر کدام از پولی‌های معلق، به‌واسطهٔ یک فنر به مرکز مکانیزم متصل شده‌اند که سبب شناور بودن پولی‌ها می‌گردد.

این دو مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای که به‌طور سری کنار هم در ورودی و خروجی سیستم قرار گرفته‌اند، دارای چرخ‌دندهٔ محیطی مشترک هستند. چرخ‌دندهٔ محیطی در جای خود ثابت نگه داشته شده است. در مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول، چرخ‌دندهٔ خورشیدی محرک است و صفحهٔ حامل را مجبور به دوران می‌نماید. اما در مجموعهٔ دوم، صفحهٔ حامل عامل محرک می‌باشد. در جدول (۱) شرح قطعات مربوط به شکل (۱) آورده شده است.

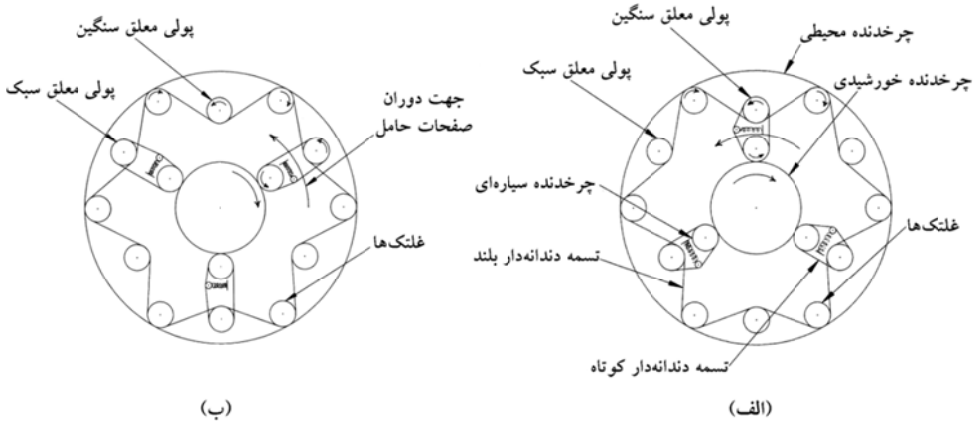


شکل ۱ نمای انفجاری و شمارهٔ قطعات دستگاه متعادل‌کنندهٔ سرعت زاویه‌ای محورهای دوار

جدول ۱ شماره و شرح قطعات سیستم کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای محورهای دوار مطابق با شکل (۱)

شماره	شرح قطعه
۱و۲	محور ورودی و چرخ‌دندهٔ خورشیدی در مجموعهٔ اول
۳و۲۳	چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای در مجموعهٔ اول و دوم
٤	پولی هم‌محور چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای در مجموعه اول
٥و۲۱	تسمه‌های دندانه‌دار کوتاه
٦و۲۲	تسمهٔ سفت‌کن
۷	پولی معلق سنگین بیرونی
۸	پولی معلق سنگین داخلی
۹و۱۹	صفحهٔ حامل
۱۰	پایه‌های پولی‌های معلق

شماره	شرح قطعه
۱۲	غلتک‌ها
۱۳	پولی معلق سبک داخلی
۱٤	پولی معلق سبک بیرونی
۱۱و۱٥	فنرهای نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سنگین و سبک
۱٦	پایهٔ فنرها
۱۷	چرخ‌دنده محیطی
۱۸	تسمهٔ دندانه‌دار بلند
۲۰	پولی هم‌محور چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای در مجموعهٔ دوم
۲٤و۲٥	محور خروجی و چرخ‌دندهٔ خورشیدی در مجموعهٔ دوم



شکل ۲ تصویر شمانیک (الف) مجموعهٔ چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول، (ب) مجموعهٔ چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای دوم

در شکل (۲) تصویر شماتیک مجموعه‌های چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای «مکانیزم متعادل‌کنندهٔ سرعت زاویه‌ای» نشان داده شده است. در این مکانیزم، چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای، پولی‌های معلق سنگین و سبک و غلتک‌ها علاوه بر حرکت وضعی دارای حرکت انتقالی نیز هستند. درضمن، محورهای ورودی و خروجی در یک جهت می‌چرخند.

هرچه سرعت دورانی محور ورودی بالاتر رود، سرعت دورانی چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای و به تبع آن سرعت دوران کل مجموعه (صفحات حامل) نیز بالاتر خواهد رفت و در نتیجه با توجه به شناور بودن پولی‌های معلق سنگین (قطعات شماره ۷ و ۸ در شکل ۱)، محور این پولی‌ها (با غلبه بر نیروی فنری که آنها را به سمت مرکز دوران می‌کشد) از مرکز دوران دورتر خواهد شد و پولی‌های معلق سبک (قطعات شماره ۱۳ و ۱٤ در شکل ۱) تحت کشش فنر خود به محور دوران نزدیک‌تر خواهد گردید؛ بر عکس، با کاهش سرعت دورانی محور ورودی چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای و پولی‌های معلق سنگین حرکت وضعی کندتری خواهند داشت و صفحات حامل را با سرعت کمتری به دوران وادار خواهند کرد، در نتیجه با کاهش نیروی جانب مرکز، محور پولی‌های معلق سنگین تحت کشش فنر مربوطه به محور دوران نزدیک گشته و پولی‌های معلق سبک به کشش فنرهای خود غلبه می‌کنند و محورشان از محور دوران صفحات حامل دورتر می‌شود.

تحلیل دینامیکی مکانیزم کنترلی

به‌منظور تحلیل دینامیکی و استخراج معادلات حاکم، مکانیزم در چهار بخش اصلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این چهار بخش عبارتند از مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول واقع شده در ورودی مکانیزم (قطعات شمارهٔ ۲، ۳ و ۹ در شکل ۱)، مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای دوم واقع شده در خروجی مکانیزم (قطعات شماره ۱۹، ۲۳ و ۲٤ در شکل ۱)، صفحات حامل و بخش میانی که در برگیرندهٔ مجموعه پولی‌های معلق، فنرهای نگهدارندهٔ آن‌ها و تسمهٔ بلند می‌باشد. برای انجام این محاسبات، به‌جای کلیهٔ چرخ‌دنده‌ها و پولی‌های دندانه‌دار، دایره‌هایی با قطری برابر قطر مؤثر این چرخ‌دنده‌ها و پولی‌ها در نظر گرفته شده است. هم‌چنین فرض شده است که هیچ‌یک از چرخ‌دنده‌ها، پولی‌ها و تسمه‌ها هنگام درگیری با یکدیگر، لغزش ندارند و از اتلاف انرژی در مکانیزم صرف‌نظر شده است. بدین ترتیب توان خروجی مکانیزم با توان ورودی آن برابر خواهد بود ($P_{in} = P_{out}$). به‌عبارت دیگر:

$$P_{Si} = P_{So} \qquad (۱)$$

مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول. یکی از روش‌های تحلیل دینامیکی مجموعه‌های چرخ‌دنده‌ای، روش سرعت نسبی است [8, 13]. این روش بر پایهٔ اصل ارزش انتقال بنا نهاده شده است. با استفاده از این اصل می‌توان ارتباط بین سرعت زاویه‌ای اجزای مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای را تعیین نمود [8]. این اصل چنین بیان می‌کند:

$$e = \pm \frac{\text{حاصلضرب شعاع چرخ‌دنده‌های محرک}}{\text{حاصلضرب شعاع چرخ‌دنده‌های متحرک}} = \frac{\omega_L - \omega_{arm}}{\omega_F - \omega_{arm}} \qquad (۲)$$

که در این رابطه e ارزش انتقال، ω_F سرعت زاویه‌ای اولین چرخ‌دنده، ω_L سرعت زاویه‌ای آخرین چرخ‌دنده و ω_{arm} سرعت زاویه‌ای بازو در مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای می‌باشد. با اتکا به این رابطه، ارتباط بین سرعت زاویه‌ای اجزای مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول به ترتیب زیرتعیین می‌شود:

$$\omega_{Pi} + \frac{r_{Si}}{r_{Pi}}\omega_{Si} - \left(1 + \frac{r_{Si}}{r_{Pi}}\right)\omega_{Ci} = 0 \qquad (۳)$$

این تنها رابطه‌ای است که می‌توان میان سرعت‌های زاویه‌ای این مجموعه بیان داشت. این مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای دارای سه مختصات عمومی و یک معادلهٔ قید است. پس، دارای دو درجه آزادی می‌باشد. هم‌چنین دارای یک درجه آزادی قابل کنترل (سرعت زاویه‌ای ورودی) است، از این رو غیرهولونومیک می‌باشد.

از آنجا که در تحلیل مکانیزم، حالت پایای آن در نظر گرفته شده است و در این وضعیت تغییرات سرعت لحظه‌ای کوچک می‌باشد؛ مجموع گشتاور اجزا در مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای برابر صفر خواهدبود، هم‌چنین مجموع توان‌ها نیز صفر می‌شود:

$$T_{Si} + T_{Pi} + T_{Ci} = 0 \qquad (٤)$$

$$P_{Si} + P_{Pi} + P_{Ci} = 0 \qquad (۵)$$

به‌عبارت دیگر:

$$T_{Si}\omega_{Si} + T_{Pi}\omega_{Pi} + T_{Ci}\omega_{Ci} = 0 \qquad (٦)$$

مجموعهٔ چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای دوم. با توجه به تقارنی که در طرح مکانیزم وجود دارد، معادلات نوشته شده برای مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول می‌تواند برای دومی نیز بازنویسی شود؛ بنابراین براساس روش

سرعت نسبی خواهیم داشت:

$$\omega_{Po} = \left(1 + \frac{r_{So}}{r_{Po}}\right)\omega_{Co} - \frac{r_{So}}{r_{Po}}\omega_{So} \qquad (۷)$$

و از آنجا که تنها تحلیل مکانیزم در حالت پایا مورد نظر بوده است، می‌توان چنین نوشت:

$$T_{So} + T_{Po} + T_{Co} = 0 \qquad (۸)$$

$$P_{So} + P_{Po} + P_{Co} = 0 \qquad (۹)$$

از رابطهٔ (۹) می‌توان نتیجه گرفت:

$$T_{So}\omega_{So} + T_{Po}\omega_{Po} + T_{Co}\omega_{Co} = 0 \qquad (۱۰)$$

البته این مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای دارای سه مختصات عمومی و یک معادلهٔ قید است. پس درجهٔ آزادی آن، دو می‌باشد. هم‌چنین دارای دو درجه آزادی قابل کنترل (سرعت زاویه‌ای صفحهٔ حامل و چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای) است و از این‌رو هولونومیک می‌باشد.

از سوی دیگر، به‌واسطهٔ غلتک‌ها، صفحهٔ حامل در این مجموعه با صفحه حامل مجموعه اول ارتباطی مستقیم دارد. از این‌رو:

$$\omega_{Ci} = \omega_{Co} \qquad (۱۱)$$

بخش میانی. این بخش شامل یک قید هولونومیک می‌باشد که توسط تسمهٔ بلند به‌وجود آمده است. این قید به‌صورت تابعی از فاصلهٔ پولی‌های معلق داخلی از محور مرکزی مکانیزم بیان می‌شود:

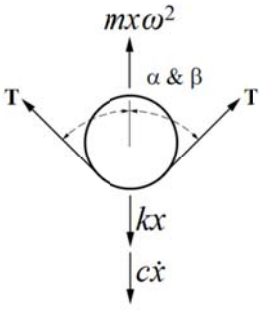
$$\sqrt{{x_1}^2 + R^2 - \sqrt{3}Rx_1} + \sqrt{{x_2}^2 + R^2 - \sqrt{3}Rx_2} - L_0 = 0 \qquad (۱۲)$$

در این رابطه L_0 برابر $\frac{۱}{۶}$ طول تسمهٔ بلند می‌باشد.

دیاگرام آزاد پولی‌های معلق داخلی نیز در شکل (۳) نشان داده شده است. بدین ترتیب براساس قانون دوم نیوتن ($\sum F = m\ddot{x}$)، خواهیم داشت:

$$\ddot{x}_1 - x_1{\omega_{Ci}}^2 - \frac{2\mathbf{T}}{m_1}\cos\alpha + \frac{c}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{k_1}{m_1}(x_1 - d_1) = 0 \qquad (۱۳)$$

$$\ddot{x}_2 - x_2{\omega_{Co}}^2 - \frac{2\mathbf{T}}{m_2}\cos\beta + \frac{c}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2}(x_2 - d_2) = 0 \qquad (۱۴)$$



شکل ۳ دیاگرام آزاد پولی‌های معلق

از طرف دیگر نیروی کشش داخلی تسمه با میانگین نیروهای طرف شل و سفت تسمه برابر است.

$$\mathbf{T} = \frac{F_1 + F_2}{2} \qquad (۱۵)$$

F_1 و F_2 به‌ترتیب نیروهای کششی طرف سفت و شل تسمهٔ بلند هستند، که تفاضل آن‌ها با گشتاور چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای مجموعهٔ اول و دوم متناسب می‌باشد و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_1 - F_2 = \frac{r_2}{r_1 r_3}T_{Pi} \qquad (۱۶)$$

$$F_2 - F_1 = \frac{r_5}{r_4 r_6} T_{Po} \quad (۱۷)$$

صفحات حامل. هر یک از اجزای سوار شده بر صفحهٔ حامل، گشتاوری به آن وارد می‌کند. چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای در ورودی و خروجی مکانیزم و پولی‌های هم‌محور با آن‌ها، گشتاور T_{Ci} و T_{Co} را به‌ترتیب بر صفحه حامل اول و دوم اعمال می‌نمایند که پیش از این در روابط مربوط به مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای اول و دوم وارد شده‌اند. از طرف محور مشترک پولی‌های معلق سنگین داخلی و بیرونی، گشتاوری به صفحه حامل اول اعمال می‌شود. این گشتاور بر حسب نیروهای داخلی تسمهٔ بلند و فاصلهٔ پولی‌ها از مرکز مکانیزم قابل محاسبه می‌باشد.

$$T_{Li} = (F_1 - F_2) x_1 \sin\alpha \quad (۱۸)$$

گشتاور وارد از طرف محور مشترک پولی‌های معلق سبک داخلی و بیرونی به صفحهٔ حامل دوم نیز به‌طور مشابه محاسبه می‌شود.

$$T_{Lo} = (F_2 - F_1) x_2 \sin\beta \quad (۱۹)$$

تسمه سفت‌کن‌ها، که روی صفحات حامل قرار گرفته‌اند هم به این صفحه‌ها گشتاور وارد می‌کنند. تسمه سفت‌کن‌ها وظیفه دارند در هر شرایطی با ایجاد کشش در تسمهٔ کوتاه، امکان انتقال توان میان پولی هم‌محور با چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای و پولی‌های معلق بیرونی را فراهم نمایند. این گشتاور با برآیند نیروهای کششی داخلی تسمه کوتاه متناسب است.

تسمه سفت‌کن‌های روی صفحات حامل اول و دوم، به‌ترتیب نیروی کششی معادل $\frac{T_{Pi}}{r_1}$ و $\frac{T_{Po}}{r_6}$ را در تسمه‌های کوتاه به‌وجود می‌آورند. حاصل‌ضرب این نیرو در فاصلهٔ شعاعی تسمه سفت‌کن‌ها از محور مرکزی مکانیزم (x_{bo} و x_{bi})، گشتاور اعمال شده به صفحات حامل را به‌دست می‌دهد:

$$T_{bi} = \frac{T_{Pi}}{r_1} x_{bi} \quad (۲۰)$$

$$T_{bo} = \frac{T_{Po}}{r_6} x_{bo} \quad (۲۱)$$

غلتک‌ها نیز، که بین دو صفحهٔ حامل ارتباط برقرار می‌کنند تا صفحات حامل با سرعت زاویه‌ای یکسان بچرخند، به صفحات حامل گشتاور دیگری وارد می‌کنند. از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت که T_{Ri} و T_{Ro} به‌ترتیب گشتاور وارد شده به صفحات حامل اول و دوم از سوی غلتک‌ها می‌باشند که با یکدیگر برابرند:

$$T_{Ri} = T_{Ro} \quad (۲۲)$$

در ضمن با توجه به این‌که مکانیزم در حالت پایا مورد بررسی قرار می‌گیرد و تغییرات سرعت لحظه‌ای در این حالت ناچیز است، مجموع گشتاورها روی صفحات حامل اول و دوم برابر با صفر خواهد بود.

$$T_{Ci} + T_{Li} + T_{bi} + T_{Ri} = 0 \quad (۲۳)$$

$$T_{Co} + T_{Lo} + T_{bo} + T_{Ro} = 0 \quad (۲٤)$$

نتایج مدل‌سازی

روابط (۱٤-۱۲) در کنار هم دستگاه معادلات دیفرانسیل- جبری را تشکیل می‌دهند که معرف قید هولونومیک در بخش میانی مکانیزم است. این دستگاه معادلاتی دارای اندیس سه می‌باشد. برای معادلات دیفرانسیل- جبری، کمترین دفعات مشتقی که باید از سیستم گرفته شود تا آنها به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل گردند را اندیس می‌گویند. این مجموعه معادلات در نرم‌افزار MATLAB 7.10.0 مدل‌سازی گردید. در این مدل‌سازی، $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ ها برابر صفر در نظر

گرفته شد تا نتایج مربوط به حالت پایا حاصل گردد. هم‌چنین مجموعهٔ ۱۸ معادلهٔ (۲٤-۱۵ و ۱۱، ۱۰، ۸-٦، ٤، ۳، ۱) در کنار یکدیگر بیان‌کنندهٔ قید غیرهولونومیک در این مکانیزم پیچیده می‌باشند. این معادلات، یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی می‌سازند. با حل این دستگاه، ۱۸ مجهول به‌کار رفته در این معادلات به‌دست می‌آید که سرعت خروجی مکانیزم را نیز شامل می‌شود. برای این منظور، از نرم‌افزار Maple 15.01 استفاده شد و مدل‌سازی پاسخ آن در نرم‌افزار MATLAB 7.10.0 انجام شده است.

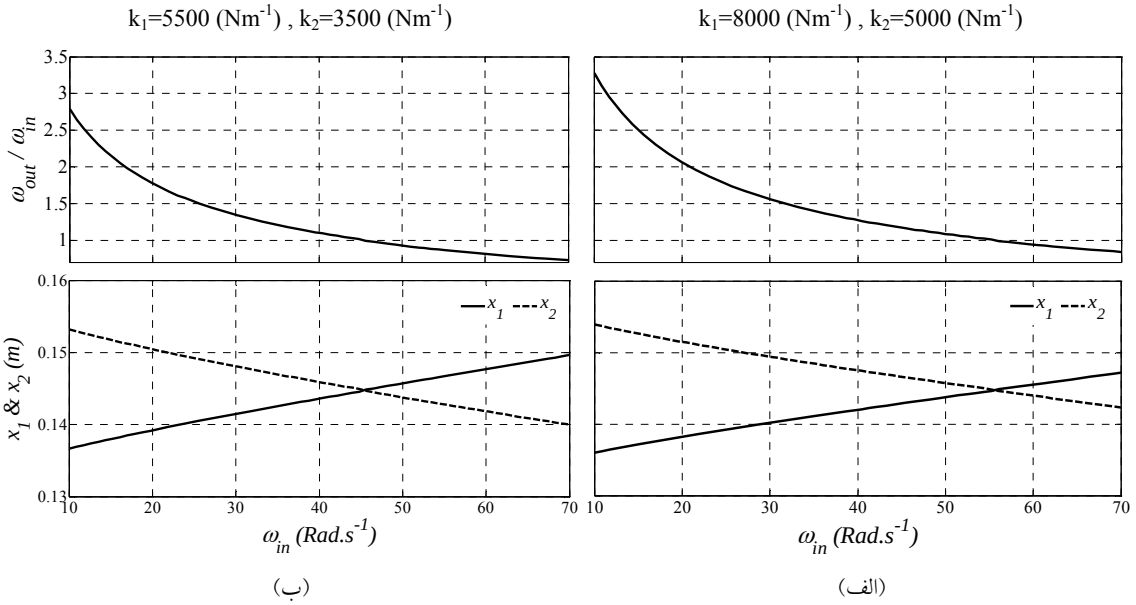
با ترکیب مدل قیدهای هولونومیک و غیرهولونومیک مکانیزم کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای می‌توان عملکرد مکانیزم و عکس‌العمل آن نسبت به تغییرات سرعت زاویه‌ای ورودی را پیش‌بینی نمود. به‌منظور کاهش خطا در این مدل از روش تکرار استفاده شده است.

هم‌چنین با در نظر گرفتن سرعت زاویه‌ای ٥٦ $Rads^{-1}$ (تقریباً ٥٤٠ دور در دقیقه) به‌عنوان سرعت زاویه‌ای مطلوب (سرعت زاویه‌ای ورودی به مکانیزم که در آن نسبت انتقال یک را ارائه می‌دهد) و با استفاده از روش سعی و خطا مقادیر بهینه برای پارامترهای طراحی این مکانیزم کنترلی استخراج گردید که در جدول (۲) آورده شده است. توان ورودی به مکانیزم ۳۰هزار وات (٤۰ اسب بخار) در نظر گرفته شده است.

به‌منظور بررسی اثر پارامترهای گوناگون از مقادیر جدول (۲) استفاده شده است.

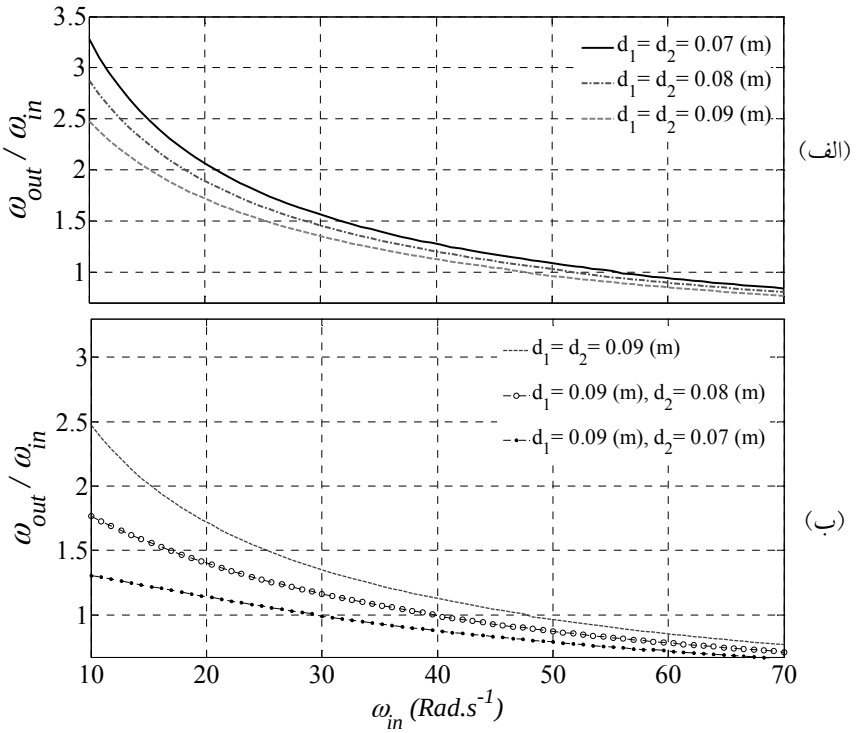
جدول ۲ مقادیر بهینهٔ عوامل طراحی مکانیزم برای سرعت زاویه‌ای مطلوب برابر با (٥٦ ($Rad.s^{-1}$)

پارامتر طراحی	مقدار	واحد
r_{Si} & r_{So}	۰/۰٦	m
r_{Pi} & r_{Po}	۰/۰۱۵	m
r_1 & r_6	۰/۰۱۵	m
r_2 & r_3	۰/۰۱۵	m
r_4 & r_5	۰/۰۱۵	m
R	۰/۳	m
L_0	۰/۳۸	m
d_1	۰/۰۷	m
d_2	۰/۰۷	m
k_1	۸۰۰۰	Nm^{-1}
k_2	۵۰۰۰	Nm^{-1}
m_1	۰/۷	kg
m_2	۰/۲	kg



(ب) (الف)

شکل ٤ تأثیر سختی فنرهای نگهدارنده بر دامنه عملکرد مکانیزم

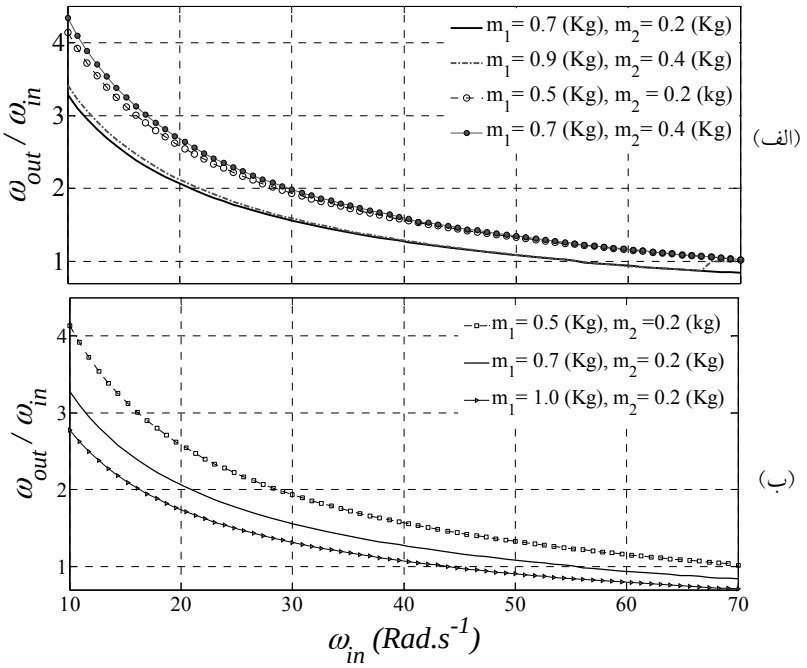


شکل ۵ تأثیر طول آزاد فنرهای نگهدارنده بر دامنهٔ عملکرد مکانیزم

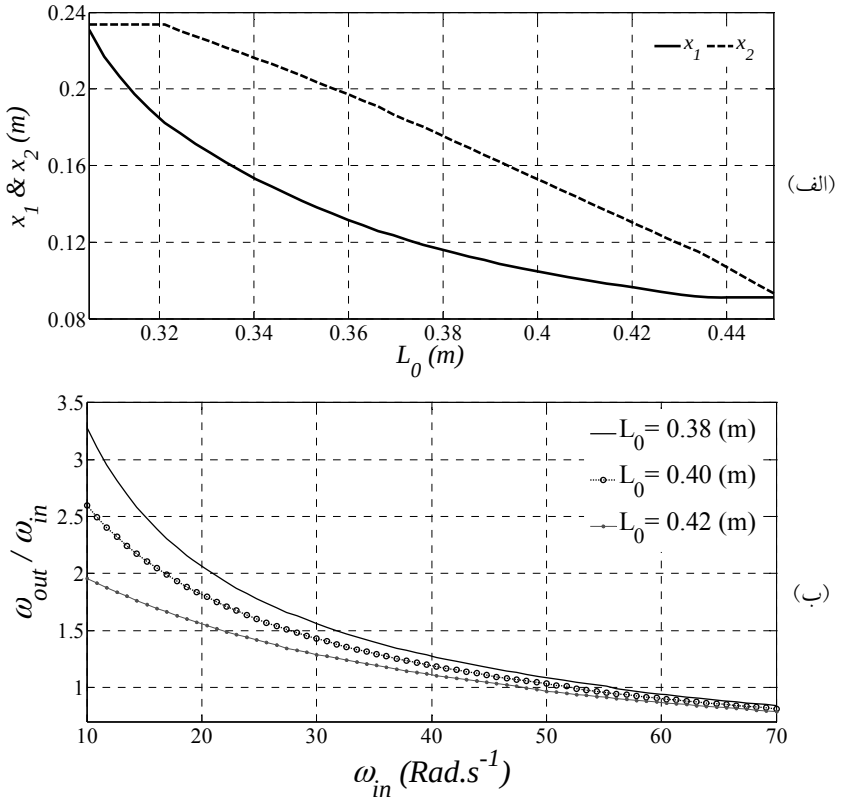
همان‌طور که در شکل (٤) نشان داده شده است، بررسی اثر سختی فنرهای نگهدارنده بر عملکرد مکانیزم نشان می‌دهد که کاهش سختی فنرها سبب کاهش ارزش انتقال $\left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)$ مکانیزم می‌شود. در ضمن مقدار سرعت زاویه‌ای مطلوب را به‌سمت مقادیر کوچک‌تر جابه‌جا می‌نماید. همین نتایج در مورد طول آزاد فنرها نیز به‌دست آمده است. به‌گونه‌ای که هر چه اختلاف طول آزاد فنرها بیشتر می‌شود اثر کاهندگی آن مشهودتر می‌باشد (شکل ۵). پرواضح است که در این مکانیزم فنرها همواره در حالت کشیده هستند و طول آزاد فنر نگهدارندهٔ پولی معلق سبک نمی‌تواند از طول آزاد فنر نگهدارندهٔ پولی سنگین بیشتر باشد.

نتایج مربوط به بررسی اثر جرم پولی‌های معلق در شکل (٦) نمایش داده شده است. با توجه به شکل (٦-الف)، در شرایط یکسان، چنانچه جرم‌ها به‌گونه‌ای انتخاب شوند که اختلاف آن دو ثابت باقی بماند مکانیزم عملکرد مشابه و بسیار نزدیک به هم خواهد داشت. در عین حال، با افزایش اختلاف جرم‌ها ارزش انتقال مکانیزم کاهش می‌یابد. هم‌چنین، مقدار سرعت زاویه‌ای مطلوب به‌سوی سرعت‌های پایین‌تر حرکت می‌کند (شکل ٦-ب).

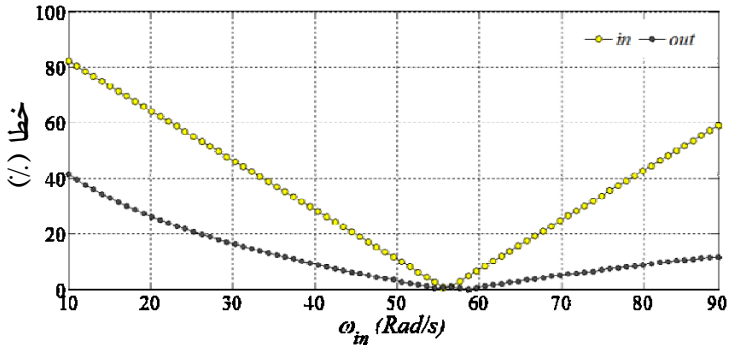
فاصلهٔ شعاعی پولی‌های معلق به‌واسطهٔ شیار تعبیه شده در صفحات حامل محدود می‌باشد. هنگامی که فاصلهٔ شعاعی هر دو پولی معلق، ماکزیمم مقدار ممکن خود باشند طول تسمه مینیمم مقدار خواهد بود و بالعکس. هم‌چنین مینیمم یا ماکزیمم بودن طول تسمه منجر به کاهش دامنهٔ تغییر فاصلهٔ شعاعی پولی‌های معلق می‌گردد (شکل ۷-الف). بنابراین، دامنهٔ مناسب برای انتخاب طول تسمهٔ بلند به‌مقدار متوسط و حد بالا و پایین آن محدود می‌شود. با توجه به شکل (۷-ب) با افزایش طول تسمه ارزش انتقال مکانیزم و مقدار سرعت زاویه‌ای مطلوب کاهش می‌یابند.



شکل ٦ تأثیر جرم پولی‌های معلق بر دامنه عملکرد مکانیزم



شکل ۷ تأثیر طول تسمهٔ بلند بر (الف) فاصلهٔ شعاعی پولی‌های معلق از محور مرکزی، (ب) دامنهٔ عملکرد مکانیزم



شکل ۸ نتایج مدل‌سازی و درصد خطای سرعت محورهای ورودی و خروجی

نتایج مدل‌سازی درصد خطای این سیستم براساس جدول (۲) به‌صورت شکل (۸) می‌باشد. همان‌طور که نشان داده شده است، در مکانیزم متعادل‌کننده سرعت زاویه‌ای محورهای دوار، میزان سرعت دوران محور خروجی نسبت به محور ورودی آن تا حد بسیار خوبی کنترل شده است که این کنترل در سرعت‌های ۳۸ تا ۸٤ رادیان بر ثانیه (۰/٦۸ تا ۱/۵ برابر سرعت زاویه مطلوب) بهتر صورت گرفته است و درصد خطای سرعت محور خروجی کمتر از ۱۰٪ می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، طرح یک مکانیزم جدید کنترل خودکار سرعت زاویه‌ای ارائه گردید، که در آن از ویژگی‌های منحصر به فرد مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای بهره گرفته شده است. نوع قیدهای حاکم بر مکانیزم (هولونومیک یا غیرهولونومیک) از هم بازشناخته شد و هم‌چنین معادلات دینامیکی آن استخراج گردید. این معادلات از نوع دیفرانسیل- جبری با اندیس سه بوده است که مدل‌سازی آن‌ها انجام شد. نتایج مدل‌سازی نشان دادند که این مکانیزم، در سرعت‌های نزدیک به مقدار مطلوب، عملکرد خوبی دارد و قابلیت پیاده‌سازی در یک مکانیزم واقعی را دارا است.

فهرست علائم

c	ضریب میرایی تسمهٔ بلند (Nsm^{-1})
d_1	طول آزاد فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سنگین (m)
d_2	طول آزاد فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سبک (m)
F_1	نیروی کششی طرف سفت در تسمهٔ بلند (N)
F_2	نیروی کششی طرف شل در تسمهٔ بلند (N)
k_1	سختی فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سنگین (Nm^{-1})
k_2	سختی فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سبک (Nm^{-1})
L_0	$\frac{1}{6}$ واحد طول تسمهٔ بلند (m)
m_1	جرم پولی‌های معلق سنگین (kg)
m_2	جرم پولی‌های معلق سبک (kg)
P	توان (W)
r	شعاع مؤثر چرخ‌دنده‌ها و پولی‌ها (m)
R	شعاع مؤثر چرخ‌دندهٔ محیطی (m)
$\mathbf{T}$	نیروی کشش داخلی تسمهٔ بلند (N)
T	گشتاور (Nm)
x_1	طول فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سنگین (m)
x_2	طول فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سبک (m)

علائم یونانی

α	زاویهٔ بین تسمهٔ بلند و امتداد راستای فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سنگین (Rad)
β	زاویهٔ بین تسمهٔ بلند و امتداد راستای فنر نگهدارندهٔ پولی‌های معلق سبک (Rad)

ω سرعت زاویه‌ای ($Rads^{-1}$)

زیرنویس‌ها

bi تسمهٔ سفت‌کن روی صفحهٔ حامل اول

bo تسمهٔ سفت‌کن روی صفحهٔ حامل دوم

Ci صفحهٔ حامل اول

Co صفحهٔ حامل دوم

Li محور مشترک پولی‌های معلق سنگین داخلی و بیرونی

Lo محور مشترک پولی‌های معلق سبک داخلی و بیرونی

Pi چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای در مجموعهٔ اول

Po چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای در مجموعهٔ دوم

R غلتک‌ها

Si چرخ‌دندهٔ خورشیدی در مجموعهٔ اول

So چرخ‌دندهٔ خورشیدی در مجموعهٔ دوم

1 پولی هم‌محور چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای در مجموعهٔ اول

2 پولی معلق سنگین بیرونی

3 پولی معلق سنگین داخلی

4 پولی معلق سبک داخلی

5 پولی معلق سبک بیرونی

6 پولی هم‌محور چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای در مجموعهٔ دوم

مراجع

1. ASABE Standards, ASAE S207.12 MAR1994 (R2009): "Operating Requirements for Tractors and Power Take-Off Driven Implements", St. Joseph, MI: American Society of Agricultural and Biological Engineers, (2013).

۲. بهروزی لار، منصور، «شناخت و کاربرد تراکتور»، انتشارات نشر آموزش کشاورزی، ص. ۱۲۳-۱۱۱، (۱۳۸٤).

3. Nise, N.S., "Control Systems Engineering", Sixth Edition, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., pp. 1-31, (2011).
4. Pfiffner, R. and Guzella, L., "Optimal operation of cvt-based powertrains", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 11, pp. 1003–1021, (2001).
5. Aladagli, I., Hofman, T., Steinbuch, M. and Vroemen, B., "Modeling and Control of a Continuously Variable Transmission in a Constant Speed Power Take-Off Application", in The 12th International Conference on Control, Automation and Systems, Jeju Island, Korea, (2012).
6. Cook, J.F., "Continuously Variable Gear Ratio Automatic Transmission", US Patent No.3899941, (1975).
7. Hsieh, W.H., "Kinematic synthesis of cam-controlled planetary gear trains", Mechanism and Machine Theory, Vol. 44, pp. 873–895, (2009).
8. Norton, R.L., "Design of Machinery: an Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines", third Editon, New York: McGraw-Hill Companies, pp. 462-522, (2004).
9. Soltakhanov, Sh. Kh., Yushkov, M. P. and Zegzhda, S. A., "Mechanics of non-holonomic systems-A New Class of control systems", in: V.I. Babitsky, J. Wittenburg (Eds.), Foundations of Engineering Mechanics, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 25-75, (2009).
10. Mucino, V. H., Lu, Z., Smith, J. E., Kimcikiewicz, M. and Cowan, B., "Design of continuously variable power split transmission systems for automotive applications", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, Vol. 215, No. 4, pp. 469-478, (2001).
11. Parrish, B.E., "Continuously variable transmission", US Patent No.6387004B1, (2002).

12. Hwang, G.S., Lin, J.C., Tsay, D.M., Kuang, J.H. and Chern, T.L., "An Innovative Transmission Mechanism Applicable to Variable Speed Wind Turbines", in The 10th International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ'10), Granada, Spain, (2010).
13. Budynas−Nisbett, "Shigley's Mechanical Engineering Design", eighth Edition, United States of America: McGraw-Hill Companies, pp. 652-710, (2008).

حل تحلیلی کمانش ورق‌های ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در دو حالت مدار باز و بسته*

محمدعلی قاسم‌آبادیان[۱] علیرضا سعیدی[۲]

چکیده *در مقالهٔ حاضر، بر پایهٔ تئوری کلاسیک ورق، کمانش ورق‌های مستطیلی هدفمند کوپله شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحلیل شده است. با فرض این‌که توزیع عرضی تابع پتانسیل الکتریکی ترکیبی از دو تابع خطی و درجه دوم باشد، معادلات تعادل برای تحلیل کمانش ورق با لایه‌های پیزوالکتریک حاصل شد. معادلهٔ ماکسول و همهٔ شرایط مرزی شامل شرایط روی سطوح بالا و پایین ورق برای مدار باز و بسته و شرایط مرزی لوی ارضا شدند. نتایج نشان داد که بار بحرانی کمانش در حالت مدار باز بیشتر از مدار بسته است. هم‌چنین بار بحرانی کمانش با افزایش ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک افزایش می‌یابد.*

واژه‌های کلیدی کمانش، پیزوالکتریک، ورق مستطیلی، مدار باز، مدار بسته، مادهٔ هدفمند.

Analytical Solution for Buckling of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Layers under Open and Closed Circuit Conditions

M.A. Ghasemabadian A.R. Saidi

Abstract *In the present paper, based on the classical plate theory, buckling analysis of piezoelectric coupled FGM rectangular plates is investigated. By assuming the transverse distribution of electric potential to be a combination of a parabolic and a linear function of thickness, the equiblirium equations for buckling analysis of plate with surface bonded piezoelectric layers are established. The Maxwell's equation and all boundary conditions including the conditions on the top and bottom surfaces of the plate for closed and open circuited and Levy type of boundary conditions are satisfied. Numerical results show that, the critical buckling load for open circuit is more than that of closed circuit. Furthermore, the critical buckling loads increase by increasing the thickness of piezoelectric layers.*

Key Words Buckling, piezoelectric, rectangular plate, open circuit, closed circuit, functionally graded material.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۸/۲۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۷/۷ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، گروه مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استاد، گروه مکانیک، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان. saidi@mail.uk.ac.ir

مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در زمینه علم مواد، گسترهٔ وسیعی از مواد را در اختیار محققان برای انتخاب مواد مورد نیازشان با توجه به ویژگی‌های مورد نظر قرار داده است؛ به طوری که اطلاع از ویژگی‌های مادهٔ مورد نیاز و ویژگی‌های مواد موجود، انتخابی درست و مطمئن را تضمین می‌کند. از سوی دیگر تحلیل سازه‌های ساخته شده از این مواد اهمیتی دو چندان دارد، آن چنان که بخش قابل‌توجهی از تلاش و توجه محققان، به آنالیز و تحلیل این مواد در سازه‌های پر کاربرد معطوف شده است. مواد هدفمند و پیزوالکتریک دو دسته از این مواد هستند که به‌علت ویژگی‌های منحصر به فردشان علی‌رغم نو بودن آنها، تاکنون مورد بررسی تعداد زیادی از پژوهشگران بوده‌اند.

جواهری و اسلامی در تحلیل کمانش ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند، کمانش ورق تحت بارگذاری‌های حرارتی [1] و مکانیکی [2] را براساس تئوری کلاسیک با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بررسی کردند. آنها [3] هم‌چنین کمانش حرارتی ورق ضخیم را براساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده انجام دادند و درجه حرارت بحرانی کمانش را به‌صورت حل دقیق به‌دست آوردند. وو [4] کمانش ورق تحت بارگذاری حرارتی را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده براساس تئوری برشی مرتبهٔ اول بررسی کرد. شریعت و اسلامی [5] تحلیل کمانش ورق تحت بارگذاری مکانیکی را براساس تئوری برشی مرتبهٔ اول ارائه دادند. آن‌ها [6] همچنین حل بسته بار بحرانی کمانش را برای ورق با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و براساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم برای مادهٔ هدفمند با تغییرات خطی و بارگذاری مکانیکی و حرارتی، ارائه دادند. فریرا [7] و همکارانش براساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم و استفاده از روش بدون المان، تغییرشکل استاتیکی ورق‌های مستطیلی ضخیم تحت بارگذاری عرضی و شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده را به‌دست آوردند. محمدی و همکاران، کمانش ورق‌های تحت بارگذاری مکانیکی یکنواخت را براساس تئوری-های کلاسیک [8] و برشی مرتبهٔ اول [9] انجام دادند.

هم‌چنین بداغی و سعیدی [10] نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی لوی و بر پایه تئوری مرتبهٔ سوم برشی تحلیل کمانش ورق مستطیلی را ارائه دادند. تحلیل جامعی از مواد هدفمند متقارن نسبت به صفحهٔ میانی ورق به کارهای زنکور [11] بر می‌گردد. کیانی و همکاران [12] نیز براساس تئوری مرتبهٔ اول برشی کمانش ورق مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند متقارن بر روی بستر الاستیک را ارائه دادند.

در زمینهٔ مطالعات مربوط به کمانش ورق‌های پیزوالکتریک، چاندراشخرا و باتیا [13]، براساس تئوری مرتبهٔ اول برشی کنترل فعال کمانش ورق کامپوزیت با مدل‌سازی اجزای محدود را انجام دادند. باترا و جنگ [14] تأثیر شکل و اندازهٔ محرک‌های پیزوسرامیک را بر افزایش اندازهٔ بار کمانش بررسی کردند. وارلیس و ساراوونز [15] نیز پاسخ پیش کمانش و پس کمانش ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک به‌عنوان محرک و حسگر را بررسی کردند. تحلیل دینامیکی کمانش ورق‌های چند لایه با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارهای الکترومکانیکی و حرارتی در دو حالت خواص مستقل [16] و وابسته به دما [17] توسط شرعیات انجام شد. تحلیل سه‌بعدی کمانش حرارتی ورق‌های پیزوالکتریک کامپوزیت با روش لایه محدود نیز توسط لی و اخرس [18] انجام پذیرفت. در زمینهٔ کارهای تحلیلی، یانگ [19]، معادلات مربوط به کمانش ورق خالص پیزوالکتریک را به‌دست آورد. شن [20] پس کمانش حرارتی ورق مستطیلی لایه‌ای با محرک‌های پیزوالکتریک را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و تحت بارهای حرارتی و الکتریکی ارائه داد. علاوه بر آن وی [21] مقایسه‌ای بین تحلیل پس کمانش فشاری در محیط حرارتی و

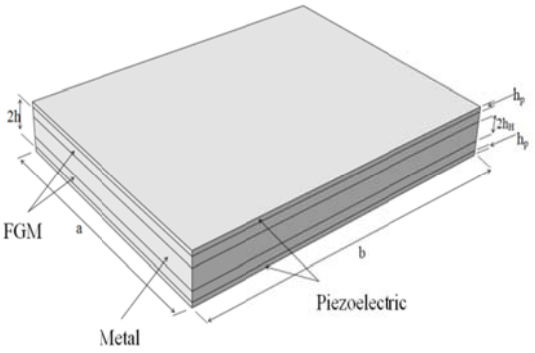
پس کمانش تحت افـزایش دمـای محـدود بـرای ورق کامپوزیـت بـا لبـه‌هـای تکیـه‌گـاه سـاده و لایـه‌هـای پیزوالکتریک بر پایه تئوری مرتبهٔ سوم ارائه داد. تحلیل پـس کمـانش ورق‌هـای لایـه‌ای بـا محـرک‌هـای پیزوالکتریک تحت شرایط بارگذاری پیچیـدهٔ حرارتـی مکانیکی الکتریکی نیز توسط وی [22, 23] انجام شـد. کاپویرا و آچاری [24] با اسـتفاده از تئـوری زیگـزاگ، کمـانش ورق‌هـای پیزوالکتریـک هیبریـدی را بررسـی کردند. با استفاده از فرمول‌های فضای حالـت، کمـانش ورق لایه‌ای مستطیلی پیزوالکتریک توسـط کـیم و لـی [25] انجام پذیرفت.

همان‌گونه که مشـاهده مـی‌شـود هـیچ‌گونـه حـل تحلیلی برای آنالیز کمانش ورق‌های مسـتطیلی سـاخته شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک، مبتنی بـر ارضای حالت مـدار بـاز و بسـته و هـم‌چنـین ارضـای معادله ماکسول، حتی برای ورق‌هـای بـا شـرط مـرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده وجود ندارد. به‌دلیـل اهمیـت مطالعهٔ رفتار کمانشی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند و پیزوالکتریک، در این مقاله، برای اولـین بـار حـل تحلیلـی بـرای یـافتن بـار بحرانـی کمـانش ورق‌های نازک چند لایهٔ ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت شرایط مرزی لوی و حالت مدار باز و بستهٔ الکتریکی ارائه شده است.

معادلات تعادل و پایـداری براسـاس ویژگـی‌هـای مادهٔ هدفمند متقارن نسبت بـه وسـط ضـخامت ورق و هم‌چنین معادلهٔ ماکسول در حوزهٔ متغیرهای الکتریکی، استخراج شده‌اند. معادلات حاکم بر پایداری ورق ذکـر شده، تحت بارگذاری ثابت درون صـفحه‌ای بـه‌کمـک یک روش تحلیلی حل شده اسـت. بـا اعمـال شـرایط مرزی گوناگون متقارن و نامتقـارن لـوی و صـفر قـرار دادن دترمینان ضرایب مجهول، مقادیر ویژه‌ای به دسـت می‌آید که کمترین آن‌ها بار کمانش بحرانی می‌باشد.

هندسهٔ ورق

ورق مستطیلی نشان داده شده در شکل (۱) به ابعاد a و b و ضخامت کلـی H را در نظـر بگیریـد. جـنس هسـتهٔ مرکـزی ورق مـورد بررسـی فلـز خـالص بـه ضخامت $2h_m$ می‌باشد کـه در بـالا و پـایین آن مـادهٔ هدفمندی که نسبت به صفحهٔ میانی ورق دارای تقـارن می‌باشد در نظر گرفته شده است. در بالا و پـایین ورق نیـز لایـه‌هـای پیزوالکتریـک بـه ضـخامت h_p قـرار گرفته‌اند.



شکل ۱ مختصات ورق پنج لایه

تغییـرات خـواص در مـادهٔ هدفمنـد در راسـتای ضخامت به‌صورت زیر می‌باشد [11]:

$$\begin{cases} E^t(z) = E_c + (E_m - E_c)\left(\dfrac{-z+h}{h-h_m}\right)^n \\ \qquad\qquad h_m \le z \le h \\ E^b(z) = E_c + (E_m - E_c)\left(\dfrac{z+h}{h-h_m}\right)^n \\ \qquad\qquad -h \le z \le -h_m \\ E^m = E_m \\ \qquad\qquad -h_m \le z \le h_m \end{cases} \qquad (۱)$$

کـه در آن $E(z)$ مـدول الاستیسـیته ورق در راسـتای ضخامت آن می‌باشد. زیرنویس‌های m و c به‌ترتیب به قسمت فلزی و سرامیکی ورق اشاره دارنـد. پـارامتر

n نشان دهنده اندیس مادهٔ هدفمند می‌باشد که تغییر در آن باعث تغییر خواص ماده می‌شود. با توجه به کم بودن تغییرات ضریب پواسون این کمیت ثابت فرض می‌شود. بالانویس‌های t ، b و m به‌ترتیب به لایه‌های بالا، پایین و هسته در مادهٔ هدفمند اشاره دارند. متقارن بودن مادهٔ هدفمند نسبت به صفحهٔ میانی بدان معناست که مادهٔ هدفمند در مرز با لایه فلز دارای ویژگی فلز و در مرز با ماده پیزوالکتریک، سرامیک می‌باشد. از آن‌جا که مادهٔ هدفمند همسان‌گرد است میدان تنش آن به‌صورت زیر می‌باشد [26]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

از سوی دیگر اثر متقابل بین میدان‌های الکتریکی و مکانیکی در مواد پیزوالکتریک با روابط خطی زیر بیان می‌شوند [26]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma^p_{xx}\\ \sigma^p_{yy}\\ \sigma^p_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}^E_{11} & \bar{C}^E_{12} & 0\\ \bar{C}^E_{12} & \bar{C}^E_{11} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\bar{C}^E_{11}-\bar{C}^E_{12}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & 0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \qquad (۳)$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\Xi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \Xi_{11} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\Xi}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \qquad (٤)$$

که در آن $\{E\}$، $\{D\}$، $[\Xi]$، $[C]$ و $[e]$ به‌ترتیب بردار میدان الکتریکی، بردار تغییر مکان الکتریکی، ماتریس گذردهی دی الکتریک، ماتریس ثوابت الاستیک لایهٔ پیزوالکتریک و ماتریس کوپلینگ خواص الکتریکی و مکانیکی می‌باشند. بالانویس p هم بیانگر اثر این میدان تنش بر روی لایهٔ پیزوالکتریک می‌باشد.

میدان‌های الکتریکی و مکانیکی

براساس تئوری کلاسیک ورق، میدان تغییر مکان به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [8]:

$$\begin{Bmatrix}u_1(x,y,z)\\ u_2(x,y,z)\\ u_3(x,y,z)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\\ w(x,y)\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}w_{,x}\\ w_{,y}\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

u_1 و u_2 و u_3 به‌ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای x، y و z در هر نقطه از صفحه به فاصلهٔ z از صفحهٔ میانی ورق هستند. u ، v و w مؤلفه‌های تغییر مکان صفحهٔ میانی ورق برحسب متغیرهای x و y هستند و اندیس (,) بیانگر مشتق‌گیری نسبت به مختصات کارتزین مربوط می‌باشد.

مؤلفه‌های کرنش با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیرخطی کرنش تغییر مکان و هم‌چنین میدان پتانسیل الکتریکی که در راستای ضخامت ورق به‌صورت مرتبه دوم از مؤلفهٔ تغییر مکان عرضی فرض می‌شود به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [8, 27]:

$$\begin{Bmatrix}\bar{\varepsilon}_{xx}\\ \bar{\varepsilon}_{yy}\\ \bar{\varepsilon}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_{,x}+w_{,x}^2/2\\ v_{,y}+w_{,y}^2/2\\ u_{,x}+v_{,y}+w_{,x}w_{,y}\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}w_{,xx}\\ w_{,yy}\\ 2w_{,xy}\end{Bmatrix} \qquad (٦.١)$$

$$\phi(x,y,z)=\begin{cases}\left[1-\left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y)+Az+B & h\le z\le h+h_p\\ \left[1-\left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y)+A'z+B' & -h-h_p\le z\le -h\end{cases} \qquad (٦.٢)$$

اگر هر دو سطح هر لایهٔ پیزوالکتریک دارای ولتاژ صفر باشند آن‌گاه شرط الکتریکی مدار بسته و میدان پتانسیل الکتریکی حاکم بر ورق برای این شرط به‌ترتیب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [27]:

$$\phi\Big|_{z=\pm h}=\phi\Big|_{z=\pm(h+h_p)}=0 \qquad (۷.۱)$$

$$\phi(x,y,z)=\begin{cases}\left[1-\left(\dfrac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y) & h\le z\le h+h_p\\ \left[1-\left(\dfrac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\varphi(x,y) & -h-h_p\le z\le -h\end{cases} \qquad (۷.۲)$$

و در صورتی که سطح داخلی لایهٔ پیزوالکتریک دارای ولتاژ صفر و سطح خارجی عایق باشد شرط الکتریکی مدار باز برقرار است و میدان پتانسیل الکتریکی مربوط به آن به‌ترتیب به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi\Big|_{z=\pm h}=0$$
$$D_z\Big|_{z=\pm(h+h_p)}=0 \qquad (۸.۱)$$

$$\phi(x,y,z)=\left[1-\left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2+\frac{4(z-h)}{h_p}\right]\varphi(x,y)+\frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\Xi}_{33}}[\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+(\kappa_{xx}+\kappa_{yy})(h+h_p)](z-h) \qquad (۸.۲)$$
$$h\le z\le h+h_p$$

$$\phi(x,y,z)=\left[1-\left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2-\frac{4(z-h)}{h_p}\right]\varphi(x,y)+\frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\Xi}_{33}}[\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}-(\kappa_{xx}+\kappa_{yy})(h+h_p)](z+h) \qquad (۸.۳)$$
$$-h-h_p\le z\le -h$$

میدان الکتریکی نیز به‌صورت قرینهٔ بردار گرادیان میدان پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود [27]:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi \qquad (۹)$$

با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل سه معادله حاکم بر ورق به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\delta u:\ N_{xx,x}+N_{xy,y}=0\\&\delta v:\ N_{xy,x}+N_{yy,y}=0\\&\delta w:\ (N_{xx}w_{,x}+N_{xy}w_{,y}+M_{xx,x}+M_{xy,y})_{,x}\\&+(N_{xy}w_{,x}+N_{yy}w_{,y}+M_{xy,x}+M_{yy,y})_{,y}=0\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن $(\mathrm{N,M})$ منتجه‌های تنش به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned}\left(N_{xx},N_{xy},N_{yy}\right)&=\int_{-h-h_p}^{h+h_p}\left(\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}\right)dz\\\left(M_{xx},M_{xy},M_{yy}\right)&=\int_{-h-h_p}^{h+h_p}\left(\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}\right)zdz\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

با جای‌گذاری (٦ و ۳ و ۲) در (۱۱)، منتجه‌های تنش برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان حاصل می‌شوند:

$$N_{xx}=A_{11}^T(u_{,x}+\frac{w_{,x}^2}{2})+A_{22}^T(v_{,y}+\frac{w_{,y}^2}{2}) \qquad (۱۲-الف)$$

$$N_{yy}=A_{22}^T(u_{,x}+\frac{w_{,x}^2}{2})+A_{11}^T(v_{,y}+\frac{w_{,y}^2}{2}) \qquad (۱۲-ب)$$

$$N_{xy}=A_{11}^T(u_{,y}+v_{,x}+w_{,x}w_{,y}) \qquad (۱۲-ج)$$

$$M_{xx}=-D_{11}^Tw_{,xx}-D_{22}^Tw_{,yy}+\mathrm{X}^T\varphi \qquad (۱۲-د)$$

$$M_{yy}=-D_{22}^Tw_{,xx}-D_{11}^Tw_{,yy}+\mathrm{X}^T\varphi \qquad (۱۲-ه)$$

$$M_{xy}=-2D_{12}^Tw_{,xy} \qquad (۱۲-و)$$

که ثوابت ذکر شده در معادلات (۱۲) در پیوست آورده شده‌اند با در نظر گرفتن معیار همسایگی [8] معادلات تعادل به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&N_{xx,x}^1+N_{xy,y}^1=0\\&N_{xy,x}^1+N_{yy,y}^1=0\\&N_{xx}^0w_{,xx}^1+2N_{xy}^0w_{,xy}^1+N_{yy}^0w_{,yy}^1\\&+M_{xx,xx}^1+2M_{xy,xy}^1+M_{yy,yy}^1=0\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که در آن بالانویس‌های ۱ و ۰ به‌ترتیب مربوط به وضعیت تعادل ورق و وضعیت همسایگی آن می‌باشد و $(N^0_{xx}, N^0_{xy}, N^0_{yy})$ می توانند با نیروهای پیش کمانش حاصل از شرایط تعادل جایگزین شوند.

با قرار دادن منتجه‌های نیرو و ممان در (۱۳)، معادلات تعادل برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&A^T_{11}u^1_{,xx} + A^T_{22}v^1_{,xy} + A^T_{11}\left(u^1_{,yy} + v^1_{,xy}\right) = 0\\
&A^T_{11}\left(u^1_{,xy} + v^1_{,xx}\right) + A^T_{22}u^1_{,xy} + A^T_{11}v^1_{,yy} = 0\\
&N^0_{xx}w^1_{,xx} + 2N^0_{xy}w^1_{,xy} + N^0_{yy}w^1_{,yy}\\
&-D^T_{11}w^1_{,xxxx} - 2D^T_{22}w^1_{,xxyy} - D^T_{11}w^1_{,yyyy}\\
&-4D^T_{12}w^1_{,xxyy} + \mathrm{X}^T\left(\varphi^1_{,xx} + \varphi^1_{,yy}\right) = 0
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

باید توجه داشت از آنجا که مادهٔ هدفمند و پیزوالکتریک در نظر گرفته شده، نسبت به صفحهٔ میانی ورق دارای تقارن هستند، دو معادلهٔ اول (۱۴) که برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان درون صفحه‌ای u و v هستند از معادلهٔ سوم که برحسب مؤلفهٔ تغییر مکان عرضی w و تابع پتانسیل φ می‌باشند جدا می‌شوند و در فرآیند یافتن بار کمانش بحرانی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. با کمی دقت در ضرایب معادلهٔ (۱۴) می‌توان رابطهٔ زیر را یافت:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{T}}_{11} = \mathrm{D}^{\mathrm{T}}_{22} + 2\mathrm{D}^{\mathrm{T}}_{12} \qquad (۱۵)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان معادلهٔ آخر (۱۴) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&N^0_{xx}w^1_{,xx} + 2N^0_{xy}w^1_{,xy} + N^0_{yy}w^1_{,yy}\\
&-D^T_{11}\nabla^4 w^1 + \mathrm{X}^T\nabla^2\varphi^1 = 0
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

از سوی دیگر مادهٔ پیزوالکتریک در حوزهٔ متغیرهای الکتریکی باید معادلهٔ ماکسول را ارضا نماید:

$$\begin{aligned}
&\int_{h}^{h+h_p}\left(\frac{\partial \mathrm{D_x}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{D_y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{D_z}}{\partial z}\right)\mathrm{dz} +\\
&\int_{-h-h_p}^{-h}\left(\frac{\partial \mathrm{D_x}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{D_y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{D_z}}{\partial z}\right)\mathrm{dz} = 0
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Theta_1\nabla^2\varphi^1 + \Theta_2\nabla^4 w^1 + \Theta_3\nabla^2 w^1 + \Theta_4\varphi^1 = 0 \qquad (۱۸)$$

معادلات (۱۸ و ۱۶) دو معادلهٔ حاکم بر ورق برحسب w و ϕ می‌باشند. برای حل این معادلات از معادلهٔ (۱۸)، $\nabla^2\varphi$ به‌دست می‌آید و با جای‌گذاری در (۱۶) و ساده‌سازی جبری معادله‌ای برحسب w به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{m_1}\nabla^6 \mathrm{w} + \mathrm{m_2}\nabla^2 \mathrm{w} + \mathrm{m_3}\nabla^2(\mathrm{N^0_{xx}w^1_{,xx}}\\
&+2\mathrm{N^0_{xy}w^1_{,xy}} + \mathrm{N^0_{yy}w^1_{,yy}}) + \mathrm{N^0_{xx}w^1_{,xx}}\\
&+2\mathrm{N^0_{xy}w^1_{,xy}} + \mathrm{N^0_{yy}w^1_{,yy}} = 0
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که ضرایب $\mathrm{m_i}$ در پیوست آورده شده‌اند.

شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی

برای ورق مورد نظر فرض می‌شود که دو لبهٔ ورق در راستای y (یعنی $x=0, x=a$) تکیه‌گاه ساده می‌باشد و در ضمن این دو لبه از نظر الکتریکی به زمین وصل شده‌اند و دارای پتانسیل صفر می‌باشند. دو لبهٔ دیگر در راستای x دارای شرایط مرزی دل‌خواه هستند (یعنی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد). با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل کل شرایط مرزی مکانیکی به‌صورت زیر حاصل می‌شود: (در سراسر این متن حروف F، S و C به‌ترتیب بیانگر تکیه‌گاه آزاد، ساده و گیردار می‌باشند)

تکیه‌گاه ساده:

$$w = M_{yy} = 0 \qquad (۲۰)$$

تکیه‌گاه گیردار

$$w = w_{,y} = 0 \qquad (۲۱)$$

تکیه‌گاه آزاد

$$V_y + (N^0_{xy} w^1_{,y} + N^0_{yy} w^1_{,y}) = M_{yy} = 0 \qquad (۲۲)$$

که در آن $V_y = 2M^1_{xy,x} + M^1_{yy,y}$ می‌باشد.

علاوه بر شرایط مرزی فوق فرض می‌شود که دو لبه ورق در راستای y عایق الکتریکی می‌باشند بنابراین معادلهٔ بقای شار الکتریکی منجر به شرط مرزی زیر می‌شود:

$$\int_{h}^{h+h_p} D_y(x,y,z)dz + \int_{-h-h_p}^{-h} D_y(x,y,z)dz = 0 \qquad (۲۳)$$

تحلیل کمانش

در این مطالعه ورق مستطیلی با طول a و عرض b تحت نیروهای درون صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. نیروهای پیش کمانش با استفاده از شرایط تعادل به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} N^0_{xx} &= \varsigma_1 P_1 \\ N^0_{yy} &= \varsigma_2 P_1 \\ N^0_{xy} &= 0 \end{aligned} \qquad (۲٤)$$

که در آن P_1 نیرو بر واحد طول می‌باشد و ς_1 و ς_2 پارامترهای نیرو هستند که به‌ترتیب شرایط بارگذاری در راستای محور x و y را توصیف می‌کنند. $R = \varsigma_2 / \varsigma_1$ نیز نسبت نیروست که برای مقادیر ۰، ۱ و ۱- به‌ترتیب بیانگر بارگذاری تک محوره، دو محوره فشاری و دو محورهٔ فشاری کششی می‌باشد. از آن‌جا که ورق در دو لبه در راستای y تکیه‌گاه گیردار است، تغییر مکان عرضی ورق w با سری زیر می‌تواند بیان شود:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \qquad (۲۵)$$

با قرار دادن (۲۵) در (۱۹) معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\eta_1 \frac{d^6}{dy^6} f(y) \\ &+[-3\eta_1\beta^2 + \eta_3 N^0_{yy} + \eta_2] \frac{d^4}{dy^4} f(y) \\ &+[3\eta_1\beta^4 - 2\eta_2\beta^2 + N^0_{yy} \\ &-\eta_3\beta^2 (N^0_{xx} + N^0_{yy})] \frac{d^2}{dy^2} f(y) \\ &+\left(\eta_2\beta^4 - \eta_1\beta^6 - N^0_{xx}\beta^2 + \eta_3 N^0_{xx}\beta^4\right) f(y) = 0 \end{aligned} \qquad (۲٦)$$

که در آن $\beta = \frac{m\pi x}{a}$ است. حل کلی معادلهٔ بالا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(y) = &C_1 \sinh(\lambda_1 y) + C_2 \cosh(\lambda_1 y) \\ &+ C_3 \sinh(\lambda_2 y) + C_4 \cosh(\lambda_2 y) \\ &+ C_5 \sinh(\lambda_3 y) + C_6 \cosh(\lambda_3 y) \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

که در آن $C_i (i = 1,...,6)$ ثوابت مجهول هستند. λ_i $(i = 1,2,3)$ نیز در [8] داده شده‌اند. به این نکته باید توجه کرد که حل عمومی معادلهٔ (۲۷) برای مقادیر حقیقی λ_i معتبر هستند و برای مقادیر موهومی آن باید sin و cos به‌ترتیب جایگزین sinh و cosh شوند. با در نظر گرفتن دو شرط مرزی مکانیکی و یک شرط مرزی الکتریکی روی لبه‌های ورق، مجموعه‌ای از معادلات جبری همگن حاصل می‌شوند که بار بحرانی کمانش با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب C_i به‌دست می‌آید.

بحث و بررسی نتایج عددی

جهت بررسی صحت حل صورت گرفته، با ناچیز قرار دادن ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک و صفر قرار دادن اندیس مادهٔ هدفمند، نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل محمدی و همکاران [8] مقایسه گردید (جدول ۱). از سوی دیگر تنها با صفر قرار دادن ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک، حالت‌های گوناگون قرارگیری فلز و مادهٔ هدفمند با نتایج موجود در تحلیل زنکور [11] مورد ارزیابی قرار گرفت (جدول ۲). هم‌خوانی خوب مقادیر عددی ارائه شده در جدول‌های (۲ و ۱)، صحت تحلیل صورت گرفته را تأیید می‌نماید. برای ارائهٔ نتایج عددی، از خواص $PZT-4$ که در جدول (۳) ذکر گردیده استفاده شده است. علاوه بر این برای تعیین نتایج عددی حالت ۱-۲-۱ در نظر گرفته شده است که به معنای آن است که ضخامت قسمت مادهٔ هدفمند بالا و پایین برابر است و ضخامت لایهٔ فلز دو برابر هر یک از آنهاست.

هم‌چنین حالت ۲-۱-۲ بدین معناست که ضخامت مادهٔ هدفمند لایهٔ بالا و پایین یکسان است و دو برابر ضخامت لایهٔ فلز می‌باشد. مدول الاستیسیته قسمت فلز از جنس آلومینیوم با مدول $70GPa$ و مدول الاستیسیتهٔ فلز و سرامیک مادهٔ هدفمند به‌ترتیب $70GPa$ و $380GPa$ در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت و برابر $\upsilon=0.3$ انتخاب شده است. در همهٔ ترسیمه‌ها، بار بحرانی کمانش ورق مربعی به طول ضلع ۱ متر و ضخامت ورق هدفمند ۰.۰۱ متر برای حالت ۲-۱-۲ برحسب نسبت ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک به ضخامت مادهٔ هدفمند با اندیس ۲ در حالت مدار باز رسم شده است (مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد).

در شکل (۲) تحت شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-گیردار، تغییرات بار بحرانی کمانش برای شرایط مدار باز و بسته مورد مقایسه قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در ضخامت معین لایهٔ پیزوالکتریک، بار بحرانی کمانش برای مدار باز بیشتر از مدار بسته است. هم‌چنین، با افزایش ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک برای هر دو حالت مدار باز و بسته، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

برای مواد پیزوالکتریک مختلف، بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت پیزوالکتریک به مادهٔ هدفمند، در شکل (۳) رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین مقدار بار بحرانی کمانش به‌ترتیب مربوط به PZT-5A و PZT-6B می‌باشد.

جدول ۱ مقایسهٔ نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل محمدی و همکاران [8]

			R		
n	a/b	$2h_p/a$	1	0	-1
SSSC	0.5	[8]	1.84256	2.35369	3.22520
		Closed	1.84370	2.35515	3.22720
		Open	1.84400	2.35553	3.22772
	1	[8]	0.91450	1.97146	3.22520
		Closed	0.91506	1.97268	3.22720
		Open	0.91521	1.97300	3.22772
	1.5	[8]	0.77870	1.86533	3.22520
		Closed	0.77918	1.86648	3.22720
		Open	0.77931	1.86678	3.22772
SSSF	0.5	[8]	1.36347	1.49598	1.61262
		Closed	1.36432	1.49691	1.61361
		Open	1.36445	1.49711	1.61385
	1	[8]	0.36238	0.48137	0.66578
		Closed	0.36261	0.48167	0.66620

		Open	0.36264	0.48172	0.66628
	1.5	[8]	0.17213	0.29459	0.75284
		Closed	0.17224	0.29478	0.75331
		Open	0.17225	0.29480	0.75340
SCSF	0.5	[8]	1.37663	1.53290	1.66765
		Closed	1.37749	1.53385	1.66868
		Open	1.37763	1.53405	1.66893
	1	[8]	0.39275	0.56755	0.85305
		Closed	0.39200	0.56790	0.85358
		Open	0.39302	0.56796	0.85369
	1.5	[8]	0.21682	0.44346	0.98636
		Closed	0.21696	0.44374	0.98697
		Open	0.21697	0.44377	0.98710

جدول ۲ مقایسهٔ نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل زنکور [11]

n		P_{cr}			
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
0	[11]	6.86896	6.86896	6.86896	6.86896
	Open	6.86593	6.86593	6.86593	6.86593
	Closed	6.86571	6.86571	6.86571	6.86571
0.5	[11]	3.82699	4.12798	4.39032	4.80762
	Open	3.82577	4.12659	4.38877	4.80582
	Closed	3.82555	4.12637	4.38855	4.80561
1	[11]	2.66624	3.01366	3.34075	3.89203
	Open	2.66572	3.01294	3.33983	3.89078
	Closed	2.66550	3.01271	3.33961	3.89057
5	[11]	1.36540	1.55352	1.82866	2.42859
	Open	1.36565	1.55367	1.82864	2.42820
	Closed	1.36543	1.55344	1.82841	2.42798
10	[11]	1.28493	1.40170	1.62962	2.19111
	Open	1.28523	1.40194	1.62972	2.19087
	Closed	1.28501	1.40171	1.62949	2.19065

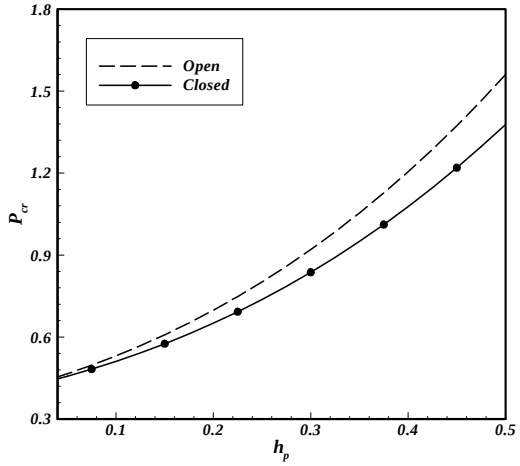
جدول ۳ خواص مواد مختلف پیزوالکتریک

materials	Elastic constants (GPa)					Electric constants (C/m^2)			Dielectric constants (C/Vm)	
	C_{11}^E	C_{33}^E	C_{55}^E	C_{12}^E	C_{13}^E	e_{33}	$-e_{31}$	e_{15}	Ξ_{11}	Ξ_{33}
PZT-4	132	115	26	71	73	14.1	4.1	10.5	7.124e-9	5.841 e-9
PZT-5A	121	111	21.1	75.9	75.4	15.8	5.4	12.3	8.11 e-9	7.35 e-9
PZT-6B	168	163	35.5	84.7	84.2	7.10	0.9	4.60	3.60 e-9	3.42 e-9
PZT-7A	148	131	25.3	76.1	81.3	9.50	2.1	9.20	4.07 e-9	2.08 e-9
PZT-8	137	123	31.3	69.9	71.1	17.5	4.0	10.4	7.97 e-9	5.14 e-9

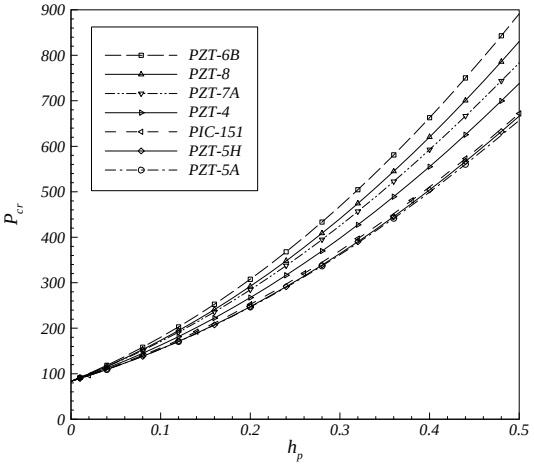
به‌منظور مقایسهٔ اثر شرط مرزی مکانیکی بر روی بار بحرانی کمانش، اشکال (٤-الف و ب) و (٥-الف و ب) به‌ترتیب برای مدار بسته و باز رسم شده‌اند. با مقایسهٔ این شکل‌ها مشخص می‌شود که برای هر دو حالت مدار باز و بسته قید قوی‌تر روی شرط مرزی منجر به بار بحرانی کمانش بیشتر می‌شود.

این مطلب بدین معناست که می‌توان ترتیب صعودی بار بحرانی کمانش مرتبط با شرایط مرزی را به‌صورت SFSF ، SFSS، SFSC، SSSS، SCSS و SCSC بیان کرد. در شکل (٦ -الف و ب) بار بحرانی کمانش ورق برای توان‌های مختلف مادهٔ هدفمند به‌ترتیب برای مدار بسته و باز رسم شده است همان‌گونه که مشخص است برای هر دو شرط مرزی الکتریکی، با افزایش اندیس مادهٔ هدفمند، مقدار بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

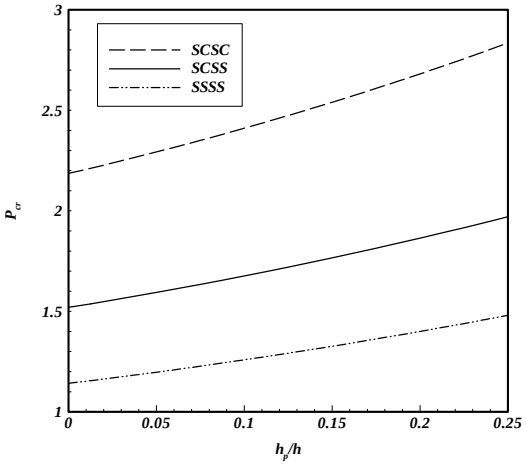
هم‌چنین تغییرات بار بحرانی برای مقادیر کوچک اندیس مادهٔ هدفمند در مقایسه با مقادیر بزرگ‌تر قابل ملاحظه می‌باشد.



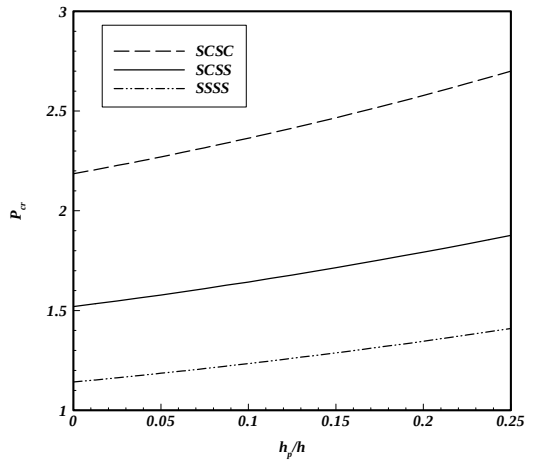
شکل ٢ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت



شکل ٣ بار بحرانی کمانش ورق SSSS برحسب نسبت ضخامت

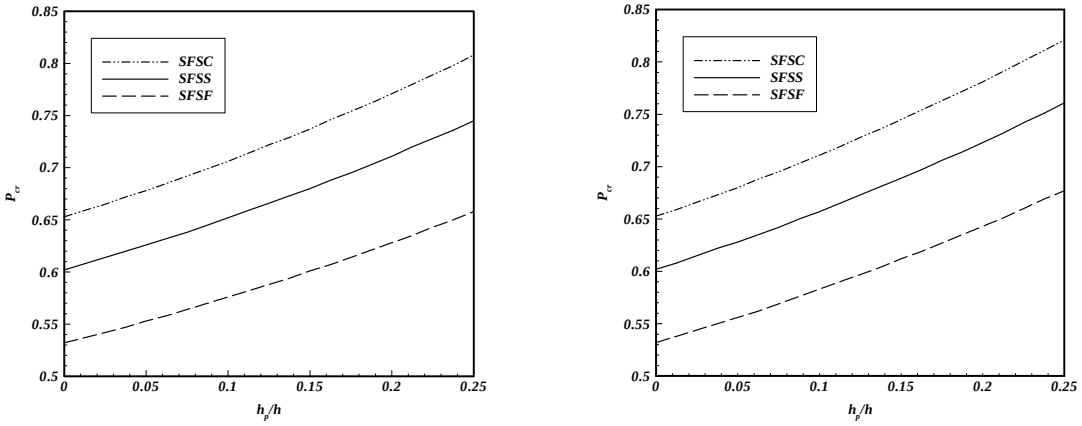


(الف)



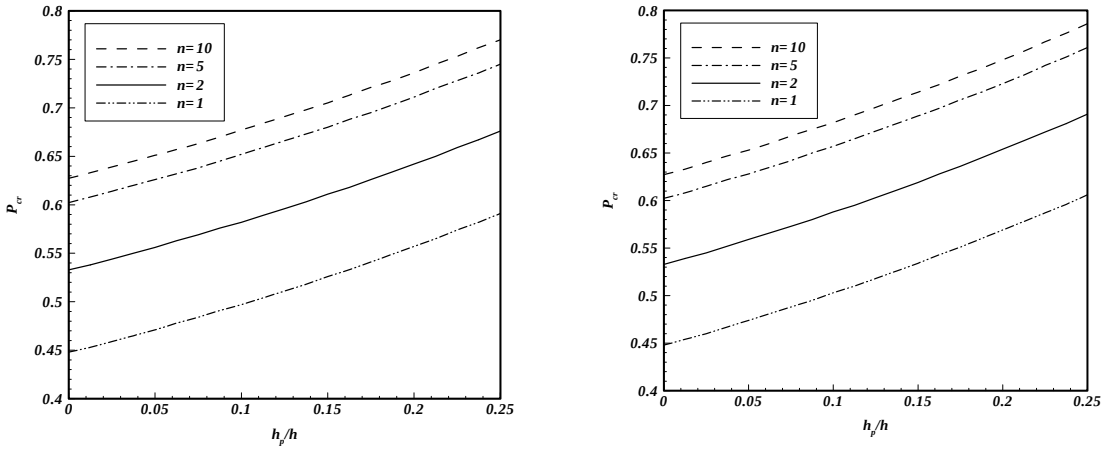
(ب)

شکل ٤ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز ب: مدار بسته)



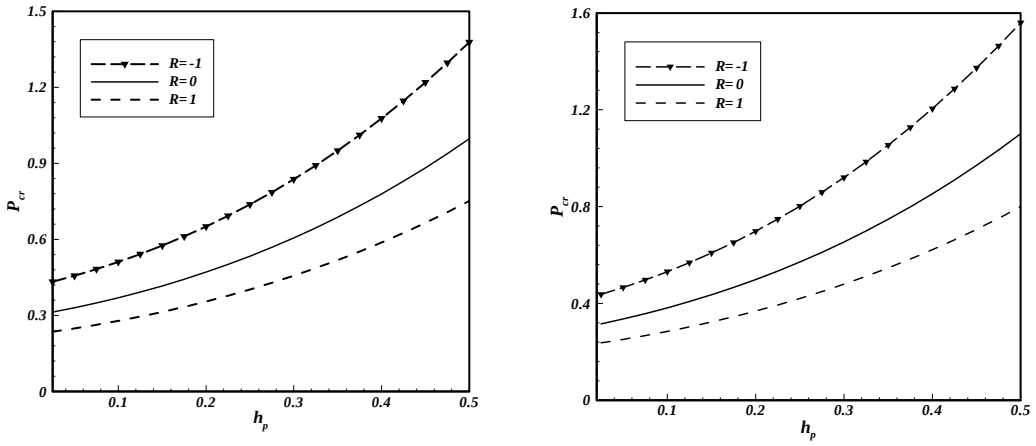
(ب) (الف)

شکل ۵ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز، ب: مدار بسته)



(ب) (الف)

شکل ٦ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز، ب: مدار بسته)



(ب) (الف)

شکل ۷ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار بسته، ب: مدار باز)

جدول ٤ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه گیردار- گیردار

n	R	$h_p/_a$		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	18.9802	75.9206
			Open	18.8967	75.5866
		0.1	Closed	18.9779	75.9115
			Open	18.9550	75.8199
	-1	0.2	Closed	26.6219	106.4876
			Open	26.5048	106.0190
		0.1	Closed	26.6187	106.4747
			Open	26.5866	106.3463
	1	0.2	Closed	14.6195	37.8050
			Open	14.5552	37.6386
		0.1	Closed	14.6178	37.8004
			Open	14.6002	37.7548
2	0	0.2	Closed	18.9798	75.9192
			Open	18.9069	75.6275
		0.1	Closed	18.9779	75.9113
			Open	18.9582	75.8328
	-1	0.2	Closed	26.6214	106.4856
			Open	26.5192	106.0764
		0.1	Closed	26.6186	106.4744
			Open	26.5911	106.3643
	1	0.2	Closed	14.6193	37.8043
			Open	14.5631	37.6590
		0.1	Closed	14.6177	37.8003
			Open	14.6026	37.7612

جدول ٥ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه گیر دار- ساده

n	R	$h_p/_a$		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	16.9119	56.6616
			Open	16.8375	56.4123
		0.1	Closed	16.9098	56.6547
			Open	16.8894	56.5864
	-1	0.2	Closed	23.1738	92.7465
			Open	23.0719	92.2873
		0.1	Closed	23.1710	92.6990
			Open	23.1431	92.5722
	1	0.2	Closed	13.2392	26.2835
			Open	13.1810	26.1679
		0.1	Closed	13.2376	26.2803
			Open	13.2217	26.2486
2	0	0.2	Closed	16.9115	56.6538
			Open	16.8466	56.4428
		0.1	Closed	16.9098	56.6546
			Open	16.8923	56.5960
	-1	0.2	Closed	23.1734	92.7188
			Open	23.0844	92.3372
		0.1	Closed	23.1709	92.6886
			Open	23.1470	92.5879
	1	0.2	Closed	13.2390	26.2830
			Open	13.1881	26.1820
		0.1	Closed	13.2376	26.2802
			Open	13.2239	26.2531

جدول ٦ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه ساده- ساده

n	R	$h_p/_a$		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	15.4320	39.5059
			Open	15.3556	39.3103
		0.1	Closed	15.4241	39.4857
			Open	15.4030	39.4316
	-1	0.2	Closed	20.5760	82.3039
			Open	20.4741	81.8964
		0.1	Closed	20.5655	82.2618
			Open	20.5373	82.1492
	1	0.2	Closed	12.3456	19.7530
			Open	12.2845	19.6552
		0.1	Closed	12.3393	19.7429
			Open	12.3224	19.7158
2	0	0.2	Closed	15.4274	39.4941
			Open	15.3639	39.3316
		0.1	Closed	15.4224	39.4813
			Open	15.4056	39.4383
	-1	0.2	Closed	20.5699	82.2793
			Open	20.4852	81.9407
		0.1	Closed	20.5632	82.2526
			Open	20.5408	82.1631
	1	0.2	Closed	12.3419	19.7471
			Open	12.2912	19.6658
		0.1	Closed	12.3379	19.7407
			Open	12.3245	19.7192

جدول ٧ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه گیردار- آزاد

n	R	$h_p/_a$		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	11.0211	16.3336
			Open	10.8627	15.9237
		0.1	Closed	11.0165	16.3213
			Open	10.9475	16.1279
	-1	0.2	Closed	11.9872	24.5347
			Open	11.8588	24.1594
		0.1	Closed	11.9835	24.5236
			Open	11.9306	24.3566
	1	0.2	Closed	9.9044	11.3121
			Open	9.6513	10.8923
		0.1	Closed	9.8971	11.2994
			Open	9.7791	11.0945
2	0	0.2	Closed	11.0200	16.3304
			Open	10.8825	15.9739
		0.1	Closed	11.0160	16.3196
			Open	10.9571	16.1543
	-1	0.2	Closed	11.9864	24.5320
			Open	11.8747	24.2053
		0.1	Closed	11.9831	24.5223
			Open	11.9379	24.3794
	1	0.2	Closed	9.9025	11.3087
			Open	9.6831	10.9432
		0.1	Closed	9.8961	11.2975
			Open	9.7954	11.1222

به‌منظور مطالعهٔ اثر شرایط بارگذاری بـر روی بـار کمانش بحرانی در دو حالت مدار بسته و باز شکل‌های (۷- الف و ب) به‌ترتیب رسم شده است.

جدول ۸ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه ساده- آزاد

n	R	$h_p/_a$		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	10.7549	13.8508
			Open	10.6110	13.5443
		0.1	Closed	10.7508	13.8417
			Open	10.6890	13.6993
	-1	0.2	Closed	11.5913	19.1486
			Open	11.4725	18.8552
		0.1	Closed	11.5879	19.1399
			Open	11.5395	19.0095
	1	0.2	Closed	9.8086	10.4342
			Open	9.5744	10.0932
		0.1	Closed	9.8018	10.4240
			Open	9.6938	10.2598
2	0	0.2	Closed	10.7540	13.8485
			Open	10.6290	13.5820
		0.1	Closed	10.7503	13.8405
			Open	10.6975	13.7188
	-1	0.2	Closed	11.5905	19.1464
			Open	11.4873	18.8912
		0.1	Closed	11.5875	19.1388
			Open	11.5462	19.0274
	1	0.2	Closed	9.8068	10.4315
			Open	9.6040	10.1350
		0.1	Closed	9.8009	10.4225
			Open	9.7088	10.2822

بیشترین و کمترین مقدار بار بحرانی کمانش بـرای هر دو حالت مدار باز و بسته مربوط بـه بارگـذاری دو محوره فشاری-کششی و دو محوره فشاری می باشد.

در جداول (۹-٤) نیز بـار بحرانـی کمـانش بـرای شرایط مرزی متقارن و نامتقارن در حل لوی و شـرایط بارگذاری گوناگون آورده شده‌اند. از نتایج جداول ذکـر شده می توان به افزایش بار بحرانی کمانش با عـواملی همچون افـزایش ضـخامت لایـه پیزوالکتریـک، تغییـر شرط مرزی الکریکی از حالت مـدار بسـته بـه حالـت مدار باز، قیـد قـوی تـر روی شـرط مـرزی مکـانیکی، افزایش اندیس ماده هدفمند اشاره نمود.

جدول ۹ بار بحرانی بدون بعد کمانش تکیه‌گاه آزاد- آزاد

n	R	$h_p/_a$		$\frac{a}{b}=0.5$	$\frac{a}{b}=1$
1	0	0.2	Closed	9.6074	9.4081
			Open	9.4928	9.2414
		0.1	Closed	9.6107	9.4032
			Open	9.5576	9.3284
	-1	0.2	Closed	9.6735	9.5027
			Open	9.5802	9.3632
		0.1	Closed	9.6762	9.4987
			Open	9.6348	9.4376
	1	0.2	Closed	9.4057	9.2131
			Open	9.2194	8.9913
		0.1	Closed	9.4111	9.2067
			Open	9.3190	9.1036
2	0	0.2	Closed	9.6070	9.4069
			Open	9.5076	9.2622
		0.1	Closed	9.6099	9.4026
			Open	9.5645	9.3387
	-1	0.2	Closed	9.6732	9.5017
			Open	9.5922	9.3806
		0.1	Closed	9.6756	9.4982
			Open	9.6401	9.4461
	1	0.2	Closed	9.4050	9.2115
			Open	9.2439	9.0191
		0.1	Closed	9.4097	9.2058
			Open	9.3311	9.1178

نتیجه‌گیری

در مقالـهٔ حاضـر تحلیـل کمـانش ورق‌هـای هدفمنـد ساندویچی مستطیلی کوپله با لایه‌های پیزوالکتریک بـا تئوری کلاسیک ورق و اعمـال شـرایط مـرزی لـوی و تحت شرایط الکتریکی مدار باز و بسته مـورد بررسـی قرار گرفته است. مطالعهٔ انجام شده نشـان داد کـه بـار بحرانی کمانش در حالت مـدار بـاز، در همـهٔ حـالات بارگذاری و شرایط مرزی از مقدار مربوط به مدار بسته بیشتر است. هم‌چنین به‌عنوان نتیجهٔ مهم دیگر می‌تـوان به افزایش بار بحرانی کمانش با افزایش ضـخامت لایـهٔ پیزوالکتریک اشاره کرد. کاهش بار بحرانی کمـانش در اثر کـاهش قیـود مکـانیکی بـر روی مرزهـا و کـاهش اندیس مادهٔ هدفمند نیز از دیگر نتایج این مطالعه است.

مراجع

1 Javaheri, R. and Eslami, M.R.," Thermal buckling of functionally graded plates", *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 162-169, (2002).

2 Javaheri, R. and Eslami, M.R.," Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *Z Angew Math Mech (ZAMM)*, Vol. 82(4), pp. 277-283, (2002).

3 Javaheri, R. and Eslami, M.R., " Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory ", *Journal of Thermal Stress*, Vol. 25, pp. 603-625, (2002).

4 Wu, L., "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Composite Structures*, Vol. 64, pp. 211-218, (2004).

5 Shariat, S. and Eslami, M.R., "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading based on the first order plate theory", *Fifth international conference on composite science and technology*, Sharjah, UAE, (2005).

6 Shariat, S. and Eslami, M.R., "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads", *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 433-439, (2005).

7 Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F. and Martins, P., "Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method", *Composite Structures*, Vol. 69, pp. 449-457, (2005).

8 Mohammadi, M., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E., "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93, (2010).

9 Mohammadi, M., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E., "A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges", *Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1831-1841, (2009).

10 Bodaghi, M. and Saidi, A.R., " Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 3659-3673, (2010).

11 Zenkour, A.M., "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 5243–5258, (2005).

12 Kiani, Y. and Eslami, M.R., "Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, pp. 891–905, (2012).

13 Chandrashekhara, K. and Bhatia, K., "Active buckling control of smart composite plates- finite element analysis", *Smart Mater Struct*, Vol. 2, pp. 31-39, (1993).

14 Batra, R.C. and Geng, T.S., "Enhancement of the dynamic buckling load for a plateby usingpiezoceramic actuators", *Smart Mater Struct*, Vol. 10, pp. 925-933, (2001).

15 Varelis, D. and Saravanos, D.A., "Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1519–1538, (2004).

16 Shariyat, M., "Dynamic buckling of imperfect laminated plates with piezoelectric sensors and actuators subjected to thermo-electro-mechanical loadings, considering the temperature dependency of the material properties", Composite Structures, Vol. 88, pp. 228-239, (2009).

17 Shariyat, M., "Vibration and dynamic buckling control of imperfect hybrid FGM plates with temperature-dependent material properties subjected to thermo-electro-mechanical loading conditions", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 240–252, (2009).
18 Akhras, G. and Li, W.C., "Three-dimensional thermal buckling analysis of piezoelectric antisymmetric angle-ply laminates using finite layer method", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 31-38, (2010).
19 Yang, J.S., "Buckling of piezoelectric plate", *Applied Electromagnetics and mechanics*, Vol. 9, pp. 399-408, (1998).
20 Shen, H.S., "Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 6101–6121, (2005).
21 Shen, H.S., "A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 375–384, (2009).
22 Shen, H.S., "Postbuckling of shear deformable laminated plateswith piezoelectric actuators under complex loading conditions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 7703-7721, (2001).
23 Shen, H.S., "Thermal postbuckling of shear-deformable laminated plates with piezoelectric actuators", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1931-1943, (2001).
24 Kapuria, S. and Achary, G.G.S., "Nonlinear coupled zigzag theory for buckling of hybrid piezoelectric plates", *Composite Structures*, Vol. 74, pp. 253-264, (2006).
25 Kim, G.W. and Lee, K.Y., "Influence of weak interfaces on buckling of orthotropic piezoelectric rectangular laminates", *Composite Structures*, Vol. 82, pp. 290-294, (2008).
26 Liu, X., Wang, Q. and Quek, S.T., "Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2129–2151, (2002)
27 Wang, Q., Quek, S.T., Sun, C.T. and Liu, X., "Analysis of piezoelectric coupled circular plate", *Smart Mater. Struct.*,Vol. 10, pp. 229–239, (2001).

پیوست

ثوابت مربوط به مادهٔ هدفمند

$$A_i^T = A_i^H + A_i^{ft} + A_i^{fb} + A_i^{pt} + A_i^{pb}$$

$$(i = 11, 12, 22)$$

$$A_{11}^H = \frac{2E_m h_H}{1-\nu^2}$$

$$A_{12}^H = \frac{E_m h_H}{1+\nu}$$

$$A_{22}^H = \frac{2\nu E_m h_H}{1-\nu^2}$$

$$A_{11}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{1-\nu^2} dz.$$

$$A_{22}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{\nu E^t(z)}{1-\nu^2} dz$$

$$A_{12}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{2(1+\nu)} dz$$

$$A_{11}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{1-\nu^2} dz$$

$$A_{22}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{\nu E^b(z)}{1-\nu^2} dz$$

$$A_{12}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{2(1+\nu)} dz$$

$$D_{11}^H = \frac{2E_m h_H^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$D_{22}^H = \frac{2\nu E_m h_H^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$D_{12}^H = \frac{E_m h_H^3}{3(1+\nu)}$$

$$D_{11}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{22}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{\nu E^t(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{12}^{ft} = \int_{h_H}^{h} \frac{E^t(z)}{2(1+\nu)} z^2 dz$$

$$D_{11}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{22}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{\nu E^b(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$$

$$D_{12}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{2(1+\nu)} z^2 dz$$

ثوابت مربوط به لایهٔ پیزوالکتریک

مدار باز

$$X_i^T = X_i^{pt} + X_i^{pb} \qquad (i = 11, 22)$$

$$A_{11}^{pt} = \bar{C}_{11} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{11}^{pb} = \bar{C}_{11} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{22}^{pt} = \bar{C}_{12} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{22}^{pb} = \bar{C}_{12} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{\Xi}_{33}}$$

$$A_{12}^{pt} = \frac{1}{2}(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) h_p$$

$$A_{12}^{pb} = \frac{1}{2}(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) h_p$$

$$D_{11}^{pt} = \frac{\bar{C}_{11}}{3}\left((h+h_p)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}(h+h_p)\left((h+h_p)^2 - h^2\right)$$

$$D_{11}^{pb} = \frac{\bar{C}_{11}}{3}\left((h+h_p)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}(h+h_p)\left((h+h_p)^2 - h^2\right)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{\bar{C}_{12}}{3}\left((h+h_p)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}(h+h_p)\left((h+h_p)^2 - h^2\right)$$

$$D_{22}^{pb} = \frac{\bar{C}_{12}}{3}\left((h+h_p)^3 - h^3\right) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{\Xi}_{33}}(h+h_p)\left((h+h_p)^2 - h^2\right)$$

$$D_{12}^{pt} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left((h+h_p)^3 - h^3\right)$$

$$D_{12}^{pb} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left((h+h_p)^3 - h^3\right)$$

$$X_{11}^{pt} = 4\bar{e}_{31}$$

$$X_{22}^{pt} = \frac{4}{3}\bar{e}_{31}(3h + h_p)$$

مدار بسته

$$A_{11}^{pt}=\bar{C}_{11}h_p$$

$$A_{11}^{pb}=\bar{C}_{11}h_p$$

$$A_{22}^{pt}=\bar{C}_{12}h_p$$

$$A_{22}^{pb}=\bar{C}_{12}h_p$$

$$A_{12}^{pt}=\frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{12}\right)h_p$$

$$A_{12}^{pb}=\frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{12}\right)h_p$$

$$D_{11}^{pt}=\frac{\bar{C}_{11}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3-h^3\right)$$

$$D_{11}^{pb}=\frac{\bar{C}_{11}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3-h^3\right)$$

$$D_{22}^{pt}=\frac{\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3-h^3\right)$$

$$D_{22}^{pb}=\frac{\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3-h^3\right)$$

$$D_{12}^{pb}=\frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3-h^3\right)$$

$$D_{22}^{pt}=\frac{2\bar{C}_{12}}{3}\left(\left(h+h_p\right)^3-h^3\right)$$

$$X_{11}^{pt}=0$$

$$X_{22}^{pt}=-\frac{2}{3}\bar{e}_{31}h_p$$

ضرایب معادلهٔ (۱۹)

$$m_1=-\frac{X^T}{\Theta_4}\left[\frac{\Theta_1 D_{11}^T}{X^T}+\Theta_2\right]$$

$$m_2=-\left(D_{11}^T+\frac{X^T}{\Theta_4}\Theta_3\right)$$

$$m_3=\frac{\Theta_1}{\Theta_4}$$

بررسی تجربی تأثیر پارامترهای لیزر در شکل‌دهی ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم با استفاده از لیزر*

امیرحسین روحی[۱] حسن مسلمی نائینی[۲] محمد حسین‌پور گللو[۳] مهدی سلطان‌پور[٤]

چکیده *در فرآیند شکل‌دهی با لیزر تشکیل گرادیان دمایی در راستای ضخامت ورق عامل ایجاد خم نهایی می‌باشد. ورق‌های فوم فلزی، به‌علت بروز شکست در حین تغییرشکل، توسط هیچ‌کدام از روش‌های مکانیکی قابل شکل‌دهی نمی‌باشد. در این مقاله، ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم تحت تابش لیزر قرار گرفته است. آزمایش‌ها با مقادیر متفاوت توان لیزر، سرعت پرتو و تعداد پاس‌های اسکن انجام گرفته است تا تأثیر هر کدام روی مقدار نهایی خم تعیین گردد. از طراحی آزمایش به‌شیوهٔ رویهٔ پاسخ و تحلیل واریانس نتایج به‌منظور تعیین تأثیر پارامترهای فرآیندی استفاده شده است. درانتها، رابطه‌ای برای پیش‌بینی مقدار زاویهٔ خم در ورق فوم ارائه شده است.*

واژه‌های کلیدی فرآیند شکل‌دهی با لیزر، فوم حفره‌بسته آلومینیم، طراحی آزمایش.

Experimental Investigation on Process Parameters Effects in Laser Forming of Closed-cell Aluminium Foam Sheets

A.H. Roohi H. Moslemi Naeini M. Hoseinpour Gollo M. Soltanpour

Abstract *In a laser forming process, the temperature gradient across the sheet thickness produces the final bending angle. Metallic foams cannot be formed by any mechanical processes due to occurrence of failure during deformation. In this article, closed-cell aluminium foams are irradiated by a laser beam. Experiments are carried out by varying laser power, scan velocity and the number of scan passes to specify their effect on the bending angle. Design of experiment with the response surface methodology and analysis of variance are utilized to analyze parameter effects. At last, an equation is derived for prediction of bending angle.*

Key Words Laser forming process, Closed-cell aluminium foam, Design of experiment.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۳/٦/۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۰/۳ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری تخصصی، گروه ساخت و تولید، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس.

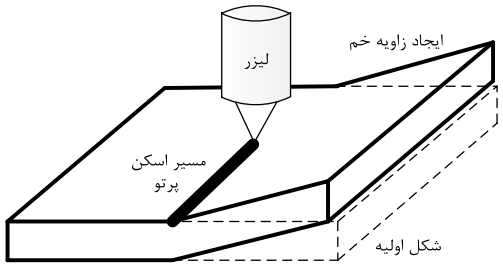
(۲) نویسندهٔ مسئول، استاد، گروه ساخت و تولید، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس.moslemi@modares.ac.ir

(۳) استادیار، گروه ساخت و تولید، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

(٤) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره).

مقدمه

فرآیند شکل‌دهی با استفاده از لیزر به‌طور شماتیک در شکل (۱) آورده شده است. در این فرآیند، قطعه‌کار تحت تابش پرتو لیزر، که با سرعت مشخص در سطح آن حرکت می‌کند، قرار می‌گیرد. در اثر ایجاد یک گرادیان دمایی در راستای ضخامت قطعه، تنش‌های حرارتی القا می‌شود که به ایجاد تغییرشکل پلاستیکی در ناحیهٔ حرارت‌دیده می‌انجامد. پس از عبور لیزر، دمای قطعه پایین می‌آید و یک زاویهٔ خم دائمی ایجاد می‌شود. تکرار تابش پرتو لیزر باعث افزایش زاویهٔ خم می‌گردد [1].



شکل ۱ نمونه‌ای از فرآیند شکل‌دهی با استفاده از پرتو لیزر

فرآیند شکل‌دهی با لیزر در سال‌های اخیر به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. گیگر و ولرتسن [2] سه مکانیزم اصلی شکل‌دهی با لیزر را شامل مکانیزم گرادیان دمایی، مکانیزم خمش کمانشی و مکانیزم کوتاه‌کردن معرفی کرده‌اند. شیچون و جین‌سونگ [3] کلیه پارامترهای مؤثر بر شکل‌دهی نهایی ورق‌های فلزی را به سه دستهٔ پارامترهای انرژی لیزر، پارامترهای جنس ماده و پارامترهای هندسی ورق تقسیم‌بندی نموده‌اند. گوان‌یانجین و همکارانش [4] مدلی را توسعه داده‌اند که تأثیر مشخصه‌های ماده نظیر مدول یانگ، استحکام تسلیم، ضریب انبساط حرارتی، گرمای ویژهٔ ماده و ضریب رسانایی حرارتی را بر فرآیند شکل‌دهی با لیزر تعیین می‌نماید. جمیل و همکارانش [5] به‌طریق عددی، تأثیر انواع مختلف هندسه‌ی مستطیلی پرتو لیزر بر مشخصه‌های نهایی محصول را بررسی نموده‌اند. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که هرچه طول سطح مقطع پرتو در راستای اسکن بزرگ‌تر باشد، میزان تغییرشکل افزایش می‌یابد. ادورادسن و همکارانش [6] به بررسی فرآیند شکل‌دهی دوبعدی چندپاسه با استفاده از لیزر پرداخته‌اند. در آن مطالعه نشان داده شده است که کرنش‌سختی، افزایش ضخامت سطح، تغییرات ضریب جذب پرتو و مشخصه‌های هندسی پرتو عواملی هستند که بر میزان زاویهٔ خمش به‌دست آمده در هر پاس تأثیرگذار است. جین چنگ و همکارانش [7] تأثیر سرمایش اجباری بر افزایش زاویهٔ خمش حاصل در فرآیندهای چندپاسه را بررسی کردند. پنگ‌چنگ و همکارانش [8] شرایط فرآیندی در شکل‌دهی با لیزر ورق‌هایی را که دارای سطح‌مقطع متغیر در راستای مسیر اسکن هستند مطالعه کرده‌اند. گذار مکانیزم‌های مختلف سه‌گانه به یکدیگر به‌ازای تغییرات سطح‌مقطع در طول این بررسی مشاهده شده است. حسین‌پور گللو و همکارانش [9] به بررسی تأثیر پارامترهای فرآیندی، شامل مشخصه‌های ماده، قطر پرتو و طول زمان پالس بر میزان شکل‌دهی روی ورق‌های فولادی St12 و آلیاژ AISI 304 با استفاده از لیزر Nd:YAG، به‌روش طراحی آزمایش تاگوچی، پرداخته‌اند. شن و همکارانش [10] چگونگی تغییرات مشخصه‌های مکانیکی ورق‌های فولاد کم‌کربن را پس از تابش پرتو لیزر نشان داده‌اند. نتایج تجربی آنها بیان می‌کند که پس از فرآیند شکل‌دهی با لیزر، استحکام تسلیم و استحکام نهایی بهبود، و درصد افزایش‌طول شکست قطعات کاهش یافته است. فرآیند شکل‌دهی با لیزر مواد شکننده، شامل سیلیکون‌های تک‌کریستالی، شیشهٔ بروسیلیکات و سرامیک Al2O3 با تابش دو نوع لیزر حالت گاز CO2 و لیزر حالت جامد Nd:YAG توسط دانگ‌جیانگ‌وو و همکارانش [11] انجام گرفته است.

نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که اعمال درجه‌حرارت‌های بالا مانع از بروز شکست ترد می‌گردد و هم‌چنین انتخاب دقیق و مناسب پارامترهای فرآیندی برای دست‌یابی به زاویهٔ خمش در این دسته از مواد ضروری است. شی و همکارانش [12] یک روش حرارت‌دهی نوین برای شکل‌دهی دقت‌بالای صفحه‌های فلزی تحت مکانیزم کوتاه‌کردن ارائه کرده‌اند. نتیجه آن‌که هرچه قطر پرتو کوچک‌تر و سرعت اسکن لیزر بالاتر باشد، امکان تابش‌دهی هم‌زمان سطوح بالایی و پایینی ورق و دست‌یابی به شکل‌دهی دقیق فراهم می‌گردد. یانجین و همکارانش [13] اثر زاویهٔ پرتو تابشی را، که بر میزان جذب پرتو لیزر تأثیرگذار است، برای کنترل زوایای خم به‌دست آمده از فرآیند، مطالعه نموده‌اند. نتیجهٔ آن مطالعه نشان می‌دهد که با افزایش زاویهٔ تابشی از ٦٠ به ٨٠ درجه، مقدار نهایی شکل‌دهی نیز افزایش می‌یابد. قدیری زهرانی و همکارانش [14] به بررسی پدیده‌های اثر لبه‌ای و اعوجاج طولی حین شکل‌دهی با لیزر پرداخته‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که با افزایش تعداد پاس‌های اسکن، ضخامت ورق، سرعت اسکن و توان لیزر میزان اثرات لبه‌ای کاهش یافته است. هم‌چنین، افزایش ضخامت ورق، سرعت اسکن و تعداد پاس‌ها می‌تواند به کاهش اعوجاج لبه‌ای منجر شود. فرآیند خم‌کاری با لیزر ورق‌های آلیاژ فولاد ضدزنگ AISI 304 توسط ماجی و همکارانش [15] بررسی گردیده است. در نتیجه‌ی این تحقیق، مقادیر بهینهٔ پارامترهای فرآیندی به‌منظور دست‌یابی به بیشینهٔ زاویهٔ خمش در این دسته از ورق‌ها تعیین شده است. صفری و همکارانش [16] به بررسی شکل‌دهی با لیزر ورق‌های ماشین‌کاری شدهٔ تیلور (TMB) پرداخته‌اند. با توجه به تغییرات گسستهٔ ضخامت در این ورق‌ها، خم‌کاری با لیزر آن‌ها در مقایسه با ورق‌های یکنواخت پیچیده‌تر می‌باشد. بنابراین، اعمال یک طرح موسوم به روش بهبودیافتهٔ سرعت می‌تواند باعث دست‌یابی به شکل‌دهی یکنواخت‌تر این ورق‌ها گردد.

علاوه‌براین، پژوهش‌های معدودی در زمینهٔ شکل‌دهی ورق‌های آلومینیم و آلیاژهای آن شده است. مرکلین و همکارانش [17] به بررسی میکروساختار ورق‌های آلومینیم پس از اعمال شکل‌دهی با لیزر پرداخته‌اند. تغییرات مشخصه‌های مکانیکی آلومینیم در این بررسی مورد توجه قرار گرفته است. لابیز [18] یک مدل عددی برای شبیه‌سازی شکل‌دهی با لیزر ورق‌های آلومینیم توسعه داده است. در این مدل، از یک روش تحلیل هم‌زمان ساختاری-حرارتی به‌منظور شبیه‌سازی فرآیند استفاده شده است. یوان کین و همکارانش [19] از یک مدل ریاضی برای بررسی حرارت‌دهی ورق‌های Al2024 توسط لیزر ND:YAG استفاده کرده‌اند. این مدل، یک شکست پلاستیک در لایه‌های بالاتر ورق آلومینیمی را پیش‌بینی می‌کند. ناپفر و همکارانش [20] به بررسی تأثیر تابش لیزر بر مشخصه‌های مکانیکی و متالورژیکی آلیاژهای آلومینیم پرداخته‌اند. روحی و همکارانش [21] تأثیر اعمال یک نیروی مکانیکی کمکی در کنار تابش پرتو لیزر به‌منظور دست‌یابی به زوایای خم بالا در ورق‌های آلومینیم را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتیجهٔ این پژوهش نشان می‌دهد که اعمال نیروی کمکی می‌تواند تا یک‌سوم به افزایش شکل‌دهی نهایی ورق بیانجامد.

ورق‌های فوم فلزی دستهٔ جدیدی از مواد است که به‌خصوص در دهه‌های اخیر، به‌علت مشخصه‌های مناسب فیزیکی و مکانیکی نظیر چگالی پایین، هم‌زمان سفتی بالا و ویژگی‌های حرارتی مناسب مورد توجه قرار گرفته است [22]. از این مواد در ساخت سازه‌های سبک و هم‌چنین جذب‌کنندهٔ انرژی استفاده می‌گردد. فوم‌های فلزی، به‌ویژه فوم‌های آلومینیم، به‌طور گسترده در صنایع خودروسازی، دفاعی و هواوفضا کاربرد دارد [23]. در زمینهٔ شکل‌دهی با لیزر ورق‌های فوم فلزی، یک مطالعه توسط کوادرینی و همکارانش [24] انجام شده است. در این مطالعه، از لیزر دیودی به‌منظور

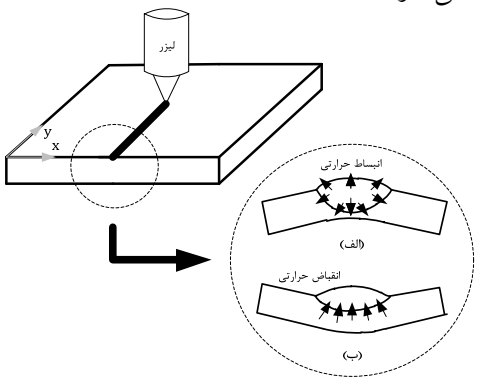
خم‌کردن فوم‌های حفره‌باز آلومینیم با چگالی‌های مختلف استفاده شده است.

در مقالهٔ حاضر، فوم‌های حفره‌بستهٔ آلومینیم، که به‌کمک هیچ‌کدام از روش‌های شکل‌دهی مکانیکی قابلیت شکل‌دهی ندارد، با اعمال پرتو لیزر مورد شکل‌دهی قرار گرفته است. هم‌چنین تأثیر سه پارامتر توان لیزر، سرعت اسکن پرتو و تعداد پاس‌های اسکن بررسی شده است. به‌منظور تعیین دقیق تأثیر پارامترهای اشاره‌شده روی زاویهٔ خم نهایی در ورق‌های فوم حفره‌بسته آلومینیم از روش آنالیز واریانس (ANOVA) استفاده شده است. هم‌چنین از روش طراحی آزمایش به شیوهٔ رویهٔ پاسخ (RSM) به‌منظور کاهش تعداد آزمایش‌ها بهره گرفته شده است. تعداد ۲۰ آزمایش بر روی ورق‌های فوم آلومینیم انجام شده است و درنهایت، رابطه‌ای برای پیش‌بینی زاویهٔ خمش، که تابعی از پارامترهای مورد بررسی می‌باشد، ارائه شده است.

فرآیند خم‌کاری با لیزر

مکانیزم‌های شکل‌دهی با لیزر، براساس توزیع دمایی القا شده در اثر تابش لیزر مشخص می‌شود. توزیع دمایی در قطعه به پارامترهای فرآیند نظیر توان لیزر، قطر پرتو و غیره بستگی دارد. مکانیزم‌های فرآیند خم‌کاری با لیزر به سه صورت است: مکانیزم گرادیان دمایی، مکانیزم خمش کمانشی و مکانیزم کوتاه‌کردن [1]. در انجام آزمایش‌های تجربی و هم‌چنین شبیه‌سازی‌های عددی، پارامترهای فرآیند به گونه‌ای انتخاب شده است که مکانیزم غالب شکل‌دهی از نوع مکانیزم گرادیان دمایی می‌باشد. این مکانیزم در شکل (۲) نشان داده شده است.

مکانیزم گرادیان دمایی رایج‌ترین مکانیزم فرآیند خم‌کاری با لیزر است. در اثر حرارت‌دهی نسبتاً سریع سطح قطعه‌کار توسط پرتو لیزر و رسانایی حرارتی آرام به لایه‌های پایین، یک گرادیان دمایی بزرگ در راستای ضخامت ورق ایجاد می‌شود که انبساط حرارتی متفاوت لایه‌های ورق را به دنبال دارد. بنابراین، یک خمش منفی اتفاق می‌افتد (شکل ۲. الف) که سبب ایجاد مقادیر کوچک کرنش‌های کششی پلاستیکی در سطح حرارت دیده می‌گردد. با ادامهٔ حرارت‌دهی، در اثر افزایش درجهٔ حرارت، استحکام ناحیهٔ تحت تابش پرتو کمتر می‌شود. زمانی که تنش حرارتی به مقدار تنش سیلان ماده برسد، هر انبساط حرارتی بیشتر تبدیل به کرنش فشاری پلاستیک می‌گردد؛ زیرا که انبساط آزاد ناحیهٔ حرارت‌دیده توسط مواد اطراف آن محدود شده است. در مرحلهٔ سرمایش، ماده در لایه‌های بالایی دچار انقباض می‌شود. هم‌چنین به علت آن‌که این نواحی تحت فشار قرار داشتند، یک کوتاه‌شدگی موضعی در لایه‌های بالایی ورق و متعاقب آن، یک زاویهٔ خم دائمی به‌وجود می‌آید (شکل ۲. ب). مقدار زاویهٔ خم نهایی به چگونگی انتخاب پارامترهای فرآیند بستگی دارد [1].



شکل ۲ شمایی از مکانیزم گرادیان دمایی؛ (الف) خم منفی، (ب) خم دائمی ورق

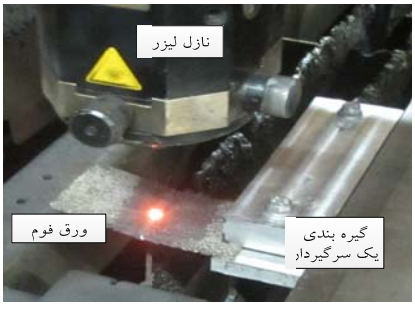
آزمایش‌های تجربی

برای انجام آزمایش‌های تجربی از دستگاه لیزر پالسی دی‌اکسیدکربن بای‌استرانیک با بیشینه توان ۳۰۰۰ وات و قطر لیزر ۵ میلی‌متر استفاده شد. هم‌چنین، ورق‌های فوم آلومینیم با استفاده از دستگاه وایرکات به ابعاد ۵۰

میلی‌متر در ۱۰۰ میلی‌متر و با ضخامت ۵ میلی‌متر تهیه گردید. اندازهٔ متوسط حفره‌های ورق فوم برابر یک میلی‌متر و چگالی متوسط ورق‌های آزمایش‌شده برابر ۰/٤ چگالی آلومینیم می‌باشد. یادآوری می‌شود که اندازهٔ متوسط حفره‌ها با استفاده از پردازش تصویر تعیین گردیده است. برای ممانعت از حرکت ورق در حین فرآیند، از یک بست به‌منظور ایجاد گیره‌بندی یک‌سرگیردار استفاده شده است. تصویر نمونه‌های برش‌شده و هم‌چنین، ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم در حین انجام فرآیند شکل‌دهی با لیزر، به‌ترتیب، در شکل (٤ و ۳) نشان داده شده است. یکی از پیچیدگی‌های تابش لیزر بر ورق‌های از جنس آلومینیم کوچک‌بودن ضریب جذب آن است که امکان تشکیل گرادیان دمایی در راستای ضخامت ورق را محدود می‌کند [21]. به‌منظور افزایش ضریب جذب پرتو توسط قطعه‌کار از پوشش‌دهی توسط اسپری گرافیت استفاده شده است. پس از انجام آزمایش‌ها و شکل‌دهی ورق‌های آلومینیم، اندازه‌گیری مقدار زاویهٔ خمش نهایی ورق‌ها با استفاده از دستگاه زاویه‌سنج انیورسال با دقت ۵ دقیقه انجام شده است. نمونه‌ای از ورق‌های فوم خم‌شده با استفاده از لیزر در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۳ ورق فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم وایرکات شده



شکل ٤ ورق فوم آلومینیم در حین شکل‌دهی با لیزر



شکل ۵ ورق فوم آلومینیم خم‌شده با استفاده از لیزر

نتایج و بحث

در انجام آزمایش‌های تجربی از طراحی آزمایش به روش ترکیب مرکزی استفاده شده است. در طی این آزمایش‌ها، با شناسایی عوامل مؤثر بر زاویهٔ خم، رابطه‌ای بین پارامترهای ورودی و متغیر پاسخ استخراج می‌گردد. در طراحی آزمایش به شیوهٔ ترکیب مرکزی، پنج سطح به‌ازای هر پارامتر ورودی شامل توان لیزر، سرعت اسکن و تعداد پاس تعریف می‌گردد. پارامترهای ذکرشده و سطوح متناظر آن در جدول (۱) آورده شده است. به این ترتیب، تعداد نقاط طراحی به شیوهٔ ترکیب مرکزی برابر با $n = 2^k + 2k + n_0 = 2^3 + 2(3) + 6 = 20$ خواهد بود. در این رابطه، n برابر تعداد آزمایش‌های لازم، k تعداد پارامترهای ورودی و n_0 برابر تعداد نقاط مرکزی است که به‌منظور ایجاد دقت کافی برابر ٦ انتخاب شده است.

ترتیب انجام بیست آزمایش به‌صورت تصادفی‌سازی شده انجام می‌شود. هدف از تصادفی‌سازی، به حداقل رساندن تأثیر کلیهٔ عوامل احتمالی بیرونی بر نتیجهٔ آزمایش است. ترتیب انجام آزمایش‌ها و نتایج به‌دست آمده از آن در جدول (۲) نشان داده شده است.

جدول ۱ پارامترهای مورد بررسی و سطوح آن

پارامتر	واحد	سطح اول	سطح دوم	سطح میانی	سطح چهارم	سطح پنجم
توان	watt	90	120	150	180	210
سرعت	mm/min	1000	2000	3000	4000	5000
پاس	-	5	10	15	20	25

جدول ۲ داده‌های آزمایش صورت گرفته با اعمال ترتیب تصادفی

شماره تصادفی	شماره آزمایش	عامل اول: توان [وات]	عامل دوم: سرعت [میلی متر بر دقیقه]	عامل سوم: تعداد پاس	زاویهٔ خمش
13	1	150	3000	5	3.00
3	2	120	4000	10	1.75
12	3	150	5000	15	3.75
2	4	180	2000	10	5.75
15	5	150	3000	15	5.48
17	6	150	3000	15	4.78
16	7	150	3000	15	5.35
4	8	180	4000	10	7.25
14	9	150	3000	25	11.00
8	10	180	4000	20	11.00
1	11	120	2000	10	1.75
5	12	120	2000	20	6.00
7	13	120	4000	20	7.25
9	14	90	3000	15	1.50
20	15	150	3000	15	4.92
11	16	150	1000	15	6.25
10	17	210	3000	15	9.58
19	18	150	3000	15	5.84
6	19	180	2000	20	9.08
18	20	150	3000	15	4.15

انتخاب مدل برازش

مدل برازش به‌صورت مجموع تعداد متناهی جمله تعریف می‌شود. هر جمله عبارت از حاصل‌ضرب ضریب تأثیر عوامل ورودی در خود عوامل می‌باشد. این مدل، طبق معادلهٔ (۱) تعریف می‌شود.

$$y = \beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_{12} AB + \ldots \quad (1)$$

در این رابطه، β_i ضریب تأثیر عامل ورودی و $A, B, \ldots$ نیز عوامل مؤثر ورودی بر پاسخ می‌باشد. در مدل برازش، از جملات و پارامترهایی استفاده می‌شود که دارای تأثیر معنی‌دار بر پاسخ آزمایش باشد. برای انتخاب بهترین مدل، از نرم‌افزار Design Expert 7.0.0 استفاده شده است. در این مرحله، محاسبهٔ رگرسیون به‌منظور برازش تمام مدل‌های چندجمله‌ای از پارامتر خروجی انجام می‌گیرد. به‌طور کلی، بهترین مدل برازش مربوط است به

الف) چندجمله‌ای معنی‌دار (به عبارت دیگر، مقدار p-value کوچک) با بیشینهٔ درجه (جدول ۳)؛

ب) فقدان عدم برازش (یعنی مقدار Prob>F مطابق جدول (٤) بزرگ‌تر از 0.1 باشد.

ج) تطابق قابل‌قبولی بین مقدار Adjusted R-Squared و Predicted R-Squared وجود داشته باشد (یعنی مطابق جدول (۵) اختلاف این دو مقدار کمتر از 0.2 باشد).

لازم به یادآوری است که مقدار سطح اطمینان در تحقیق حاضر برابر 95% انتخاب شده است؛ این بدان معناست که مقادیر p-value کوچک‌تر از 0.05 نشان‌دهندهٔ معنی‌دار بودن مدل است [25].

جدول ۳ مجموع مربع‌های مدل‌ها

مدل	جمع مربعات	df	مربع میانگین	F Value	p-value
Mean	666.20	1	666.20	-	-
Linear	133.34	3	44.45	38.66	<0.000.1
2FI	1.83	3	0.61	0.48	0.7029
Quadratic	7.37	3	2.46	2.67	0.1042
Cubic	5.98	4	1.49	2.78	0.1266
Residual	3.22	6	0.54	-	-
Total	817.95	20	40.90	-	-

جدول ٤ بررسی عدم‌برازش مدل‌ها

مدل	جمع مربعات	df	مربع میانگین	F Value	Prob>F
Linear	16.61	11	1.51	4.22	0.0622
2FI	14.78	8	1.85	5.16	0.0437
Quadratic	7.40	5	1.48	4.13	0.0727
Cubic	1.43	1	1.43	3.99	0.1023
Pure Error	1.79	5	0.36	-	-

جدول ۵ بررسی کلی مدل‌ها

مدل	Std. Dev.	R-Squared	Adjusted R-Squared	Predicted R-Squared	PRESS
Linear	1.07	0.8788	0.8560	0.7947	31.15
2FI	1.13	0.8908	0.8404	0.6623	51.24
Quadratic	0.96	0.9394	0.8849	0.5798	63.77
Cubic	0.73	0.9788	0.9328	-0.9498	298.87

میزان معنی‌داری به‌ازای افزودن جمله‌های جدید می‌باشد. هرچه مقدار این پارامتر بزرگ‌تر باشد، اضافه‌کردن این جمله‌ها و افزایش مرتبهٔ چندجمله‌ای به برازش دقیق‌تر پاسخ‌ها می‌انجامد. پارامتر p-value شاخص بهبود مدل پس از افزودن جمله‌های موردنظر است. هرچه مقدار این پارامتر کوچک‌تر باشد (حداکثر مقدار قابل‌قبول برابر 0.05 است)، نشان‌دهندهٔ بالاتر بودن میزان بهبودی مدل است. با درنظر گرفتن این شرایط، تا به این‌جا، مدل خطی بهترین مدل قابل استفاده می‌باشد.

مرحلهٔ بعد بررسی عدم برازش مدل‌ها است (جدول ٤). این بررسی میزان مناسب بودن هرکدام از مدل‌های یادشده را در برازش دقیق نتایج نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر، اگر مدل دارای عدم برازش معنی‌دار باشد، به‌منظور پیش‌بینی تأثیر پارامترها مناسب نمی‌باشد. در این جدول، پارامتر F-value تغییرات اختلاف مقادیر میانگین در نقاط طراحی و پاسخ‌های متناظر تخمین‌شده توسط مدل را با تغییرات آزمایش‌های صورت‌گرفته حاصل از نقاط مرکزی طراحی (خطای خالص) مقایسه می‌نماید. بر این اساس، هرچه مقدار F-value در این بررسی کوچک‌تر باشد، و مقدار Prob>F بزرگ‌تر از 0.1 باشد، عدم برازش کمتری اتفاق خواهد افتاد و پیش‌بینی مدل قابل‌اعتمادتر می‌گردد. درنتیجه، مطابق با جدول، مدل خطی برای پیش‌بینی نتایج قابل‌قبول نمی‌باشد. برای رفع این مشکل، جمله‌های مربوط به سایر مدل‌ها که واجد شرایط ذکرشده است به مدل خطی افزوده می‌شود. عدم برازش مدل حاصل در قسمت تحلیل واریانس دوباره بررسی می‌گردد.

آخرین مرحله بررسی کلی مدل‌ها است (جدول ۵). پارامتر Std. Dev. انحراف استاندارد خطای طراحی را تخمین می‌زند. هرچه مقدار این پارامتر کوچک‌تر باشد مطلوب‌تر است. پارامترهای R-Squared و Adjusted R-Squared نسبت توضیح‌پذیری تغییرات مقادیر آزمایش توسط مدل انتخابی را مشخص می‌کند. هرچه این نسبت به یک نزدیک‌تر باشد قدرت توضیح‌پذیری مدل بیشتر است. پارامتر Predicted R-Squared تغییرات سایر مقادیر که توسط مدل پیش‌بینی می‌شود را تخمین می‌زند. مشابه به دو پارامتر قبلی، نزدیک‌تر بودن این پارامتر به مقدار واحد مطلوب می‌باشد. در نهایت، Press نشان‌دهندهٔ چگونگی برازش داده‌های آزمایش است. انتخاب کوچک‌ترین مقدار Press نسبت به سایر مدل‌ها موردنظر می‌باشد [25].

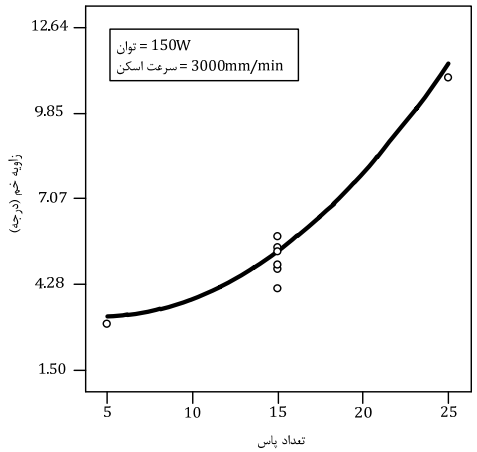
با درنظر گرفتن کلیهٔ شرایط ذکرشده، مدل چندجمله‌ای خطی به‌عنوان مدل برازش انتخاب می‌شود و به‌منظور جبران عدم برازش، جمله‌های مربع پارامترها به این مدل افزوده می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که عدم برازش غیرمعنی‌دار حاصل گردد.

تأثیر پارامترهای فرآیند

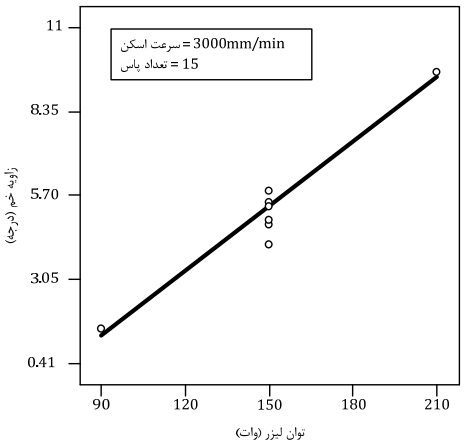
تأثیر هرکدام از پارامترهای مورد بررسی بر زاویهٔ خمش در شکل‌های (۸-٦) آورده شده است. با افزایش توان لیزر، زاویهٔ خم به‌طور قابل‌توجه افزایش می‌یابد (شکل ٦). افزایش توان لیزر به‌معنای افزایش انرژی ورودی و تأثیرگذاری بیشتر لیزر است. درواقع، هرچه توان افزایش می‌یابد، دمای لایهٔ بالایی ورق بیشتر می‌شود و گرادیان دمایی افزایش می‌یابد و در نتیجه

زاویهٔ خم بیشتر می‌گردد. تأثیر سرعت اسکن بر زاویهٔ خم در شکل (۷) آورده شده است. به‌طور کلی، سرعت بر میزان انرژی وارد در طول مسیر تأثیر می‌گذارد. در محدودهٔ بررسی‌شده عملاً تأثیر سرعت بر زاویهٔ خم ناچیز است. هم‌چنین، به‌طور طبیعی با افزایش تعداد پاس، بر زاویهٔ خم افزوده می‌شود (شکل ۸). افزایش تعداد پاس به‌معنای تکرار تابش لیزر است و افزایش مقدار شکل‌دهی را به‌همراه دارد.

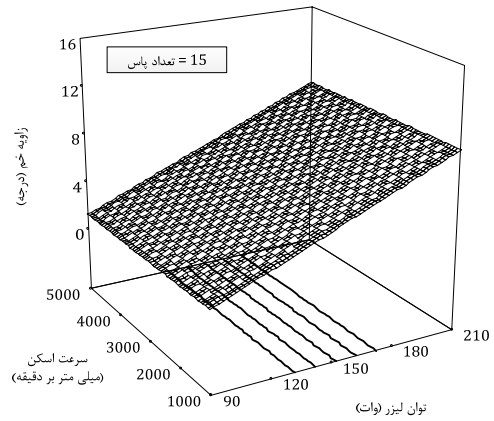
هم‌چنین نمودار تأثیر دوتایی پارامترها بر مقدار نهایی زاویهٔ خم در شکل‌های (۱۱-۹) نشان داده شده است.



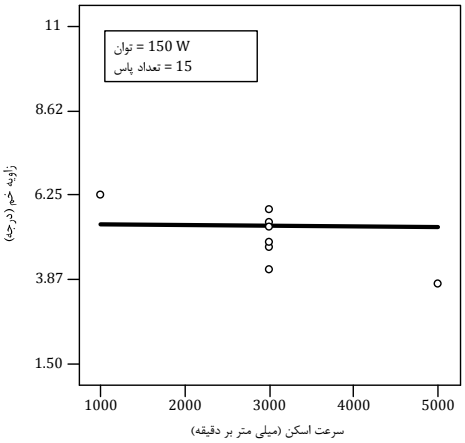
شکل ۸ تأثیر تعداد پاس اسکن بر زاویهٔ خمش



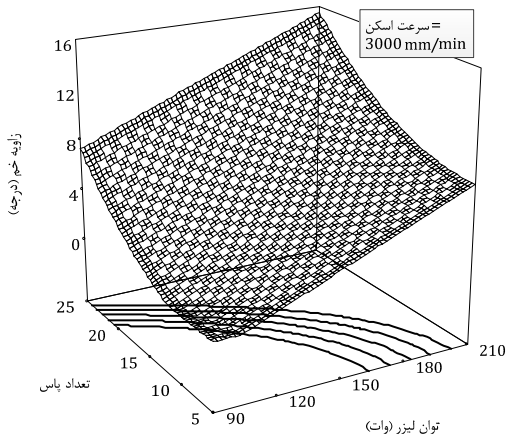
شکل ٦ تأثیر توان لیزر بر زاویهٔ خمش



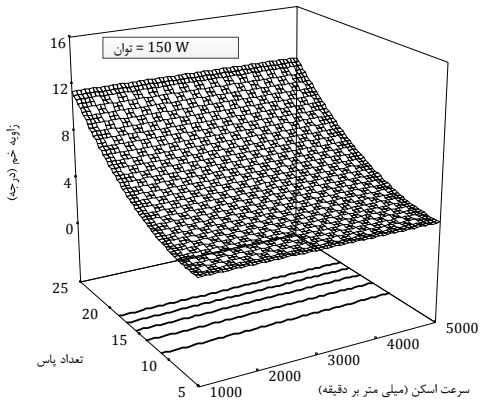
شکل ۹ تأثیر توان و سرعت اسکن بر زاویهٔ خمش



شکل ۷ تأثیر سرعت اسکن بر زاویهٔ خمش



شکل ۱۰ تأثیر توان و تعداد پاس بر زاویهٔ خمش



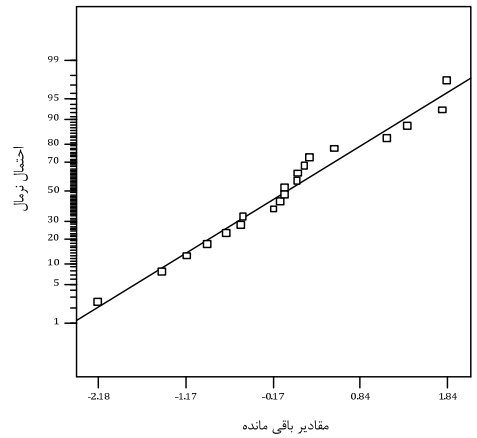
شکل ۱۱ تأثیر سرعت و تعداد پاس بر زاویهٔ خمش

تحلیل واریانس نتایج آزمایش

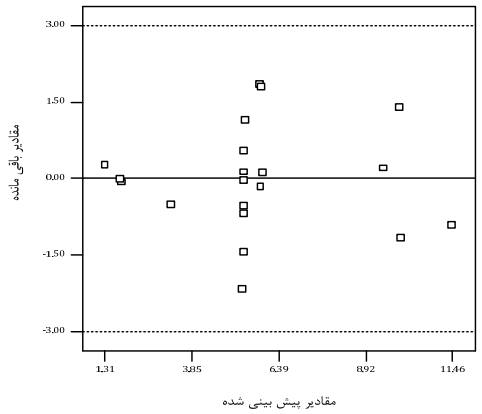
شکل‌های (۱۱-٦) برای نتیجه‌گیری قطعی استفاده نمی‌شود. به منظور تأیید اثرات نشان داده‌شدهٔ عوامل، از تحلیل واریانس استفاده می‌شود. تحلیل واریانس، پرکاربردترین نوع تحلیل برای بررسی اثر متغیرهای ورودی بر پاسخ فرآیند است. این تحلیل با فرض نرمال بودن توزیع خطا، ثابت بودن واریانس و استقلال آن انجام می‌شود. پیش از استفاده از این روش تحلیل، صحت فرض‌های اشاره شده بررسی می‌گردد. به این منظور، نمودار احتمال نرمال مقادیر باقی‌مانده در شکل (۱۲) آورده شده است. این نمودار نشان می‌دهد که آیا مقادیر باقی‌مانده (خطا) از یک مدل توزیع نرمال پیروی می‌کند یا خیر [25]. پراکندگی نقاط آزمایش در اطراف خط مورب، پیروی نتیجهٔ طراحی آزمایش صورت‌گرفته از مدل توزیع نرمال را نشان می‌دهد.

نمودار مقادیر باقی‌مانده در برابر نقاط برازش‌یافته در شکل (۱۳) مشخص شده است. پراکندگی نقاط طراحی و عدم وجود یک ساختار منظم در نقاط این نمودار نشان‌دهندهٔ ثابت بودن واریانس است [25].

تحلیل کامل واریانس مدل استفاده شده در جدول (٦) آورده شده است. هم‌چنان که در جدول مشاهده می‌شود کلیهٔ شرط‌های اشاره‌شده در بخش انتخاب مدل برازش در مدل نهایی ارضا گردیده است.



شکل ۱۲ نمودار احتمال نرمال برحسب مقادیر باقی‌مانده



شکل ۱۳ نمودار مقادیر باقی‌مانده برحسب مقادیر برازش‌شده

جدول ٦ تحلیل واریانس مدل استفاده شده

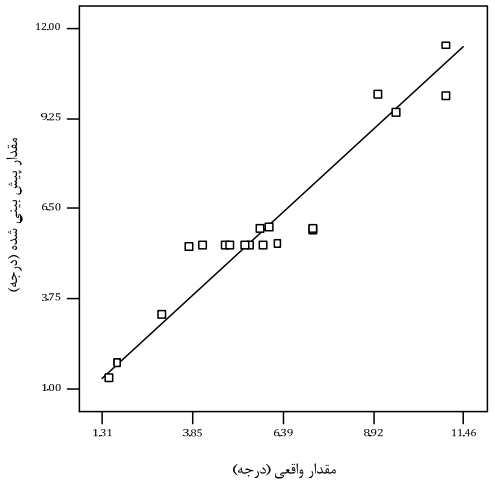
مدل	جمع مربعات	df	مربع میانگین	F Value	p-value	
Model	140.03	4	35.01	44.84	<0.0001	معنی دار
A-Power	65.98	1	65.98	84.51	<0.0001	-
B-Scan vel.	6.806E-3	1	6.806E-3	8.71E-3	0.9268	-
C-no. pass	67.36	1	67.36	86.29	<0.0001	-
C2	6.69	1	6.69	8.56	0.0104	-
Residual	11.71	15	0.78	-	-	-
Lack of Fit	9.92	10	0.99	2.77	0.1362	غیر معنی دار
Pure Error	1.79	5	0.36	-	-	-
Cor Total	151.74	19	-	-	-	-

تعیین رابطهٔ نهایی پیش‌بینی زاویهٔ خمش

اکنون که صحت مدل استفاده‌شده مورد تأیید واقع شده است، می‌توان رابطهٔ زاویهٔ خمش در ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم را که توسط این مدل پیش‌بینی می‌شود قابل‌اطمینان دانست. طبق مدل استفاده شده، رابطهٔ زاویهٔ خمش مطابق رابطهٔ (۲) تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned}\text{Bending angle} &= -6.4097 \\ &+0.0676\times P-2.0625E-005\times v \\ &-0.1846\times n+0.0198\times n^2\end{aligned} \qquad (2)$$

در رابطهٔ فوق، P برابر توان لیزر برحسب وات، v برابر سرعت اسکن پرتو برحسب میلی‌متر بر دقیقه و n تعداد پاس‌های اسکن است.



شکل ١٤ نمودار مقادیر زاویهٔ خمش پیش‌بینی‌شده برحسب مقادیر واقعی

نمودار مربوط به مقادیر واقعی زاویهٔ خمش در مقابل مقادیر پیش‌بینی شده توسط رابطهٔ (۲) در شکل (١٤) آورده شده است. پراکندگی نقاط آزمایش در اطراف خط مورب ٤٥ درجه نشان‌دهندهٔ پیش‌بینی مناسب مدل حاصل است [25].

نتیجه‌گیری

در این مقاله، فرآیند شکل‌دهی ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم با استفاده از لیزر انجام گرفته است. باتوجه به استحکام پایین کششی این دسته از ورق‌ها عملاً امکان شکل‌دهی آن‌ها با استفاده از روش‌های رایج مکانیکی وجود ندارد. فرآیند شکل‌دهی با لیزر به‌عنوان یک روش شکل‌دهی حرارتی امکان خم ورق‌های فوم فلزی را فراهم آورده است. آن‌چه بر میزان شکل‌دهی نهایی با استفاده از این روش می‌انجامد تعیین دقیق پارامترهای مؤثر می‌باشد. به این‌ترتیب، سه پارامتر فرآیندی که مربوط به پرتو لیزر است شامل توان لیزر، سرعت اسکن پرتو و تعداد پاس‌های اسکن موردنظر قرار گرفت و تأثیر آن روی مقدار نهایی زاویهٔ خم تعیین گردید. هم‌چنین رابطه‌ای برای پیش‌بینی زاویهٔ خمش ورق‌های فوم حفره‌بستهٔ آلومینیم ارائه شده است. به‌طور کلی، افزایش توان لیزر به‌علت افزایش انرژی ورودی به افزایش زاویهٔ خم می‌انجامد. افزایش تعداد پاس نیز به افزایش زاویهٔ خم منجر می‌شود. هرچند، با شیب بسیار کم، بین سرعت اسکن و زاویهٔ خم رابطهٔ معکوس برقرار است. تأثیر پارامترهای فرآیندی مورداشاره بر زاویهٔ خمش به‌طور خلاصه عبارت است از:

۱. با افزایش توان لیزر از ۹۰ وات به ۲۱۰ وات، با فرض ثابت ماندن سایر پارامترها، زاویهٔ خمش از مقدار ۱.۳۱ درجه به ۹.٤۳ درجه افزایش یافته است.

۲. افزایش سرعت اسکن از ۱۰۰۰ میلی‌متر بر دقیقه به ۵۰۰۰ میلی‌متر بر دقیقه باعث کاهش ملایم زاویهٔ خمش از ۵.٤۱ درجه به ۵.۳۳ درجه می‌شود.

۳. افزایش تعداد پاس لیزر از ۵ به ۲۵، زاویهٔ خمش را ۳.۲۵ درجه به ۱۱.٤٦ درجه افزایش می‌دهد.

مراجع

1. Zhang, X., "Laser-assisted High Precision Bending and its Applications", Mechanical Engineering; Industrial Engineering Board, Dissertation/Thesis No. 3154677, Indiana, (2004).
2. Geiger, M. and Vollertsen, F., "The Mechanisms of Laser Forming", CIRP Annals - Manufacturing Technology, Vol. 42, 301-304, (1993).
3. Shichun, W. and Jinsong, Z., "An experimental study of laser bending for sheet metals", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 110, pp. 160-163, (2001).
4. Guan, Y., Sun, S., Zhao, G. and Luan, Y., "Influence of material properties on the laser-forming process of sheet metals", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 167, pp. 124-131, (2005).
5. Che Jamil, M.S., Sheikh, M.A. and Li, L., "A study of the effect of laser beam geometries on laser bending of sheet metal by buckling mechanism", Optics & Laser Technology, Vol. 43, pp. 183-193, (2011).
6. Edwardson, S.P., Abed, E., Bartkowiak, K., Dearden, G. and Watkins, K.G., "Geometrical influences on multi-pass laser forming", Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 39, pp. 382, (2006).
7. Cheng, J. and Lawrence Yao, Y., "Cooling Effects in Multiscan Laser Forming", Journal of Manufacturing Processes, Vol. 3, pp. 60-72, (2001).
8. Cheng, P., Fan, Y., Zhang, J., Yao, Y.L., Mika, D.P., Zhang, W., Graham, M., Marte, J. and Jones, M., "Laser Forming of Varying Thickness Plate—Part I: Process Analysis", Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 128, pp. 634-641, (2005).
9. Hoseinpour Gollo, M., Mahdavian, S.M. and Moslemi Naeini, H., "Statistical analysis of parameter effects on bending angle in laser forming process by pulsed Nd:YAG laser", Optics & Laser Technology, Vol. 43, pp. 475-482, (2011).
10. Shen, H. and Yao, Z., "Study on mechanical properties after laser forming", Optics and Lasers in Engineering, Vol. 47, pp. 111-117, (2009).
11. Wu, D., Zhang, Q., Ma, G., Guo, Y. and Guo, D., "Laser bending of brittle materials", Optics and Lasers in Engineering, Vol. 48, pp. 405-410, (2010).
12. Shi, Y., Liu, Y., Yi, P. and Hu, J., "Effect of different heating methods on deformation of metal plate under upsetting mechanism in laser forming", Optics & Laser Technology, Vol. 44, pp. 486-491, (2012).
13. Guan, Y., Zhang, H., Liu, J. and Sun, S., "Laser micro-bending process based on the characteristic of the laser polarization", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 212, pp. 662-671, (2012).
14. Ghadiri Zahrani, E. and Marasi, A., "Experimental investigation of edge effect and longitudinal distortion in laser bending process", Optics & Laser Technology, Vol. 45, pp. 301-307, (2013).
15. Maji, K., Pratihar, D.K. and Nath, A.K., "Experimental investigations and statistical analysis of pulsed laser bending of AISI 304 stainless steel sheet", Optics & Laser Technology, Vol. 49, pp. 18-27, (2013).
16. Safari, M. and Farzin, M., "Experimental and numerical investigation of laser bending of tailor machined blanks", Optics & Laser Technology, Vol. 48, pp. 513-522, (2013).
17. Merklein, M., Hennige, T. and Geiger, M., "Laser forming of aluminium and aluminium alloys — microstructural investigation", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 115, pp. 159-165, (2001).
18. Labeas, G.N., "Development of a local three-dimensional numerical simulation model for the laser forming process of aluminium components", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 207, pp. 248-257, (2008).

19. Qin, Y., Chen, Y., Ni, X., Shen, Z., Bi, J. and Zhang X., "Axisymmetric numerical simulation of plastic damage in aluminum alloy induced by long pulsed laser", Optics and Lasers in Engineering, Vol. 48, pp. 361-367, (2010).
20. Knupfer, S.M. and Moore, A.J., "The effects of laser forming on the mechanical and metallurgical properties of low carbon steel and aluminium alloy samples", Materials Science and Engineering: A, Vol. 527, pp. 4347-4359, (2010).
21. Roohi, A.H., Gollo, M.H. and Naeini, H.M., "External force-assisted laser forming process for gaining high bending angles", Journal of Manufacturing Processes, Vol. 14, pp. 269-276, (2012).
22. Banhart, J. "Manufacture, Characterization and Application of Cellular Metals and Metal Foam", Progress in Materials Science, Vol. 46, pp. 559-632, (2001).
23. Ashby, M.F., Evans, A.G., Fleck, N.A., Gibson, L.J., Hutchinson, J.W. and Wadley, H.N.G, "Metal Foams: A Design Guide", Woburn: Butterworth-Heinemann publication. Inc., Woburn, pp. 1-5, (2000).
24. Quadrini, F., Guglielmotti, A., Squeo, E.A. and Tagliaferri, V., "Laser Forming of Open-cell Aluminium Foams, Journal of Materials Processing Technology", Vol. 210, pp. 1517-1522, (2010).
25. Design Expert. Software 7.0.0, Stat-Ease, Inc. 2005, Help Section.

تخمین شوک حرارتی در مسائل انتقال حرارت معکوس با استفاده از روش فیلتر کالمن*

مهدی مولوی[۱] احمد صداقت[۲] محمد رضا سلیم‌پور[۳]

چکیده *در مقالهٔ حاضر تخمین شوک حرارتی در پروفیل شار حرارتی با داشتن توزیع دما به‌کمک فیلتر کالمن صورت پذیرفته است. برای این کار، ابتدا با محاسبهٔ توزیع دما و اعمال نویز به‌صورت مصنوعی سعی می‌شود تا به شرایط آزمایشگاهی اندازه‌گیری دما نزدیک شد. در ادامه با استفاده از روش فیلتر کالمن، به بررسی تخمین آنی شارحرارتی پرداخته می‌شود که به‌صورت شوک حرارتی در مسألهٔ مورد نظر ظاهر می‌شود. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که روش حاضر قادر است با دقت قابل قبول جهش شار حرارتی را تخمین بزند.*

واژه‌های کلیدی مسألهٔ انتقال حرارت معکوس، تخمین شار حرارتی، روش تخمین آنی، روش فیلتر کالمن.

Estimation of Heat Shocks in Inverse Heat Transfer Problems using Kalman Filtering

M. Molavi A. Sedaghat M.R. Salimpour

Abstract *In this paper, the heat shocks in the heat flux profile are estimated with known temperature distribution using Kalman filtering. For this task, the temperature distribution is calculated and artificial noise is added to adequately simulate the real temperature measurements. Next by using Kalman filtering, estimation of online heat flux is assessed which appears as heat shocks in the discussed problem. Results indicate that the present method can accurately estimate jumps in the heat flux.*

Key Words Inverse Heat Transfer Problem, Estimation of Heat Flux, Online Estimation Method, Kalman Filtering

*تاریخ دریافت مقاله ۹۲/٦/۱٦ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۸/٤ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

(۲) نویسندهٔ مسئول، استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان. sedaghat@cc.iut.ac.ir

(۳) دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

مقدمه

مسائل انتقال حرارت معمولاً به دو دستهٔ مسائل انتقال حرارت مستقیم (DHCP) و مسائل انتقال حرارت معکوس (IHCP) تقسیم می‌شوند. مسائل هدایت حرارت مستقیم به مسائلی اطلاق می‌شود که در آنها هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه، خواص ترموفیزیکی و هم‌چنین موقعیت و قدرت جمله‌های منبع در صورت وجود، معلوم باشد و هدف آن محاسبهٔ توزیع دما در داخل ناحیهٔ مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم باشد. معادلات حاکم نیز با مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی به‌کمک روابط ریاضی که معمولاً به‌صورت یک سری معادلات دیفرانسیل و یا روابط انتگرالی می‌باشند، به‌دست می‌آیند. مسائل هدایت حرارت مستقیم جزو مسائل خوش‌رفتار طبقه‌بندی می‌شوند. مسائل خوش‌رفتار که نخستین بار توسط هادامرد [1]، معرفی شدند به مسائلی اطلاق می‌شود که سه شرط وجود جواب، یکتایی جواب و پایداری نسبت به داده‌های ورودی را برآورده کنند [2-5]. در این گونه مسائل با حل معادلات حاکم می‌توان به توزیع دما در ناحیهٔ مورد نظر رسید. روش‌های حل مسائل مستقیم از سال‌ها پیش توسعه یافته‌اند.

مسائل هدایت حرارت معکوس به مسائلی اطلاق می‌شود که حداقل یکی از معلومات مسأله مستقیم مجهول باشد و باید تخمین زده شود و در عوض دمای برخی نقاط و یا شار حرارتی در داخل یا روی مرز ناحیهٔ مورد نظر از طریق اندازه‌گیری معلوم باشد. این نوع مسائل را می‌توان به یافتن علت از طریق اندازه‌گیری معلول بیان کرد. از مزایای روش‌های معکوس انتقال حرارت این است که در این روش نیاز به تحلیل میدان جریان اطراف جسم نیست زیرا با استفاده از حسگرهایی که در جسم کار گذاشته می‌شود دما اندازه‌گیری می‌شود. مقادیر تجربی معمولاً با خطای اندازه‌گیری همراه می‌باشد و این خطاها ممکن است موجب ناپایدار شدن مسألهٔ معکوس انتقال حرارت بشوند. مسائل انتقال حرارت معکوس شرط وجود جواب را برآورده می‌کنند، زیرا برای مثال در صورتی که تغییری در دماهای اندازه‌گیری شده برای یک جسم ایجاد شود، یک دلیل فیزیکی که همان شار حرارتی سطحی اعمال شده به جسم می‌باشد، وجود دارد. شرط یکتایی جواب را نیز می‌توان مانند مراجع [4, 5] اثبات کرد. اما مسائل معکوس حرارتی به خطاهای اندازه‌گیری حساس می‌باشند؛ درنتیجه برای بررسی وضعیت مسائل انتقال حرارت معکوس تنها باید این شرط را بررسی کرد.

شروع تحقیقات در زمینهٔ انتقال حرارت معکوس سال ۱۹۵٦ بوده است. یکی از نخستین مقالات در این زمینه توسط اِستولز [6] در سال (۱۹٦۰) انتشار یافت. در این مقاله، نحوهٔ محاسبهٔ نرخ انتقال حرارت در مورد اجسامی با شکل‌های ساده در فرآیند آب‌دهی بررسی شده است. میرسپاسی [7] در سال ۱۹۵۹ این کار را با روشی مشابه برای اجسام نیمه بی‌نهایت با استفاده از روش‌های عددی و گرافیکی انجام داد. یکی دیگر از اولین مقالات در زمینهٔ انتقال حرارت معکوس مقاله‌ای روسی توسط شوماخوف [8] می‌باشد که در سال ۱۹۵۷ به انگلیسی ترجمه شد. روش‌های انتقال حرارت معکوس به‌طور کلی در دو دسته قرار می‌گیرند: روش‌های تخمین آنی و روش‌های تخمین غیرآنی. روش تخمین متوالی تابع و روش فیلتر کالمن دو روش مهم در تخمین آنی می‌باشند. روش تخمین متوالی تابع از حدس توابع متوالی در زمان‌های آینده برای تخمین شار حرارتی استفاده می‌کند [9]. روش فیلتر کالمن نوعی روش تخمین متوالی است که به‌صورت پی‌درپی شار حرارتی را با الگوریتم خود در یک مرحله و به‌صورت آنی تخمین می‌زند [10]. این تکنیک یک روش بازگشتی است که با استفاده از ورودی داده‌های نویزدار، تابع (شار حرارتی) یا پارامتر

دلخواه را تخمین می‌زند [11]. در روش‌های غیرآنی از تمامی دماهای اندازه‌گیری شده برای تخمین تابع (شار حرارتی) استفاده می‌شود. این روش‌ها از فرآیند تکرار برای به‌دست آوردن جواب مسأله استفاده می‌کنند، لذا نیاز به حدس اولیه دارند. روش‌های گرادیانی با استفاده از گرادیان تابع هدف قادر هستند که فرآیند تکرار را به‌صورت اتوماتیک به انجام برسانند. روش‌های گرادیانی بیشترین کاربرد را در میان روش‌های غیرآنی برای تخمین تابع (شارحرارتی) و پارامتر دارا می‌باشند. روش‌های گوس- نیوتن ، بوکس- کانماسو ، لونبرگ- مارکوارت، گرادیان مزدوج و شبه نیوتنی جزء روش‌های گرادیانی به شمار می‌آیند. تخمین بسیاری از مسائل از جمله شارحرارتی با استفاده از سه روش اول توصیه نمی‌شود. در این بین روش گرادیان مزدوج و شبه نیوتنی بیشترین کاربرد را برای تخمین تابع (شارحرارتی) دارند. روش گرادیان مزدوج به دلیل پیدا کردن سریع بردار گرادیان مناسب در میان الگوریتم‌های معکوس انتقال حرارت بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد [12].

تابع هدف برای این مسائل از تفاضل بین دمای اندازه‌گیری شده و نتایج به‌دست آمدهٔ حاصل از الگوریتم محاسباتی می‌باشد. در میان روش‌های غیرآنی برای حل چنین مسائلی روش‌های گرادیانی بیشتر استفاده شده است. روش‌های گوس‌نیوتن، بوکس‌کانماسو، لونبرگ‌مارکوارت، گرادیان‌مزدوج و شبه‌نیوتنی جزو روش‌های گرادیانی به‌شمار می‌آیند.

از معایب استفاده از روش‌های گرادیانی نسبت به روش‌های تخمین آنی در مرز متحرک به زمان‌بر بودن محاسبات می‌توان اشاره کرد که علت آن این است که مسألهٔ معکوس را نمی‌توان با معادلهٔ الحاقی کوپل کرد [13].

امروزه شاهد ارائه مقالات زیادی در زمینهٔ انتقال حرارت معکوس هستیم که در مراجع [14-15] به آن اشاره شده است و کار جدیدی که در سال ۲۰۱۳ با استفاده از روش فیلترکالمن انجام شده است که از این روش برای پیشگویی تغییرات ضخامت و تخمین شار حرارتی در حالت عملکردی راکتورها استفاده شد که در این جا مرز ما نیز متحرک است و بر حسب تغییرات دمایی که در مرز ما به‌وجود می‌آید سطح ما حرکت می‌کند [16]. (در مقاله جاری مرز متحرک بر اثر فرآیند فداشوندگی به‌وجود می‌آید که ناشی از تغییرات دما و فشار می‌باشد).

روش فیلتر کالمن با غلبه بر این مشکل باعث کاهش زمان محاسبات می‌شود و هم‌چنین در نقاطی از مسأله که محاسبهٔ آنی شار حرارتی مورد نیاز است به کار می‌رود. در بخش دوم این مقاله معادلات حاکم بر مسأله و حل با استفاده از روش مستقیم تشریح می‌شود. سپس در بخش سوم روش معکوس ارائه و روش فیلتر کالمن تشریح می‌شود. در بخش چهارم بررسی و تشریح نتایج ارائه می‌شود و در بخش پنجم به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

مسألهٔ مستقیم

فیزیک مسألهٔ در نظر گرفته شده شامل یک صفحهٔ یک‌بعدی با طول L، دمای اولیه $T_0(x)$ و شار حرارتی q(t) در مختصات x=0 به آن وارد می‌شود. در x=L میله در راستای طول عایق می‌باشد. جنس صفحه از مس می‌باشد. فرمول‌بندی ریاضی برای مسأله به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad 0 \le x \le L(t) \qquad (۱)$$

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = q(t) \quad , \quad x = 0 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = L(t) \qquad (۳)$$

$$T(x,0) = T_0 \quad , \quad 0 \le x \le L \qquad (٤)$$

معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \qquad (۵)$$

با جداسازی دماهای جدید، ماتریس سه قطری برای حل به‌وسیلهٔ تکنیک فیلترکالمن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(1-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_i^{n+1} -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_{i-1}^{n+1}=T_i^n \qquad (٦)$$

با اعمال شرط مرزی شارحرارتی معادلهٔ (٦) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_i^{n+1} =\frac{2\alpha\Delta t}{\kappa\Delta x}q(t)+T_i^n \qquad (٧)$$

و با اعمال شرط مرزی عایق بودن در معادلهٔ (٦) داریم:

$$\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_i^{n+1}+\left(1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1}=T_i^n \qquad (٨)$$

که در قسمت حل به روش معکوس حرارتی شیوهٔ تخمین توزیع دما توضیح داده می‌شود.

روش معکوس

در مسألهٔ معکوس انتقال حرارت هدف تخمین شار حرارتی مجهول بر روی مرز متحرک است در حالی که دما از طریق اندازه‌گیری به‌وسیلهٔ ترموکوپل در مرز جسم معلوم باشد. در اکثر حالت‌ها و اشکال مختلف فیلترکالمن دو فرض اصلی وجود دارد که عبارتند از: مدل‌سازی خطی سیستم، فرض نویز گوسی. در فرض اول باید ابتدا معادلات غیرخطی با بردن به فضای حالت دینامیکی و تبدیل آن به حالت ماتریسی خطی‌سازی شود. با در نظر گرفتن ماتریس حالت ψ و η به‌صورت زیر:

$$\psi=\begin{bmatrix}\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & 1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & 0\\ -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \ddots & 1-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \ddots & 1-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\\ 0 & & & 1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\end{bmatrix}$$

و

$$\eta=\begin{bmatrix}\frac{2\alpha\Delta t}{\kappa\Delta x}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

معادلهٔ تخمین دما به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T_k=\psi T_{k+1}-\eta q(t) \qquad (٩)$$

که:

$$T_{k+1}=\varphi T_k+\Gamma q(t)$$
$$\varphi=\psi^{-1}\ ,\ \Gamma=\psi^{-1}.\eta \qquad (١٠)$$

که ϕ ماتریس انتقال حالت، Γ ماتریس ورودی و k اندیس زمانی می‌باشد. معادلهٔ منطبق بر اندازه‌گیری دما به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$Z_k=H_kT_k+\nu_k \qquad (١١)$$

که H_k ماتریس اندازه‌گیری و یک سیگنال اخلال‌گر است و از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$H_k=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0] \qquad (١٢)$$

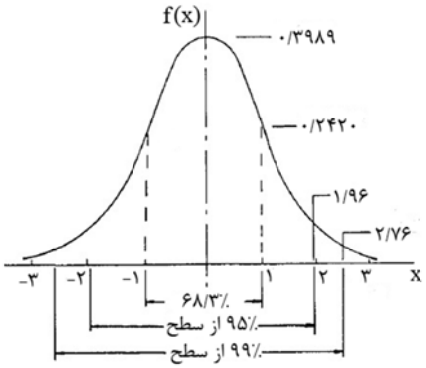
که در جایی که حسگر دما را اندازه‌گیری می‌کند مقدار H برابر با یک است و در بقیهٔ مکان‌ها صفر می‌باشد. Z_k بردار مشاهده در زمان k می‌باشد، و υ_k بردار نویز با فرض میانگین صفر و نویز گوسی سفید با واریانس $E\{\upsilon_k.\upsilon_j^T\} = R\delta_{kj}$ می‌باشد که R واریانس اغتشاش است و δ_{kj} عملگر دلتای کرونکر می‌باشد. مقدار υ_k از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\nu_k = \omega_k \sigma \qquad (۱۳)$$

خطاهای اندازه‌گیری نیز دارای توزیع نرمال (گوسی) می‌باشند. تابع توزیع احتمال برای ε_i به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (۱٤)$$

که ε_i خطای اندازه‌گیری می‌باشد که یک عدد تصادفی است.



شکل ۱ تابع چگالی نرمال استاندارد

در شکل (۱) تابع چگالی نرمال استاندارد ایجاد شده براساس تابع فوق نشان داده شده است. با توجه به این شکل ω اعداد تصادفی تولید شده می‌باشد که ۹۹٪ آن در بازهٔ ۲/۷٦ تا ۲/۷٦- قرار خواهد داشت و σ انحراف استاندارد در خطای اندازه‌گیری می‌باشد (R مجذور σ است) که ناشی از خطای اندازه‌گیری دما می‌باشد.

روش تخمین شار حرارتی با استفاده از روش فیلتر کالمن شامل دو قسمت است: اول فیلتر کالمن بدون جمله ورودی و دیگری تخمین‌زدن مجذور مربعات بازگشتی. نتایج این روش به‌صورت زیر می‌باشد [17]:

$$\overline{T}_{k/k-1} = \phi_k \overline{T}_{k-1} \qquad (۱۵)$$

$$R_\varepsilon = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R \qquad (۱٦)$$

$$P_{k/k-1} = \phi_k P_{k-1} \phi_k^T + \Gamma_k Q \Gamma_k^T \qquad (۱۷)$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T R_\varepsilon^{-1} \qquad (۱۸)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \qquad (۱۹)$$

$$\overline{Z}_k = Z_k - H_k \overline{T}_{k/k-1} \qquad (۲۰)$$

$$\overline{T}_k = \overline{T}_{k/k-1} + K_k \overline{Z}_k \qquad (۲۱)$$

معادلات (۲۱-۱۵) برای به‌دست آوردن دما و اختلاف بین دمای اندازه‌گیری و دمای فیلتر شده بدون در نظر گرفتن ورودی (شار حرارتی) به‌کار می‌رود. K بهرهٔ کالمن است که یک کنترلگر به‌شمار می‌آید و با توجه به سایر پارامترها تعیین می‌شود.

معادلات برای تخمین زدن مجذور مربعات بازگشتی به‌صورت زیر است:

$$B_k = H_k(\phi_k M_{k-1} + I)\Gamma_k \qquad (۲۲)$$

$$M_k = (I - K_k H_k)(\phi_k M_{k-1} + I) \qquad (۲۳)$$

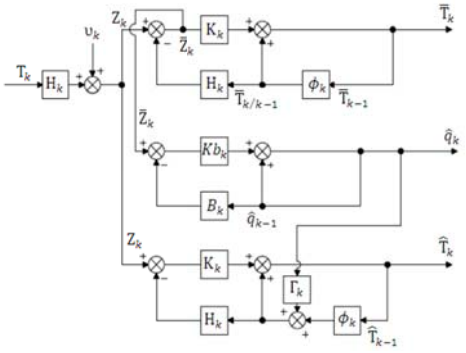
$$Kb_k = \gamma^{-1} Pb_{k-1} B_k^T \times (B_k \gamma^{-1} Pb_{k-1} B_k^T + R_\varepsilon)^{-1} \qquad (۲٤)$$

$$Pb_k = (I - Kb_k B_k)\gamma^{-1} Pb_{k-1} \qquad (۲۵)$$

$$\hat{q}_k = \hat{q}_{k-1} + Kb_k(\overline{Z}_k - B_k \hat{q}_{k-1}) \qquad (۲٦)$$

$$\hat{T}_k = \overline{T}_k + M_k \Gamma_k \hat{q}_k \qquad (۲۷)$$

در شکل (۲) نیز نمودار بلوکی این روش مشاهده می‌شود:



شکل ۲ نمودار بلوکی الگوریتم فیلتر کالمن

بررسی و تشریح نتایج

برای تخمین شار حرارتی از یک حسگر در مرزی که شار حرارتی به جسم وارد می‌شود برای اندازه‌گیری دما استفاده شده است. پروفیل شار حرارتی با استفاده از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$q(t)=\begin{cases}0 \\ ,\ 0\le t<0.32 \text{ or } 0.44\le t\le t_f \\ 20*(t-0.32)/0.04 \\ ,\ 0.32\le t<0.36 \\ 20*(1-(t-0.36)/0.08) \\ ,0.36\le t<0.44\end{cases} \qquad (۲۸)$$

که با استفاده از پروفیل شارحرارتی، دما به‌صورت مستقیم و از معادلهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید. سپس برای نزدیک شدن به شرایط آزمایشگاهی، از معادلهٔ نویز مصنوعی به دما اضافه کرده با استفاده از روش فیلتر کالمن شار حرارتی به‌صورت معکوس تخمین زده می‌شود.

شرایط شبیه‌سازی و پارامترهای معلوم در این ماده به‌صورت زیر می‌باشد:

گام زمانی ($\Delta t=0.008$ s)، ضخامت صفحهٔ مس ($L=0.5$ cm)، گام مکانی ($\Delta x=0.005$ cm)، ضریب نفوذ حرارت ($\alpha=0.1804\ cm^2 . s^{-1}$)، ضریب هدایت حرارت ($\kappa=0.145696\ cal.cm^{-1}.s^{-1}.^oC$)

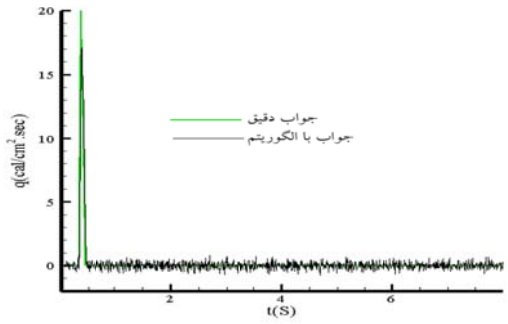
بایاس ناشی از انحراف شار حرارتی دقیق (q_k) و شار حرارتی تخمین زده شده ($\hat{q}_k$) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Bias=\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(q_k-\hat{q}_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۹)$$

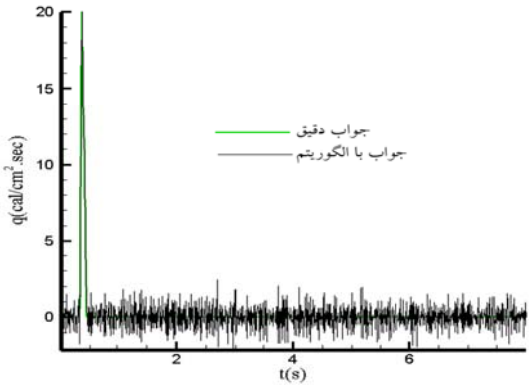
در این الگوریتم مقدار چهار پارامتر σ، γ، Q و Pb_0 در جواب $\hat{q}_k$ تأثیرگذار است.

Pb_0 مقدار اولیه کوواریانس خطا در الگوریتم تخمین‌زدن مجذور مربعات بازگشتی است که هر چه بزرگ‌تر باشد اغتشاشات جواب $\hat{q}$ در لحظات اولیه زیاد خواهد بود و مدت زمانی طول می‌کشد تا الگوریتم، این اغتشاشات را از بین ببرد. هم‌چنین هرچه مقدار Pb_0 به صفر نزدیک‌تر باشد مقدار Kb_k در لحظات اولیه کوچک شده و اثر تغییرات دما در الگوریتم فیلتر کالمن تأثیر کمی بر مقدار $\hat{q}_k$ خواهد داشت و جواب از مقدار واقعی فاصله می‌گیرد. مقدار Pb_0 در این مقاله 10^{-5} در نظر گرفته شده است.

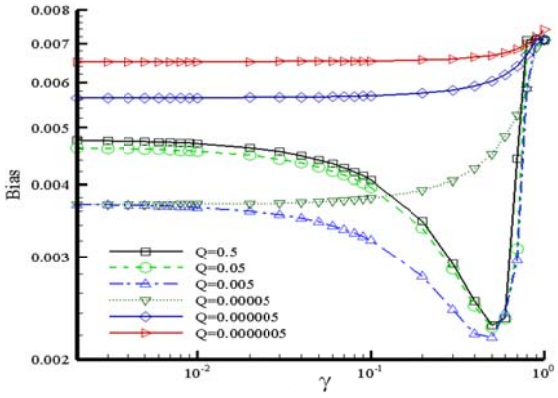
با افزایش مقدار Q مقدار اغتشاش در تخمین شار حرارتی افزایش می‌یابد. در شکل (۳) شار حرارتی تخمین زده شده با روش فیلترکالمن مشاهده می‌شود، همان‌طور که می‌بینیم در لحظه‌ای که شوک ناگهانی حرارتی به جسم وارد می‌شود الگوریتم در تخمین نقطهٔ ماکزیمم مقدار کمی خطا دارد، با نتیجه‌گیری از شکل (٤) که در آن مقدار کوواریانس را افزایش دادیم الگوریتم به‌خوبی نقطهٔ ماکزیمم پروفیل شار حرارتی را تخمین می‌زند اما مقدار اغتشاشات وارد بر جواب افزایش می‌یابد که باعث افزایش بایاس می‌شود.



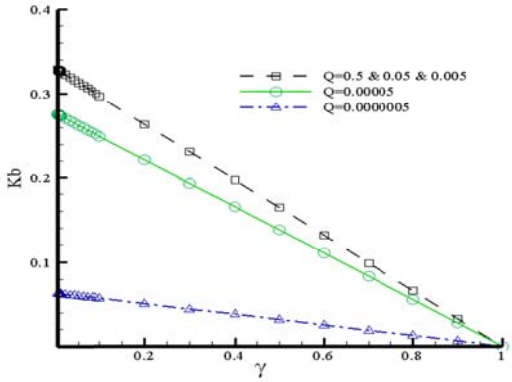
شکل ۳ نمودار تخمین شار حرارتی برحسب زمان با $\sigma=0.1$، $\gamma=0.5$ و $Q=0.001$



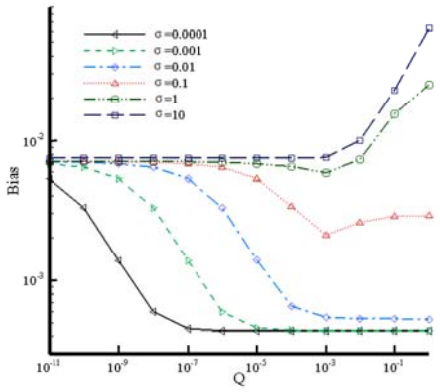
شکل ٤ نمودار تخمین شار حرارتی برحسب زمان با $\sigma=0.1$، $\gamma=0.5$ و $Q=0.05$



شکل ۵ تغییرات بایاس برحسب فاکتور فراموشی و کوواریانس‌های مختلف با $\sigma=0.1$



شکل ٦ تغییرات بهره کالمن برحسب فاکتور فراموشی و کوواریانس‌های مختلف با $\sigma=0.1$



شکل ٧ تغییرات بایاس بر حسب کوواریانس و انحراف استانداردهای مختلف با $\sigma=0.1$

در شکل (٥) نمودار فاکتور فراموشی برحسب کوواریانس‌های مختلف نشان داده شده است. نکات مهم در مورد این نمودار این است که بایاس کمینه در $Q = 0.005$ اتفاق می‌افتد و در استفاده از مقادیر دیگر کوواریانس به جز نقاط خاص فاکتور فراموشی مقدار بایاس افزایش می‌یابد. هم‌چنین با دقت در این نمودار مقدار بایاس کمینه در کوواریانس‌های ٠/٥، ٠/٠٥ و ٠/٠٠٥ اتفاق می‌افتد. هم‌چنین فاکتور فراموشی مناسب نزدیک عدد ٠.٥ اتفاق می‌افتد، پس هر مقدار فاکتور فراموشی را نمی‌توان به‌صورت تصادفی انتخاب کرد و باید با توجه به پارامترهای دیگر تعیین شود.

در شکل (٦) تغییرات بهره کالمن برحسب فاکتور فراموشی برای کوواریانس‌های مختلف نمایش داده شده است. با افزایش بهره کالمن پهنای باند زیاد می‌شود و این افزایش باعث افزایش دامنهٔ اغتشاشات می‌گردد، هم‌چنین بهره کالمن رابطهٔ معکوس با فاکتور فراموشی دارد که با توجه به این شکل و در نظر گرفتن فاکتور فراموشی بهینه از شکل (٦) بهره کالمن در ٠/١٧ اتفاق می‌افتد.

شکل (٧) تغییرات بایاس شار حرارتی را برحسب انحراف استاندارد و کواریانس دمای اندازه‌گیری شده مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود کواریانس و واریانس ($R=\sigma^2$) اغتشاشات دمای اندازه‌گیری شده به‌هم وابسته می‌باشند، پارامتر Q

کوواریانس اغتشاش ورودی در الگوریتم فیلتر کالمن است و اگر بسیار بزرگ انتخاب شود باعث افزایش اغتشاشات در جواب می‌گردد و اگر خیلی کوچک انتخاب شود باعث ایجاد تأخیر زمانی و عدم تخمین مناسب نقطهٔ ماکزیمم شار حرارتی می‌گردد. از طرفی این پارامتر باید با توجه به واریانس اغتشاشات دمای اندازه‌گیری شده تعیین شود. پس با افزایش واریانس دما، مقدار کواریانس ورودی برای به‌دست آوردن بایاس بهینه باید افزایش یابد.

نتیجه‌گیری

در بخش قبل نشان داده شد که فیلتر کالمن روشی است که با استفاده از آن می‌توان شار حرارتی را به‌صورت آنی تخمین زد و با توجه به این موضوع می‌توان از این روش برای طراحی حسگرهای شارسنج استفاده کرد. نکات مهم در استفاده از این روش عبارتند از:

۱. انتخاب منطقی پارامترهای σ، γ و Q باعث کاهش بایاس می‌شود و مکانی که شوک حرارتی ایجاد می‌گردد به‌خوبی تخمین زده می‌شود.
۲. با افزایش کوواریانس مقدار اغتشاشات زیاد و با کاهش آن مقدار اغتشاش کم می‌گردد و باعث می‌شود که الگوریتم در تخمین مکان شوک حرارتی ضعیف عمل کند. از طرفی این پارامتر باید با توجه به انحراف استاندارد تعیین شود که با افزایش انحراف استاندارد برای رسیدن به بایاس بهینه باید مقدار کوواریانس افزایش یابد.
۳. مقدار فاکتور فراموشی بهینه با توجه به کوواریانس و بایاس کمینه تعیین می‌شود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان این اثر صمیمانه از راهنمایی‌ها و هم‌فکری‌های آقای مهندس حسین مولوی کمال تشکر و قدردانی را دارند.

فهرست نمادها و نشانه‌ها

نشانه‌های لاتین

B	ماتریس حساسیت
E	واریانس
H	ماتریس اندازه‌گیری
I	ماتریس واحد
K	بهره کالمن
Kb	بهره کالمن اصلاح شده
L	طول میله، (m)
M	ماتریس حساسیت
P	ماتریس خطای کواریانس فیلتر شده
Pb	ماتریس خطای کواریانس
Q	کوواریانس
q	شارحرارتی دقیق، (W/cm^2)
R	واریانس دمای اندازه‌گیری
R_ε	واریانس مازاد
T	دما، (K)
T_0	دمای اولیه، (K)
t	زمان
Z	بردار مشاهده
X	متغیر مکان
Φ	ماتریس انتقال حالت
Γ	ماتریس ورودی
σ	انحراف استاندارد
γ	فاکتور فراموشی
κ	ضریب هدایت حرارتی، (W/m.K)
δ	عملگر دلتای کرونکر

بالانویس‌ها

^	مقدار تخمین زده شده با الگوریتم
-	مقدار تخمین زده شده بدون شار حرارتی

زیرنویس‌ها

k	اندیس زمانی

مراجع

1. J. Hadamard, J., "*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*", Yale University Press, New Haven, CT, (1923).
2. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y., "*Solution of Ill-Posed Problem*", Winston and Sons, Washington, DC, (1977).
3. Alifanov, O. M., "Solution of an Inverse Problem of Heat Conduction by Iteration Methods", *J. Eng. Phys.*, vol. 26, no. 4, pp. 471-475, (1974).
4. Alifanov, O.M., "*Inverse Heat Transfer Problems*", Springer-Verlag, New York, (1994).
5. Beck, J.V., Blackwell, B. and Clair, C.R.St., "*Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*", Wiley Interscience, New York, (1985).
6. Stolz, G.Jr., "Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes", Journal Heat Transfer, 82, pp. 20-26, (1960).
7. Mirsepassi, T.J., "Heat-Transfer Charts for Time-Variable Boundary Conditions", British Chemical Engineering. 4, pp. 130-136, (1959).
8. Shumakov, N.V., "A Method for the Experimental Study of the Process of Heating a Solid Body", *Soviet Physics Technical Physics* (Translated by American Institute of Physics), 2, pp. 771-780, (1957).
9. Beck, J.V. and Arnold, K.J., "*Parameter Estimation in Engineering and Science*", Wiley: New York, (1977).
10. Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *ASME Journal of Basic Engineering*, 82, pp. 35–45, (1960).
11. Kalman, R.E. and Bucy, R.S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", *ASME Journal of Basic Engineering*, 83, pp. 95-108, (1961).
12. Molavi, H., Hakkaki-Fard, A., Rahmani, R.K., Ayasoufi, A. and Molavi, M., "A Novel Methodology for Combined Parameter and Function Estimation Problems", ASME Journal of Heat Transfer, 132, No. 12, p. 121301, (2010).
13. Molavi, H., Hakkaki-Fard, A., Molavi, M., Rahmani, R.K., Ayasoufi, A. and Noori. S., "Estimation of Boundary Conditions in the Presence of Unknown Moving Boundary Caused by Ablation", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, pp. 1030-1038, (2011).
14. Kowsari, F. and Nazari, M., "A Feasibility Study of Employing Sequential Function Specification Method for Estimation of Transient Heat Flux in a Non-Thermal Equilibrium Porous Channel", *Journal of Porous Media*, 14(5), (2010).
15. Nazari, M., Farahani, S. D. and Kowsary, F., "Comparison of the Mollification and Wavelet Prefiltering of Temperature Data in an Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, Application: Nonthermal Equilibrium Porous Medium", *Heat Transfer Engineering*, 33(8), 704-711, (2012).
16. Lebreux, M., Desilets, M., Lacroix, M. "An unscented Kalman filter inverse heat transfer method for the prediction of the ledge thickness inside high- temperature metallurgical reactors", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 57, pp. 265-273, (2013).
17. Franklin, G.F., Powell, J.D. and Workman, M.I., "Digital Control of Dynamic Systems", 2nd ed. Addision Wesley, Reading, MA, (1990).

ارتعاش ورق‌های مدرج تحت جرم گسترده با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم*

علیرضا شوشتری(۱) رضا مطهری(۲) محمدرضا کاری(۳)

چکیده *در این مقاله ارتعاش آزاد یک ورق مدرج مستطیلی تحت اثر جرم گستردهٔ موضعی بررسی شده است. خواص ورق‌های مدرج مانند مدول یانگ و چگالی در راستای ضخامت ورق به‌صورت پیوسته متغیر است. ورق به‌حالت مدرج توانی، سیگموید و یا نمایی تعریف می‌شود. تکیه‌گاه ورق ساده در نظر گرفته می‌شود و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم به‌دست می‌آیند. اثر پارامترهای مختلفی مانند ابعاد ورق و جرم گسترده و نسبت جرم روی فرکانس‌های طبیعی آن بررسی شده است. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه‌شدهٔ قبلی نشان داده شده است که نتایج حاضر از دقت خوبی برخوردار است.*

واژه‌های کلیدی ارتعاش آزاد، ورق مستطیلی مدرج، جرم گستردهٔ موضعی، تئوری مرتبه سوم تغییرشکل برشی.

Vibration of FGM Plates With Distributed Mass Using Third Order Shear Deformation Theory

A. Shooshtari R. Motahari M. Kari

Abstract *In this paper, free vibration of rectangular functionally graded material (FGM) plates with distributed patch mass is analyzed. Properties of these plates like Young's modulus and density vary continuously throughout the thickness direction. The plate is defined by power-law, sigmoid or exponential function. The boundary condition of the plate is assumed to be simply supported and the equation of motion is obtained by using of Hamilton principle and third order shear deformation theory. The effects of different parameters such as the plate and mass dimensions and mass ratio on the natural frequencies of the plate are analyzed. Compared to previous results, our results are very accurate in similar cases.*

Key Words Free Vibration, Rectangular Plate, Distributed Patch Mass, Third Order Shear Deformation Theory.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۱۲/۱۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۰/۲۲ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان .shooshta@basu.ac.ir

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، همدان، ایران.

(۳) مربی، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساوه، ساوه، ایران.

مقدمه

بسیاری از سازه‌های مهندسی را می‌توان به‌صورت یک ورق مستطیلی در نظر گرفت. ورق‌ها در کاربردهای متفاوتی مانند صنایع هوافضا، کشتی‌سازی و خودرو استفاده می‌شوند و اغلب این ورق‌ها در کار تحت ارتعاش قرار می‌گیرند. لذا تحلیل ارتعاشی ورق‌ها از مسائل مورد توجه محققان است. از طرفی به‌دلیل اهمیت در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی به‌خصوص در ورق‌های ضخیم، محققان تئوری‌های جدیدی بر مبنای در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی ارائه کردند. از جمله اولین تحقیق‌ها در این مورد، مقالهٔ ارائه شده توسط استاوسکی (Stavski) [1] در سال ۱۹٦۵ بود. پس از آن توسعه این روش توسط محققان دیگر ادامه پیدا کرد. برت (Bert) [2] اثر تغییرشکل برشی را روی ارتعاش ورق‌های مستطیلی لایه‌ای بررسی کرد و تعداد مدهای ارتعاشی بیشتری را ارائه داد. ردی (Reddy) [3] در سال ۱۹۷۹ مسأله ارتعاش ورق‌های مستطیلی لایه‌ای را با در نظر گرفتن تغییرشکل برشی به‌کمک روش المان محدود تحلیل کرد. او هم‌چنین در سال ۱۹۸۹ با بررسی تحلیلی و المان محدود مسأله ارتعاش ورق‌های مستطیلی با استفاده از روش‌های مختلف و مقایسهٔ آنها نشان داد که در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی در تحلیل ارتعاشی آنها مهم است [4]. وی [5] سرانجام در سال ۱۹۹۷ در کتاب خود شرح کاملی را از انواع تئوری‌های موجود در زمینه تحلیل ورق‌ها مانند تئوری کلاسیک و تئوری‌های مرتبه اول، دوم و سوم تغییرشکل برشی ارائه کرد. در فصل یازدهم این کتاب وی نشان داد که با استفاده از تئوری مرتبه سوم در مقایسه با دیگر تئوری‌ها جواب‌های دقیق‌تری به‌دست می‌آید و از طرفی به‌دلیل پیچیدگی روش و زمان‌بر بودن تحلیل با استفاده از تئوری‌های مرتبهٔ بالاتر، استفاده از تئوری مرتبه سوم کافی است و جواب‌ها نیز از دقت بالایی برخوردارند. خدیر (Khdeir) [6] در سال ۱۹۹۹ معادلات کامل تحلیل ارتعاش ورق‌های مستطیلی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه دوم ارائه کرد. سینق (Singh) و همکارانش [7] نیز در سال ۲۰۰۱، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مرکب با مواد تصادفی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌بالا به‌دست آوردند. کانت (Kant) [8] در همان سال حل تحلیلی ارتعاش ورق‌های لایه‌ای مرکب را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌بالا ارائه کرد. هم‌چنین رستگار (Rastgaar) و همکارانش [9] در سال ۲۰۰٦، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مرکب مستطیلی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم محاسبه و ارائه کردند.

از سوی دیگر، بسیاری از ورق‌ها تحت اثر جرم‌هایی که روی آنها سوار هستند، قرار می‌گیرند؛ به‌عنوان مثال، بوردهای الکترونیکی را که قطعات مختلفی روی آنها وجود دارد می‌توان ورق‌هایی در نظر گرفت که تحت اثر جرم‌هایی که روی آنها وجود دارد قرار دارند. به‌دلیل نقطه‌ای نبودن این جرم‌ها تحلیل ارتعاشی این ورق‌ها با وجود جرم‌های گستردهٔ موضعی از اهمیت بالایی برخوردار است. هر چند مقالاتی در زمینهٔ تحلیل ارتعاشی ورق‌ها با جرم‌های متمرکز وجود دارد، اما تحقیقات در زمینهٔ ارتعاش ورق‌ها با جرم‌های گستردهٔ موضعی اندک است. در این میان می‌توان به مقالات ارائه شده توسط کمپاز (Kompaz) [10]، وانگ (Wong) [11] و علی‌بیگلو و همکارانش [12] اشاره کرد.

در میان انواع ورق‌ها، استفاده از ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج (Functionally graded materials: FGM) [13] به‌دلیل داشتن خواص مکانیکی ممتاز و متفاوت که ناشی از تغییر پیوستهٔ خواص در طول ضخامت آنها است و موجب ایجاد میدان‌های تنش پیوسته می‌شود، رو به گسترش است. به‌همین دلیل مسألهٔ ارتعاش ورق‌های مدرج در سال‌های اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته است. حل دقیق سه‌بعدی ورق‌های مستطیلی مدرج با تکیه‌گاه‌های ساده توسط

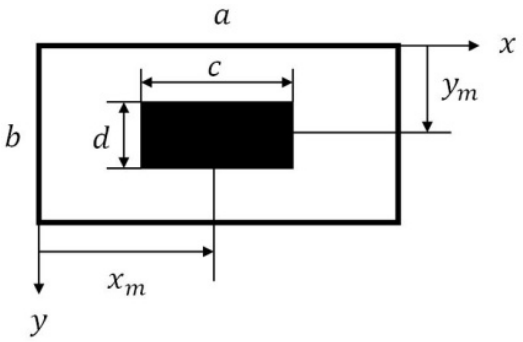
ول (Vel) [14] در سال ۲۰۰٤ ارائه شد و نتایج با استفاده از تئوری‌های مختلف مانند تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم و تئوری کلاسیک مقایسه شد. در همان سال کیان (Qian) و همکارانش [15] مسألهٔ تغییرشکل استاتیکی و ارتعاش آزاد و اجباری یک ورق مستطیلی مدرج ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه‌بالای برشی و روش پترو-گلرکین (Petrov-Galerkin) تحلیل و بررسی کردند. بررسی جامع ارتعاش آزاد و کمانش ورق‌های ساندویچی ساخته شده از مواد مدرج نیز توسط زنکور (Zenkour) [16] در سال ۲۰۰۵ ارائه شد. در این تحقیق تأثیر تغییرشکل برشی عرضی، نسبت ابعاد ورق و نسبت ضخامت به ابعاد ورق مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۰٦ فریرا (Ferreira) و همکارانش [17] فرکانس‌های طبیعی یک ورق مدرج مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده را با استفاده از تئوری مرتبه اول و سوم تغییرشکل برشی محاسبه و نتایج دو تئوری را با یکدیگر مقایسه کردند. ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ضخیم ساخته شده از مواد مدرج و با تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول توسط هاشمی و همکارانش [18] در سال ۲۰۱۰ ارائه شد. پاسخ استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق‌های ساخته شده از جنس مواد مدرج با استفاده از تئوری مرتبه‌بالای تغییرشکل برشی در تحقیقی دیگر توسط تلها (Talha) [19] در سال ۲۰۱۰ بررسی شد. هم‌چنین برای به‌دست آوردن فرمول دقیقی برای محاسبهٔ فرکانس‌های طبیعی ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج براساس فرکانس‌های ورق‌های ایزوتروپیک متناظر تحقیقی توسط افرایم (Effraim) [20] انجام شد. اویماز (Oymaz) [21] در سال ۲۰۱۲، در مقاله‌ای ارتعاشات ورق‌های ناهمگن ساخته شده از مواد مدرج را با روش ریتز بررسی کرد. حل مسألهٔ ارتعاش غیرخطی ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تحت بارهای تصادفی توسط دوگان (Dogan) [22] در سال ۲۰۱۳ ارائه شد. همان‌طور که در ابتدا ذکر شد، امروزه مواد مدرج به‌دلیل پیوستگی خواص مکانیکی در راستای ضخامت کاربرد گسترده‌ای در ساخت بدنهٔ هواپیماها، فضاپیماها و به‌طور کلی صنایع هوافضا پیدا کرده است. در بسیاری از این موارد روی ورق‌های ساخته شده از این مواد قطعاتی نصب می‌شود که می‌توان آنها را مانند جرم‌هایی در نظر گرفت که باید در تحلیل ارتعاشی مورد توجه قرار بگیرند. لازم به ذکر است که در تمام مقالاتی که مسأله ارتعاش ورق‌های مدرج بررسی شده است وجود جرم گستردهٔ موضعی در تحلیل مورد توجه قرار نگرفته است.

در این مقاله ارتعاش آزاد یک ورق مدرج مستطیلی تحت اثر جرم گستردهٔ موضعی بررسی شده است. ضریب پواسون ورق ثابت در نظر گرفته شده، اما مدول یانگ و چگالی در راستای ضخامت ورق به‌صورت پیوسته متغیر است. ورق به سه حالت مدرج توانی ((Power-Law FGM (P-FGM))، سیگموید ((Sigmoid FGM (S-FGM)) و یا نمایی ((Exponential FGM (E-FGM)) تعریف شده است. تکیه‌گاه ورق ساده در نظر گرفته شده و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم به‌دست آمده است. فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه و اثر پارامترهای مختلف مانند ابعاد ورق و جرم، نسبت جرم، نوع ورق و سطح اثر جرم روی آنها بررسی شده است. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه شدهٔ قبلی در حالت‌های مشابه نشان داده شده است که نتایج حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

تعریف مسأله

یک ورق مستطیلی به طول a، عرض b و ضخامت h ساخته شده از مواد مدرج را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. محورهای x و y در شکل نشان داده شده و جهت مثبت محور z از وسط ورق به سمت

پایین است. مطابق شکل (۱)، جرم گستردهٔ موضعی (M) به طول c، عرض d و با مختصات مرکز جرم (x_m, y_m) روی ورق قرار گرفته است. مدول یانگ (E) و چگالی (ρ) ورق مدرج در سطح بالا و پایین آن متفاوت است و در طول ضخامت ورق به‌طور پیوسته تغییر می‌کند اما ضریب پواسون (v) در طول ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است.



شکل ۱ ورق مدرج مستطیلی با جرم گستردهٔ موضعی

روش حل

خواص ورق مدرج. ورق مدرج در سه حالت ورق مدرج توانی، سیگموید و نمایی در نظر گرفته می‌شود. در حالت ورق مدرج توانی چگالی و مدول یانگ به‌شکل زیر نوشته می‌شود [13]:

$$E(z) = g(z)E_1 + [1-g(z)]E_2 \quad (۱)$$

$$\rho(z) = g(z)\rho_1 + [1-g(z)]\rho_2 \quad (۲)$$

$$g(z) = (\frac{z+h/2}{h})^p \quad (۳)$$

در روابط فوق E_1 و E_2 و ρ_1 و ρ_2 به‌ترتیب مدول یانگ و چگالی سطح پایین ($z = h/2$) و بالای ورق ($z = -h/2$) و p ضریب مادهٔ مدرج است. در حالت ورق مدرج سیگموید خواص در طول ضخامت توزیع یکنواخت‌تری دارد و از روابط زیر پیروی می‌کنند [13]:

$$E(z) = g_1(z)E_1 + [1-g_1(z)]E_2, 0 \le z \le h/2 \quad (٤)$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + [1-g_2(z)]E_2, -h/2 \le z \le 0 \quad (٥)$$

$$\rho(z) = g_1(z)\rho_1 + [1-g_1(z)]\rho_2, 0 \le z \le h/2 \quad (٦)$$

$$\rho(z) = g_2(z)\rho_1 + [1-g_2(z)]\rho_2, -h/2 \le z \le 0 \quad (٧)$$

$$g_1(z) = 1 - 1/2(\frac{h/2-z}{h/2})^p \ , \ 0 \le z \le h/2 \quad (٨)$$

$$g_2(z) = 1/2(\frac{h/2+z}{h/2})^p \ , \ -h/2 \le z \le 0 \quad (٩)$$

در حالت ورق مدرج نمایی از یک تابع نمایی برای توصیف خواص ورق در طول ضخامت آن استفاده می‌شود [13]:

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (۱۰)$$

$$\rho(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (۱۱)$$

$$A = E_2 \ , \ B = \frac{1}{h}\ln(\frac{E_1}{E_2}) \quad (۱۲)$$

روابط اساسی حاکم

میدان جابه‌جایی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم به‌شکل زیر معرفی می‌شود [17]:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \quad (۱۳)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \quad (۱٤)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad (۱٥)$$

در معادلات بالا u، v و w به‌ترتیب جابه‌جایی ورق در جهت‌های x، y و z و u_0، v_0 و w_0 جابه‌جایی صفحهٔ میانی ورق و ϕ_x و ϕ_y چرخش‌های برشی هستند. روابط کرنش- جابه‌جایی براساس قوانین الاستیسیتهٔ خطی و با استفاده از میدان جابه‌جایی تعریف‌شده به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [5]:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\\ \gamma^1_{xy}\end{Bmatrix}+z^3\begin{Bmatrix}\varepsilon^3_{xx}\\ \varepsilon^3_{yy}\\ \gamma^3_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۶)$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\gamma^0_{yz}\\ \gamma^0_{xz}\end{Bmatrix}+z^2\begin{Bmatrix}\gamma^2_{yz}\\ \gamma^2_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (۱۷)$$

که در روابط فوق برای ε^0_{xx}، ε^1_{xx}، ε^3_{xx} ، ε^0_{yy} ، ε^1_{yy} ، ε^3_{yy} ، γ^0_{xy} ، γ^1_{xy} ، γ^3_{xy} ، γ^0_{yz} ، γ^2_{yz} ، γ^0_{xz} و γ^2_{xz} داریم [5]:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix} \qquad (۱۸\text{-الف})$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\\ \gamma^1_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \phi_x}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y}+\dfrac{\partial \phi_y}{\partial x}\end{Bmatrix} \qquad (۱۸\text{-ب})$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon^3_{xx}\\ \varepsilon^3_{yy}\\ \gamma^3_{xy}\end{Bmatrix}=-\frac{4}{3h^2}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \phi_x}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y}+\dfrac{\partial \phi_y}{\partial x}+2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (۱۸\text{-ج})$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma^0_{yz}\\ \gamma^0_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\end{Bmatrix} \qquad (۱۸\text{-د})$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma^2_{yz}\\ \gamma^2_{xz}\end{Bmatrix}=-\frac{4}{h^2}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\end{Bmatrix} \qquad (۱۸\text{-ه})$$

برای روابط تنش کرنش نیز داریم:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix}1 & v & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-v^2)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۹)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{2(1+v)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (۲۰)$$

منتجه‌های تنش نیز از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}N_{\alpha\beta}\\ M_{\alpha\beta}\\ P_{\alpha\beta}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}1\\ z\\ z^3\end{Bmatrix}dz \qquad (۲۱\text{-الف})$$

$$\begin{Bmatrix}Q_{\alpha}\\ R_{\alpha}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha z}\begin{Bmatrix}1\\ z^2\end{Bmatrix}dz \qquad (۲۱\text{-ب})$$

در روابط فوق α و β می‌توانند مختصه‌های x و یا y را اختیار کنند. با استفاده از روابط (۲۱-۱۸) منتجه‌های تنش برحسب کرنش‌ها به‌دست می‌آید [5]:

$$\begin{Bmatrix}\{N\}\\ \{M\}\\ \{P\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[A] & [B] & [E']\\ [B] & [D] & [F]\\ [E'] & [F] & [H]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\varepsilon^0\}\\ \{\varepsilon^1\}\\ \{\varepsilon^3\}\end{Bmatrix} \qquad (۲۲)$$

$$\begin{Bmatrix}\{Q\}\\ \{R\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[A'] & [D']\\ [D'] & [F']\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\gamma^0\}\\ \{\gamma^2\}\end{Bmatrix} \qquad (۲۳)$$

در روابط فوق برای ماتریس‌های A و A' داریم [5]:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix},\ A'=\begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad (۲۴\text{-الف})$$

$$A_2 = vA_1,\ A_3 = [(1-v)/2]A_1 \quad (۲۴\text{-ب})$$

که در آن:

$$(A_1, B_1, D_1, E_1', F_1, H_1) = \int_{-h/2}^{h/2} E(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz \quad (۲۵)$$

ماتریس‌های B، D، E'، F و H مانند A بوده و D' و F' نیز مانند A' هستند. هم‌چنین ε^0، ε^1، ε^3، γ^0 و γ^2 در روابط (۲۳ و ۲۲) عبارتند از:

$$\{\varepsilon^0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\end{Bmatrix},\ \{\varepsilon^1\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\end{Bmatrix},\ \{\varepsilon^3\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^3_{xx}\\ \varepsilon^3_{yy}\end{Bmatrix} \quad (۲۶)$$

$$\{\gamma^0\}=\begin{Bmatrix}\gamma^0_{yz}\\ \gamma^0_{xz}\end{Bmatrix},\ \{\gamma^2\}=\begin{Bmatrix}\gamma^2_{yz}\\ \gamma^2_{xz}\end{Bmatrix} \quad (۲۷)$$

ورق با جرم گستردهٔ موضعی. یک جرم گستردهٔ موضعی M را همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است در نظر بگیرید. فرض شده است که جرم از خمش ورق در جایی که قرار گرفته است جلوگیری نمی‌کند. معادلهٔ انرژی کرنشی ورق را به‌صورت زیر می‌توان نوشت [5]:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}]dxdydz \quad (۲۸)$$

با استفاده از روابط (۲۱ و ۱۷، ۱۶) انتگرال‌گیری روی محور z انجام می‌گردد و سپس از روابط (۲۳، ۲۲، ۱۸) جای‌گذاری می‌شود. ضرایب نیز از روابط (۲۵ و ۲۴) به‌دست می‌آیند. معادلهٔ انرژی جنبشی ورق (T_p) بدون وجود جرم گسترده نیز به‌شکل زیر نوشته می‌شود [5]:

$$T_p = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}\rho[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2]dxdydz \quad (۲۹)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۸-۱۳) می‌توان انرژی جنبشی ورق را برحسب جابه‌جایی نوشت. معادلهٔ انرژی جنبشی ناشی از جرم گستردهٔ موضعی (T_m) که روی سطح بالایی ورق قرار گرفته نیز عبارتست از:

$$T_m = \frac{1}{2}\int_{x_m-c/2}^{x_m+c/2}\int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2}\gamma_m[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2]dxdy,\ at: z = -h/2 \quad (۳۰)$$

در رابطهٔ فوق γ_m مقدار جرم گسترده بر واحد مساحت است. کل انرژی جنبشی ورق از مجموع دو انرژی جنبشی ذکر شده به‌دست می‌آید ($T = Tp + T_m$). شرایط مرزی برای ورق با تکیه‌گاه ساده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_0 = w_0 = \phi_x = N_{yy} = M_{yy} = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (۳۱)$$

$$v_0 = w_0 = \phi_y = N_{xx} = M_{xx} = 0 \text{ at } x = 0, a \quad (۳۲)$$

در نظر گرفتن سری‌های سینوسی و کسینوسی برای میدان جابه‌جایی در حل مسألهٔ ارتعاش ورق‌های مستطیلی تحت اثر جرم اضافه شده روی آن در تحقیقات قبلی مورد استفاده قرار گرفته است [12] و لذا سری‌های زیر که شرایط مرزی فوق را ارضا می‌کنند برای میدان جابه‌جایی در نظر گرفته می‌شوند:

$$u_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}U_{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \quad (۳۳)$$

$$v_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V_{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \quad (۳٤)$$

$$w_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \quad (۳۵)$$

$$\phi_x(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}X_{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \quad (۳٦)$$

$$\phi_y(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Y_{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \quad (۳۷)$$

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a},\ \beta_n=\frac{n\pi}{b} \quad (۳۸)$$

در روابط بالا ضرایب U_{mn}، V_{mn}، W_{mn}، X_{mn} و Y_{mn} به‌صورت توابع مختلط نمایی برحسب زمان فرض می‌شوند. به‌طور مثال برای U_{mn} می‌توان نوشت:

$$U_{mn}(t)=U^0{}_{mn}e^{i\omega t} \quad (۳۹)$$

در رابطه فوق $U^0{}_{mn}$ دامنهٔ جابه‌جایی در زمان صفر و ω فرکانس طبیعی است. با استفاده از اصل همیلتون و با استفاده از رابطهٔ (٤۰) معادلات حرکت حاکم بر مسأله به‌دست می‌آیند [3] که به‌علت حجم زیاد معادلات و به‌منظور خلاصه‌نویسی از ذکر آنها صرف‌نظر گردیده است اما نحوهٔ به‌دست آوردن معادلات حرکت با جزئیات در پیوست (الف) آورده شده است.

$$\delta L=\delta(T-U) \quad (٤۰)$$

با قراردادن روابط (۳۷-۳۳) در معادلات حرکت و ساده‌سازی آن یک دستگاه معادلهٔ همگن به‌شکل زیر حاصل می‌شود:

$$([K]-\omega^2[S])\{\Delta\}=0 \quad (٤۱)$$

که $[K]$ ماتریس سختی، $[S]$ ماتریس جرم و $[\Delta]$ بردار ضرایب نامعین است. نمونه درایه‌های ماتریس جرم و سختی در معادلهٔ فوق برای یک حالت از توابع مادهٔ مدرج در پیوست (ب) آورده شده است. معادلهٔ (٤۱) معمولاً به‌صورت بی‌بعد حل می‌شود و برای این کار در ابتدا معادله‌های انرژی کرنشی و جنبشی را به‌صورت بی‌بعد می‌نویسند و سپس جابه‌جایی‌ها را نیز به شکل بی‌بعد در آن قرار می‌دهند. لذا برای بی‌بعدسازی روش حل در این مقاله، پارامترهای زیر در نظر گرفته می‌شوند:

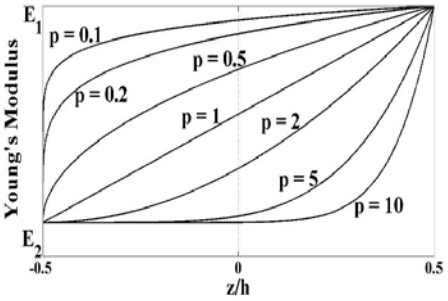
$$\bar{x}=\frac{x}{a},\ \bar{y}=\frac{y}{b},\ \bar{z}=\frac{z}{h} \quad (٤۲\text{-الف})$$

$$\bar{u}_0=\frac{u_0}{a},\ \bar{v}_0=\frac{v_0}{a},\ \bar{w}_0=\frac{w_0}{a} \quad (٤۲\text{-ب})$$

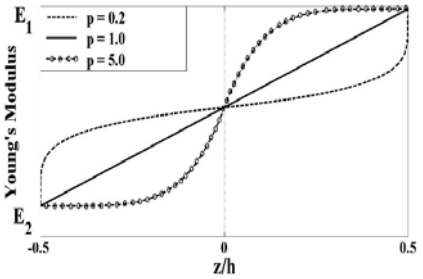
$$\bar{c}=\frac{c}{a},\ \bar{d}=\frac{d}{b},\ r=\frac{a}{b} \quad (٤۲\text{-ج})$$

$$\Omega=\omega h\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}},\ r_m=\frac{\gamma_m cd}{\rho abh} \quad (٤۲\text{-د})$$

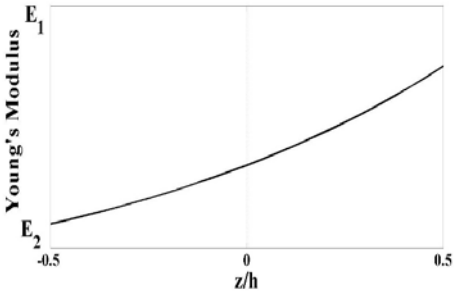
در روابط بالا Ω فرکانس بی‌بعد و r_m نسبت جرم به جرم ورق است. با حل دستگاه معادلهٔ (٤۱) مقادیر ویژهٔ آن که همان فرکانس‌های طبیعی ورق هستند محاسبه می‌شوند.



شکل ۲ تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق مدرج توانی



شکل ۳ تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق سیگموید



شکل ٤ تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق نمایی

نتایج عددی

خواص زیر برای یک ورق مدرج فرض شده است:

$$E_1 = 200\ \text{Gpa},\ \rho_1 = 5700\ \text{kg/m}^3 \qquad (۴۳\text{-الف})$$

$$E_2 = 70\ \text{Gpa},\ \rho_2 = 2702\ \text{kg/m}^3 \qquad (۴۳\text{-ب})$$

کلیهٔ نتایج با فرض $\nu = ۰/۳$ محاسبه شده است.

در شکل‌های (٤-۲) تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق در سه حالت مدرج توانی، سیگموید و نمایی نشان داده شده است. با برابر صفر قرار دادن انرژی جنبشی ناشی از جرم گسترده ($T_m = 0$) و حل دستگاه معادلهٔ (٤١) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق بدون جرم به‌دست می‌آید. در این حالت می‌توان نتایج به‌دست آمده را با نتایج محاسبه‌شدهٔ قبلی مقایسه و دقت روش پیشنهادی را بررسی کرد. در جدول (۱) مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده برای یک ورق مربعی مدرج نوع توانی در نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و نیز در مقادیر مختلف ضریب ماده p نشان داده و این مقادیر با نتایج به‌دست آمده توسط ول [14]، کیان [15] و فریرا [17] مقایسه شده است. در جدول (۲) نیز مقادیر چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول یک ورق مربعی مدرج توانی با نتایج ارائه شده توسط کیان [15] و فریرا [17] مقایسه شده است. با بررسی جدول‌های (۲ و ۱) می‌توان مشاهده کرد که نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله دقت خوب و قابل‌قبولی دارند.

جدول ۱ فرکانس بی‌بعد اول برای ورق مربعی مدرج توانی

مرجع	P=1 $a/h = ۱۰$	P=1 $a/h = ۵$	P=2 $a/h = ۵$	P=3 $a/h = ۵$
نتایج حاضر	۰/۰٦۰۱	۰/۲۲۱۳	۰/۲۲۰۵	۰/۲۲۱۱
فریرا [17]	۰/۰۵۹۲	۰/۲۱۸۸	۰/۲۱۸۸	۰/۲۲۰۲
درصد خطا	۱/۵	۱/۱	۰/۷۷	۰/٤۸
ول [١٤]	۰/۰۵۹٦	۰/۲۱۹۲	۰/۳۱۹۷	۰/۲۲۱۱
درصد خطا	۰/۸	۰/۹	۰/۳٦	۰/۰
کیان [15]	۰/۰۵۸٤	۰/۲۱۵۲	۰/۲۱۵۳	۰/۲۱۷۲
درصد خطا	۲/۸	۲/۷	۳/٤	۰/۳۹

جدول ۲ چهار فرکانس بی‌بعد اول برای ورق مربع توانی، $p = ۱$ ،$a/h = ۲۰$

مود (m,n)	نتایج حاضر	فریرا [17]	درصد خطا	کیان [15]	درصد خطا
(۱و۱)	۰/۰۱۵۰	۰/۱٤۷	۲/۰	۰/۰۱٤۹	۰/۷
(۱و۲)	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۷۵	۱/٦	۰/۰۳۷۷	۱/۰
(۲و۱)	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۷۵	۱/٦	۰/۰۳۷۷	۱/۰
(۲و۲)	۰/۰٦۰۱	۰/۰۵۹۲	۱/۵	۰/۰۵۹۳	۱/۳

در جدول‌های (٤ و ۳) مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول به‌ازای نسبت‌های مختلف a/b و a/h برای یک ورق مدرج در دو حالت مدرج توانی (و یا سیگموید) به‌ازای $p = ۱$ و مدرج نمایی نشان داده شده است. در حالتی که $p = ۱$ است با توجه به روابط (۹-۱) تغییرات چگالی و مدول یانگ در راستای ضخامت برای دو ورق مدرج توانی و سیگموید که ویژگی‌های یکسانی دارند، برابر است و لذا می‌توان گفت در حالتی که $p = ۱$ است هر دو ورق مانند هم رفتار می‌کنند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق با افزایش نسبت طول به عرض بیشتر و با افزایش نسبت طول به ضخامت یعنی نازک شدن ورق کمتر می‌شود. در حالتی که a/b افزایش می‌یابد به‌علت ثابت بودن a/h، هم طول و هم ضخامت ورق زیاد می‌شود و بنابراین سختی ورق افزایش می‌یابد و با توجه به رابطهٔ فرکانس بی‌بعد که رابطهٔ مستقیم با سختی دارد، فرکانس بی‌بعد افزایش می‌یابد. در حالت دوم که a/h افزایش می‌یابد و a/b ثابت است، ورق نازک می‌شود و لذا سختی آن کاهش می‌یابد که این امر باعث کاهش فرکانس می‌شود. هم‌چنین با توجه به بالاتر بودن مقادیر فرکانس برای ورق مدرج توانی می‌توان نتیجه گرفت که ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی از خود نشان می‌دهد.

جدول ۳ فرکانس بی‌بعد برای یک ورق بدون جرم مدرج توانی و سیگموید، $p = ۱$

a/b	$a/h = ۵$	$a/h = ۱۰$	$a/h = ۲۰$
۰/۲	۰/۱۲۱۵	۰/۰۳۱۹	۰/۰۰۸۱
۰.٤	۰/۱۳٤۷	۰/۰۳۵۵	۰/۰۰۹۰
۰/٦	۰/۱۵٦۳	۰/۰٤۱۵	۰/۰۱۰٦
۰/۸	۰/۱۸۵۷	۰/۰٤۹۸	۰/۰۱۲۷
۱	۰/۲۲۱۳	۰/۰٦۰۱	۰/۰۱۵۰
۱/۲	۰/۲٦۵٦	۰/۰۷۳۲	۰/۰۱۸۸
۱/٤	۰/۳۱٤۵	۰/۰۸۸۱	۰/۰۲۲۸
۱/٦	۰/۳٦۸٦	۰/۱۰۵۰	۰/۰۲۷٤
۱/۸	۰/٤۲۷۰	۰/۱۲۳۹	۰/۰۳۲۵
۲	۰/٤۸۹۳	۰/۱٤٤۵	۰/۰۳۸۲

جدول ٤ فرکانس بی‌بعد برای یک ورق بدون جرم مدرج نمایی

a/b	$a/h = ۵$	$a/h = ۱۰$	$a/h = ۲۰$
۰/۲	۰/۱۲۰۳	۰/۰۳۱٦	۰/۰۰۸۰
۰/٤	۰/۱۳۳٤	۰/۰۳۵۲	۰/۰۰۸۹
۰/٦	۰/۱۵٤۷	۰/۰٤۱۲	۰/۰۱۰۵
۰/۸	۰/۱۸۳۷	۰/۰٤۹٤	۰/۰۱۲٦
۱	۰/۲۱۹۹	۰/۰۵۹۹	۰/۰۱۵٤
۱/۲	۰/۲٦۲٤	۰/۰۷۲٦	۰/۰۱۸۷
۱/٤	۰/۳۱۰٦	۰/۰۸۷۳	۰/۰۲۲٦
۱/٦	۰/۳٦۳۷	۰/۱۰٤۱	۰/۰۲۷۲
۱/۸	۰/٤۲۱۱	۰/۱۲۲٦	۰/۰۳۲۲
۲	۰.٤۸۲۲	۰.۱٤۳۰	۰.۰۳۷۹

در جدول (۵) فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی مدرج در دو حالت مدرج توانی (و یا سیگموئید) و نمایی به‌ازای $p = ۱$ و $a/h = ۱۰$ تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی ارائه شده است. جرم گستردهٔ موضعی به دو شکل در نظر گرفته شده است. در حالت اول جرم در مرکز ورق با نسبت جرم (r_m) ۰/۵ و ابعاد $c/a = d/b = ۰/٤$ و در حالت دوم جرم در مرکز ورق با نسبت جرم ۰/۹ و ابعاد $c/a = d/b = ۰/۱$ در نظر گرفته می‌شود. مشخص

است که جرم گسترده در حالت دوم متمرکزتر از حالت اول است. با توجه به مقادیر موجود در جدول (٦)، هنگامی که جرم متمرکزتر است درصد کاهش فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود چون اثر آن روی نقطه شکم در میانه ورق بیشتر شده و لذا انرژی جنبشی ناشی از جرم زیاد می‌شود (بیشترین مقدار خیز برای ورق در نظر گرفته شده در وسط آن است و بنابراین با توجه به معادله انرژی جنبشی هر چه جرم در این نقطه متمرکز شود مقدار انرژی جنبشی نیز بیشتر می‌شود). بنابراین انرژی جنبشی کل نیز افزایش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد، که این کاهش مطابق انتظار است.

جدول ۵ فرکانس بی‌بعد اول برای یک ورق مربعی مدرج، $p = ۱$

نوع ورق	بدون جرم	جرم در حالت اول	درصد کاهش	جرم در حالت دوم	درصد کاهش
توانی	۰/۰٦۱۰	۰/۰۲۰۹	٦۵/۲۲	۰/۰۱۱۵	۸۰/۸۷
نمایی	۰/۰۵۹۹	۰/۰۲۰۱	٦٦/٤٤	۰/۰۱۱٦	۸۰/٦۳

جدول ٦ فرکانس بی‌بعد اول برای ورق توانی و یا سیگموید با جرم گسترده، $p = ۱$

a/b	$a/h = ۵$	$a/h = ۱۰$	$a/h = ۲۰$
۰/۲	۰/۰۲۱۵	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۲۷
۰/٤	۰/۰۳٤۷	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۳۱
۰/٦	۰/۰۵٦٤	۰/۰۱٤۲	۰/۰۰۳۸
۰/۸	۰/۰٦۹۳	۰/۰۱۷٤	۰/۰۰٤۳
۱	۰/۰۸۳٤	۰/۰۲۰۹	۰/۰۰۵۲
۱/۲	۰/۱۰۳۲	۰/۰۲۵۹	۰/۰۰٦۵
۱/٤	۰/۱۲۸۰	۰/۰۳۲۱	۰/۰۰۸۰
۱/٦	۰/۱۵۷۷	۰/۰۳۹٦	۰/۰۰۹۹
۱/۸	۰/۱۹۲۱	۰/۰٤۸۳	۰/۰۱۲۱
۲	۰/۲۳۱۵	۰/۰۵۸۳	۰/۰۱٤٦

جدول ۷ فرکانس بی‌بعد اول برای یک ورق مدرج نمایی با جرم گسترده

a/b	$a/h = ۵$	$a/h = ۱۰$	$a/h = ۲۰$
۰/۲	۰/۰۲۰۳	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۲۱
۰/٤	۰/۰۳۳٤	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۲۹
۰/٦	۰/۰۵۵۳	۰/۰۱۳۵	۰/۰۰۳۲
۰/۸	۰/۰٦۸۰	۰/۰۱٦۷	۰/۰۰٤۱
۱	۰/۰۸۲۲	۰/۰۲۰۱	۰/۰۰٤۸
۱/۲	۰/۱۰۱۹	۰/۰۲۵۱	۰/۰۰٦۰
۱/٤	۰/۱۲٦۸	۰/۰۳٤۱	۰/۰۰۷۵
۱/٦	۰/۱۵٦۳	۰/۰۳۸۹	۰/۰۰۹۳
۱/۸	۰/۱۹۰۹	۰/۰٤۷۷	۰/۰۱۱۵
۲	۰.۲۳۰۵	۰.۰۵۷۸	۰.۰۱۳۷

در جدول‌های (۷ و٦) مقادیر فرکانسهای طبیعی یک ورق مدرج در دو حالت مدرج توانی (و یا سیگموید) به‌ازای $p = ۱$ و مدرج نمایی با نسبت‌های مختلف طول به عرض و طول به ضخامت تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی با نسبت جرم ۰/۵ و ابعاد $c/a = d/b = ۰/۰٤$ که در وسط ورق قرار گرفته است، آورده شده است. نتایج موجود در این جدول از روند نشان داده شده در جدول‌های (٤ و۳) تبعیت می‌کند. فرکانس‌های طبیعی ورقی که تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی قرار گرفته است نسبت به همان مقادیر در حالتی که ورق بدون جرم گسترده است، کاهش می‌یابد. این کاهش ناشی از وجود جرم و افزایش انرژی جنبشی کل سیستم است. هم‌چنین با توجه به مقادیر فرکانس‌ها می‌توان نتیجه گرفت که ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی از خود نشان می‌دهد که این روند در جدول‌های (٤ و ۳) نیز مشاهده شد.

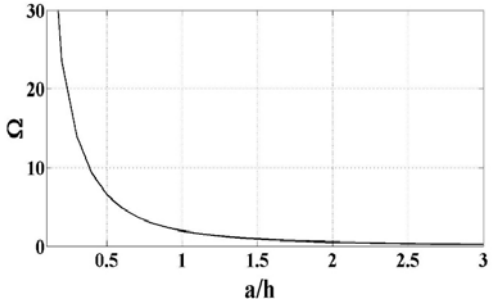
در جدول (۸) مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای یک ورق مربعی مدرج در دو حالت مدرج توانی و سیگموید به‌ازای مقادیر مختلف p نشان داده شده است. ورق مربعی مذکور تحت اثر یک جرم گستردهٔ

موضعی با نسبت جرم ۰/۵و ابعاد $c/a = d/b = ۰/٤$ در وسط ورق قرار گرفته است و نسبت a/h نیز ۱۰ است. با توجه به مقادیر موجود در این جدول، مشاهده می‌شود که به‌طور کلی با افزایش توان p مقدار فرکانس کاهش می‌یابد. هم‌چنین کاملاً مشخص است که مقدار فرکانس برای ورق مدرج توانی کمتر از همان مقدار برای ورق مدرج سیگموید است. لذا ورق مدرج سیگموید صلبیت بیشتری از خود نشان می‌دهد. از طرفی با توجه به مقادیر فرکانس‌های موجود در جدول‌های (٤ و ۳) و جدول‌های (۷ و ٦) نشان داده شد که ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی دارد.

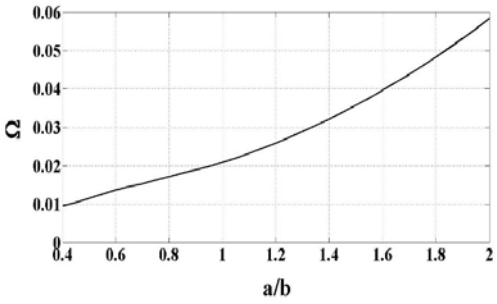
جدول ۸ فرکانس بی‌بعد اول برای یک ورق مربعی با جرم گسترده، $a/h = ۱۰$

p	ورق مدرج توانی	ورق مدرج سیگموید
۰/۱	۰/۰۲۳٤	۰/۰۲۳٦
۰/۲	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۲۹
۰/۵	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۲۱
۱	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۰۹
۲	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۰٤
۵	۰/۰۲۱۸	۰/۰۲۰۲
۱۰	۰/۰۲۰۸	۰/۰۲۰۰
۲۰	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۹
۵۰	۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۹۹
۱۰۰	۰/۰۱٦٦	۰/۰۱۹۹

شکل‌های (٦ و ۵) به‌ترتیب اثر نسبت طول به ضخامت و طول به عرض را روی فرکانس طبیعی بی‌بعد اول یک ورق مدرج توانی به‌ازای $p = ۱$ نشان می‌دهند. در شکل (۵) ورق مربعی در نظر گرفته شده است و در شکل (٦) نسبت طول به ضخامت برابر با ۱۰ است. همانطور که پیشتر با بررسی جدول‌های (٤ و ۳) هم‌چنین جدول‌های (۷ و ٦) ذکر شد، با افزایش نسبت طول به عرض فرکانس بی‌بعد افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد. در هر دو شکل مذکور ورق تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی در وسط ورق با نسبت جرم ۰/۵ و ابعاد $c/a = d/b = ۰/٤$ قرار گرفته است.



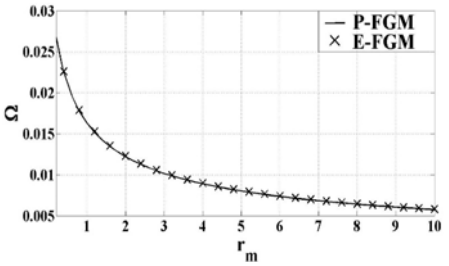
شکل ۵ تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت طول به ضخامت در یک ورق مدرج توانی



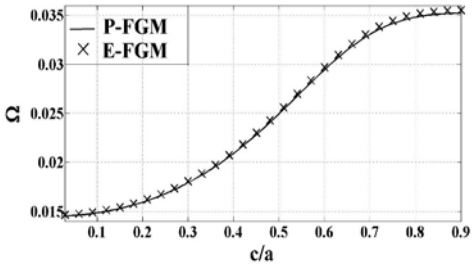
شکل ٦ تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت طول به عرض در یک ورق مدرج توانی

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق با افزایش نسبت جرم (r_m) برای یک ورق مربعی مدرج (در دو حالت مدرج توانی به‌ازای $p = ۱$ و مدرج نمایی) به‌ازای $a/h = ۱۰$ در شکل (۷) نشان داده شده است. در این حالت جرم گستردهٔ موضعی در وسط ورق و با ابعاد $c/a = d/b = ۰.٤$ فرض شده است. در این حالت با افزایش نسبت جرم به‌دلیل افزایش انرژی جنبشی ناشی از جرم، افزایش انرژی جنبشی کل فرکانس کاهش می‌یابد که این کاهش بدیهی و مطابق انتظار است. با توجه به نمودارهای نشان داده شده در این شکل، فرکانس‌های ورق مدرج توانی اندکی بالاتر

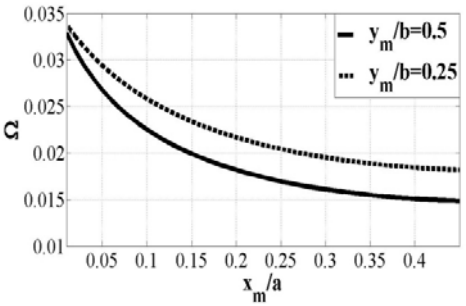
از فرکانس‌های ورق مدرج نمایی است. لذا ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی دارد.



شکل ۷ تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت جرم برای یک ورق مدرج مربعی



شکل ۸ تغییرات فرکانس بی‌بعد با افزایش سطح اثر جرم برای یک ورق مدرج مربعی



شکل ۹ تغییرات فرکانس بی‌بعد با تغییرمکان جرم برای یک ورق مدرج توانی

در شکل (۸) اثر افزایش سطح جرم روی فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی مدرج (در سه حالت مدرج توانی و سیگموید به‌ازای $p=1$ و مدرج نمایی) به‌ازای $a/h=10$ نشان داده شده است. در این حالت جرم به‌صورت مربعی ($c=d$) و در میانهٔ ورق قرار دارد و مقدار جرم نیز نصف جرم ورق است. با توجه به شکل با افزایش سطح جرم فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق افزایش می‌یابد. از آن‌جا که بیشترین میزان خیز ورق در نظر گرفته‌شده در وسط آن است هر چه سطح اثر جرم افزایش یابد انرژی جنبشی در سطح بیشتری که خیز کمتری دارد انتگرال‌گیری می‌شود و لذا مقدار آن کاهش می‌یابد. بنابراین کاملاً مشخص است که این کاهش باعث افزایش فرکانس می‌شود. در این حالت نیز مقدار فرکانس برای ورق مدرج توانی بیشتر از ورق مدرج نمایی است.

شکل (۹) اثر موقعیت جرم گستردهٔ موضعی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مدرج توانی ($p=1$) مربعی را نشان می‌دهد. در این حالت موقعیت جرم گستردهٔ موضعی روی خط وسط ورق ($y_m/b=0.5$) و روی خط یک چهارم بالایی و یا پایینی آن ($y_m/b=0.25$) در حال تغییر است و نسبت جرم ۰.۵ و ابعاد آن $c/a=d/b=0.1$ فرض شده است. با توجه به شکل هرچه جرم به وسط ورق نزدیک‌تر شود به‌دلیل افزایش انرژی جنبشی، فرکانس کاهش می‌یابد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاش آزاد یک ورق مدرج مستطیلی تحت اثر جرم گستردهٔ موضعی بررسی شده است. ورق به سه حالت مدرج توانی، سیگموید و یا نمایی در نظر گرفته می‌شود. تکیه‌گاه ورق ساده در نظر گرفته شده و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم به‌دست آمده است. فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه شده است و اثر پارامترهای مختلفی مانند ابعاد ورق، نسبت جرم و سطح اثر و موقعیت جرم گستردهٔ موضعی روی آنها بررسی شده است. با تحلیل نتایج مشخص شد که با افزایش نسبت طول به ضخامت و نسبت جرم، فرکانس بی‌بعد ورق کاهش و با افزایش نسبت طول به عرض و سطح اثر جرم، فرکانس افزایش می‌یابد. از طرفی هر

چه جرم به میانهٔ ورق نزدیک‌تر شود، فرکانس کاهش می‌یابد. هم‌چنین ورق مدرج سیگموید صلبیت بیشتری از خود نشان می‌دهد که باعث افزایش فرکانس‌های آن می‌شود. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه‌شدهٔ قبلی در حالت‌های مشابه نیز نشان داده شده است که نتایج حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

مراجع

1. Stavsky, Y., "On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli", *Topics App. Mech., New York: American Elsevier*, pp. 105, (1965).
2. Bert, C. W. and Chen, T.L.C., "Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 14, pp. 465-473, (1978).
3. Reddy, J.N., "Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method", *J. Sound Vib.*, Vol. 66(4), pp. 565-576, (1979).
4. Reddy, J.N. and Khdeir, A.A., "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories", *America. Inst. Aeronaut. Astornaut. J.*, Vol. 27(12), pp. 1808-1817, (1989).
5. Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates*", Second Edition, New York: CRC Press. (1997).
6. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N., "Free vibration of laminated composite plates using second-order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, Vol. 71, pp. 617-626, (1999).
7. Singh, B.N., Yadav, D. and Iyengar, N.G.R., "Natural frequencies of composite plates with random material properties using higher-order shear deformation theory", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 43, pp. 2193-2214, (2001).
8. Kant, T. and Swaminathan, K., "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory", *Compos. Struct.*, Vol. 53, pp. 73-85, (2001).
9. Rastgaar, A., Mahinfalah, M. and Nakhaie Jazar, G., "Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, Vol. 72, pp. 273-279, (2006).
10. Kompaz, O. and Telli, S., "Free vibration of a rectangular plate carrying distributed mass", *J. Sound Vib.*, Vol. 251(1), pp. 39-57, (2002).
11. Wong, W.O., "The effects of distributed mass loading on plate vibration behavior", *J. Sound Vib.*, Vol. 252(3), pp. 577-583, (2002).
12. Alibeigloo, A., Shakeri, M. and Kari, M.R., "Free vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third-order shear deformation theory", *Ocean Eng.*, Vol. 35, pp. 183–190, (2008).
13. Chi, S.H. and Chung, Y.L., "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: analysis", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 43, pp. 3657-3674, (2006).
14. Vel, S.S. and Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J. Sound Vib.*, Vol. 272, pp. 703-730, (2004).
15. Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M., "Static and dynamic deformations of thick functionally

graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", *Compos., Part B*, Vol. 35, pp. 685–697, (2004).

16. Zenkour, A.M., "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 42, pp. 5243–5258, (2005).
17. Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F. and Jorge, R.M.N., "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Compos. Struct.*, Vol. 75, pp. 593–600, (2006).
18. Hosseini, Sh., Hashemi, H., Rokni Damavandi, T., Akhavan, H. and Omidi, M., "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", *Appl. Math. Model.*, Vol. 34, pp. 1276–1291, (2010).
19. Talha, M. and Singh, B.N., "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.*, Vol. 34, pp. 3991–4011, (2010).
20. Efraim, E., "Accurate formula for determination of natural frequencies of FGM plates basing on frequencies of isotropic plates", *Proce. Eng.*, Vol. 10, pp. 242–247, (2011).
21. Uymaz, B., Aydogdu, M. and Filiz, S., "Vibration analyses of FGM plates with in-plane material in-homogeneity by Ritz method", *Compos. Struct.*, Vol. 94, pp. 1398–1405, (2012).
22. Dogan, V., "Nonlinear vibration of FGM plates under random excitation", *Compos. Struct.*, Vol. 95, pp. 366–374, (2013).

پیوست الف)

مراحل به‌دست آوردن معادلات حرکت با استفاده از اصل هامیلتون:

۱- ابتدا صورت کلی اصل همیلتون (رابطهٔ ٤۰ مقاله) نوشته می‌شود:

$$0=\delta\int_0^T (U-T)\,dt \;\Rightarrow\; 0=\int_0^T (\delta U-\delta T)\,dt$$

۲- سپس معادلات انرژی کرنشی (رابطهٔ ۲۸) و جنبشی ورق جایگذاری می‌شود:

$$\delta U=\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}+2\sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz})dxdydz$$

$$\delta T=\delta T_p+\delta T_m$$

۳- سپس کرنش‌ها در معالات فوق جای‌گذاری می‌شود (روابط ۱۸):

$$\delta U=\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}[\sigma_{xx}(\delta\varepsilon^0{}_{xx}+z\delta\varepsilon^1{}_{xx}-c_1z^3\delta\varepsilon^3{}_{xx})+\sigma_{yy}(\delta\varepsilon^0{}_{yy}+z\delta\varepsilon^1{}_{yy}-c_1z^3\delta\varepsilon^3{}_{yy})$$
$$+\sigma_{xy}(\delta\varepsilon^0{}_{xy}+z\delta\varepsilon^1{}_{xy}-c_1z^3\delta\varepsilon^3{}_{xy})+\sigma_{xz}(\delta\varepsilon^0{}_{xz}+z^2\delta\varepsilon^2{}_{xz})+\sigma_{yz}(\delta\varepsilon^0{}_{yz}+z^2\delta\varepsilon^2{}_{yz})]dxdydz$$

$$\delta T_P=\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}\rho_0[(\dot u_0+z\dot\phi_x-c_1z^3\dot\varphi_x)(\delta\dot u_0+z\delta\dot\phi_x-c_1z^3\delta\dot\varphi_x)+$$
$$(\dot v_0+z\dot\phi_y-c_1z^3\dot\varphi_y)(\delta\dot v_0+z\delta\dot\phi_y-c_1z^3\delta\dot\varphi_y)+\dot w_0\delta\dot w_0]\,dxdydz$$

$$\delta T_m=\int_{x_m-c/2}^{x_m+c/2}\int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2}\gamma_0[(\dot u_0+z\dot\phi_x-c_1z^3\dot\varphi_x)(\delta\dot u_0+z\delta\dot\phi_x-c_1z^3\delta\dot\varphi_x)$$
$$(\dot v_0+z\dot\phi_y-c_1z^3\dot\varphi_y)(\delta\dot v_0+z\delta\dot\phi_y-c_1z^3\delta\dot\varphi_y)+\dot w_0\delta\dot w_0]\,dxdy$$

٤- با قرار دادن روابط فوق در رابطه کلی اصل همیلتون در مرحلهٔ بعد انتگرال‌گیری فقط روی محور z انجام می‌شود و تنش‌ها برحسب منتجه‌های تنش (روابط ۲۱) نوشته می‌شوند.

۵- سپس با قرار دادن کرنش‌ها برحسب جابه‌جایی‌ها (روابط ۲۲ و ۲۳) کل عبارت برحسب جابه‌جایی نوشته می‌شود.

٦- در مرحله بعد معادلات بر حسب جابه‌جایی‌های مجازی (δu_0، δv_0، δw_0، $\delta\phi_x$ و $\delta\phi_y$) به‌صورت پنج معادلهٔ مرتب شده و معادلات حرکت استخراج می‌شود. در این مرحله از هر یک از جابه‌جایی‌های مجازی (δu_0، δv_0، δw_0، $\delta\phi_x$ و $\delta\phi_y$) فاکتورگیری می‌شود و عبارتی که ضریب هر یک از جابه‌جایی‌های مجازی است یک معادلهٔ حرکت است.

۷- در معادلات حرکت به‌دست آمده منتجه‌های تنش را می‌توان با استفاده از روابط (۲۲ و ۲۳) برحسب کرنش‌ها و در نهایت برحسب جابه‌جایی نوشت.

پیوست ب)

درایه‌های ماتریس سختی و جرم برای ماده با فرم PFGM به فرم زیر است:

$$c_1=4/(3h^2)$$
$$c_2=4/h^2$$
$$x_1=x_m-c/2$$

$$y_1 = y_m - d/2$$
$$const_1 = [\sin(\alpha a)(1-\cos(\beta b))]/\alpha\beta$$
$$const_2 = [\sin(\beta b)(1-\cos(\alpha a))]/\alpha\beta$$
$$const_3 = [1-\cos(\alpha a)][1-\cos(\beta b)]/\alpha\beta$$
$$const_4 = \sin(\alpha a)\sin(\beta b)/\alpha\beta$$
$$const_5 = \gamma_m[\cos(\beta(y_1+d))-\cos(\beta(y_1-d))][\sin(\alpha(x_1+c))-\sin(\alpha(x_1-c))]/\alpha\beta$$
$$const_6 = \gamma_m[\sin(\beta(y_1+d))-\sin(\beta(y_1-d))][\cos(\alpha(x_1+c))-\cos(\alpha(x_1-c))]/\alpha\beta$$
$$const_5 = \gamma_m[\cos(\beta(y_1+d))-\cos(\beta(y_1-d))][\cos(\alpha(x_1+c))-\cos(\alpha(x_1-c))]/\alpha\beta$$
$$k_{11} = -const_1(A_1\alpha^2 + A_3\beta^2)$$
$$k_{12} = -const_1(A_2 + A_3)\alpha\beta$$
$$k_{13} = -const_1(E_1'\alpha^2 + E_2'\beta^2 + 2E_3'\beta^2)c_1\alpha$$
$$k_{14} = -const_1(-B_1\alpha^2 + c_1E_1'\alpha^2 - B_3\beta^2 + c_1E_3'\beta^2)$$
$$k_{15} = -const_1(-B^2 + c_1E_2' - B_3 + c_1E_3')\alpha\beta$$
$$k_{21} = -const_2(A_2 + A_3)\alpha\beta$$
$$k_{22} = -const_2(A_1\beta^2 + A_3\alpha^2)$$
$$k_{23} = -const_2(E_2'\alpha^2 + E_1'\beta^2 + 2E_3'\alpha^2)c_1\beta$$
$$k_{24} = -const_2(-B^2 + c_1E_2' - B_3 + c_1E_3')\alpha\beta$$
$$k_{25} = -const_2(-B_1\beta^2 + c_1E_1'\beta^2 - B_3\alpha^2 + c_1E_3'\alpha^2)$$
$$k_{31} = const_3(-E_1'\alpha^2 - E_2'\beta^2 - 2E_3'\beta^2)c_1\alpha$$
$$k_{32} = const_3(-E_2'\alpha^2 - E_1'\beta^2 - 2E_3'\alpha^2)c_1\beta$$
$$k_{33} = const_3(H_1c_1{}^2\alpha^4 + 2c_1{}^2H_2\alpha^2\beta^2 + c_1{}^2H_1\beta^4 + 4c_1{}^2H_3\alpha^2\beta^2 + A_3\alpha^2 - 2D_3c_2\alpha^2$$
$$+ c_2{}^2F_3\alpha^2 + A_3\beta^2 - 2c_2D_3\beta^2 + c_2{}^2F_3\beta^2)$$
$$k_{34} = const_3(-c_1F_1\alpha^3 + H_1c_1{}^2\alpha^3 - c_1F_2\alpha\beta^2 + c_1{}^2H_2\alpha\beta^2 - 2c_1F_3\alpha\beta^2 + 2c_1{}^2H_3\alpha\beta^2$$
$$+ A_3\alpha - 2c_2D_3\alpha + c_2{}^2F_3\alpha)$$
$$k_{35} = const_3(-c_1F_2\alpha^2\beta + c_1{}^2H_2\alpha^2\beta - c_1F_1\beta^3 + c_1{}^2H_1\beta^3 - 2c_1F_3\alpha^2\beta + 2c_1{}^2H_3\alpha^2\beta$$
$$+ A_3\beta - 2c_2D_3\beta + c_2{}^2F_3\beta)$$
$$k_{41} = const_1(B_1\alpha^2 - c_1E_1'\alpha^2 + B_3\beta^2 - c_1E_3'\beta^2)$$
$$k_{42} = const_1(B_2 - c_1E_2' + B_3 - c_1E_3')\alpha\beta$$
$$k_{43} = const_1(-c_1F_1\alpha^3 + H_1c_1{}^2\alpha^3 - c_1F_2\alpha\beta^2 + c_1{}^2H_2\alpha\beta^2 - 2c_1F_3\alpha\beta^2 + 2c_1{}^2H_3\alpha\beta^2$$
$$+ A_3\alpha - 2c_2D_3\alpha + c_2{}^2F_3\alpha)$$
$$k_{44} = const_1(D_1\alpha^2 - 2c_1F_1\alpha^2 + c_1{}^2H_1\alpha^2 + D_3\beta^2 - 2c_1F_3\beta^2 + c_1{}^2H_3\beta^2 + A_3 - 2c_2D_3 + c_2{}^2F_3)$$
$$k_{45} = const_1(D_2 - 2c_1F_2 + c_1{}^2H_2 - 2c_1F_3 + c_1{}^2H_3 + D_3)\alpha\beta$$
$$k_{51} = const_2(B_2 - c_1E_2' + B_3 - c_1E_3')\alpha\beta$$
$$k_{52} = const_2(B_1\beta^2 - c_1E_1'\beta^2 + B_3\alpha^2 - c_1E_3'\alpha^2)$$

$$k_{53} = const_2(-c_1F_2\alpha^2\beta + c_1{}^2H_2\alpha^2\beta - c_1F_1\beta^3 + c_1{}^2H_1\beta^3 - 2c_1F_3\alpha^2\beta + 2c_1{}^2H_3\alpha^2\beta + A_3\beta - 2c_2D_3\beta + c_2{}^2F_3\beta)$$

$$k_{54} = const_2(D_2 - 2c_1F_2 + c_1{}^2H_2 - 2c_1F_3 + c_1{}^2H_3 + D_3)\alpha\beta$$

$$k_{55} = const_2(D_1\beta^2 - 2c_1F_1\beta^2 + c_1{}^2H_1\beta^2 + D_3\alpha^2 - 2c_1F_3\alpha^2 + c_1{}^2H_3\beta^2 + A_3 - 2c_2D_3 + c_2{}^2F_3)$$

$$s_{11} = const_1\, I_0 - const_5$$

$$s_{12} = 0$$

$$s_{13} = const_1(-I_3c_1\alpha) + const_5[-(h^3/8)c_1\alpha]$$

$$s_{14} = const_1(I_1 - I_3c_1) + const_5[-(h^3/8)c_1 + h/2]$$

$$s_{15} = 0$$

$$s_{21} = 0$$

$$s_{22} = const_2\, I_0 - const_6$$

$$s_{23} = const_2(-I_3c_1\beta) + const_6[-(h^3/8)c_1\beta]$$

$$s_{24} = 0$$

$$s_{25} = const_2(I_1 - I_3c_1) + const_5[-(h^3/8)c_1 + h/2]$$

$$s_{31} = const_3(-I_3c_1\alpha) + const_7[(h^3/8)c_1\alpha]$$

$$s_{32} = const_3(-I_3c_1\beta) + const_7[(h^3/8)c_1\beta]$$

$$s_{33} = const_3(I_6c_1{}^2\alpha^2 + I_6c_1{}^2\beta^2 + I_0) + const_7[(h^6/32)c_1{}^2(\alpha^2+\beta^2) + 1]$$

$$s_{34} = const_3(-I_4c_1 + I_6c_1{}^2)\alpha + const_7[-(h^4/16)c_1\alpha + (h^6/32)c_1{}^2\alpha]$$

$$s_{35} = const_3(-I_4c_1 + I_6c_1{}^2)\beta + const_7[-(h^4/16)c_1\beta + (h^6/32)c_1{}^2\beta]$$

$$s_{41} = const_1(I_1 - I_3c_1) + const_5[(h/2) - (h^3/8)c_1]$$

$$s_{42} = 0$$

$$s_{43} = const_1(-I_4c_1 + I_6c_1{}^2)\alpha + const_5[-(h^4/16)c_1\alpha - (h^6/32)c_1{}^2\alpha]$$

$$s_{44} = const_1(I_2 - 2I_4c_1 + I_6c_1{}^2) + const_5[-(h^2/4) + 2(h^4/16)c_1 - (h^6/32)c_1{}^2]$$

$$s_{45} = 0$$

$$s_{51} = 0$$

$$s_{52} = const_2(I_1 - I_3c_1) + const_6[(h/2) - (h^3/8)c_1]$$

$$s_{53} = const_2(-I_4c_1 + I_6c_1{}^2)\beta + const_6[(h^4/16)c_1\beta - (h^6/32)c_1{}^2\beta]$$

$$s_{54} = 0$$

$$s_{55} = const_2(I_2 - 2I_4c_1 + I_6c_1{}^2) + const_6[-(h^2/4) + 2(h^4/16)c_1 - (h^6/32)c_1{}^2]$$

بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر ناحیه از تحلیل ایزوژئومتریک*

احمد گنجعلی[۱] بهروز حسنی[۲]

چکیده *اولین روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک، بر پایهٔ استفاده از خاصیت نقاط فوق‌همگرای گوسی بوده است. در این مقاله به بررسی روش برآورد خطای دیگری مبتنی بر ارضای معادلات تعادل در حل دو مثال الاستیسیته و هم‌چنین تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در کارایی این برآوردکنندهٔ خطا پرداخته می‌شود. در این روش با استفاده از ارضای معادلات تعادل در هر ناحیه از فضای محاسباتی تحلیل ایزوژئومتریک یک سطح تنش بهبود یافته به‌دست می‌آید که نشان داده خواهد شد این سطح تنش نسبت به سطح تنش ایزوژئومتریک و سطح تنش بهبود یافته مبتنی بر نقاط فوق‌همگرا دارای دقت بیشتری خواهد بود. برای بررسی کارایی این برآورد کنندهٔ خطا به مدل‌سازی و تحلیل دو مسألهٔ الاستیسیته دارای حل تحلیلی و مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از این روش با روش مبتنی بر نقاط فوق‌همگرا و نتایج دقیق پرداخته شده است. نتایج نشان‌دهندهٔ کارایی بهتر این روش نسبت به روش بازیافت تنش بر پایهٔ استفاده از خاصیت نقاط فوق‌همگرا است و بر این اساس می‌توان از این روش نیز به‌عنوان یک روش ساده و مؤثر دیگر برای بازیافت تنش و برآورد خطا در روش ایزوژئومتریک نام برد.*

واژه‌های کلیدی تحلیل ایزوژئومتریک، برآورد خطا، بازیافت تنش، معادلات تعادل.

Improvement of Stress and Error Estimation by Patch Equilibrium in Isogeometric Analysis

A. Ganjali B. Hassani

Abstract A method for error estimation of isogeometric analysis of plane stress problems, based on stress recovery by using the super convergent properties of the Gauss points, was introduced. In this paper, a different approach for improvement of stresses based on the satisfaction of equilibrium equations by taking into consideration of two elasticity problems is followed and the effect of the number of the Gauss quadrature points is studied. In this approach, the equilibrium equations are satisfied for each patch of the isogeometric analysis model and it has been shown that the recovered stresses are more accurate than the previous method where the super-convergent properties were used. To demonstrate the performance and efficiency of the method a couple of elasticity problems are considered and the obtained results are compared with the previous method and exact solutions. The results indicate that the suggested method can be employed for error estimation and stress recovery in the isogeometrical analysis method.

Key Words Isogeometric Analysis, Error Estimation, Stress Recovery, Equilibrium Equations.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۱/٤/۱۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/٤/۸ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شاهرود، شاهرود، ایران. ahmad.ganjali@yahoo.com

(۲) استاد، گروه مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم یکی از مهم‌ترین مسائلی است که همواره در زمینه‌های علوم و مهندسی مورد بحث قرار داشته است. در حالت کلی این معادلات پیچیدگی‌های بسیار زیادی دارند و تنها با استفاده از روش‌های عددی قابل حل می‌باشند. در دهه‌های اخیر با توسعهٔ روش‌های مختلف عددی مواجه بوده‌ایم که از جمله مهم‌ترین آنها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود به‌عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و توسعه یافته است. این روش در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹٦۰ شکل گرفت و امروزه با کاهش عیوب و ادغام آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی را مرتفع ساخته است. اما، علی‌رغم این پیشرفت قابل ملاحظه هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آن‌را کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائلی با هندسهٔ پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائلی با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره نمود.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود، بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، به‌دلیل توسعهٔ رایانه‌ها پیشرفت‌های چشم‌گیری در علم مدل‌سازی هندسه به‌کمک رایانه (Computer Aided Design) شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص آن نماید. اما به‌دلیل عدم هم‌زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش‌های طراحی به‌کمک رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به‌کمک رایانه به‌وجود نیامد.

از اولین تلاش‌هایی که برای ورود تکنیک‌های طراحی به‌کمک رایانه در تحلیل مهندسی صورت پذیرفت در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰٤ و توسط کیگان و همکاران [1,2] و هولیگ و همکاران [3] انجام شد که در آن به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایهٔ اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز (بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت) (Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)) که از توسعهٔ توابع اسپلاین به‌دست می‌آیند توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت [4]. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایهٔ اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آنها برای درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتریک در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل ملاحظه در اقناع شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظهٔ اندازهٔ دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرایب آنها خود تابعی متغییر می‌باشند اشاره کرد [5]. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریک به‌سرعت در زمینه‌های مختلفی هم‌چون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. هم‌چنین در این زمینه کتابی به چاپ رسیده است که برای مطالعهٔ بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [6].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به‌شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققان در قابلیت

اعتماد نتایج بوده است. استفاده از روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریک (Stress Recovery in Isogeometric analysis(SRI)) اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [1]. اساس روش SRI، مشابه روش SPR در اجزای محدود، برگرفته از خاصیت فوق هم‌گرایی تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط فوق هم‌گرای گوسی برای هر مؤلفهٔ تنش، یک سطح بهبود یافته تشکیل می‌شود که برای برآورد خطای ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد [5]. بعد از آن توسط همان محققان، یک روش بر پایهٔ ارضای معادلات تعادل معرفی شد که باعث برآورد بهتری از خطا در داخل و نواحی مرزی دامنهٔ تحلیل ایزوژئومتریک شد و کارایی آن در برآورد خطای سه مسألهٔ الاستیسیته مورد ارزیابی قرار گرفت [۷]. در این پژوهش ضمن بررسی عملکرد این روش در برآورد خطای دو مسألهٔ نمونه با شرایط انحنا در مرزهای هندسی، به بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در کارایی این برآوردکنندهٔ خطا پرداخته شده است.

تیر طرهٔ دایره‌ای شکل و صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. به‌منظور بررسی تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی نیز، نسبت نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی کل دامنه (شاخص تأثیر) با چهار، نه، شانزده، بیست و پنج و سی و شش نقطهٔ گوسی برای دو مثال حل شده در این پژوهش و سه مثال مرجع [۷] مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده از دو مثال حل شده در این پژوهش نیز نشان می‌دهد که برآورد خطا با استفاده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا، با دقت بهتری صورت می‌پذیرد.

برآورد خطا در اجزای محدود

به‌منظور آشنایی با برخی از روش‌های تخمین خطای تحلیل‌های عددی در این بخش به معرفی تعدادی از این روش‌ها در برآورد خطای تحلیل اجزای محدود پرداخته می‌شود.

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شده است، مقاله‌های ریچاردسون می‌باشد که در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است. روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود، معمولاً به اندازهٔ مش‌های مورد استفاده بستگی دارد [8]. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا و رینبولت آغاز شد [9, 10]. روش آنها که روش باقیمانده‌ای نام گرفت بر این اساس بود که با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادلهٔ دیفرانسیل اولیه و محاسبهٔ ماندهٔ آن و نیز محاسبهٔ پرش میدان گرادیان در لبهٔ المان‌ها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به‌دست می‌آید [9]. دستهٔ دیگر از روش‌های برآورد خطا، روش‌های بازیافت تنش می‌باشد که طبق تحقیقاتی که بابوشکا در سال۱۹۹٤ توسط آزمون وصلهٔ خود انجام داد، پی برده شد که این روش‌ها در مقایسه با روش‌های باقیمانده‌ای از دقت و هم‌گرایی بهتری برخوردار می‌باشند [11]. به‌طور کلی بازیافت تنش روشی به‌منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به‌دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دل‌خواه روی دامنه محاسبه شده است که دقت بالاتری نسبت به حل اولیهٔ اجزای محدود داشته است. به‌طور کلی این میدان تنش بهبود یافته، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = N\overline{\sigma}^* \qquad (۱)$$

که در آن $\overline{\sigma}^*$ مقادیر گرهی این میدان و N توابع شکل مورد استفاده در المان‌ها است. با استفاده از این

میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e^*_\sigma = \sigma^* - \sigma_h \qquad (۲)$$

که در رابطهٔ بالا σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد. روش‌های متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از جمله ابتدایی ترین آنها می‌توان به روش میانگین گیری که توسط هینتن و کمپبل [12] در سال ۱۹۷٤ و روش تصویر L_2 که توسط اودن و براچلی [13] در سال ۱۹۷۱ به‌کار برده شده است اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم‌گرا SPR توسط زینکویچ و زو [14] ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد. امروزه این روش به‌عنوان یکی از بهترین و مؤثرترین روش‌ها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به‌کار می‌رود. اساس این روش برمبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق هم‌گرا است که در آنها تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این روش با برازش یک میدان به‌صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المان‌های متصل به هر گره (ناحیه)، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. این میدان به‌صورت زیر فرض می‌گردد:

$$\sigma^*_p = Pa \qquad (۳)$$

در رابطهٔ فوق σ^*_p، تنش بهبود یافته، P مجموعهٔ تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و **a** مقادیر ثابت مجهول هستند. با کمینه کردن تابع (٤) مقادیر مجهول مطابق رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید [14].

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma^*_p(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_h(x_i, y_i) - p(x_i, y_i)a)^2 \qquad (٤)$$

$$a = A^{-1}b \qquad (۵)$$

در رابطهٔ (۵)، A و b به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i, y_i)P(x_i, y_i) \qquad (٦)$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i, y_i)\sigma_h(x_i, y_i) \qquad (۷)$$

در این روابط، σ_h تنش به‌دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق هم‌گرا یا نقاط بهینهٔ تنش در هر ناحیه و n تعداد المان‌های موجود در هر ناحیه است.

بعد از آن نیز تکنیک‌های بسیار دیگری توسط محققین ابداع شد که در هر یک به‌نوعی به بهبود روش SPR پرداخته می‌شود. بدین منظور استفاده از قید معادلات تعادل برای بهبود کارایی روش SPR دنبال شد [15-21]. با توجه به عدم ارضای معادلات تعادل توسط تنش بازیافتی به‌دست آمده از روش SPR به‌ویژه در نزدیک مرزها، در این روش‌ها با استفاده از قید معادلات تعادل سعی بر بهبود کارایی برآورد کنندهٔ خطا شده است.

فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک

به‌طور کلی در روش ایزوژئومتریک، مقدار مجهول مسأله در حالت دوبعدی، (به‌طور مثال مؤلفهٔ تغییرمکان جهت x) به‌عنوان یک سطح نربز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان کنندهٔ مقدار مجهول مسأله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح، اگر نقاط کنترلی را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که مؤلفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط، (P_x, P_y)، بتوانند هندسه مسأله را در صفحهٔ xy برآورد کنند، در این صورت مؤلفهٔ سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درون‌یابی بین این نقاط به‌وسیلهٔ توابع پایه‌ای نربز نشان

دهندهٔ تغییرمکان آن نقطه باشد. در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحهٔ xy نشان‌دهندهٔ هندسهٔ مسأله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحهٔ xy نشان‌دهندهٔ تغییرمکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییرمکان در جهت x و y را به‌ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییرمکان هر نقطه در داخل زیردامنهٔ نربز (ناحیه) را به‌صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون‌یابی کرد.

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{u\,i,j} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{v\,i,j} \end{Bmatrix} \qquad (۸)$$

در رابطهٔ بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ها نمایشگر بردار مؤلفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ای نربز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت‌های x و y می‌باشند.

با توجه به رابطهٔ (۸) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای تعیین سطح تغییرمکان در جهت x و y، بردار P می‌باشد. محدودیتی که بردار مؤلفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز را مشخص می‌کند، ارضای معادلهٔ دیفرانسیل تعادل در فضای تأثیر هر المان نربز تحلیل ایزوژئومتریک است؛ که در نهایت منجر به تشکیل معادلهٔ (۹) می‌شود.

$$\mathbf{K}\mathbf{P} = \mathbf{F} \qquad (۹)$$

که در آن K ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)، P مجهولات مسأله (مختصهٔ سوم نقاط کنترلی) و F نیروهای خارجی وارد بر دامنه می‌باشند. حال با گسسته‌سازی دامنه، K و F به‌ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با رابطهٔ (۱۰) ساخته می‌شوند.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{D}\mathbf{B})\,d\Omega \;; \\ \mathbf{F}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{R}^T\mathbf{b}\,d\Omega + \int_{\Gamma_{t_e}} \mathbf{R}^T\mathbf{t}\,d\Gamma \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

و در نهایت با حل معادلهٔ (۹) و مشخص شدن بردار P می‌توان مؤلفه‌های کرنش و تنش را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{P} \;;\; \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۱۱)$$

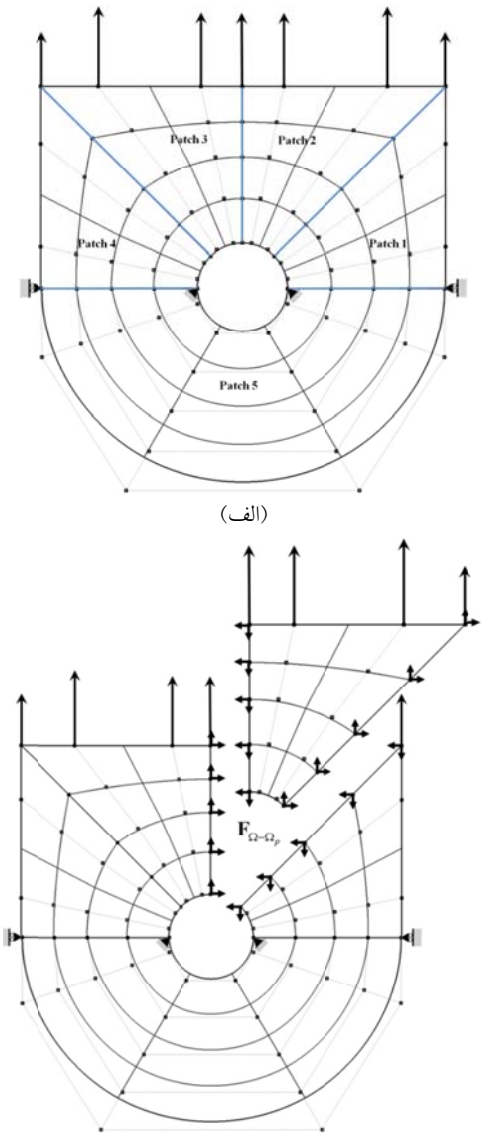
تشریح روش بازیافت تنش با استفاده از قید معادلات تعادل

به‌طور کلی در این روش، مشابه روش‌هایی که به‌منظور بهبود میدان تنش اجزای محدود در مراجع [18, 21] ارائه شده است، با معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک ناحیه از فضای محاسباتی به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و میدان تنش بازیافتی، می‌توان برای هر مؤلفه تنش به یک سطح تنش بهبود یافته دست یافت.

همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، رابطه‌سازی تحلیل ایزوژئومتریک و نحوهٔ به‌دست آمدن سطح جابه‌جایی به‌گونه‌ای است که با ارضای معادلهٔ تعادل در فضای تأثیر هر یک از المان‌های تحلیل ایزوژئومتریک، تعادل در کل دامنهٔ مدل‌سازی شده برقرار می‌شود. در صورت وجود تعادل در کل دامنه، هر ناحیهٔ نربز از دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک نیز در شرایط تعادل قرار دارد. به این ترتیب می‌توان فرم ضعیف معادلهٔ دیفرانسیل تعادل را برای یک ناحیهٔ مجزا از کل دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک، به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{P})\,d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{R}^T\mathbf{b}\,d\Omega \\ &\qquad - \int_{\Gamma_t^p} \mathbf{R}^T\mathbf{t}\,d\Gamma + \mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p} = 0 \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در آن $F_{\Omega-\Omega_p}$، مطابق شکل (۱)، نیروهای عمل و عکس‌العمل بین ناحیهٔ جدا شده و کل دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد.



(الف)

(ب)

شکل ۱ مدل‌سازی یک مسألهٔ دوبعدی در روش ایزوژئومتریک. الف) شبکهٔ نقاط کنترلی، شبکهٔ المان‌ها و شرایط مرزی دامنهٔ مدل‌سازی شده با پنج ناحیه، ب) ناحیهٔ جدا شده و نیروهای وارد بر آن

در صورتی که مطابق رابطهٔ (۱۳)، F_Ω را به‌عنوان نیروهای حجمی و سطحی وارد بر ناحیهٔ جدا شده از کل دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک فرض کنیم، رابطهٔ (۱۲) را می‌توان به‌صورت رابطهٔ (۱٤) بیان نمود.

$$F_\Omega = \int_{\Omega_p} R^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma_t^p} R^T t \, d\Gamma \qquad (۱۳)$$

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP) \, d\Omega = F_\Omega - F_{\Omega-\Omega_p} \qquad (۱٤)$$

حال در صورتی که $f = F_\Omega - F_{\Omega-\Omega_p}$ را به‌عنوان کل نیروهای وارد شده بر ناحیهٔ جدا شده در نظر بگیریم و معلوم فرض کنیم، می‌توان ناحیه جدا شده را به‌عنوان یک سیستم مجزا در نظر گرفت و معادلهٔ دیفرانسیل تعادل را به فرم زیر برای آن بیان نمود.

$$\int_{\Omega_p} B^T (\sigma) \, d\Omega = f = F_\Omega - F_{\Omega-\Omega_p} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ میدان تنش دقیق حاکم بر مسأله می‌باشد. با مقایسهٔ روابط (۱۵ و ۱٤) می‌توان رابطهٔ (۱٦) را نتیجه گرفت.

$$\int_{\Omega_p} B^T (\sigma) \, d\Omega = \int_{\Omega_p} B^T (DBP) \, d\Omega \qquad (۱٦)$$

رابطهٔ (۱٦) محدودیتی است که به‌طور مستقیم بر میدان تنش دقیق حاکم بر مسأله وارد می‌شود. حال میدان تنش حاکم بر مسأله را، همانند سطوح مفروض برای جابه‌جایی، به‌صورت سطوح نربز با مختصهٔ سوم مجهول نقاط کنترلی فرض می‌کنیم. بردار مختصات سوم نقاط کنترلی با استفاده از محدودیت معادلهٔ (۱٦) به‌دست خواهد آمد. واضح است که این سطوح تنش بازیافتی نسبت به سطوح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک دارای دقت بیشتری خواهند بود. زیرا همان‌طور که در معادلهٔ (۱٦) مشاهده می‌شود، این سطوح تنش بازیافتی با انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست می‌آید و مرتبهٔ آن نسبت به سطوح تنش به‌دست آمده

از تحلیل ایزوژئومتریک که از مشتق‌گیری میدان جابه‌جایی محاسبه می‌شود، بالاتر است.

با توجه به دقیق‌تر بودن سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می‌توان از آن به‌عنوان یک تخمین کنندهٔ بالقوهٔ خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک استفاده نمود. روش کار این تخمین کنندهٔ خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، به‌صورت تقریبی به معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

در ادامه به‌منظور بررسی کارایی این تخمین کنندهٔ خطا، به مقایسهٔ نرم خطای انرژی تقریبی به‌دست آمده از این روش و روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا و نرم خطای انرژی دقیق برای دو مسألهٔ نمونهٔ الاستیسیته پرداخته شده است.

نرم خطای انرژی

استفاده از معیارهایی مختلف برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به‌صورت زیر بیان می‌شود [22]:

$$\|\mathrm{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \overline{\sigma})^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{-1} (\sigma - \overline{\sigma})\, \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۷)$$

در این رابطه σ مقدار دقیق بردار تنش، $\overline{\sigma}$ تنش به‌دست آمده از حل تقریبی، D ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به این‌که در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسأله در دسترس نمی‌باشد، لذا به‌جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافتهٔ آن برای محاسبهٔ نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این‌صورت نرم خطای انرژی تقریبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathrm{e}\| = \|\overline{\mathrm{e}}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^{*} - \overline{\sigma})^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{-1} (\sigma^{*} - \overline{\sigma})\, \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۸)$$

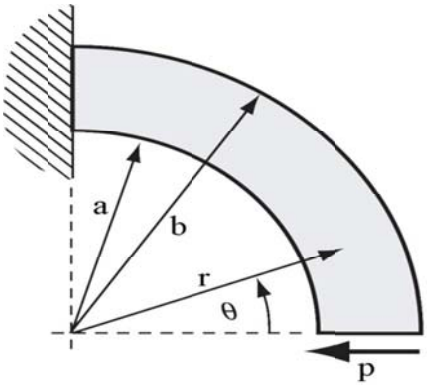
که در اینجا σ^{*} تنش بازیافتی و $\overline{\sigma}$ تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

تیر طرهٔ دایره‌ای شکل

در این بخش به مدل‌سازی یک تیر طرهٔ دایره‌ای شکل الاستیک در شرایط تنش مستوی، توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۲). پارامترهای به‌کار برده شده در مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a = 8 \;,\; b = 10 \;,\; P = 100 \;,\; E = 2\times 10^{5} \;,\; \nu = 0.3$$

تنش‌های دقیق این مسأله در دستگاه مختصات قطبی با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (٤) به‌صورت روابط (۲۱-۱۹) در نظر گرفته شده است [23].



شکل ۲ تیر طرهٔ دایره‌ای شکل

$$\sigma_r = \frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\sin\theta \qquad (۱۹)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N}(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\sin\theta \qquad (۲۰)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\cos\theta \qquad (۲۱)$$

در روابط بالا N به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\log(\frac{b}{a})$$

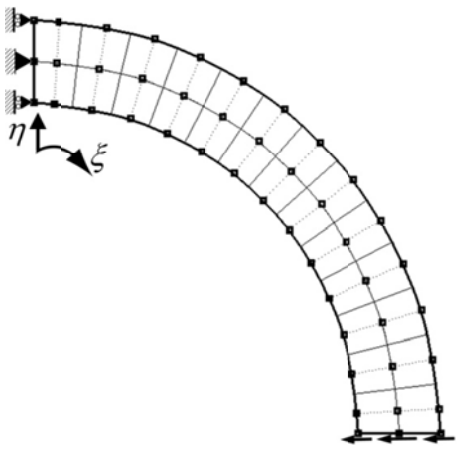
برای مدل‌سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و ٤٥ نقطهٔ کنترلی استفاده شده است. هم‌چنین در جهت ξ و η به‌ترتیب از توابع شکل نربز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$\xi = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0.08,0.15,0.23,0.31,0.38,0.46, \\ 0.54,0.61,0.69,0.77,0.850.92,1,1,1 \end{Bmatrix},$$
$$\eta = \{0,0,0.5,1,1\}$$

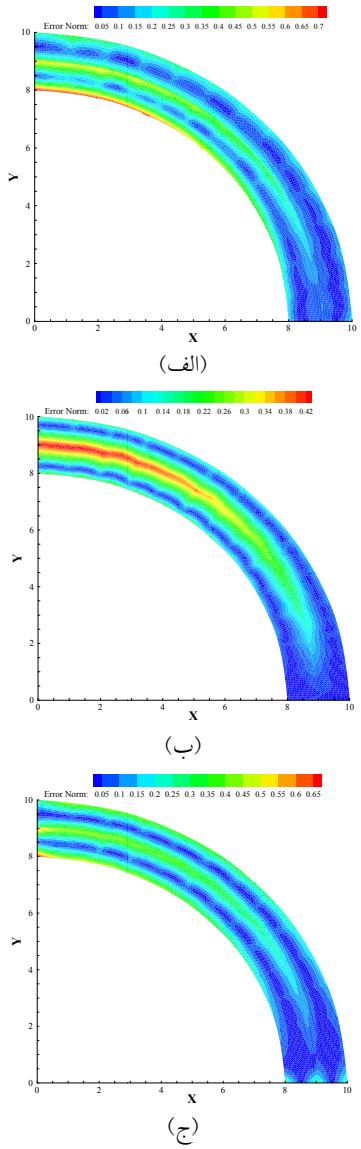
به‌منظور انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینهٔ تنش نیز شانزده نقطهٔ گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

در شکل (۳) آرایش المان‌ها و شبکه نقاط کنترلی به‌همراه شرایط مرزی اعمال شده در مدل‌سازی تیر طرهٔ دایره‌ای نمایش داده شده است. در شکل (٤) نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی به‌دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش (روش جدید) و روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا (روش قدیمی) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوهٔ تغییرات نرم خطای تقریبی به‌دست آمده از روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیک است که نشان‌دهندهٔ کارایی بهتر تخمین کنندهٔ خطای پیشنهادی نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا است. هم‌چنین شاخص تأثیر به‌دست آمده از روش جدید ۰/۷۵ و از روش قدیمی ۰/۵۹ می‌باشد. که این افزایش در شاخص تأثیر نیز نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد. شاخص تأثیر نسبت مجموع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد که نشانگر میزان هم‌گرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا به‌شمار می‌رود. هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به سمت یک میل نماید [22].

به‌عنوان نمونه در شکل (۵) و در مسیر x=۰/۰٤، نحوهٔ تغییرات تنش σ_y و τ_{xy} به‌دست آمده از حل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوهٔ تغییرات تنش به‌دست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا، دقیق‌تر است که نشان دهندهٔ کارایی مطلوب روش ارائه شده در این پژوهش در تشکل سطح تنش بهبود یافته می‌باشد.



شکل ۳ شبکهٔ نقاط کنترلی، شبکهٔ المان‌ها و شرایط مرزی مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک تیر طرهٔ دایره‌ای

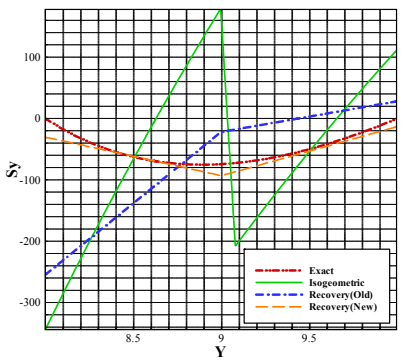


(الف)

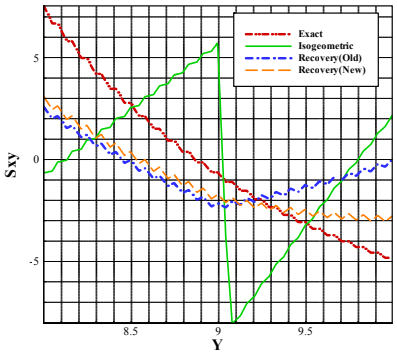
(ب)

(ج)

شکل ٤ نحوهٔ توزیع ترم خطای انرژی نیر طرهٔ دایره‌ای. الف) نرم خطای انرژی دقیق، ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)، ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

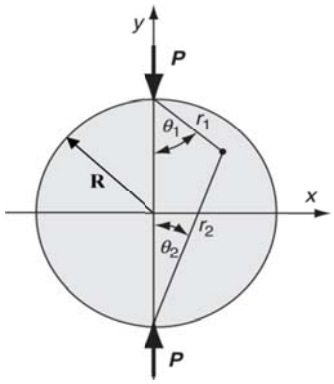


(الف)



(ب)

شکل ٥ نمودار تغییرات تنش تیر طرهٔ دایره‌ای در مسیر X=۰/۰٤ .
الف) نمودار تغییرات مؤلفهٔ تنش σ_y ب) نمودار تغییرات مؤلفهٔ تنش τ_{xy}



شکل ٦ صفحهٔ دایره‌ای تحت نیروی فشاری متمرکز

صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

در این مثال به بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا، در برآورد خطای به‌دست آمده از تحلیل مسألهٔ دارای یک نقطهٔ تکین با روش ایزوژئومتریک می‌پردازیم. معمولاً مسائل با نقطه تکین، به‌علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی برای بررسی کارایی تخمین کننده‌های خطا به‌شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال، با توجه به این‌که زیر بار متمرکز به‌عنوان یک نقطهٔ تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا در تعیین میزان نرم خطای انرژی زیر بار متمرکز و توزیع خطا در دیگر نقاط دامنه، مؤثر خواهد بود.

در شکل (٦) مشخصات صفحهٔ دایره‌ای شکل

تحت بار متمرکز قطری مشاهده می‌شود. پارامترهای به‌کار گرفته شده برای تحلیل این مسأله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$R=2\ ,\ P=100\ ,\ E=10000\ ,\ \nu=0.3$$

تنش‌های دقیق این مسأله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (٦) به‌صورت روابط (٢٤-٢٢) می‌باشد [23].

$$\sigma_x=-\frac{2P}{\pi}\left[\frac{(R-y)x^2}{r_1^4}+\frac{(R+y)x^2}{r_2^4}-\frac{1}{2R}\right] \qquad (٢٢)$$

$$\sigma_y=-\frac{2P}{\pi}\left[\frac{(R-y)^3}{r_1^4}+\frac{(R+y)^3}{r_2^4}-\frac{1}{2R}\right] \qquad (٢٣)$$

$$\tau_{xy}=\frac{2P}{\pi}\left[\frac{(R-y)^2x}{r_1^4}-\frac{(R+y)^2x}{r_2^4}\right] \qquad (٢٤)$$

در روابط بالا r_1 و r_2 به‌صورت زیر می‌باشند.

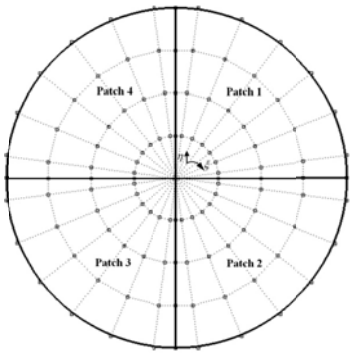
$$r_1=\sqrt{x^2+(R-y)^2}\ ,\ r_2=\sqrt{x^2+(R+y)^2}$$

برای مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به روش ایزوژئومتریک از ١٤٠ نقطهٔ کنترلی و چهار ناحیهٔ مشابه به شکل ربع‌دایره استفاده شده است (شکل ٧).

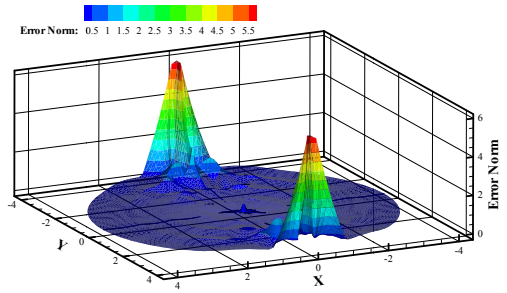
در جهت ξ و η هر ناحیه، به‌ترتیب از توابع شکل نربز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$\xi=\{0,0,0,0.17,0.33,0.5,0.67,0.83,1,1,1\},$$
$$\eta=\{0,0,0.25,0.5,0.75,1,1\}$$

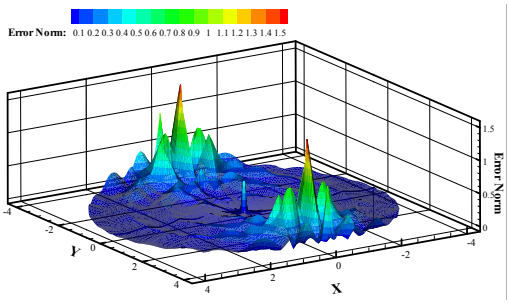
به‌منظور انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینهٔ تنش نیز شانزده نقطهٔ گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.



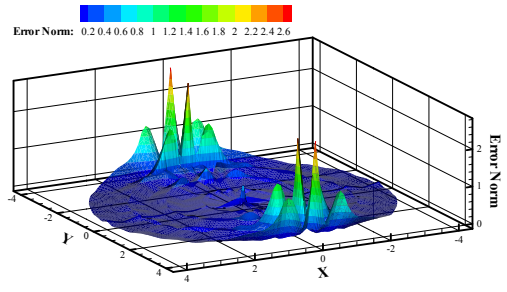
شکل ٧ شبکهٔ نقاط کنترلی در مدل‌سازی صفحهٔ دایره‌ای



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ٨ نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) نرم خطای انرژی دقیق، ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)، ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید).

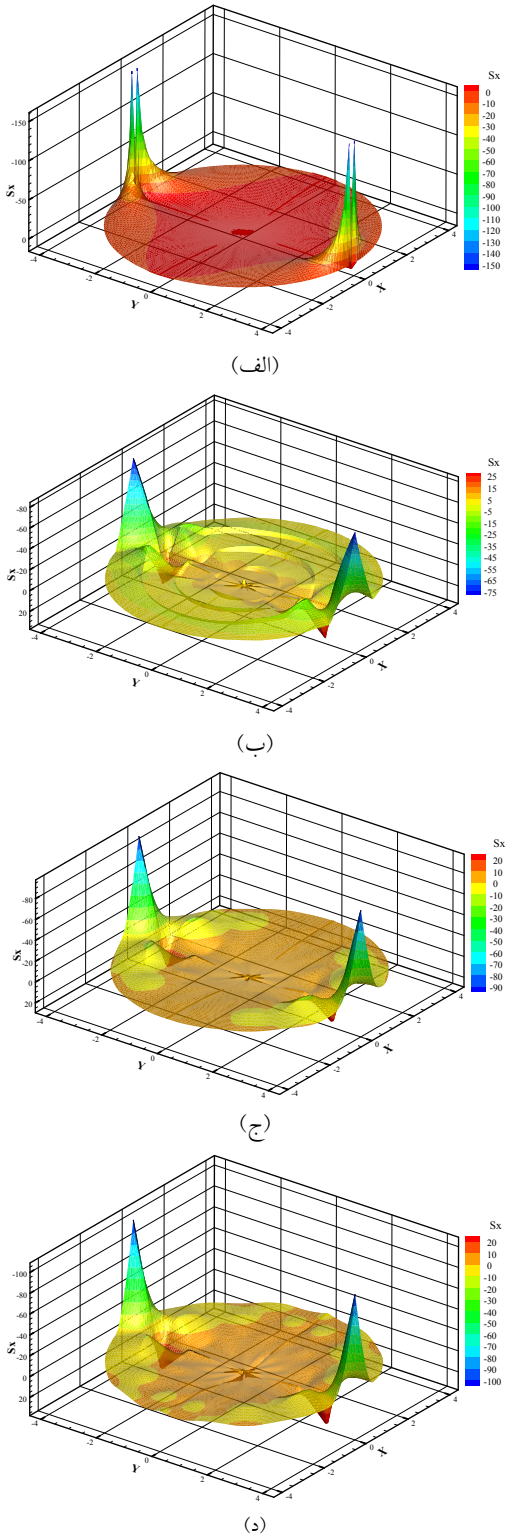
در شکل (۸) نتایج به‌دست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی تحلیل صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش تخمین خطای جدید کارایی بهتری نسب به روش قدیمی در برآورد نرم خطا در زیر بار متمرکز و توزیع نرم خطای کل دامنه دارد.

در این مثال نیز شاخص تأثیر تخمین کنندهٔ خطا از مقدار ۰/٤٥ برای روش قدیمی به مقدار ۰/٥۲ در روش جدید افزایش داشته است. که این افزایش شاخص تأثیر نیز نشان دهندهٔ کارایی بهتر روش جدید نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا خواهد بود.

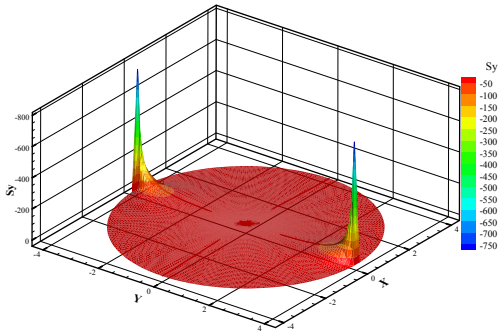
در شکل‌های (۱۱-۹) به مقایسهٔ نحوهٔ توزیع مؤلفه‌ای تنش به‌دست آمده از تحلیل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و تنش‌های بازیافتی به‌دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش و روش قدیمی مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y، روش جدید نسبت به روش قدیمی از توزیع تنش مناسب‌تری برخوردار می‌باشد. در مورد توزیع تنش مؤلفه τ_{xy}، هر دو روش توزیع مشابهی دارند اما همان‌طور که مشاهده می‌شود نسبت به توزیع تنش ایزوژئومتریک دقیق‌تر می‌باشند.

بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی برآورد کنندهٔ خطا

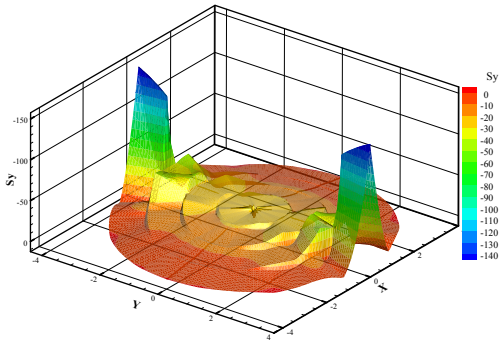
در این بخش به بررسی اثر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی برآورد کنندهٔ خطا بر مبنای ارضای معادلات تعادل در روش ایزوژئومتریک برای دو مثال ارائه شده در این پژوهش و سه مثالی که در مرجع [7] ذکر شده است، پرداخته می‌شود. بدین منظور دامنهٔ حل مسأله با پنج المان نربز با نقاط انتگرال‌گیری مختلف تحلیل شده و شاخص تأثیر برآوردکننده خطا در هر بخش مورد مقایسه قرار گرفته است. در شکل (۱۲) پنج المان نربز با چهار، نه، شانزده، بیست‌و پنج و سی و شش نقطهٔ گوسی نشان داده شده است. نتایج حاصل از این بررسی در جدول (۱) نشان داده شده است.



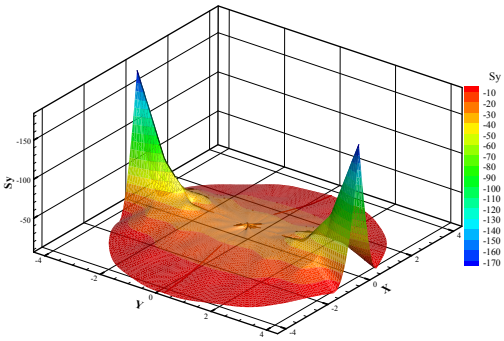
شکل ۹ نحوه توزیع تنش σ_x صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژئومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



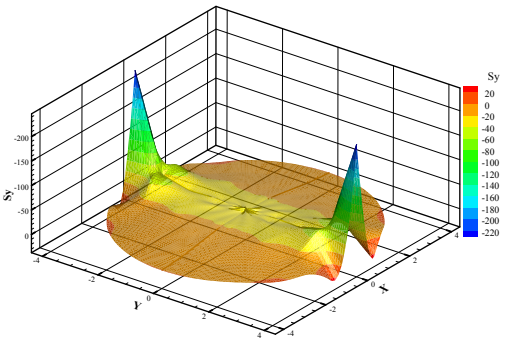
(الف)



(ب)

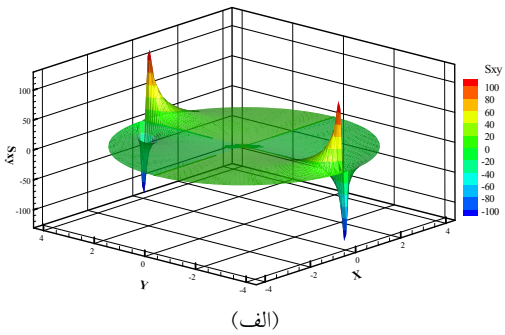


(ج)

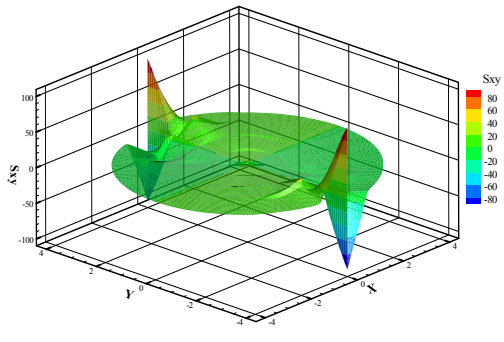


(د)

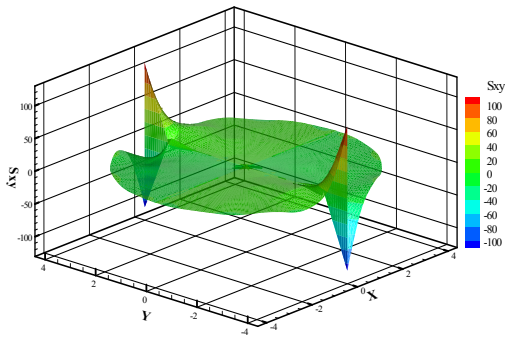
شکل ۱۰ نحوهٔ توزیع تنش σ_y صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژئومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



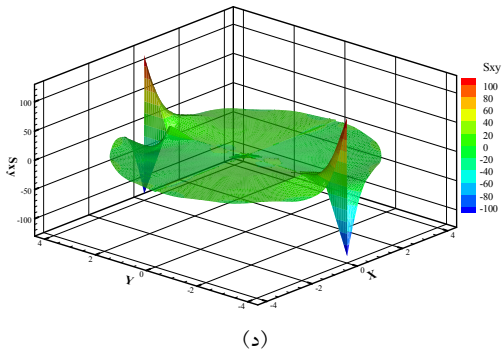
(الف)



(ب)

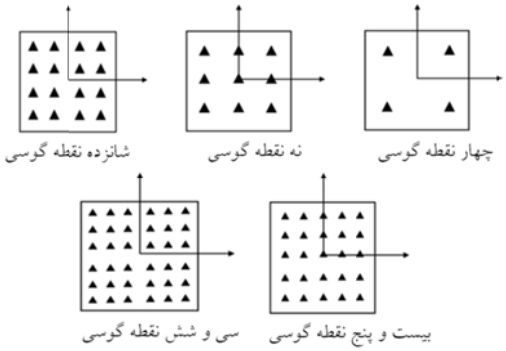


(ج)



(د)

شکل ۱۱ نحوهٔ توزیع تنش τ_{xy} صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژئومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



شکل ۱۲ المان‌های نربز با تعداد نقاط گوسی مختلف در فضای پارامتری

جدول ۱ مقادیر شاخص تأثیر برآوردکنندهٔ خطا برای نقاط گوسی مختلف

تعداد نقاط انتگرال‌گیری به روش گوس	مسائل نمونه				
	تیر طره دایره‌ای شکل $\begin{cases}\xi=2\\ \eta=1\end{cases}$ مرتبه توابع شکل	صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری $\begin{cases}\xi=2\\ \eta=1\end{cases}$ مرتبه توابع شکل	تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده $\begin{cases}\xi=1\\ \eta=1\end{cases}$ مرتبه توابع شکل	تیر طره تیموشنکو $\begin{cases}\xi=1\\ \eta=1\end{cases}$ مرتبه توابع شکل	صفحه ترکدار تحت کشش $\begin{cases}\xi=1\\ \eta=1\end{cases}$ مرتبه توابع شکل
چهار	۰/۷٦	۰/۷۲	۰/۸۹	۰/۹۵	۰/۱۷۷
نه	۰/۷۰	۰/۵۲	۰/۷۸	۰/۸۵	۰/۱۷۵
شانزده	۰/۷۵	۰/۵۲	۰/۸۵	۰/۹۳	۰/۱۸۱
بیست و پنج	۰/۷۲	۰/۵۰	۰/۸۱	۰/۸۸	۰/۱۸۲
سی و شش	۰/۷٤	۰/۵۱	۰/۸۵	۰/۹۲	۰/۱۸٤

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از نتایج جدول (۱) استنباط می‌شود این است که تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی این برآورد کنندهٔ خطا بسیار ناچیز است و مقدار شاخص تأثیر برای تمام نقاط گوسی تقریباً با هم برابر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای تیر طرهٔ دایره‌شکل و صفحهٔ دایره‌ای شکل تحت بار فشاری که دارای توابع پایهٔ نربز با مرتبهٔ یکسانی می‌باشند تعداد نقاط گوسی مختلفی بیشترین شاخص تأثیر برآورد کنندهٔ خطا را تولید کرده است. این ویژگی برای سه مثال دیگر نیز مشاهده می‌شود. بر این اساس نیز می‌توان بیان نمود که مرتبهٔ توابع شکل مورد استفاده در تحلیل مسائل مختلف در این پژوهش با تعداد نقاط گوسی بهینه که منجر به بالاترین شاخص تأثیر و در نتیجه افزایش کارایی برآورد کنندهٔ خطا می‌شوند، ارتباطی نخواهد داشت.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی کارایی روش برآورد خطا مبتنی بر ارضای معادلات تعادل به‌منظور بهبود میدان تنش و برآورد خطای دو مثال نمونه در تحلیل ایزوژئومتریک و هم‌چنین تأثیر تعداد نقاط گوسی مختلف بر کارایی آن پرداخته شد. این برآورد کنندهٔ خطا، دومین روش از روش‌های مبتنی بر بازیافت تنش در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک و بر پایهٔ ارضای معادلات تعادل در هر ناحیه می‌باشد. ویژگی بارز این روش عدم نیاز به نقاط فوق هم‌گرا و استفاده

یکسان از توابع شکل نربز در تخمین جابه‌جایی و سطح تنش بهبود یافته است. با توجه به توزیع دقیق‌تر نرم خطای تقریبی حاصل از این روش و نرم خطای تقریبی به‌دست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا در دو مسألهٔ حل شده در این پژوهش، هم‌چنین افزایش شاخص تأثیر و نمایش بهتری از مؤلفه‌های تنش بهبود یافتهٔ به‌دست آمده از این روش، می‌توان بیان نمود که روش برآورد خطا مبتنی بر ارضای معادلات تعادل در این دو مثال نمونه نیز از کارایی بهتری نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا برخوردار است و می‌توان از آن به‌عنوان یک راه حل ساده و مهندسی دیگر برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک نام برد. هم‌چنین نتایج نشان داد که تعداد مختلف نقاط انتگرال‌گیری به روش گوس تأثیر زیادی بر کارایی این برآوردکنندهٔ خطا نداشته و تقریباً در تمام موارد شاخص تأثیرهای یکسانی را به‌دست می‌دهد.

مراجع

1. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, pp. 435-458, (1998).
2. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, pp. 1145-1175, (2003).
3. Hollig, K., Reif, U. and Wipper, J., "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 39, pp. 442-462, (2001).
4. Hughes, T.G.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135–4195, (2005).
5. Hassani, B., Ganjali, A. and Tavakkoli, M., "An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery", *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 31, pp. 101-109, (2012).
6. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA", John Wiley & Sons, (2009).

۷. حسنی، بهروز، گنجعلی، احمد، «استفاده از نیروهای وارد بر وصله‌های تحلیل ایزوژئومتریک جهت محاسبهٔ تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطا»، مجلهٔ مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دورهٔ ۲، شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۲۹-۱۳، (۱۳۹۱).

8. Richardson, L.F., "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, *Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 210, pp. 307–357, (1910).
9. Babuska, I. and Rheinboldt, C., "A-posteriori error estimates for the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 1597–1615, (1978).
10. Babuska, I. and Rheinboldt, C., "Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17–18, pp. 519–540, (1979).
11. Babuska, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C.S. and Gangaraj, S.K., "A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patchwise uniform

grids of triangles", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, pp. 307–378, (1994).

12. Hinton, E. and Campbell, J., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 461-480, (1974).
13. Oden, T.J. and Brauchli, J., "On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 317-325, (1971).
14. Zienkiewicz, O.C., Zhu, Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, (1992).
15. Wiberg, N-E., Abdulwahab, F., "Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2703–2724, (1993).
16. Wiberg, N-E., Abdulwahab, F. and Ziukas, S., "Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3417–3440, (1994).
17. Blacker, T. and Belytschko, T., "Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolation enhancements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 517–536 (1994).
18. Boroomand, B. and Zienkiewicz, O.C., "Recovery by equilibrium in patchs (REP)", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 137-164, (1997).
19. LO, S.H. and LEE, C.K., "On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 43, 1223-1252, (1998).
20. Rodenas, J.J., Tur, M., Fuenmayor, F.J. and Vercher, A., "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, pp. 705–727, (2007).
21. Payen, D.J. and Bathe, K.J., "The use of nodal point forces to improve element stresses", *Computers and Structures*, Vol. 89, pp. 485–495, (2011).
22. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu., J.Z., "*The Finite Element Method*", 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).
23. Sadd, M.H., "ELASTICITY:Theory, *Applications, and Numerics*", Elsevier Butterworth–Heinemann, (2005).

مطالعهٔ اثر ریزساختار و اندازهٔ دانهٔ فولاد AISI1045 بر میزان سخت‌شدگی سطح طی فرآیند سنگ‌زنی عمیق با راندمان بالا*

حمیدرضا فضلی شهری[۱] علی اکبر اکبری[۲]

چکیده *هدف این مطالعه بررسی تأثیر ریزساختار فولاد و اندازهٔ دانه بر میزان سخت‌شدگی سطحی پس از فرآیند سنگ‌زنی عمیق با راندمان بالا است. نمونه‌هایی با ریزساختارها و اندازهٔ دانه‌های مختلف طی عملیات حرارتی خاص آماده‌سازی و عملیات سنگ‌زنی با شرایط ثابتی روی آنها انجام شده است. پس از اتمام فرآیند، سختی سطح قطعات اندازه‌گیری شد و پس از مقایسه با مقادیر سختی اولیه مشاهده شد که میزان سخت‌شدگی سطحی به ریزساختار مواد و سختی اولیه آنها وابسته است. با افزایش سختی اولیه در نمونه‌ها تا یک حد بحرانی، میزان سخت‌شدگی سطحی طی فرآیند سنگ‌زنی افزایش می‌یابد. اما با افزایش سختی اولیهٔ نمونه‌ها و گذر از حد بحرانی مذکور، میزان سخت‌شدگی سطحی کاهش می‌یابد. هم‌چنین مشاهده گردید اندازهٔ دانهٔ ریزساختار با سختی سطح نمونه پس از فرآیند سنگ‌زنی رابطهٔ قابل ملاحظه‌ای دارد. هر چه اندازهٔ دانهٔ ریزساختار کوچک‌تر باشد میزان سخت‌شدگی بیشتری مشاهده می‌گردد. این روند به‌طور مشابه برای نمونه‌های نورد شده نیز مشاهده گردید، به‌طوری که سنگ‌زنی در راستای دانه‌های کشیده شده، سخت‌شدگی نسبتاً بیشتری را نسبت به سنگ‌زنی در راستای عمود بر جهت دانه‌های نورد شده پدید می‌آورد.*

واژه‌های کلیدی سنگ‌زنی عمیق با راندمان بالا، سخت‌شدگی سطحی، ریزسختی، ریزساختار، دمای سطح قطعه‌کار، زبری سطح.

Study of Microstructure and Grain Size Effect on Superficial Hardening of AISI1045 within High Efficiency Deep Grinding

H.R. Fazli Shahri A.A. Akbari

Abstract *This work outlines the influence of microstructure and grain size on surface hardening within high efficiency deep grinding (HEDG). To do this, different samples with various microstructure and grain size are prepared through specific heat treatments, then they are undergone the grinding operation with constant operating conditions. Finally, the variations of microhardness are recorded. It is observed that by increasing the primary hardness of material the surface hardening amount is increased. But this trend is not observed for super hard material and instead, hardening percent is decreased after a critical primary hardness. This hardening amount is more than for fine grain materials in comparison with coarse grain materials. The rolled samples show the same manner like non-rolled samples. It is found that grinding in direction of elongated grains, resultes in increasing superficial hardening in comparison with that of grinding is perpendicular to elongated grains.*

Key Words High Efficiency Deep Grinding, Superficial Hardening, Microhardness, Microstructure, Surface Temperature, Surface Roughness.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۱/۲٦ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/٤/۸ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. akbari@um.ac.ir

مقدمه

از روش‌های متداول ماشین‌کاری که مستقیماً روی زبری سطح قطعات مؤثر است روش سنگ‌زنی است. تحقیقات گذشته در زمینهٔ بررسی تأثیر پارامترهای برشی روی میزان سخت‌شدگی سطحی (از جمله مطالعات Zurita و همکاران [1]) نشان می‌دهد که این روش می‌تواند منجر به سخت‌شدگی سطحی گردد. سختی سطح پس از عملیات سنگ‌زنی به‌طور مستقیم متأثر از پارامترهای برشی هم‌چون سرعت سنگ، سرعت قطعه‌کار، عمق برشی و بار عرضی است [1, 2]. تغییرات سختی و خواص مکانیکی ناشی از فرآیند سنگ‌زنی نیز مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است [3]. ریزسختی (که در عمق مقطعی از قطعه‌کار اندازه‌گیری شده است) تغییرات قابل توجهی در سختی مواد نشان می‌دهد که آن هم ناشی از حرارت شدید و خنک‌کاری شدید سطح و به‌وجود آمدن تنش پسماند در مواد است [4]. تحقیقات دیگر [5,6] نشان می‌دهند که سخت‌شدگی سطح و تنش‌های پسماند اساساً به یکی از دلایل زیر ایجاد می‌شوند:

– تغییر فاز مارتنزیتی در نواحی نزدیک به سطح.
– سیلان پلاستیکی مواد روی سطح و مجاور آن که خود ناشی از تنش‌های حرارتی حاصل از گرمای تولید شده در حین فرآیند است.
– تغییرشکل پلاستیکی ناشی از نیروهای برشی دانه‌های ساینده در سطح قطعه‌کار.

تغییرشکل پلاستیکی نزدیک سطح مربوط به پارامترهای سنگ‌زنی است. از جمله اندازهٔ دانهٔ ساینده، سرعت قطعه‌کار، عمق و خواص ماده [3]. فرآیند سنگ‌زنی سبب ایجاد تغییرات در خواص مکانیکی سطح قطعه‌کار می‌شود. معمولی‌ترین تغییرات، استحالهٔ فازی، ایجاد تنش پسماند و تغییرشکل پلاستیکی است که هر یک خواص قطعه‌کار را تغییر می‌دهند. اما در کنار این موضوع ریزساختار و اندازهٔ دانهٔ مادهٔ مورد استفاده نیز فاکتورهایی کلیدی است که باید مورد بررسی قرار گیرد. در واقع مطالعهٔ اثر ریزساختار روی سخت‌شدگی سطحی از دید متالورژیکی موضوعی است که کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. از این‌رو این مقاله به تفصیل تأثیر ریزساختارهای مختلف با اندازهٔ دانه‌های متفاوت و هم‌چنین تأثیر جهت‌بندی دانه‌های کشیده شده در نمونه‌های نورد شده را روی میزان سخت‌شدگی سطحی فولاد در فرآیند سنگ‌زنی بررسی می‌کند. در بین روش‌های سنگ‌زنی، سنگ‌زنی عمیق با راندمان بالا HEDG (High Efficiency Deep Grinding) به‌دلیل بالا بودن کمیت پارامترهای برشی بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. جنس قطعهٔ مورد آزمایش AISI1045 انتخاب شده است. این فولاد کاربرد زیادی در صنایع هوافضا و خودروسازی دارد و از قابلیت عملیات حرارتی خوبی برخوردار است [7]. مشخصات این فولاد در جدول (۱) آمده است.

جدول ۱ ترکیب شیمیایی و خواص مکانیکی فولاد AISI1045 [7]

خواص فیزیکی و مکانیکی	مقدار	عنصر	درصد وزنی
هدایت حرارتی	۵۰/۹ W/(m*K)	C	۰/۵-۰/۴۳
ظرفیت گرمایی ویژه	۴۸۶ J/(kg*K)	Si	۰/۲۵
ضریب انبساط حرارتی	$۱۵/۱*۱۰^{-۶}C^{-۱}$	Mn	۰/۹۰-۰/۶۰
چگالی	$۷/۸۷۲*۱۰^{۳}kg/m^{۳}$	Fe	۹۸/۹۸-۹۸/۵۱
استحکام کششی	۵۸۵MPa	P	۰/۰۴ (max)
تنش تسلیم	۵۰۵MPa	S	۰/۰۵ (max)
مدول الاستیسیته	۲۰۱GPa	Cr	۰/۲ (max)

تعداد ۲۴ نمونه تحت عملیات حرارتی مختلف قرار می‌گیرد تا ریزساختارهای موردنظر با اندازهٔ دانه‌های متفاوت به‌دست آید. جدول (۲) عملیات حرارتی مختلفی را نشان می‌دهد که هر کدام از آنها در سه شرایط دمایی مختلف تهیه گردیده است تا سه اندازهٔ دانهٔ متمایز حاصل گردد. تعداد ۲۴ نمونهٔ دیگر نیز به همین ترتیب آماده شده‌اند اما با این تفاوت که

قبل از این‌که تحت سنگ‌زنی قرار گیرند، نورد می‌شوند. عملیات سنگ‌زنی روی نمونه‌های نورد شده در دو جهت عمود بر راستای دانه‌های کشیده و موازی با آن انجام گرفته است. پس از آن که عملیات سنگ‌زنی روی کل نمونه‌ها به پایان رسید، میزان سختی سطح قطعات اندازه‌گیری می‌شود و با مقادیر سختی قبل از انجام فرآیند سنگ‌زنی مقایسه می‌گردد. در این پژوهش سختی به‌دست آمده ناشی از عملیات حرارتی سخت‌کاری، مورد نظر نیست و صرفاً اثر عملیات سنگ‌زنی عمیق روی سختی سطح نمونه‌ها هدف اصلی است.

از آن‌جا که می‌بایست تغییرات ریزساختاری قطعات مطالعه گردد بنابراین دانستن میزان نیرو و دمای سطحی مربوط به هر نمونه در هر آزمایش ضروری است. نکته‌ای که باید طی آزمایش مورد توجه قرار گیرد تحت کنترل بودن پرداخت سطح و خواص سطحی نمونه‌ها حین انجام آزمایش است. چرا که ممکن است ضمن رسیدن به یک سطح با سختی خوب، تغییرات قابل ملاحظه‌ای در ریزساختار و صافی سطح آن ایجاد شود. از این‌رو میزان زبری سطح هر نمونه نیز اندازه‌گیری شده است. هم‌چنین باید توجه داشت که آیا ریزساختار نمونه‌ها در حین رسیدن به هدف اصلی که سختی سطح در نمونه‌ها است دستخوش تغییرات اساسی و قابل ملاحظه ناشی از حرارت خواهد شد یا خیر. بنابراین به اقتضای مطالعه روی تغییرات ریزساختاری قطعات، دانستن میزان نیرو و دمای سطحی مربوط به هر نمونه حین آزمایش‌ها ضروری است. این مقادیر با وسایل اندازه‌گیری مخصوص ثبت شده است. به‌طور خلاصه هدف این مطالعه شناسایی ریزساختار با زبری سطح و اندازهٔ دانهٔ مناسب است تا سختی سطحی که پس از سنگ‌زنی محصول به‌دست می‌آید در حد قابل قبول و مطلوبی باشد. روشن است که وجود سطحی صاف و زبری کم در محصولات، عمر خستگی آنها را بهبود می‌دهد و قابلیت کار آنها را در محیط‌های دینامیکی و خورندهٔ شیمیایی فراهم می‌سازد.

روند آزمایش‌ها

آماده‌سازی نمونه‌ها و عملیات حرارتی. کار با تهیهٔ قطعات فولادی AISI1045 در ابعاد mm^3 (طول)٤٠×(عرض)۳۰×(ضخامت)۱۰ آغاز شد. پس از برش نمونه‌ها در ابعاد موردنظر، عملیات‌حرارتی خاص روی هر نمونه انجام شد. از آن‌جایی که اساس آزمایش‌ها روی سه سطح اندازهٔ دانه (دانه ریز – دانه متوسط – دانه درشت) پایه‌ریزی شده است، بنابراین می‌بایست هر ریزساختار با سه شرایط دمایی متفاوت تهیه گردد. همان‌طور که در جدول (۲) ملاحظه می‌شود کوره‌ها در سه سطح مختلف دمایی تنظیم شده است. در کنار هر یک از نمونه‌ها، نمونه‌های مشابه دیگری با همان روش عملیات حرارتی آماده شدند و تحت عملیات نورد قرار گرفتند. نمونه‌های ′۱ تا ′۲٤ نیز به‌طور مشابه آماده شدند و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفتند. درصد کاهش ضخامت کلیهٔ نمونه‌ها (نسبت به ضخامت اولیهٔ ۱۲/۵ میلی‌متر) در عملیات نورد یکسان و برابر ۲۰ درصد در نظر گرفته شده که در نهایت به همان مقدار تعریف شده برای سایر نمونه‌ها یعنی ۱۰ میلی‌متر رسیده‌اند. مسئله‌ای که می‌بایست مورد توجه قرار گیرد این است که عدد اندازهٔ دانه در این پژوهش اندازه‌گیری نشده است و مشابه مطالعهٔ انجام شده توسط شای و همکاران [8] تنها سه سطح ریز، متوسط و درشت برای دانه‌ها در نظر گرفته شده است تا اثر هر یک بر روی پارامترهایی هم‌چون سختی، نیرو، دمای سطح و زبری مورد مطالعه قرار گیرد. تفاوت اندازهٔ دانه‌ها و کشیدگی آنها به روش متالوگرافی آشکار شده است. تصاویر موجود در شکل ۳، تفاوت بین اندازهٔ دانه‌ها را نشان می‌دهد. هم‌چنین شای و همکاران [8] کشیدگی و راستای دانه‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند که در این پژوهش نیز در مورد نمونه‌های نورد شده مورد مطالعه قرار

گرفته است.

– نمونه‌های ۱، ۲ و ۳ دارای ساختاری با سمنتیت‌های کروی هستند. این نمونه‌ها ابتدا مارتنزیتی شده و سپس تحت عملیات کروی‌سازی (Spheroidizing) قرار گرفته‌اند. بدین صورت که ساختارهای مارتنزیتی تا دمای ۷۸۰ درجهٔ سانتی‌گراد بالا می‌روند و برای مدت زمان‌های مشخص در کوره‌ها قرار می‌گیرند. نمونه‌های ´۱، ´۲ و ´۳ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

جدول ۲ مشخصات عملیات‌حرارتی نمونه‌های آزمایش شده

دما (T±10°C)	زمان نگهداری (دقیقه : ساعت)	عملیات حرارتی	شماره قطعه
۷۸۰	٤٤:۰۰	کروی سازی (۱)	۱
۷۸۰	۳٤:۰۰	کروی سازی (۲)	۲
۷۸۰	۲٤:۰۰	کروی سازی (۳)	۳
۸۵۰	۱:٤۰´	آنیل در کوره (۱)	٤
۹۵۰	۱:٤۰´	آنیل در کوره (۲)	٥
۱۰۵۰	۱:٤۰´	آنیل در کوره (۳)	٦
۸۵۰	۱:٤۰´	نرمال در هوای آزاد (۱)	۷
۹۵۰	۱:٤۰´	نرمال در هوای آزاد (۲)	۸
۱۰۵۰	۱:٤۰´	نرمال در هوای آزاد (۳)	۹
۸۵۰	۱:٤۰´	نرمال در هوای فشرده®(۱)	۱۰
۹۵۰	۱:٤۰´	نرمال در هوای فشرده (۲)	۱۱
۱۰۵۰	۱:٤۰´	نرمال در هوای فشرده (۳)	۱۲
۸۵۰	۱:٤۰´	آستمپرینگ (۱)	۱۳
۹۵۰	۱:٤۰´	آستمپرینگ (۲)	۱٤
۱۰۵۰	۱:٤۰´	آستمپرینگ (۳)	۱٥
۸۵۰	۱:٤۰´	مارتمپرینگ (۱)	۱٦
۹۵۰	۱:٤۰´	مارتمپرینگ (۲)	۱۷
۱۰۵۰	۱:٤۰´	مارتمپرینگ (۳)	۱۸
۸۵۰	۱:٤۰´	کوئنچ در روغن ۲٥°C (۱)	۱۹
۹۵۰	۱:٤۰´	کوئنچ در روغن ۲٥°C (۲)	۲۰
۱۰۵۰	۱:٤۰´	کوئنچ در روغن ۲٥°C (۳)	۲۱
۸۵۰	۱:٤۰´	کوئنچ در آب ۲٥°C (۱)	۲۲
۹۵۰	۱:٤۰´	کوئنچ در آب ۲٥°C (۲)	۲۳
۱۰۵۰	۱:٤۰´	کوئنچ در آب ۲٥°C (۳)	۲٤

® فشار هوای مورد استفاده P=100bar

– نمونه‌های ٤، ٥ و ٦ دارای ساختار فریتی–پرلیتی هستند که به ترتیبی که در جدول (۲) آمده است تحت عملیات حرارتی آنیلینگ قرار گرفته‌اند. نمونه‌های ´٤، ´٥ و ´٦ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

– نمونه‌های ۷، ۸ و ۹ نیز دارای ساختار فریتی–پرلیتی هستند که به ترتیبی که در جدول (۲) آمده است تحت عملیات حرارتی نرمال در هوای آزاد قرار گرفته‌اند. نمونه‌های ´۷، ´۸ و ´۹ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

– هم‌چنین نمونه‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ دارای ساختار فریتی–پرلیتی هستند و مطابق جدول (۲) تحت عملیات حرارتی نرمال در معرض هوای فشردهٔ 100bar قرار گرفته‌اند. نمونه‌های ´۱۰، ´۱۱ و ´۱۲ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

– نمونه‌های ۱۳، ۱٤ و ۱٥ تحت عملیات آستمپرینگ (Austempering) قرار گرفته‌اند. این نمونه‌ها دارای ترکیبی از مارتنزیت و بینایت هستند. چگونگی عملیات آستمپرینگ در زیر ذکر شده است:

–ابتدا آستنیته کردن نمونه‌ها تا دمای آستنیتهٔ فولاد AISI1045 و نگه داشتن آنها در این دما برای مدت زمان کافی (یک ساعت و چهل دقیقه) انجام می‌شود.

- سرد کردن سریع نمونه‌ها تا دمایی قبل از دمای تشکیل مارتنزیت (Ms) یعنی تقریباً دمایی بالاتر از ۳۰۰ درجهٔ سانتی‌گراد. این عمل در محیطی هم‌چون حمام نمک مذاب (که در دمای ۳۵۰ درجه سانتی‌گراد تنظیم شده است) انجام گرفته است.
- نگه‌داشتن قطعه در شرایط فوق به‌مدت زمان کافی تا اطمینان از یکنواخت شدن کل نمونه در شرایط فوق حاصل گردد (در این‌جا با توجه به جنس و ابعاد نمونه‌ها مدت زمان ٤٥ دقیقه در نظر گرفته

شده است).

- قرار دادن نمونه‌ها در معرض هوا تا سرد شدن کامل.
- نمونه‌های ´۱۳، ´۱٤ و ´۱۵ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].
- نمونه‌های ۱٦، ۱۷ و ۱۸ تحت عملیات مارتمپرینگ (Martempering) قرار گرفته‌اند. این نمونه‌ها دارای ترکیبی از مارتنزیت بازپخت شده و کمی هم بینایت هستند. مراحل عملیات مارتمپرینگ در زیر ذکر شده است:
- ابتدا آستنیته کردن نمونه‌ها تا دمای آستنیتهٔ فولاد AISI1045 و نگه داشتن آنها در این دما برای مدت زمان کافی (یک ساعت و چهل دقیقه) انجام می‌شود.
- سرد کردن سریع نمونه‌ها تا دمایی کمی پایین‌تر از دمای تشکیل مارتنزیت (دمایی بین دمای تشکیل مارتنزیت M_s تا دمای پایان تشکیل مارتنزیت M_f) این عمل در محیطی هم‌چون حمام نمک مذاب (که مشابه عملیات آستمپرینگ در دمای ۳۵۰ درجه سانتی‌گراد تنظیم شده است) انجام می‌گیرد.
- نگه داشتن قطعه در شرایط فوق به مدت زمان کافی تا اطمینان از یکنواخت شدن کل نمونه در شرایط فوق حاصل گردد (در این‌جا نیز با توجه به جنس و ابعاد نمونه‌ها مدت زمان ٤۵ دقیقه در نظر گرفته شده است).
- قرار دادن نمونه‌ها در معرض هوا تا سرد شدن کامل.
- برگشت (Tempering) نمونه تا دمایی حدوداً ٦۰۰ درجه سانتی‌گراد و نگهداری آن برای مدت زمان کافی.
- نهایتاً سرد کردن نمونه در هوا تا زمان رسیدن به دمای محیط.

نمونه‌های ´۱٦، ´۱۷ و ´۱۸ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

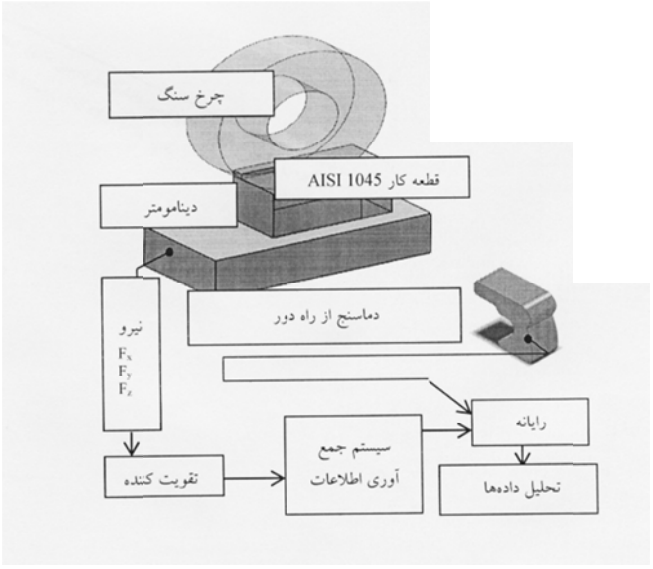
– نمونه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱ دارای ساختاری با آستنیت باقی مانده هستند که در بین مرز دانه‌های آستنیت، مارتنزیت شروع به تشکیل نموده است. این نمونه‌ها در روغن ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد کوئنچ شده‌اند. نمونه‌های ´۱۹، ´۲۰ و ´۲۱ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

– نمونه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲٤ نیز دارای ساختاری با آستنیت باقی مانده هستند که در بین مرز دانه‌های آستنیت، مارتنزیت نسبتاً بیشتری در مقایسه با نمونه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱ شروع به تشکیل نموده است. این نمونه‌ها در آب ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد کوئنچ شده‌اند. هم‌چنین ساختاری تیغه‌ای در این نوع قطعات مشاهده شد که نشان از تشکیل فاز مارتنزیت بشقابی در آن است. نمونه‌های ´۲۲، ´۲۳ و ´۲٤ نیز به همین روش آماده شده و پس از آن تحت عملیات نورد قرار گرفته‌اند [7].

عملیات سنگ‌زنی HEDG. سنگ‌زنی روی قطعاتی از جنس فولاد AISI1045 و با پارامترهای عملکردی معین و به‌صورت غیر هم‌جهت انجام گرفت. مقادیر پارامترها و شرایط فرآیند در جدول (۳) ذکر شده است. یک ماشین با اسپیندل افقی مدل 320ATOS-HOSTIVAR برای فرآیند سنگ‌زنی استفاده شده است. تمام آزمایش‌ها با چرخ‌سنگ Aluminum Oxide انجام می‌گیرد و سنگ با شرایط یکسانی قبل از هر مرحله سنگ‌زنی تیز می‌شود. تنظیمات فرآیند در شکل (۱) آمده است.

جدول ۳ شرایط آزمایشگاهی در فرآیند سنگ‌زنی

چرخ سنگ:	Aluminum Oxide 19A100SVHB
قطر و ضخامت سنگ:	d_c=۲۸۰mm, W_s= ۲۰mm
سرعت سنگ :	V_s=۳۰ m/s
سرعت قطعه‌کار:	V_w=۳۰mm/min
عمق برش:	a_e= ۱ mm
نرخ تغذیه:	S= ۲ mm/Pass
مایع خنک کننده:	روغن سنگ‌زنی با فشار حدوداً ۱۵ bar



شکل ۱ تنظیمات آزمایشگاهی فرآیند سنگ‌زنی

جدول ٤ مقادیر درصد تغییرات سختی، نیرو و دمای سطحی قطعات

شمارهٔ قطعه	تغییرات سختی (٪)	نیروی کل (N)	دما (°C)	شمارهٔ قطعه	تغییرات سختی (٪)	نیروی کل (N)	دما (°C)
۱	۷/۸	٤۳٦/٦	۲۳۳	۱۳	۲٦/۹	۹۳۸/۳	٤۰۱
۲	۱۲/٤	٤٤۲	۲٤۹	۱٤	۲٦/۳	۹۵۰/۱	٤۱۸
۳	۱۳/۳	٤٦٤/۱	۲۵۸	۱۵	۲۵/۹	۹۸۲/۲	٤۳۱
٤	۱٦/۱	۵۰۹/۸	۲٦٦	۱٦	۳۰/۲	۹٦٤/۱	٤۲۲
۵	۱۵/۷	٦۳۰/۷	۲۸۷	۱۷	۲۸/۱	۱۱۷۵/۵	٤۳۹
٦	۱٤/۹	٦۳٦	۲۹۵	۱۸	۲۷/۷	۱۱۹۰/۱	٤۵۸
۷	۲۱/۱	۷۲۹/۲	۳۱۹	۱۹	۳۷/۱	۱۲۱۵	٤۸۸
۸	۱۹/٦	۷۵۵/۲	۳۳۷	۲۰	۳٦/٤	۱۲۹۵/۳	٤۹۵
۹	۱۸/٤	۷۷٤/۸	۳٤۹	۲۱	۳٤/۹	۱۳۹۷	۵۰۰
۱۰	۲۳/٤	۷٦۱/۹	۳٤۲	۲۲	۰/۲	۱٤۲۹/۹	٦۲۸
۱۱	۲۲/۲	۸۵۹/۹	۳۵۹	۲۳	۰/۱	۱٤٤۰/۵	٦۳۲
۱۲	۲۱/۵	۸۹۰/۹	۳۹۷	۲٤	-۰/۹	۱۵۳۹/۹	٦۵۰

جدول ۵ مقادیر درصد تغییرات سختی، نیرو و دمای سطحی قطعات نورد شده

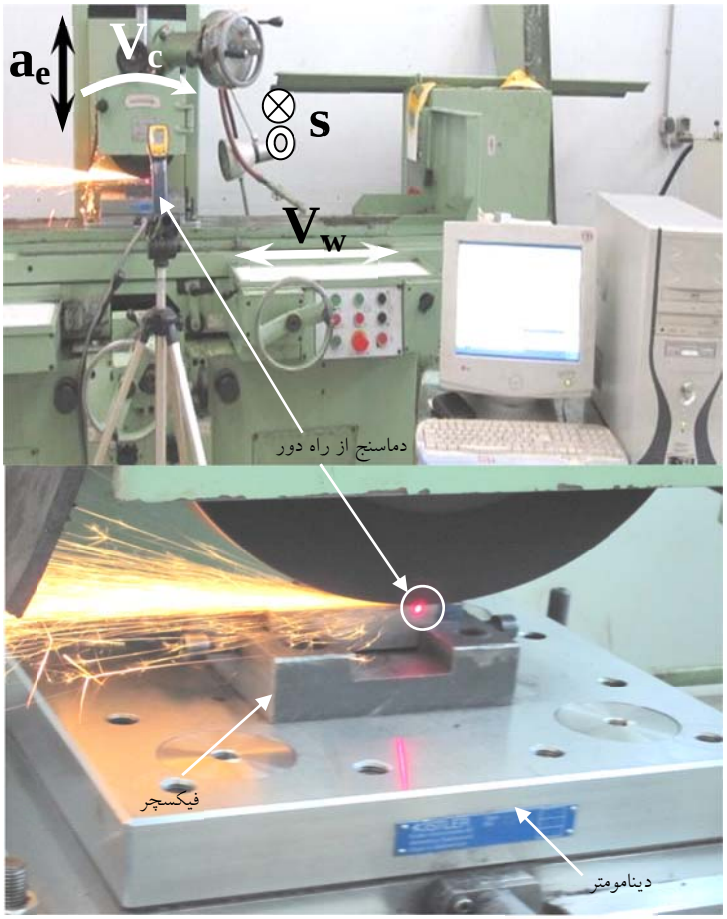
سنگ‌زنی عمود بر جهت نورد				سنگ‌زنی در جهت نورد			
دما (°C)	نیروی کل (N)	تغییرات سختی (٪)	شماره قطعه	دما (°C)	نیروی کل (N)	تغییرات سختی (٪)	شماره قطعه
۲٦۸	۵۱۰/۲	۱۱/۳	۱′	۲۷۹	۵۳۷	۱۱/۷	۱′
۲۸٦	۵۱٦/۵	۱۱/۹	۲′	۲۹۸	۵٤۳/٦	۱۲/۳	۲′
۲۹۷	۵٤۲/۳	۱۳/۲	۳′	۳۰۹	۵۷۰/۸	۱٤/۱	۳′
۳۰٦	۵۹۵/۷	۱۸/۹	٤′	۳۱۹	٦۲۷	۱۹/۱	٤′
۳۳۰	۷۳٦/۹	۱۷/۸	۵′	۳٤٤	۷۷۵/۷	۱۸/۸	۵′
۳۳۹	۷٤۳/۱	۱٤/۳	٦′	۳۵٤	۸۷۲/۲	۱۵/۱	٦′
۳٦۷	۸۵۲	۲٤/٤	۷′	۳۸۲	۸۹٦/۹	۲۵/٤	۷′
۳۸۸	۸۸۲/٤	۲۲/۱	۸′	٤۰٤	۹۲۸/۸	۲۳/۱	۸′
٤۰۲	۹۰۵/۳	۱۸/۹	۹′	٤۱۸	۹۵۳	۱۹/۹	۹′
۳۹۳	۸۹۰/۲	۳۱/۵	۱۰′	٤۱۰	۹۳۷/۱	۳۲/۲	۱۰′
٤۱۳	۱۰۰٤/۷	۳۰/۳	۱۱′	٤۳۰	۱۰۵۷/٦	۳۱/۳	۱۱′
٤۵۷	۱۰٤۱	۲٦/۸	۱۲′	٤۷٦	۱۰۹۵/۸	۲۷/۸	۱۲′
٤٦۱	۱۰۹٦/٤	۳٤/۲	۱۳′	٤۸۱	۱۱۵٤/۱	۳۵	۱۳′
٤۸۱	۱۱۱۰/۱	۳۲/۱	۱٤′	۵۰۱	۱۱٦۸/٦	۳۳/۱	۱٤′
٤۹٦	۱۱٤۷/۷	۲۹/٤	۱۵′	۵۱۷	۱۲۰۸/۱	۳۰/۸	۱۵′
٤۸٦	۱۱۲٦/٦	۲۰/٤	۱٦′	۵۰٦	۱۱۸۵/۹	۲۱/٤	۱٦′
۵۰۵	۱۳۷۳/٦	۱۹/۷	۱۷′	۵۲٦	۱٤٤۵/۹	۲۰/۵	۱۷′
۵۲۷	۱۳۹۰/۷	۱۷/۲	۱۸′	۵٤۹	۱٤٦۳/۹	۱۸/۸	۱۸′
۵٦۲	۱٤۱۹/۷	۱۵/۵	۱۹′	۵۸۵	۱٤۹٤/٤	۱۷/۵	۱۹′
۵۷۰	۱۵۱۳/۵	۱۰/٦	۲۰′	۵۹٤	۱۵۹۳/۲	۱۱/٦	۲۰′
۵۷٦	۱٦۳۲/۳	٦/٦	۲۱′	٦۰۰	۱۷۱۸/۳	۷/۲	۲۱′
۷۲۳	۱٦۷۰/۸	-۰/۹	۲۲′	۷۵۳	۱۷۵۸/۷	-۱/۲	۲۲′
۷۸۰	۱۸۹٤	-۲/٤	۲۳′	۷۵۸	۱۷۷۱/۸	-۳/٤	۲۳′
۷٤۸	۱۷۹۹/۳	-۷/۵	۲٤′	۷۲۸	۱٦۸۳/۲	-۹/۵	۲٤′

اندازه‌گیری ریزسختی سطحی. برای بررسی تأثیر ریزساختار روی سختی سطح قطعات، از دستگاه سختی‌سنج Buheler-4046 طبق استاندارد سختی ویکرز استفاده شده است. ریزسختی سطح هر یک از قطعات قبل و بعد از عملیات سنگ‌زنی اندازه‌گیری شده و در نهایت به تحلیل آنها پرداخته شد. کلیهٔ آزمایش‌های متالوگرافی براساس استاندارد ASTM E3-80 بوده [4] و محلول مورد استفاده برای حکاکی Nital 4% در نظر گرفته شده است [9].

۵ مقدار سختی از ۵ نقطه با فواصل مساوی در طول هر نمونه گرفته می‌شود و میانگین هر یک ثبت می‌گردد. در این بین اگر مقدار سختی متجاوز از محدودهٔ مورد انتظار به‌دست آید این مقدار در میانگین‌گیری ۵ مقدار سختی ویکرز به‌حساب آورده نمی‌شود. مقدار نیروی اعمال شده توسط دستگاه gf ۲۰۰ و به‌مدت ۱۵ ثانیه است. مقدار درصد افزایش سختی برای هر نمونه در جدول‌های (٤ و ۵) به‌همراه نیروها و دماهای آنها آورده شده است.

اندازه‌گیری نیروهای سنگ‌زنی. از آن‌جایی‌که بخشی از بررسی‌های این مطالعه براساس مشاهدات متالوگرافی استوار است، بنابراین آگاهی از میزان نیرو و دمای فرآیندی مربوط به هر ریزساختار ضروری است. برای این منظور از دستگاه Dynamometer (Kistler B9255) با Amplifier (Kistler A5070) استفاده شده است تا نیروی سنگ‌زنی هر یک از قطعات حین عملیات ثبت گردد. لازم به ذکر است که خروجی دستگاه دینامومتر برای نیروها، سه مؤلفهٔ مماسی، عمودی و عرضی بر حسب کولن (q) است. محاسبهٔ مربوط به تبدیلات و برآیند نیروها از طریق تقویت کننده به ولتاژ و از مسیر مبدل جریان AC به DC به کامپیوتر منتقل می‌گردد و براساس نیوتن کالیبره می‌شود. این مقادیر برای هر قطعه در جدول‌های (۵ و ٤) آورده شده است.

اندازه‌گیری دما حین فرآیند. به‌منظور بررسی دقیق‌تر تأثیر ریزساختار بر سختی سطح اندازه‌گیری دما نیز ضروری است. برای اندازه‌گیری دمای حاصل از درگیری ابزار با قطعه‌کار در حین فرآیند نیز از دستگاه Infrared/Type K Thermometer (TES-1327K) استفاده شده است. مقدار دمای حین فرآیند برای هر نمونه در جدول‌های (۵ و٤) آورده شده است. نمایی از کل فرآیند و چگونگی اندازه‌گیری دما و نیرو در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲ نمایی از فرآیند سنگ‌زنی و تجهیزات آزمایشگاهی استفاده شده تحت شرایط بیان شده در جدول (۳)

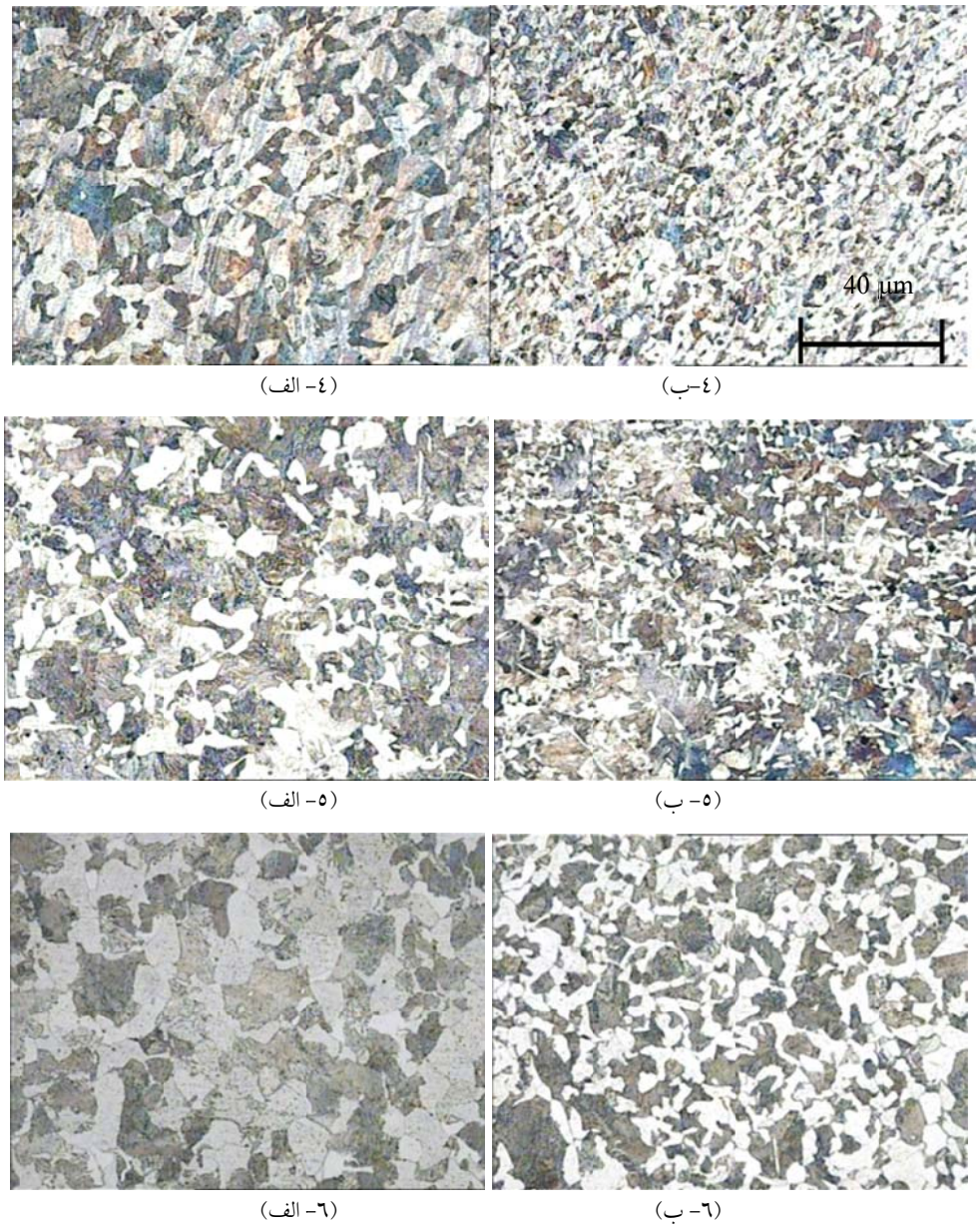
جدول ٦ مقادیر زبری قطعات پس از فرآیند سنگ‌زنی

شماره قطعه	زبری R_a [µm]	زبری R_z [µm]	شماره قطعه	زبری R_a [µm]	زبری R_z [µm]
۱	۲/۹	٤/۳	۱۳	۱/۲	۱/۹
۲	۲/۷	٤/۳	۱٤	۱/٤	۲/۲
۳	۲/٦	۳/۷	۱٥	۱/٥	۲/٤
٤	۳/٤	٥/٤	۱٦	۱	۱/٦
٥	۳/۷	٥/۹	۱۷	۱/۱	۱/۸
٦	۳/۸	٦	۱۸	۱/۳	۲/۱
۷	۲/۱	۳/۳	۱۹	۰/٤	۱/۲
۸	۲/٤	۳/۸	۲۰	۰/۷	۱/۲
۹	۲/۸	٤/٤	۲۱	۰/۸	۱/۳
۱۰	۱/٦	۲/٥	۲۲	۳/٥	٥/٦
۱۱	۱/۹	۳	۲۳	۳/٥	٥/٦
۱۲	۲/۳	۳/۷	۲٤	٤	٦/۲

اندازه‌گیری زبری سطح. همان‌طور که در مقدمه اشاره گردید ضمن رسیدن به افزایش سخت‌شدگی سطحی، زبری سطح هر نمونه می‌بایست حین آزمایش‌ها مورد توجه قرار گیرد. به عبارت دیگر از آن‌جایی که ممکن است دستیابی به سطحی با سختی مطلوب، با صافی سطح نامناسبی همراه گردد، لذا زبری سطح قطعات تحت کنترل قرار می‌گیرد. برای این منظور زبری سطح قطعات با دستگاه زبری‌سنج Taylor Hobson Surtrunic 25 اندازه‌گیری شده است. زبری R_a و R_z مطابق با جدول‌های (۷ و ٦) پس از عملیات سنگ‌زنی برای قطعات اندازه‌گیری شده است. فاکتور R_a مقدار میانگین حسابی همهٔ ارتفاع‌های پروفیل از خط مبنا در طول مشخص ٤ میلی‌متری (Sample Length) از نمونه‌گیری است. مقدار R_z میانگین حسابی ماکزیمم اختلاف بین قله و دره در بازهٔ ٥ طول نمونه‌گیری مجاور یکدیگر است. طول نمونه‌گیری ٤ میلی‌متر است و هر یک از مقادیر زبری نمایندهٔ میانگین ٤ بار اندازه-گیری جداگانه است. این اندازه‌گیری‌ها در هر دو جهت موازی و عمود بر جهت سنگ‌زنی انجام گرفته است. مقادیر زبری روندی مشابه با سختی دارد. به بیان دیگر هر چه سختی بالاتر می‌رود زبری کاهش می‌یابد، اما این روند تا حدی بیشینه ادامه می‌یابد و پس از آن زبری روندی کاهشی را تجربه می‌کند. دلیل این کاهش فوق سخت بودن قطعات است که دمای بسیار زیادی را در حین سنگ‌زنی به‌دنبال دارد، این دو عامل سبب افزایش زبری سطح می‌شود [10].

جدول ۷ مقادیر زبری قطعات نورد شده پس از فرآیند سنگ‌زنی

سنگ‌زنی در جهت نورد			سنگ‌زنی عمود بر جهت نورد		
زبری R_z [µm]	زبری R_a [µm]	شماره قطعه	زبری R_z [µm]	زبری R_a [µm]	شماره قطعه
٤/۰	۲/۸	۱′	۳/۹	۲/۷	۱′
۳/۷	۲/٦	۲′	۳/٦	۲/٥	۲′
۳/٦	۲/٥	۳′	۳/٥	۲/٤	۳′
٤/۷	۳/۳	٤′	٤/٦	۳/۲	٤′
٥/۱	۳/٦	٥′	٥/۰	۳/٤	٥′
٥/۲	۳/۷	٦′	٥/۱	۳/٥	٦′
۲/۹	۲/۰	۷′	۲/۹	۱/۹	۷′
۳/۳	۲/۳	۸′	۳/۳	۲/۲	۸′
۳/۸	۲/۷	۹′	۳/۸	۲/٦	۹′
۱/۱	۰/۸	۱۰′	۱/۱	۰/۷٦	۱۰′
۱/۳	۰/۹٥	۱۱′	۱/۳	۰/۹۰	۱۱′
۲/۹	۲/۱	۱۲′	۲/۹	۲/۰	۱۲′
۱/۰	۰/٦	۱۳′	۰/۹۹	۰/٥۷	۱۳′
۱/۱	۰/۷	۱٤′	۱/۰	۰/٦٦	۱٤′
۱/۱	۰/۷٥	۱٥′	۱/۰	۰/۷۱	۱٥′
۱/٦	۱/۱	۱٦′	۱/٦	۱/۰	۱٦′
۱/۷	۱/۲	۱۷′	۱/٥	۱/۱	۱۷′
۱/۹	۱/۳	۱۸′	۱/۸	۱/۲	۱۸′
۲/۹	۲/۰	۱۹′	۲/۹	۱/۹	۱۹′
۳/٦	۲/٤	۲۰′	۳/٥	۲/۳	۲۰′
٤/٦	۳/۱	۲۱′	٤/٥	۲/۹	۲۱′
٤/۹	۳/٥	۲۲′	٤/۸	۳/۳	۲۲′
٥/۰	۳/٥	۲۳′	٤/۹	۳/۳	۲۳′
٥/۹	٤/۰	۲٤′	٥/۸	۳/۸	۲٤′



شکل ۳ نمایش ریزساختاری پرلیتی (نواحی سیاه) و فریتی (نواحی روشن) روی سطح نمونه‌های ٤، ٥ و ٦
(الف) قبل از عملیات سنگ‌زنی (ب) پس از سنگ‌زنی

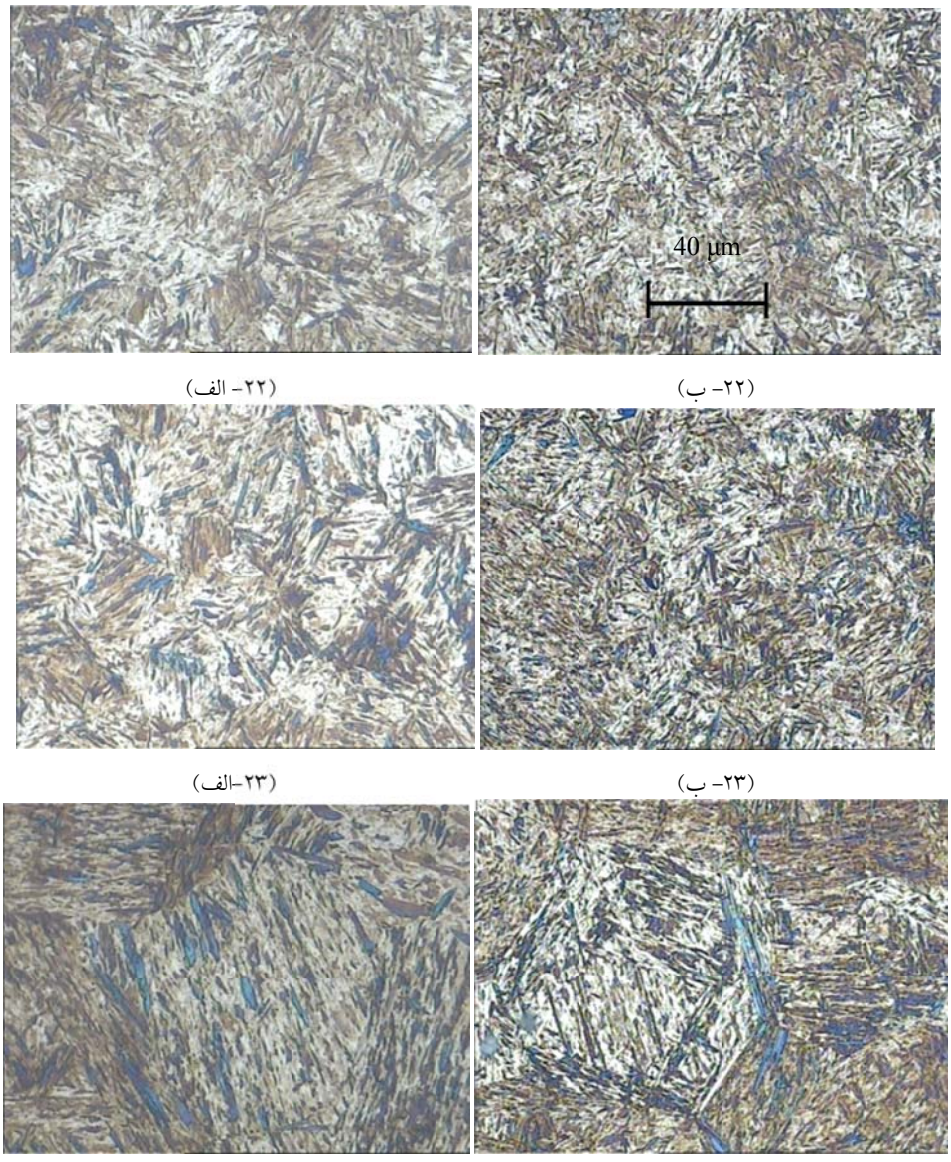
نتایج و بحث

برای شرایط مورد ارزیابی، تغییرات ریزساختاری و اندازهٔ دانه سبب ایجاد تغییراتی در سختی سطح نمونه‌ها شده است. انتظار می‌رود در شرایطی که در آن مقدار دمای بیشتری وجود دارد، ریزساختار نمونه‌ها در طی فرآیند تغییراتی از خود نشان دهند. اما مشاهده شد که ریزساختارها تحت تمام شرایط، قبل و بعد از فرآیند تغییر نمی‌کنند. علاوه بر این ریزسختی در سطح نمونه‌ها دچار تغییراتی می‌شود.

شکل (۳) نتایج ریزساختار پرلیتی-فریتی قطعات ٤، ٥ و ٦ را به‌عنوان نمونه‌ای از نمونه‌های نرم و شکل‌پذیر نشان می‌دهد که در سه شرایط دمایی مختلف ایجاد شده‌اند. سه سطح مختلف از اندازهٔ دانه در این شکل‌ها مشهود است. همان‌گونه که در این

شکل دیده می‌شود، فرآیند سنگ‌زنی باعث ریز شدن و هم‌محور شدن دانه‌ها در ریزساختار گردیده است که خود دلیلی بر افزایش سختی سطح پس از عملیات سنگ‌زنی است. ریز و هم‌جهت شدن دانه‌ها، مخصوصاً در نمونه‌های نورد شده و تحلیل افزایش یا کاهش سختی در سطح نمونه‌ها در اثر فرآیند سنگ‌زنی مباحثی هستند که در این مطالعه نمی‌گنجند. براساس مطالعات کیانگ– ماکس و همکاران [11]، فرآیند سنگ‌زنی و حرارت ناشی از آن می‌تواند منجر به وقوع پدیدهٔ بازیابی و تبلور مجدد دینامیکی در سطح نمونه گردد، که این امرسبب ریزشدن و هم‌محور شدن دانه‌های سطح نمونه می‌شود، که در شکل (۳) نیز نشان داده شده است.

تصاویر شکل (٤) نشان می‌دهد که حتی در شرایط سخت سنگ‌زنی که نیرو و دمای ناشی از آن بالا است نیز تغییر ریزساختاری خاصی مشاهده نمی‌شود. این تصاویر مربوط به نمونه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲٤ به‌عنوان نمونه‌های بسیار سخت و ترد است.



(۲۲– الف) (۲۲– ب)

(۲۳–الف) (۲۳– ب)

(۲٤– الف) (۲٤–ب)

شکل ٤ نمایش ریزساختاری مارتنزیتی در سطح نمونه‌های ۲۲، ۲۳و ۲٤ به‌عنوان قطعات ترد و سخت (الف) قبل از عملیات سنگ‌زنی (ب) پس از سنگ‌زنی

فولاد AISI1045 فولادی با سختی‌پذیری پایین است. دیاگرام TTT برای این فولاد نشان می‌دهد که به‌علت درصد کربن کم و حضور دیگر اجزای شیمیایی، منحنی سرد شدن برای استحالهٔ مارتنزیتی می‌بایست تقریباً عمودی باشد [7]. با توجه به این‌که اولاً دمای ایجاد شده در فرآیند در حدی نیست که سیلان پلاستیکی و یا استحالهٔ مارتنزیتی رخ دهد و ثانیاً سرعت خنک‌کاری در فرآیند سنگ‌زنی به قدری پایین است که شکل‌گیری مارتنزیت دور از دسترس است، بنابراین، افزایش سختی و تنش پسماند فشاری می‌تواند به‌دلیل تغییرشکل‌های پلاستیک شدید ناشی از سنگ‌زنی باشد [6,12]. در اثر این تغییر شکل‌های پلاستیک شدید، احتمال تبدیل فاز آستنیت باقی‌مانده به مارتنزیت وجود دارد، در نتیجه میزان سختی سطح می‌تواند فراتر رود.

نتایج حاصل نشان می‌دهد که قطعه‌ای که در روغن ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد کوئنچ شده و دارای ریزساختار مارتنزیتی است دارای بیشترین سخت‌شدگی سطحی است. از طرفی هر چه اندازهٔ دانهٔ ریزساختار کوچک‌تر باشد سختی به‌دست آمده مقدار بیشتری دارد. سختی فولاد مارتنزیت با درصد کربن ۰/٤٥ در حدود ۷۵۰ ویکرز است، در حالی که سختی به‌دست آمده برای سطح نمونهٔ کوئنچ شده ۱۹ برابر ۳۳٤ ویکرز است. این مقدار نشان می‌دهد که سطح ماده مقداری آستنیت باقی‌مانده دارد. آستنیت باقی‌مانده در اثر کار مکانیکی ناشی از عملیات سنگ‌زنی به مارتنزیت تبدیل می‌شود و موجب افزایش نسبی سختی سطح فولاد می‌گردد. از طرفی با توجه به مقدار نیروی لازم برای سنگ‌زنی قطعه‌کار موجود در جدول (٤)، مشاهده می‌شود که نمونه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱ با مقداری آستنیت باقی‌مانده در سطح (که از کوئنچ در روغن ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد به‌دست آمده‌اند)، دارای نیروی کل نسبتاً بالا و بیشترین سخت‌شدگی سطحی هستند. این مقادیر نیرویی نسبتاً زیاد نشان‌دهندهٔ وقوع تغییرشکل پلاستیکی آستنیت است که حین فرآیند سنگ‌زنی رخ می‌دهد و نهایتاً منجر به ایجاد فاز مارتنزیت در ماده می‌گردد. براساس مطالعات باراکی [13] این تغییرشکل پلاستیکی نیز می‌تواند باعث افزایش دانسیته نابجایی‌ها در سطح قطعه گردد و سبب سخت‌شدگی سطحی شود. از طرفی در بحث مکانیزم شکل‌گیری براده در مواد سخت، نه تنها مقدار تنش تعریف شده توسط ضخامت برادهٔ برداشته نشده منجر به ایجاد تغییرشکل پلاستیک شدید می‌گردد بلکه تنش فشاری هیدروستاتیکی زیر لبهٔ برنده نیز منجر به ایجاد تنش تغییرشکل پلاستیک می‌گردد. در نتیجه، تنش‌های تماسی هرتز زیر لبهٔ برنده اتفاق می‌افتد که تنش هیدروستاتیک فشاری را سبب می‌شود [14]. بنابراین در نمونه‌ای هم‌چون نمونهٔ شمارهٔ ۱۹ که نسبتاً سخت است، تنش‌های فوق منجر به ایجاد تنش فشاری روی سطح می‌گردند که این خود عامل دیگری برای افزایش سخت‌شدگی سطحی پس از فرآیند HEDG است. جدول (۸) مقادیر ریزسختی ویکرز در سطح نمونهٔ ۱۹ را قبل و بعد از فرآیند سنگ‌زنی مقایسه می‌کند.

جدول ۸ مقادیر سختی سطحی ویکرز (الف) قبل از فرآیند و (ب) بعد از فرآیند برای نمونه شماره ۱۹

موقعیت	سختی اول	سختی دوم	سختی سوم	میانگین
(الف) قبل از فرآیند	۳۳٤	۳۳۹	۳۲۹	۳۳٤
(ب) بعد از فرآیند	٤٦۱	٤٥٤	٤٥۹	٤٥۸

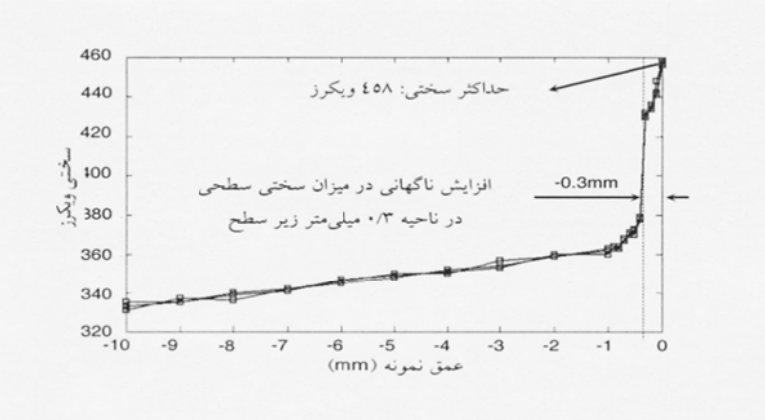
مقایسهٔ نتایج سختی قبل و بعد از فرآیند سنگ‌زنی عمیق نشان می‌دهد که این فرآیند عموماً سبب افزایش سختی در سطح قطعات می‌گردد. اما نکتهٔ قابل ذکر آن است که این عملیات، اثر سخت‌کاری خود را روی تمام قطعات نخواهد گذاشت. در واقع عملیات سنگ‌زنی عمیق سبب سخت‌تر شدن سطح قطعاتی با سختی کم و متوسط می‌شود. در نتیجه سنگ‌زنی عمیق به‌عنوان عملیات نهایی برای این دسته از قطعات

پیشنهاد می‌گردد. اما زمانی که سختی سطح قطعه‌ای طی عملیات حرارتی خاص، از یک حد بحرانی بالاتر می‌رود، عملیات سنگ‌زنی عمیق نه تنها دیگر قادر به سخت‌تر نمودن سطح قطعه نیست، بلکه عملیات سنگ‌زنی عمیق روی سختی نهایی این دسته از قطعات اثر نامطلوب و معکوس می‌گذارد و همان عملیات حرارتی به‌عنوان عملیات نهایی روی قطعه پیشنهاد می‌شود.

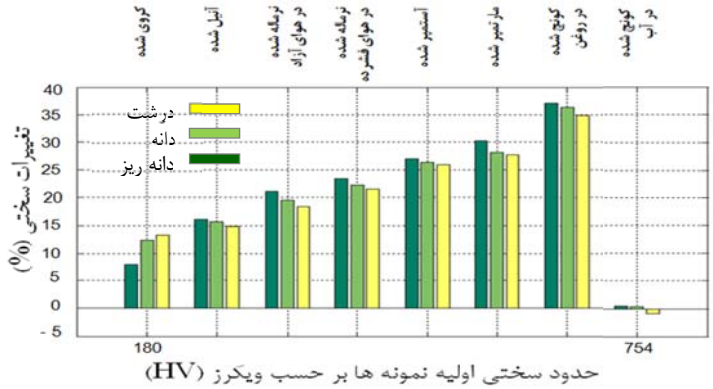
ذکر این نکته قابل توجه است که اندازه‌گیری‌های انجام شده بر روی نمونهٔ شمارهٔ ۱۹ نشان می‌دهد که افزایش سختی در مقطع قطعه‌کار یکنواخت نیست. شکل (۵) مقدار ریزسختی اندازه‌گیری شده در مقطعی عمود بر جهت سنگ‌زنی، برای نمونهٔ شمارهٔ ۱۹ را نشان می‌دهد. این مقادیر در هر یک میلی‌متر سه بار تکرار شده است و در یک میلی‌متر نزدیک به سطح این اندازه‌گیری‌ها در هر ۰/۱ میلی‌متر انجام گرفته است. سختی در ناحیهٔ نزدیک به سطح رفتار قابل‌توجهی دارد. در عمق ۰/۳ میلی‌متر زیر سطح، سختی به‌طور ناگهانی افزایش یافته تا به حداکثر حد خود یعنی HV ٤٥٨ می‌رسد. مقدار مقاومت کششی معادل با این سختی برابر MPa ۱٤۸۰ است. علت این امر آن است که بار مکانیکی و تغییرشکل پلاستیکی اثر خود را در قالب تبدیل آستنیت به مارتنزیت و بطور قابل ملاحظه‌ای در ناحیه‌ای نزدیک به سطح می‌گذارد. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که فرمولی که ارتباط دقیق بین سختی و استحکام کششی را نشان دهد در اختیار نیست و این تبدیل از جداول معادل‌سازی سختی با مقاومت کششی موجود در [9] به‌دست آمده است.

مطالعات نشان می‌دهد که مقدار سخت‌شدگی سطحی پس از فرآیند با میزان سختی اولیهٔ نمونه رابطه دارد. به‌عبارتی دیگر یک حد بحرانی برای درصد افزایش سختی سطحی وجود دارد که به سختی اولیه نمونه‌ها بستگی دارد. در واقع از بررسی شکل (٦) نتیجه می‌شود که هر چه سختی سطح اولیهٔ نمونه‌ها افزایش یابد، درصد افزایش سختی ناشی از فرآیند HEDG نیز بالا می‌رود. این روند تا رسیدن به مقدار بیشینه ۳۷/۱ درصد (که مربوط به نمونهٔ ۱۹ با سختی اولیهٔ ۳۳٤ ویکرز و ریزساختار مارتنزیتی) ادامه دارد و پس از آن میزان‌سخت‌شدگی سطحی رو به کاهش می‌گذارد. روند صعودی فوق‌الذکر را می‌توان با بالا بودن سختی اولیهٔ نمونه‌ها توجیه نمود. در واقع بالا بودن سختی اولیهٔ نمونه‌ها سبب افزایش تغییرشکل پلاستیک و در نتیجه افزایش دانسیتهٔ نابجایی‌ها در سطح قطعه می‌گردد که این امر خود به سخت‌شدگی ناحیهٔ تحت تغییرشکل پلاستیک منجر می‌شود. در مورد نمونه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲٤ با ریزساختار مارتنزیتی (که از کوئنچ در محیط آب ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد به‌دست آمده‌اند) میزان نیروی کل ثبت شده برای آن بالاتر از نمونهٔ مورد بحث قبلی یعنی نمونهٔ ۱۹ است و بنابر آن‌چه که گفته شد انتظار می‌رود میزان سخت‌شدگی سطحی بالاتر باشد چرا که میزان تغییرشکل پلاستیک ناشی از فرآیند در آن بالاست. اما سختی سطح نمونه در این مورد نه تنها افزایش نیافته بلکه کاهش یافته است. بر طبق مطالعات توکلی [15] در توجیه این پدیده چنین بیان می‌شود که تنش‌های پسماند کششی به‌دلیل بار حرارتی حین سنگ‌زنی سبب کاهش سختی سطح این نمونه‌ها شده است. درواقع می‌توان گفت تنش‌های پسماند کششی به‌دلیل بار حرارتی حین سنگ‌زنی و تنش‌های پسماند فشاری ناشی از بار مکانیکی زیاد حین فرآیند است؛ و در صورتی که دمای حاصل از ماشین‌کاری بالا باشد، تنش‌های پسماند فشاری ایجاد شده ناشی از بار مکانیکی، توسط تنش‌های پسماند کششی ایجاد شده ناشی از بار حرارتی از بین می‌رود و سختی نهایی روی نمونه‌ها کاهش می‌یابد. این موضوع در نمونه‌های فوق سخت مشهودتر است [1, 16]. مطابق توضیحات فوق، از آن‌جایی که سختی در نمونه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲٤ به‌قدری بالاست که سبب ایجاد دمای بالایی در حدود

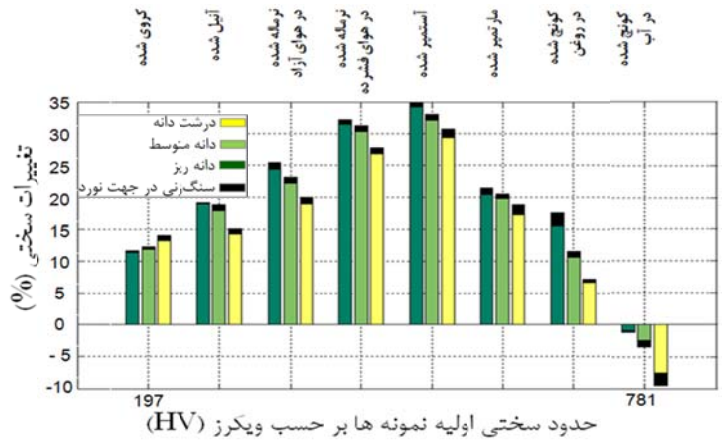
۶۵۰ درجهٔ سانتی‌گراد می‌شود؛ این حرارت شدید خود منبعی برای ایجاد تنش پسماند کششی است که حتی تنش فشاری باقی مانده در سطح ناشی از تغییرشکل پلاستیکی شدید را نیز بی‌اثر می‌کند. این رفتار برای سایر قطعات فوق‌سخت نیز صادق است.



شکل ۵ مقادیر ریزسختی در عمق نمونهٔ شمارهٔ ۱۹



شکل ٦ نمودار رابطهٔ میزان سخت‌شدگی سطحی با سختی اولیه در نمونه‌های ۱ تا ۲٤ با ریزساختارهای مختلف



شکل ۷ نمودار رابطهٔ میزان سخت‌شدگی سطحی با سختی اولیه در نمونه‌های نورد شده ´۱ تا ´۲٤ با ریزساختارهای مختلف (نمونه‌های با رنگ سیاه مربوط به حالت سنگ‌زنی در جهت نورد است)

هم‌چنین براساس شکل (٦) و جدول (٤)، ملاحظه می‌شود که در بین هر سه نمونهٔ یکسان (که سختی و ریزساختار نسبتاً مشابهی دارند) میزان سخت‌شدگی سطح پس از فرآیند، در نمونه‌های با اندازهٔ دانهٔ کوچک‌تر بیشتر است. به‌عنوان مثال، از میان نمونه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱ که دارای ریزساختار مشابهی هستند و بیشترین درصد افزایش سختی سطحی را به خود اختصاص داده‌اند، نمونهٔ ۱۹ (با رنگ تیره) که دارای دانه‌بندی ریزتری است، بیشترین میزان سخت‌شدگی سطحی را پس از فرآیند HEDG تجربه می‌کند. دلیل این امر بالا بودن نیروی لازم برای براده‌برداری و تغییرشکل پلاستیک ناشی از آن است. بنابراین سنگ‌زنی مواد ریزدانه تغییرشکل پلاستیک و در نتیجه سخت‌شدگی بیشتری نسبت به مواد درشت‌دانه به‌دنبال دارد. این نتیجه مشابه با نتایج مطالعات برینکسمیر [17] است.

قطعات نورد شده. با مقایسهٔ مقادیر نیروی ثبت شده در جدول‌های (٤ و ٥) مشخص است که نیروی مورد نیاز برای سنگ‌زنی در نمونه‌های نورد شده بیشتر از نمونه‌های مشابه در حالت بدون نورد است. روشن است که این نیروی زیاد به‌دلیل سخت‌شدگی مواد در اثر عملیات نورد است. این سطح سخت شده سبب افزایش شدت تغییرشکل پلاستیک و دانسیتهٔ نابجایی‌ها می‌گردد و در نتیجه سطح جدید دارای سختی بیشتری می‌شود [3]. در بین نمونه‌های نورد شده نمونهٔ آستمپر شده بیشترین میزان سخت‌شدگی سطحی را تجربه کرده است. هم‌چنین مشاهده شد سخت‌شدگی سطحی در نمونه‌های نورد شده در حالتی که سنگ‌زنی در جهت موازی با دانه‌ها صورت می‌پذیرد بیشتر از حالتی است که سنگ‌زنی در جهت عمود بر دانه‌ها انجام شده است.در واقع رفتاری مشابه با آن‌چه در مورد نمونه‌های معمولی مشاهده شد برای نمونه‌های نورد شده نیز وجود دارد. با این تفاوت که روند افزایش سخت‌شدگی سطحی پس از فرآیند سنگ‌زنی مطابق شکل (۷)، تا نمونهٔ ′۱۳ (نمونهٔ آستمپر شده با سختی ۳۳۱ ویکرز) ادامه دارد و از آن پس درصد افزایش سختی رو به کاهش می‌گذارد. این موضوع نشان می‌دهد که یک حد بحرانی برای سخت‌شدگی سطحی نمونه‌ها وجود دارد و با سختی اولیهٔ نمونه‌ها در ارتباط است. افزایش سختی تا ۳۵ درصد ادامه می‌یابد که به‌دلیل افزایش تغییرشکل پلاستیک ناشی از افزایش سختی اولیه ماده است، پس از آن افزایش دما در سطح سبب ایجاد تنش پسماند کششی در سطح می‌شود.

اما بحثی که در این‌جا مطرح است بررسی اثر راستای سنگ‌زنی نسبت به راستای دانه‌های کشیده شده ناشی از عملیات نورد است. مطابق جدول (٥) و شکل (۷)، در هر نمونه نورد شده نیروی مورد نیاز برای سنگ‌زنی در راستای دانه‌های کشیده شده بیشتر از حالتی است که جهت سنگ‌زنی عمود بر راستای دانه‌ها است. علت این امر آن است که طول مرز دانه‌های ریزساختار در حالت هم‌راستا بیشتر است و نیاز به نیروی بیشتری برای جدا شدن براده نسبت به حالتی که سنگ‌زنی عمود بر راستای جهت‌گیری دانه‌ها است، دارد [18, 19]. همین افزایش نیروی درگیری سبب افزایش تغییرشکل پلاستیک و سختی سطح ماده می‌شود. بنابراین میزان سخت‌شدگی سطحی به‌دست آمده در ریزساختار نورد شده‌ای که جهت‌بندی دانه‌های آن هم‌راستا با جهت سنگ‌زنی است، بیشتر است. این نتیجه با آنچه Lawn در [18] اشاره کرده مطابقت دارد.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد اطلاع از مقادیر زبری سطح حین آزمایش‌ها ضروری است، چرا که ممکن است رسیدن به سطحی با سختی مطلوب لزوماً به سطحی با صافی مورد قبول منجر نگردد. از آن‌چه از جدول‌های (۷ و ٦) برمی‌آید، ملاحظه می‌شود به جز موارد ۲۲ تا ۲٤ در نمونه‌های معمولی و موارد ′۱۹ تا ′۲٤ در نمونه‌های نورد شده که جزء نمونه‌های فوق سخت محسوب می‌شوند، کلیهٔ مقادیر زبری در

محدودهٔ متعارفی قرار دارند. این موضوع نشان می‌دهد که رسیدن به سختی سطح بالاتر در نمونه‌ها تأثیر منفی و مخربی روی زبری سطح قطعات نداشته است.

نتیجه‌گیری

با انجام آزمایش‌ها روی فولاد AISI1045 و شرایط سنگ‌زنی ذکر شده در این مطالعه، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

- میزان سخت‌شدگی پس از فرآیند سنگ‌زنی HEDG به ریزساختار و سختی نمونه‌ها بستگی دارد، به‌طوری‌که با افزایش سختی اولیه تا حدی بحرانی سخت‌شدگی سطح افزایش و پس از آن کاهش می‌یابد.
- نمونه‌ای با ریزساختار مارتنزیتی حاصل از کوئنچ در روغن ۲۵ درجه سانتی‌گراد پس از عملیات سنگ‌زنی بیشترین سخت‌شدگی سطحی را از خود نشان می‌دهد.
- هر چه اندازهٔ دانه ریزساختار کوچک‌تر باشد سختی سطحی به‌دست آمده پس از فرآیند سنگ‌زنی مقدار بیشتری دارد.
- نمونهٔ آستمپر شده (با ریزساختار مارتنزیتی- بینایتی) در بین نمونه‌های نورد شده بیشترین میزان سخت-شدگی سطحی پس از فرآیند سنگ‌زنی را تجربه می-کند.
- سنگ‌زنی در راستای جهت‌بندی دانه‌های نورد شده منجر به سخت‌شدگی سطحی بالاتری می‌شود.

از آن‌چه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت با شناسایی ریزساختار مناسب برای دست‌یابی به سطحی با سختی بالاتر، رسیدن به شرایط «سنگ‌زنی کم‌تنش» امکان‌پذیر می‌گردد. این درحالی است که زبری سطح نمونه‌ها تا قبل از حد بحرانی مقادیر قابل‌قبولی دارند. از طرفی اگرچه هیچ تغییر ریزساختاری و استحالهٔ فازی قابل‌ملاحظه‌ای در هیچ یک از شرایط مورد ارزیابی مشاهده نشد، اما تغییرات قابل‌توجهی در سختی سطحی مشاهده گردید. این تغییرات ناشی از حرارت و خنک‌کاری شدید سطح و به‌وجود آمدن تنش پسماند فشاری حاصل از تغییرشکل پلاستیکی شدید و افزایش دانسیتهٔ نابجایی‌ها در سطح قطعات است. حضور این تنش پسماند فشاری در سطح محصولات، عمر خستگی آنها را بهبود می‌دهد و قابلیت کار آنها را در محیط‌های دینامیکی و خورندهٔ شیمیایی فراهم می‌سازد. از طرفی استحکام و سختی سطح نمونه‌ها طی فرآیند سنگ‌زنی HEDG بالا می‌رود که این موضوع می‌تواند این فرآیند را به‌عنوان روشی جایگزین در عملیات سختی‌سازی سطوح هم‌چون ساچمه‌زنی نماید.

مراجع

1. Zurita, O. and Moreno, D., "Superficial hardening in the plane grinding of AISI 1045 steel", *Journal of Materials Engineering and Performance*, pp. 300-302, (2003).
2. Stephenson, J., "Physical basics in grinding", *First European Conference on Grinding*, Vol. 38, No. 4, pp. 13-21, (2003).
3. Singal, R., "Fundamentals of machining and machine tools", I. K. International Pvt Ltd, Vol. 22, No. 2, (2009).
4. Sines, R., "Hardness measurements for the determination of residual stresses", A.S.T.M. Bull, pp. 35-37, (1982).
5. Noyan, J., "Residual stresses in materials", Am. Sci., Vol. 79, pp. 142-53, (1991).

6. Werner, G., Tawakoli, T., Mayr, P., Speicher, V. "Compressive residual stress in creep-feed ground work surface", SME Technical Paper, pp. 86-95, (1986).
7. Wegst, C., "Key to steel", 18th Edition: Stahlschlüssel Wegst, (1998).
8. Xie, Z., Moon, J., Hoffman, M., Munroe, P. and Cheng, Y., "Role of microstructure in the grinding and polishing of α-sialon ceramics", Journal of the European Ceramic Society Vol. 23, No. 2, pp. 852-857, (2003).
9. Tottle, C., "An encyclopedia of metallurgy and materials", (1984).
10. Lawn, W., "Review Indentation Fracture: Principles and Applications," *J. Mat. Sci*, Vol. 10, (1975).
11. Kyung-Mox Cho, S., Nutt, S. and Duffy, J., "Adiabatic shear band formation during dynamic torsional deformation of an HY-100 Steel", *Acta metall*, Vol. 41, pp. 923-932, (1993).
12. Shaw, M., "Cutting and Grinding of Difficult Materials", *Technical paper presented at the Abrasive Engineering Society, Ceramic Industry Manufacturing Conference and Exposition*, Pittsburgh, PA, (1995).
13. Barbacki, M. and Hamrol, A., "Turning and grinding as a source of microstructural changes in the surface layer of hardened steel", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 133, pp. 21-25, (2003).
14. Komanduri, R., "On the Mechanisms of Material Removal in Fine Grinding and Polishing of Advanced Ceramics and Glasses, in Advancement of Intelligence Production", *The Japan Society for Precision Engineering*, Annals of CIRP, 45 (1), pp. 509-514, (1996).
15. Tawakoli, T., "*High efficiency deep grinding, Technology, process, planning and application*" , Mechanical Engineering Publication; , London, (1993).
16. Poggi, J., "The influence of surface finish and strain hardening on near surface residual stress on tool steel", Wear, Vol. 149, pp. 209-20, (1991).
17. Brinksmeier, E., Preuß, W., Riemer, O. and Malz, R., "Ductile to Brittle Transition Investigated by Plunge-Cut Experiments in Monocrystalline Silicon", Proceedings of the Spring Topical Meeting of the ASPE, Cormel-by-the-Sea, USA, pp. 55-58, (1998).
18. Lawn, B., "*Fracture of Brittle Solids*", Cambridge University Press, New York, Vol. 2, (1993).
19. Ioan, M., Marinescu, D., Uhlmann, E., Rowe, B. and Inasaki, I., "Machining with grinding wheels", Vol. 72, USA: CRC Press, (2007).

شبیه‌سازی رایانه‌ای فرآیند ولکانش به‌منظور محاسبهٔ زمان پخت در یک قطعهٔ لاستیکی با اصلاح معادلهٔ سینتیک پخت*

محمدرضا عرفانیان[۱] سید محمد جوادی[۲] محمد مقیمان[۳]

چکیده *در این مقاله از روش حل عددی برای شبیه‌سازی فرآیند پخت لاستیک و محاسبهٔ زمان پخت یک قطعهٔ لاستیکی تولید شده به‌روش قالب‌گیری تزریقی استفاده شده است. مهم‌ترین نوآوری کار حاضر محاسبهٔ زمان پخت با اصلاح مدل سینتیک پخت است. معادلات سینتیک در یک کد جانبی گنجانده شده و با افزودن آن به نرم‌افزار فلوئنت، امکان شبیه‌سازی عددی فرآیند پخت در یک قطعهٔ لاستیکی، فراهم گردیده است. خواص سینتیکی آمیزه، ظرفیت گرمایی ویژه و لزجت لاستیک از آزمایش به‌دست می‌آیند. به‌منظور محاسبهٔ زمان پخت به‌روش تجربی از نتایج تست استحکام استفاده شده است. زمان پرشدن قالب و زمان پخت حاصل از حل عددی، سازگاری خوبی با زمان پخت حاصل از نتایج آزمایشگاهی دارند.*

واژه‌های کلیدی شبیه‌سازی عددی، ولکانش، قالب‌گیری تزریقی، زمان پخت.

Simulation of Rubber Vulcanization for Calculation of the Curing Time with Modification of the Kinetic Model

M.R. Erfanian S. M. Javadi M. Moghiman

Abstract *The present work is focused on the computational method for simulation of the rubber vulcanization process in injection molding machines. The main innovation of the work is the calculation of the curing time in a rubbery part using the modification of curing kinetic model. For solving the curing equations, the computer code is developed in "UDF" module of the Fluent. The parameters of curing model, specific heat and viscosity of the rubber are obtained from the experiment. In order to evaluate the experimental curing time, a mechanical compression test is performed on the rubbery part at different times. Predicted mold filling and curing times are compared with experimental data, which confirmed the accuracy and applicability of the method.*

Key Words Numerical Simulation, Vulcanization, Injection Molding, Curing Time.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۳/٤/۲۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۰/۷ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول، دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد. Mohammad.Erfanian09@gmail.com

(۲) استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین، قوچان.

(۳) استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

لاستیک‌ها به‌دلیل خواص منحصر به فرد، کاربرد فراوانی در صنعت یافته‌اند. لاستیک‌ها بر خلاف بیشتر مواد مهندسی، هم خواص استحکامی بالایی دارند و هم از خواص تغییر شکل مناسب برخوردارند. لاستیک‌ها غیر قابل تراکم‌اند و مدول حجمی آن‌ها معمولاً هزار برابر بزرگ‌تر از مدول یانگ می‌باشد [1]. علاوه بر این لاستیک ها نسبت به نفوذ مایعات و گازها مقاومت نشان می‌دهند. تمامی این ویژگی‌ها ارزش‌های قابل‌توجهی برای استفاده از لاستیک‌ها در صنایع خودرو سازی به‌شمار می‌آید [1].

فرآیند قالب‌گیری تزریقی الاستومرها به‌منظور تولید انبوه، یکی از مهم‌ترین فرآیندهای ساخت می‌باشد [2]. امروزه این فرآیند پرکاربردترین شیوهٔ تولید قطعات لاستیکی در صنایع خودروسازی است. در این روش به لاستیک حرارت داده می‌شود تا بتواند درون حفره‌های قالب جاری شود. سپس این ماده تحت فشار قرار می‌گیرد و به درون یک قالب داغ بسته تزریق می‌شود تا همهٔ حفره قالب را پر کند و شکل مورد نظر را به خود بگیرد. پس از طی زمان مشخص و دست‌یابی به پخت بهینه، قطعه از قالب خارج می‌شود [3]. از آن‌جایی که گرمایش ناقص یا بیش از حد لاستیک سبب کاهش خواص مکانیکی آن می‌گردد، بنابراین یافتن زمان پخت بهینه در قطعات لاستیکی اهمیت فراوانی دارد [4].

در حال حاضر نحوهٔ دست‌یابی به زمان پخت بهینه، مبتنی بر تجربه و روش پر هزینهٔ سعی و خطا می‌باشد [3]. آزمایش‌های گوناگونی در زمان‌های مختلف از شروع قالب‌گیری انجام می‌شود تا زمان پخت قطعهٔ لاستیکی مشخص گردد. بنابراین استفاده از شبیه‌سازی رایانه‌ای به‌منظور یافتن زمان دست‌یابی به پخت بهینه بسیار مناسب خواهد بود.

در سال‌های اخیر مطالعهٔ عددی فرآیند ولکانش موضوع مورد علاقهٔ محققان بسیاری بوده است. در اکثر پژوهش‌های انجام گرفته، فرآیند ولکانش در قطعات لاستیکی بررسی شده است که به شیوهٔ قالب‌گیری فشاری تولید شده‌اند. در شرایطی که امروزه اکثر قطعات پیچیدهٔ خودرو به‌روش قالب‌گیری تزریقی تولید می‌شوند [2].

قریشی و نادری [5] در سال ۲۰۰۵ با توسعهٔ یک برنامهٔ کامپیوتری، فرآیند پخت در یک نمونهٔ ساده را بررسی کردند. آنها در این پژوهش از مدل سینیتیک پخت کمال- سرور برای نشان دادن رفتار پخت لاستیک استفاده نمودند که این مدل نتایج بسیار مناسبی را در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی ارائه داد. آریلاجا و همکارانش [6] در سال ۲۰۰۷ فرآیند پخت را در تولید قطعات به شیوهٔ قالب‌گیری تزریقی در یک مدل بسیار ساده و با ضخامت یکنواخت مطالعه نمودند. آنها در شبیه‌سازی خود مدل لزجت غیرنیوتنی- توانی را به‌کار گرفتند و از ضرایب مدل لزجت پیش‌فرض موجود در نرم‌افزار مولد فلو که تنها برای نوع خاصی از لاستیک معرفی شده است، استفاده کردند. رافعی و همکارانش [7] در سال ۲۰۰۹ با ارائهٔ مدلی جدید برای سینیتیک پخت، فرآیند ولکانش را در یک قطعهٔ صنعتی که به روش قالب‌گیری فشاری تولید شده است، مورد مطالعه عددی و آزمایشگاهی قرار دادند. ابهیلاش و همکارانش [8] در سال ۲۰۰۹ با تلفیق معادلهٔ انرژی و مکانیزم شیمیایی پخت، به حل عددی فرآیند ولکانش در یک ورق باریک با استفاده از مدل ساز و کاری (Mechanistic kinetic model) پخت پرداختند. مدل‌های ساز و کاری بسیار پیچیده‌اند و قابلیت استفاده در برنامه‌های عددی را ندارند [9]. خور و همکارانش [10] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از شبیه‌سازی رایانه‌ای، فرآیند قالب‌گیری تزریقی را بدون در نظر گرفتن مرحلهٔ پخت لاستیک بررسی کردند. رامورینو و همکارانش [3] در سال ۲۰۱۰ با استفاده از حل عددی، فرآیند قالب‌گیری تزریقی و پخت آمیزهٔ لاستیک را مطالعه نمودند؛ اما آنها نیز از خواص پیش‌فرض

موجود در نرم‌افزار مولد فلو برای فرآیند ولکانش آمیزهٔ لاستیکی استفاده نمودند. در سال ۲۰۱۳ لروی و همکاران [11] با ارائه مدل پختی که توانایی مدل‌سازی زمان برگشت (Reversion) در پخت را داشت، نتایج پخت مربوط به یک مدل آزمایشگاهی را ارائه دادند. حسینی و رزاقی [12] در سال ۲۰۱٤، سینیتیک پخت لاستیک را با هدف بررسی اثر مواد تشکیل دهندهٔ آمیزهٔ لاستیک مورد بررسی قرار دادند و اثر افزودن عوامل مختلف به ترکیب لاستیک را بر پخت آن ارزیابی نمودند [12].

در این پژوهش، ابتدا خواص مربوط به سینیتیک پخت لاستیک با استفاده از نتایج آزمایش‌های رئومتری به‌دست می‌آید. هم‌چنین ضرایب موجود در مدل ویسکوزیته غیر نیوتنی- توانی توسط داده‌های آزمایش ویسکومتری برای آمیزهٔ لاستیکی مورد نظر محاسبه می‌گردد. سپس یا اصلاح معادلهٔ سینیتیک پخت، معادلات مربوط به فرآیند پخت در قالب یک برنامه رایانه‌ای کمکی و به زبان C توسعه می‌یابد و به نرم‌افزار فلوئنت افزوده می‌گردد. با اضافه کردن این برنامهٔ کمکی به نرم‌افزار فلوئنت، می‌توان در هر لحظه از زمان توزیع درجهٔ پخت قطعهٔ مورد نظر را به‌صورت میدانی پیوسته (مانند دما و فشار) مشاهده نمود. از حل هم‌زمان معادلات سینیتیک پخت، جریان و انتقال حرارت، فرآیندهای پر شدن حفره (تزریق) و ولکانش شبیه‌سازی رایانه‌ای می‌شود و زمان رسیدن به پخت بهینه در قطعهٔ مورد نظر محاسبه می‌گردد. دقت نتایج عددی در پیش‌بینی زمان پخت قطعهٔ مورد نظر، با مقایسهٔ آن با زمان پخت حاصل از آزمایش سنجش استحکام (Stiffness) مشخص می‌گردد.

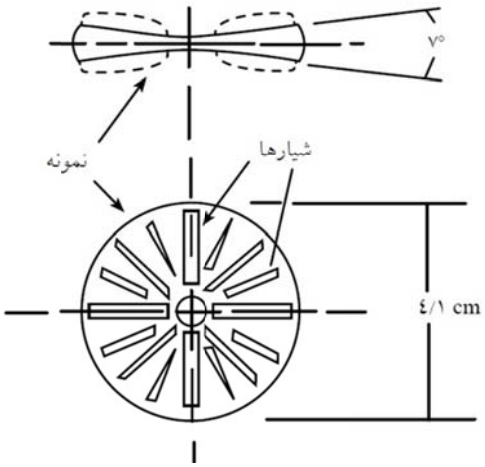
آزمایش‌ها

ترکیب آمیزه. در این پژوهش از یک آمیزه لاستیک تولید شرکت بسپار سازه از مجموعه کارخانه‌های گروه صنعتی پارت لاستیک استفاده گردیده است. این آمیزه که فرمول‌بندی ترکیبی معینی دارد، شامل ٪۶۰ NR، ٪۳۵ کربن سیاه و مواد نفتی و ٪۵ عامل پخت می‌باشد.

آزمایش رئومتری. آزمون رئومتری به‌وسیلهٔ MDR2000 ساخت شرکت آلفا تکنولوژی اکراین و بر طبق استاندارد ASTM D 2048 و حرکات نوسانی با زاویهٔ رفت و برگشت با دامنهٔ ۱ درجه در بسامد ۱/۷ HZ و و انحراف مجاز ۰/۰۳ انجام و تغییرات گشتاور برحسب زمان برای دماهای ۱٦۰، ۱۷۰ و ۱۸۰ درجه سلسیوس اندازه گیری شد. این آزمایش ۱۰ مرتبه انجام شد و تکرارپذیری آن تأیید گردید. مشخصات هندسی نمونهٔ آزمایشگاهی در شکل (۱) نشان داده شده است. منحنی‌های رئومتری گشتاور-زمان به‌کمک معادلهٔ (۱) به منحنی‌های درجه پخت-زمان تبدیل می‌گردد [13].

$$\alpha = \frac{\gamma_t - \gamma_0}{\gamma_\infty - \gamma_0} \qquad (۱)$$

که در آن α درجهٔ پخت و مقداری بین صفر و یک است، γ_∞ گشتاور در پایان زمان پخت، γ_t گشتاور در زمان t و γ_0 گشتاور در شروع زمان پخت است.



شکل ۱ نمونهٔ پخت شده در سامانهٔ رئومتر

آزمون سنجش استحکام. از آزمون سنجش سختی برای محاسبهٔ استحکام سختی قطعات لاستیکی پیچیده در زمان‌های مختلف از شروع فرآیند پخت استفاده می‌شود. این آزمون، معیار محاسبهٔ زمان پخت در قطعات پیچیده با ضخامت غیریکنواخت است که امکان آزمایش رئومتری برای آنها وجود ندارد [3]. در زمان‌هایی از شروع فرآیند پخت که احتمال می‌رود قطعهٔ لاستیکی به‌طور کامل پخت شده است، قطعهٔ لاستیکی از قالب خارج می‌شود و استحکام آن محاسبه می‌شود. زمان متناظر با بالاترین استحکام اندازه‌گیری شده به‌عنوان زمان پخت قطعهٔ مورد نظر شناخته و ثبت می‌شود. برای سنجش استحکام از ماشین سنجش خستگی دینامیکی (HT-9711) تولید شرکت هونگتا و ساخت کشور تایوان استفاده شده است. این آزمون در سه نوبت انجام و تکرارپذیری آن تأیید شده است. مشخصات این آزمایش در جدول (۱) درج شده است.

جدول ۱ مشخصات آزمون سنجش استحکام قطعهٔ لاستیکی

دمای آزمایش (^{0}C)	فرکانس (Hz)	دامنه (mm)	پیش بار (dN)
۱۶۵	۱	۱	۱۰

آزمون گرماسنجی. محاسبهٔ گرمای ویژهٔ آمیزه در آزمون کالریمتری ناهم‌دما به‌وسیلهٔ دستگاه (DSC-60) ساخت شرکت Shimadzu ژاپن و برطبق استاندارد ASTM E1269-05 با سرعت گرمادهی ۱۰ ^{0}C/min، در محدودهٔ دمایی ۱۸۰^{0}C–۷۰ روی نمونه‌ای به جرم تقریبی ۱۰mg انجام شده است. آزمایش در ٤ نوبت انجام و تکرارپذیری نتایج تأیید شد. مقادیر گرمای ویژه در دماهای مشخص در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲ مقادیر گرمای ویژه در دماهای مختلف

دما (^{0}C)	۱۵۳	۱۶۳	۱۷۳	۱۸۳	۱۹۳
گرمای ویژه (J/kg.K)	۱۲۰۰	۱۱۹۰	۱۱۸۵	۱۱۸۰	۱۱۷۵

آزمون گرانروی سنجی. از سامانهٔ RPA برای تعیین منحنی تغییرات گرانروی لاستیک برحسب سرعت برش استفاده شده است. این آزمایش در دمای ۱۲۰ درجه سلسیوس و شرایط فرکانس رفت و برگشتی (Frequency sweep) برطبق استاندارد ASTM D6204 انجام شده است. تکرارپذیری آزمایش نیز مورد تأیید قرار گرفت.

تعیین چگالی و ضریب رسانندگی. لاستیک‌ها تقریباً تراکم‌ناپذیرند و در حل عددی، چگالی آنها معمولاً ثابت فرض می‌شود. براساس مرجع [5] چگالی لاستیک برابر ۱۱۲۵ kg/m^3 در نظر گرفته می‌شود. ضریب رسانش لاستیک‌ها نیز تقریباً یکسان است و براساس مرجع [14] بیان می‌شود.

معادلات حاکم

معادلهٔ سینتیک پخت. پخت یک واکنش پیچیدهٔ شیمیایی است که در طی آن اتصالات عرضی بین زنجیرهای پلیمر به‌وجود می‌آید [15]. درجهٔ پخت نشان‌دهندهٔ مقدار پیشرفت واکنش در هر لحظه است که مقداری بین ۰ و ۱ دارد و با α نشان داده می‌شود. درجهٔ پخت بیان می‌کند که در هر زمان واکنش پخت به چه اندازه کامل شده است. مدل‌های مختلف برای توصیف رفتار پخت ماده ارائه شده‌اند. این مدل‌ها را می‌توان به دو گروه اصلی تقسیم نمود: مدل‌های ساز و کاری [16] و مدل‌های تجربی [6]. مدل‌های ساز و کاری، واکنش‌های شیمیایی را که در طی فرآیند پخت رخ می‌دهد، توصیف و مدل می‌کند. این مدل‌ها توازن گونه‌های شیمیایی درگیر در واکنش را به‌شکل روابط ریاضی که مسیر نرخ واکنش را به زمان پخت و دما مرتبط می‌کند، به‌طور کمی بیان می‌کند. این مدل‌ها دارای معادلات پیچیده‌ای هستند. مدل‌های تجربی شکل ساده‌تری دارند و در مطالعات شبیه‌سازی به‌طور

گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند [17]. این مدل‌ها جزئیات شیمیایی سامانه را نادیده می‌گیرند و از روابط تقریبی براساس نوع واکنش به‌کار رفته بهره می‌برند [6]. مدل‌های تجربی زیادی برای بیان رفتار پخت لاستیک ارائه شده‌اند که تنها برخی از آنها برای مدل های سه‌بعدی و ماهیت گذرا بودن فرآیند مناسب می‌باشند [18,19].

در اینجا از مدل کمال و سرور برای محاسبهٔ درجهٔ پخت استفاده شده است [5].

$$\alpha = \frac{k(t-t_i)^n}{1+K(t-t_i)^n} \qquad (۲)$$

در این معادله، n درجه واکنش و t_i زمان القاست. طی این زمان هیچ تغییر شیمیایی در لاستیک رخ نمی‌دهد و تنها لاستیک دستخوش تغییر فیزیکی گرمایش می‌شود. این زمان تابعی از دماست و به‌شکل آرنیوسی بیان می‌شود:

$$t_i = t_0 . \exp\left(\frac{T_0}{T}\right) \qquad (۳)$$

در معادلهٔ (۲)، k ثابت سرعت واکنش است که آن نیز دارای بیان آرنیوسی است:

$$k = k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) \qquad (٤)$$

که در آن t_0، T_0، k_0 و E خواص سینتیک پخت‌اند که به‌ترتیب ثابت زمانی، ثابت دمایی، ثابت سرعت واکنش و انرژی فعال‌سازی هستند. این ثابت‌ها با استفاده از برازش غیرخطی نتایج رئومتری توسط نرم‌افزار متلب، محاسبه می‌شوند. R ثابت جهانی گازها و T دمای مطلق در هر نقطه است.

به‌علت این‌که فرآیند پخت واکنشی گرمازاست، باید گرمای حاصل از آن به‌عنوان منبع گرمایی در معادلهٔ بقای انرژی در نظر گرفته شود. اگر درجهٔ پخت (α) براساس معادلهٔ (۵) بیان شود، آن‌گاه نرخ تولید حرارت برطبق معادلهٔ (٦) قابل تعریف است [5].

$$\alpha = \frac{Q_t}{Q_\infty} \qquad (۵)$$

$$\dot{Q} = Q_\infty \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \qquad (٦)$$

که در آن Q_t گرمای آزاد شده تا زمان t و Q_∞ گرمای کل آزاد شدهٔ واکنش است.

فرآیند پخت مواد الاستومری به‌طور عمده یک فرآیند ناهم‌دماست و باید مدل سینتیک پختی به‌کار رود که هم تأثیر زمانی و هم تأثیر تغییرات دما را روی سرعت و حالت پخت در نظر گیرد. برای دوره القا مدل پیشنهادی پیشین به‌شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد [6]:

$$\bar{t} = \int_0^t \frac{dt}{t_i(T)} \qquad (۷)$$

در این رابطه t_i (T)، وابستگی زمان القا به دما است که با معادلهٔ (۳) بیان می‌شود. زمانی که این زمان بی‌بعد مساوی ۱ شود، پخت لاستیک شروع می‌شود.

معادلات بقا. معادلات حاکم بر حل این مسأله عبارتند از: بقای جرم، اندازهٔ حرکت، کسر حجمی و انرژی. به‌دلیل رفتار غیر نیوتنی لاستیک از مدل لزجت غیرنیوتنی- توانی برای محاسبهٔ تنش برشی در معادلهٔ بقای اندازهٔ حرکت استفاده می‌شود. این مدل که جواب‌های مناسبی برای سیالات پلیمری ارائه می‌دهد [20,21]، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

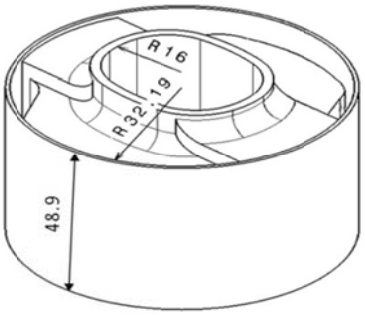
$$\mu = A(\dot{\gamma})^{B-1} \exp\left(\frac{T_0}{T}\right) \qquad (۸)$$

که در آن، A شاخص تغییرشکل پذیری سیال غیرنیوتنی است و مقدار میانگین لزجت را نشان می‌دهد. B مقدار انحراف از رفتار نیوتنی سیال، $\dot{\gamma}$ سرعت برش و T_0 دمای مرجع (معمولاً دمای آزمایش) است. ضرایب n و k با استفاده از برازش منحنی تغییرات لزجت- سرعت برش محاسبه می‌شود. با معلوم بودن این مقادیر، لزجت لاستیک در هر دما و نرخ برش قابل محاسبه خواهد بود.

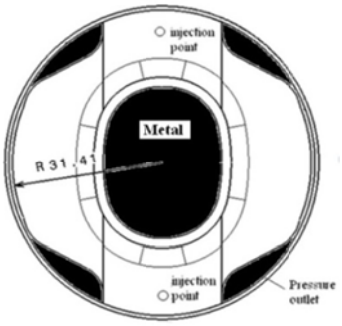
مدل عددی

مدل هندسی و شبکه‌بندی دامنهٔ حل. قطعهٔ مورد نظر که یافتن زمان پخت آن مورد نظر است، ضربه‌گیر خودروست که هندسه و ابعاد آن به میلی‌متر در شکل (۲) ارائه گردیده است. حجم داخلی که در شکل نیز مشخص گردیده است، فلز و سایر قسمت‌ها لاستیک است. در شکل (۳) شبکه‌بندی محیط حل نشان داده شده است. شبکهٔ مورد نظر به اندازهٔ کافی ظریف (۷۶۷۳٤٥ المان هرمی) انتخاب گردیده است؛ به‌طوری که حل عددی از تعداد نقاط شبکه مستقل می‌باشد.

شرایط مرزی. لاستیک مذاب در ورود به قالب (نقطهٔ تزریق در شکل (۲- ب) دارای شرط فشار ورودی با دمای مشخص است. در واقعیت در هنگام پر شدن قالب هوای موجود از منفذهای موجود در قالب خارج می‌شود. بنابراین برای جلوگیری از محبوس ماندن هوا، در حل عددی نوار بالایی قالب به‌عنوان خروجی در نظر گرفته شده است تا هوای موجود به خارج هدایت گردد (شکل ۲-ب). تمامی دیواره‌های قالب دارای شرط مرزی دما ثابت می‌باشند. فرض عدم لغزش در مجاورت دیوار نیز برقرار است. پارامترهای اصلی فرآیند قالب‌گیری براساس داده‌های ثبت شده ماشین تزریق در جدول (۳) ارائه گردیده است.

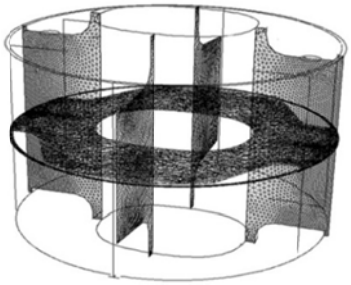


(الف)



(ب)

شکل ۲ قطعه لاستیکی (ابعاد به میلی‌متر) الف. نمای ایزومتریک، ب. نمای بالا (قسمت‌های سیاه‌رنگ نمایانگر فلز هستند)



شکل ۳ نمایش شبکه‌بندی قطعهٔ لاستیکی بر روی صفحات تقارن آن

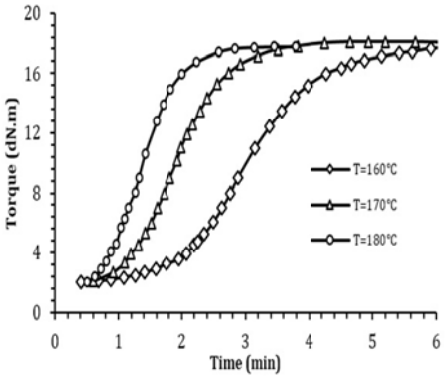
جدول ۳ مشخصات اصلی فرآیند قالب‌گیری تزریقی براساس داده‌های ثبت شدهٔ ماشین تزریق

دمای قالب (^0C)	دمای تزریق (^0C)	فشار تزریق (kg/cm^2)	زمان تزریق (s)
۱۷۵	٦٥	۹۰	۲٥±۱

نتایج و بحث

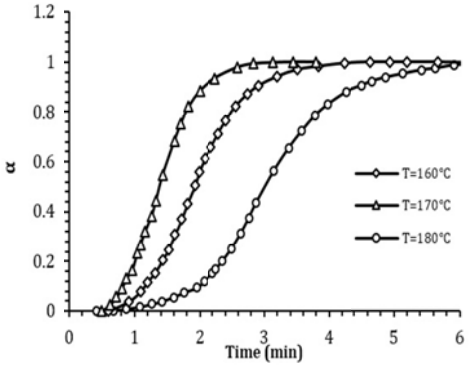
در این مقاله به‌کمک روش حل عددی، شبیه‌سازی رایانه‌ای فرآیند پخت در تولید یک قطعهٔ صنعتی که به شیوهٔ قالب‌گیری تزریقی تولید شده است، ارائه گردیده است. برای این منظور یک برنامهٔ کمکی که شامل معادلات سینیتیک پخت لاستیک می‌باشد، به نرم‌افزار فلوئنت افزوده می‌شود و با حل هم‌زمان این معادلات و معادلات بقا، فرآیند پخت لاستیک شبیه‌سازی می‌شود و زمان پایان پخت پیشگویی می‌گردد.

شکل (٤) منحنی تغییرات گشتاور نسبت به زمان (منحنی رئومتری) نمونهٔ آزمایشگاهی آمیزهٔ لاستیک مورد استفاده در قطعهٔ مورد نظر را در دماهای مختلف آزمایش نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر سه دما مقدار گشتاور با گذشت زمان افزایش می‌یابد؛ زیرا با افزایش زمان و آغاز واکنش پخت، اتصالات عرضی در ساختار پلیمر به‌وجود می‌آید و سبب افزایش لزجت آمیزه می‌گردد. بنابراین گشتاور عکس‌العملی ناشی از نوسان نمونه افزایش می‌یابد. به‌کمک معادلهٔ (۱) می‌توان منحنی رئومتری را به منحنی درجهٔ پخت-زمان تبدیل نمود.



شکل ٤ منحنی گشتاور زمان برای نمونهٔ آزمایشگاهی آمیزهٔ مورد استفاده در قطعهٔ لاستیکی در دماهای متفاوت

شکل (۵) تغییرات درجهٔ پخت-زمان را برای دماهای مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش دما و به‌دلیل افزایش سرعت واکنش، اتصالات پلیمری سریع‌تر شکل می‌گیرد و در نتیجه آمیزه در زمان کمتری به پخت ($\alpha\cong1$) دست پیدا می‌کند. هرچه دمای واکنش پخت بیشتر شده است، شیب منحنی پخت نیز افزایش یافته است. به‌منظور محاسبهٔ درجه و ثابت سرعت واکنش پخت در معادلهٔ (۲)، معادلهٔ سینیتیکی پخت بر روی منحنی‌های شکل (۵) برازش شده است. مقادیر t_0 و T_0 نیز به‌طور مستقیم از داده‌های رئومتری و ثابت‌های k_0 و E با استفاده از منحنی تغییرات Ln(k) برحسب معکوس دما (K) محاسبه می‌شوند. پارامترهای سینیتیک پخت در جدول (٤) ارائه شده‌اند.



شکل ۵ منحنی درجهٔ پخت برحسب زمان برای نمونهٔ آزمایشگاهی آمیزهٔ مورد استفاده در قطعهٔ لاستیکی در دماهای متفاوت

جدول ٤ خواص سینتیک پخت لاستیک براساس مدل کمال - سرور [۲۰]

K_0	n	E	t_0	T_0
$۱/۳۷\times۱۰^{۳۲}$	٤/۹۵۷	۳۵۸۸۳۲	$۲/۸۰\times۱۰^{-۱۱}$	۱۲٦۹۰

هم‌چنین با دقت در نتایج آزمایشگاهی مشاهده می‌شود که ثابت درجهٔ واکنش پخت (n) در هر دمایی مقدار متفاوتی دارد. در فرآیند پخت قطعات ضخیم (بیشتر از ۵ میلی‌متر) به‌سبب ضریب رسانش حرارت پایین لاستیک (W/m.K ٠/٤-٠/۲)، اختلاف دمای قابل

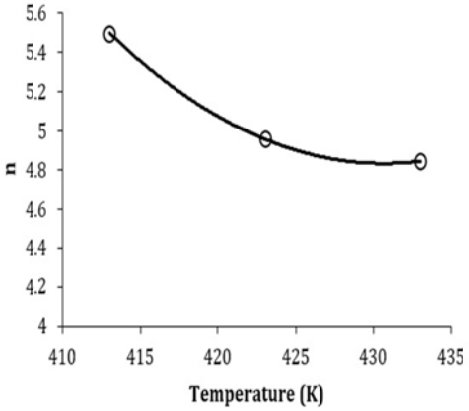
توجهی بین نواحی قطعهٔ لاستیکی وجود دارد و بنابراین هر نقطه از آن درجهٔ واکنش متفاوتی دارد. از آن‌جایی که پخت این قطعات در یک محدودهٔ دمایی متفاوت اتفاق می‌افتد، لازم است تا مدل پختی توسعه داده شود که توانایی محاسبه n در هر دما را دارا باشد. در این قسمت مدل کمال–سرور، با استفاده از رسم منحنی تغییرات درجهٔ واکنش برحسب دمای آزمایش که در شکل (٦) نشان داده شده است و با در نظر گرفتن یک تابع دو جمله‌ای برای n تصحیح شده است. بنابراین مدل سینیتیک پخت کمال–سرور در یک دمای ثابت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{kt^{aT^2+bT+c}}{1+kt^{aT^2+bT+c}} \qquad (۹)$$

در رابطهٔ بالا، ضرایب a، b و c ثابت‌های منحنی درجهٔ واکنش هستند و با استفاده از برازش منحنی و تغییرات درجهٔ واکنش برحسب دما محاسبه می‌شوند. این ضرایب در جدول (٥) درج شده‌اند.

جدول ٥ ضرایب معادلهٔ درجه ٢ درجهٔ واکنش سینیتیک پخت

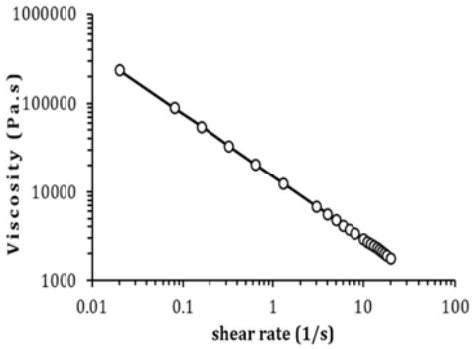
a	b	c
٠/٠٠٢١٢	−١/٨٣٠٤	٣/٩٨٩٩



شکل ٦ منحنی تغییرات درجهٔ واکنش پخت برحسب دما

اکنون با مشخص شدن تمامی پارامترهای معادلات سینیتیک پخت، امکان محاسبهٔ درجهٔ پخت در هر زمان با استفاده از هر دو مدل عادی کمال–سرور و تصحیح یافته وجود دارد.

برای مرحلهٔ تزریق نیز باید لزجت لاستیک مذاب که یک سیال غیرنیوتنی است، محاسبه شود. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، از آزمون گرانروی‌سنجی برای محاسبهٔ تغییرات لزجت لاستیک مذاب استفاده شده است. با داشتن منحنی تغییرات لزجت لاستیک برحسب نرخ برش که در شکل (٧) نشان داده شده است، ثابت‌های مدل لزجت در معادلهٔ (٨) به‌کمک برازش منحنی محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که داده‌های تجربی لزجت در دمای ^{0}C ١٢٠ ثبت شده‌اند. در جدول (٦) ثابت‌های مدل لزجت درج شده‌اند.



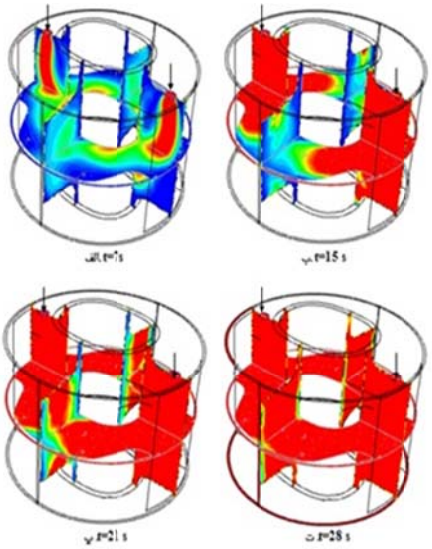
شکل ٧ منحنی تغییرات لزجت لاستیک مذاب برحسب نرخ برش در دمای 0C ١٢٠ با استفاده از آزمون گرانروی سنجی

جدول ٦ ثابت‌های مدل لزجت در دمای ^{0}C ١٢٠

A	B	T0
٥٥٠٣	٠/٢٩٢٩	٣٩٣

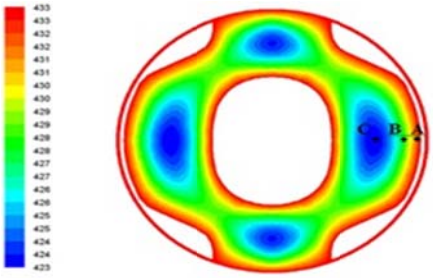
در شکل (٨) نحوهٔ پر شدن قالب توسط لاستیک در زمان‌های مختلف از شروع فرآیند تزریق نشان داده شده است. در این شکل کسر حجمی لاستیک در زمان‌های مختلف از شروع تزریق بر روی صفحه‌های تقارن مدل نشان داده شده است. براساس مشخصات ماشین تزریق زمان در جدول (٣) زمان لازم برای پر

شدن فضای قالب ۱±۲۵ ثانیه است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، حل عددی با دقت مناسبی این زمان را ۲۸ ثانیه پیش‌گویی کرده است.



شکل ۸ نحوهٔ پر شدن قالب توسط فاز لاستیک

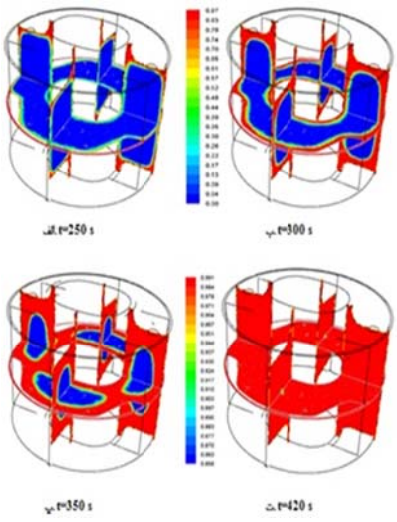
پس از پر شدن کامل قالب، با جایگزین کردن شرط مرزی دیواره به‌جای ورودی فشار، دبی ورودی جریان صفر می‌شود و آمیزه در اثر نفوذ حرارت از دیوارهٔ قالب به سمت داخل پخت می‌شود. در شکل (۹) توزیع پیوستهٔ میدان دما پس از گذشت ۲۵۰ ثانیه از شروع فرآیند بر روی صفحهٔ تقارن ضربه‌گیر (در راستای محور آن) ارائه گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اختلاف دمای زیادی بین بخش‌های مختلف ضربه‌گیر یعنی بین نقاط نزدیک به قالب و نقاط دور از آن به‌دلیل ضریب رسانش پایین لاستیک وجود دارد. چهار ناحیه در شکل با رنگ تیره مشخص است که با گذشت زمانی در حدود ۲۵۰ ثانیه از شروع گرما دادن، هنوز به دمای نهایی قالب نرسیده‌اند. سه نقطهٔ متفاوت A، B و C در این شکل مشخص شده‌اند که موقعیت مختلفی نسبت به سطح قالب دارند. نقطه A نزدیک‌ترین و نقطهٔ C دورترین نقطه به سطح قالب است. مشخص است که هر نقطهٔ ضربه‌گیر تاریخچهٔ دمایی متفاوتی دارد. این اختلاف دما که مخصوصاً در قطعات ضخیم قابل‌توجه است، سبب می‌گردد که هر ناحیه از ضربه‌گیر و در هر زمان از فرآیند، درجهٔ پخت متفاوتی داشته باشد. بنابراین نواحی لاستیک، مقادیر متفاوتی از درجهٔ واکنش (n) را تا انتهای فرآیند تجربه می‌کنند. لذا استفاده از مدل سینیتیک پختی که توانایی محاسبهٔ مقادیر مختلف درجهٔ واکنش را برحسب زمان داشته باشد، ضروری است.



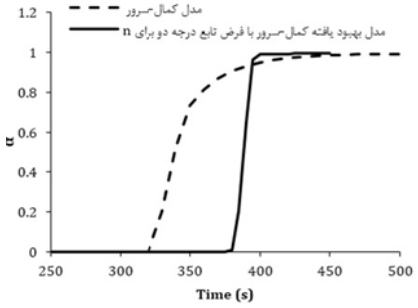
شکل ۹ توزیع پیوستهٔ دما روی صفحهٔ تقارن قطعهٔ لاستیکی در زمان t=250 s

در شکل (۱۰) توزیع پیوستهٔ درجهٔ پخت با استفاده از مدل پخت کمال-سرور تصحیح شده (معادلهٔ ۹) بر روی صفحه‌های تقارن ضربه‌گیر و در زمان‌های گوناگون از ابتدای فرآیند ولکانش ارائه گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، در زمان t=۲۵۰s واکنش پخت از لبه‌ها و نواحی نزدیک به قالب شروع گردیده است. از دیدگاه فیزیکی دمای این نقاط به‌دلیل مجاورت به قالب زودتر از سایر نقاط افزایش می‌یابد و سبب می‌شود که زودتر به پخت برسد. از نظر تئوری و طبق معادلهٔ (۷)، افزایش دما سبب می‌گردد که انتگرال محاسبه شده (دورهٔ القا) در زمان کمتری به یک برسد و در نتیجه واکنش پخت زودتر شروع شود. در زمان t=۳۵۰s نقاط نزدیک به قالب کاملاً پخت شده‌اند؛ در حالی که درجهٔ پخت نقاط میانی ضربه‌گیر صفر است. همان‌طور که قبلاً بیان شد علت این رفتار در پایین بودن ضریب رسانش حرارتی لاستیک می‌باشد. در

شکل (۱۱) منحنی درجهٔ پخت-زمان قطعهٔ لاستیکی با استفاده از دو مدل کمال –سرور عادی و تصحیح شده در این مقاله، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمان پخت (معادل درجهٔ پخت ۰/۹۹) در مدل معمولی کمال- سرور در حدود t=٤٧٠s و در مدل تصحیح یافته در حدود t=٤٠٠s می‌باشد.



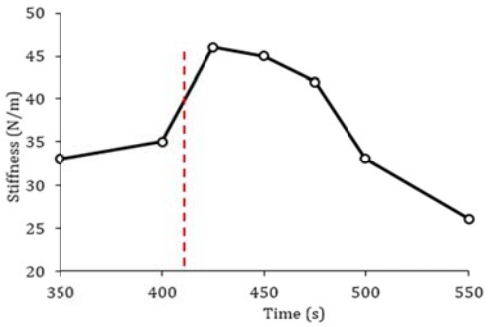
شکل ۱۰ توزیع پیوستهٔ میدان پخت قطعهٔ لاستیکی در زمان‌های مختلف، در مدل معمولی کمال- سرور در حدود t=450 s و در مدل تصحیح یافته در حدود t=420 s می‌باشد.



شکل ۱۱ مقایسهٔ منحنی درجهٔ پخت – زمان برای دو مدل عادی و تصحیح یافتهٔ کمال – سرور

همان‌طور که قبلاً بیان شد، آزمون استحکام به‌منظور یافتن زمان پخت بهینه برای قطعات پیچیده انجام می‌گردد؛ بدین صورت که در زمان‌های مختلف از فرآیند ولکانش، قطعه از قالب خارج و میزان استحکام آن سنجیده می‌گردد. نتایج آزمایش استحکام برای ضربه‌گیر در زمان‌های مختلف پخت در شکل (۱۲) ارائه شده است. از آنجا که در بهترین زمان پخت، قطعه بالاترین خواص مکانیکی از جمله استحکام را دارا است [3]، لذا هر زمان از فرآیند که قطعه بالاترین استحکام را داشته باشد به‌عنوان زمان پخت بهینه شناخته می‌شود. بنابراین در شکل (۱۲)، ضربه‌گیر در زمان t=٤٢٧ s دارای بیشترین استحکام می‌باشد و این زمان به‌عنوان زمان پایان پخت بهینهٔ آزمایشگاهی شناخته می‌گردد. لازم به ذکر است که ضریب رسانش لاستیک در حین فرآیند پخت به‌طور خطی با دما کاهش می‌یابد [5]. در این پژوهش ضریب رسانش لاستیک قبل از واکنش پخت و دارای مقدار ثابت در کل فرآیند فرض شده است که این فرض موجب می‌گردد نواحی میانی لاستیک (نقطهٔ C در شکل ۹) زودتر به دمای نهایی خود دست می‌یابد و زمان پخت، اندکی زودتر از معمول گزارش گردد.

بنابراین مشاهده می‌شود که مدل سینتیک پخت تصحیح شده در این پژوهش به‌دلیل در نظر گرفتن یک تابع درجهٔ دوم برای تغییرات درجهٔ واکنش پخت نسبت به دما، با دقت بیشتری زمان پایان پخت قطعهٔ لاستیکی سه‌بعدی را پیش‌بینی کرده است. بنابراین می‌توان زمان پایان پخت را در قطعات پیچیدهٔ لاستیکی که در فرآیند قالب‌گیری تزریقی تولید می‌شوند، بدون نیاز به آزمون‌های سعی و خطا که منجر به افزایش ضایعات و هزینه‌های تولید می‌گردند، محاسبه نمود.



شکل ۱۲ منحنی تغییرات استحکام قطعهٔ لاستیکی در زمان‌های مختلف از شروع فرآیند ولکانش

نتیجه‌گیری

در این پژوهش فرآیند ولکانش لاستیک در تولید قطعات لاستیکی به روش قالب‌گیری تزریقی با هدف محاسبهٔ زمان پخت مورد مطالعهٔ عددی قرار گرفته است. به‌منظور محاسبهٔ خواص سینیتیک پخت، از داده‌های آزمایش رئومتری که به پخت یک نمونهٔ آزمایشگاهی می‌پردازد، استفاده شده است. برای محاسبهٔ پارامترهای مدل لزجت، از آزمایش گرانروی‌سنجی و برای تعیین ظرفیت گرمای ویژهٔ لاستیک از آزمایش گرماسنجی استفاده شده است. هم‌چنین مدل سینیتیک پخت لاستیک به‌منظور افزایش دقت، اصلاح شده است. مشخص گردید که مدل اصلاح شده با فرض یک تابع درجه دو برای درجهٔ واکنش پخت، با دقت بالاتری زمان پخت قطعهٔ لاستیکی را پیش‌بینی کرده است.

فهرست علائم

A	شاخص تغییرشکل‌پذیری در مدل لزجت
B	مقدار انحراف از رفتار نیوتنی در مدل لزجت
C_P	گرمای ویژه ($JKg^{-1}K^{-1}$)
E	انرژی فعال‌سازی واکنش پخت ($Jg^{-1}mol^{-1}$)
k	سرعت معادلهٔ پخت
k_0	ثابت سرعت معادلهٔ پخت
Q_t	گرمای آزاد شده واکنش پخت تا زمان t (J)
Q_∞	کل گرمای آزاد شدهٔ واکنش پخت (J)
Q°	سرعت تولید حرارت (W)
R	ثابت جهانی گازها ($Jmol^{-1}K^{-1}$)
t	زمان (s)
t_i	دورهٔ القا
t_0	ثابت زمانی در معادلهٔ دورهٔ القا
T	دما (K)
T_0	ثابت دمایی در معادلهٔ دورهٔ القا
n	درجهٔ واکنش پخت

علایم یونانی

α	درجهٔ پخت
γ_0	گشتاور در شروع واکنش پخت (dN.m)
γ_t	گشتاور در زمان t (dN.m)
γ_∞	گشتاور در انتهای واکنش پخت (dN.m)

تقدیر و تشکر

از همکاری صمیمانهٔ گروه صنعتی پارت لاستیک در ارائهٔ نتایج آزمایشگاهی تقدیر و تشکر می‌گردد.

مراجع

1. Vergnad, J.M. and Rosca, I.D., "*Rubber Curing and Properties"*, CRC Press, Taylor-Francis Group. New York pp. 1-11, (2009).
2. Holm, E.J. and Langtangen, H.P., "A Unified Finite Element Model For The Injection Molding Process", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 178, pp. 413-429, (1999).
3. Ramorino, G., Girardi, M., Agnelli, S. and Franceschini, A., "Injection Molding of Engineering Rubber Components: A Comparison Between Experimental Results and Numerical Simulation", *International Journal of Material Forming*, Vol. 3, pp. 551-554, (2010).
4. Zhang, P., Zhao, F., Yaun, Y., Shi, X. and Zhao, S., "Network Evolution Based on General-Purpose Diene Rubbers/Sulfur/TBBS System During Vulcanization (I)", *Polymer*, Vol. 51, pp. 257-263, (2010).
5. Ghoreishy, M.H.R. and Naderi, G., "Three Dimensional Finite Element Modeling of Rubber Curing Process", *Journal of Elastomers and Plastics*, Vol. 37, pp. 37-53, (2005).

6. Arrillaga, A., Zaldua, A. M.R., Atxurra, M. and Farid, A.S., "Techniques Used For Determining Cure Kinetics of Rubber Compounds", *European Polymer Journal*, Vol. 43, pp. 4783-4799, (2007).
7. M. Rafei, M.H.R. Ghoreishy, Naderi, G., "Developments of An Advanced Computer Simulation Technique for the Modeling of Rubber Curing Process", *Computational Materials Science*, Vol. 47, pp. 539-547, (2009).
8. Abhilash, P.M., Kannan, K. and Varkey, B., "Simulation of Curing of a Slab Rubber", *Materials Science and Engineering*, Vol. 168, pp. 237-241, (2010).
9. Ghosh P., Katare, S. and Caruthers, J.M., "Sulfur Vulcanization of Natural Rubber for Benzothiazole Accelerated", Rubber Chemistry and technology, Vol. 76, pp. 592-693, (2003).
10. Khor, C., Ariff, Y. Z. M., Ani, F. C., Mujeebu, M., Abdullah, M. K. and Joseph, M. A., "Three-Dimensional Numerical and Experimental Investigations on Polymer Rheology In Meso-Scale Injection Molding", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 131-139, (2010).
11. Leroy, E., Souid, A. and Deterre, R., "A continuous kinetic model of rubber vulcanization predicting induction and reversion", *Polymer Testing,* Vol. 32, pp. 575-582, (2013).
12. Hosseini, M. and Razzaghi, M., "Vulcanization kinetics of nano-silica filled styrene butadiene rubber", *Polymer,* Vol. 55, pp. 6426-6434, (2014).
13. Dongcheol, C., Abdul Kader, M., Baik-Hwan, C., Yang, I. and Changwoon, N., "Vulcanization kinetics of nitrile rubber/layered clay nanocomposites", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 98, pp. 1688-1696, (2005).
14. Javadi, M., Moghiman, M., Erfanian, M.R. and Hosseini, N., "Numerical Investigation of Curing Process in Reaction Injection Molding of Rubber For Quality Improvements", *Key Engineering Materials*, Vol. 462, pp. 1206-1211, (2011).
15. Bianchi, O., Fiorio, R., Martins, J.N., Zattera, A.J. and Scuracchio, C.H., "Crosslinking Kinetics of Blends of Ethylene Vinyl Acetate and Ground Tire Rubber", *Journal of Elastomers and Plastics,* Vol. 41, pp. 175-189, (2009).
16. Fan, R.L., Zhang, Y., Huang, C. and Gong, P., "Simulation and Verification For Sulphur Accelerated Vulcanization of Gum Natural Rubber Compound", *Rubber Chemistry and technology*, Vol. 75, pp. 287-295, (2002).
17. Ghoreishy, M. H. R., Rafei, M., Naderi, G., Bakhshandeh, G. R. and Nasiri, M., "Computer Simulation of Cure Process of an Axisymmetric Rubber Article Reinforced by Metal Plates Using Extended ABAQUS Code", *Iranian Journal of Polymer Science and Technology*, Vol. 23, pp. 121-131, (2010).
18. Isayev, AI. and Deng, J. S., "Non Isothermal Vulcanization of Rubber Compounds", *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 61, pp. 340-361, (1988).
19. Tong, J. and Yan, X., "Non Isothermal vulcanization of rubber compounds", *Journal of Reinforced Plastic and Composites* , Vol. 22, pp. 983-1002, (2003).
20. Kamal, M. and Sourour, S., "Kinetics and Thermal Characterization of Thermoset cure", *Polymer Engineering and Science,* Vol. 13, pp. 590-599, (1973).
21. Del Coz, J. J., Diaz Garcia Nieto, P. J. and Bello Garcia, Guerrero Munoz, A., J., "Finite Volume Modeling of The Non-Isothermal Flow of a Non-Newtonian Fluid in a Rubber's Extrusion Die", *Journal of Non-Crystalline Solids*, Vol. 354, pp. 5334-5336, (2008).

تخریب خمشی جاذب‌های انرژی جدار نازک و ارائهٔ مدل ساده‌شدهٔ عددی*

(یادداشت پژوهشی)

احمد رحمتی علایی[۱] محسن غضنفری[۲] مجید شهروی[۳]

چکیده *سیستم‌های جذب انرژی ضربه در صنایع مختلف به‌ویژه در صنایع خودروسازی و ریلی به‌عنوان راه‌حلی برای کم کردن اثر ضربهٔ وارد به سرنشینان و بالا بردن ایمنی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این مقاله بر روی رفتار تخریب خمشی جاذب‌های انرژی جدار نازک با مقاطع دایروی و مربعی تمرکز می‌کند. تئوری به‌کار گرفته‌شده در آن تعادل انرژی کل است. مود متداول تخریب خمش جهت استخراج روابط، مد نظر می‌باشد. به همین منظور روابط به‌دست آمده با نتایج منتشرشده برای مقاومت خمشی سازه‌های لوله‌ای جدار نازک شامل مطالعات آزمایشگاهی و تحلیلی مقایسه شده‌اند. در ادامه با استفاده از رابطهٔ مقاومت خمشی استخراج‌شده، مدل‌های ساده‌شده برای لوله‌های دایروی و مربعی معرفی می‌گردند. مزیت اصلی مدل‌های ساده‌شده به‌عنوان یک تکنیک مدل‌سازی بحرانی، کاهش چشمگیر در زمان محاسبات رایانه در مراحل اولیهٔ طراحی با ارائهٔ نتایج نزدیک به مدل اصلی است. بدین منظور با شبیه‌سازی ضربهٔ محوری لولهٔ دارای خم با کمک نرم‌افزار المان محدود دینامیکی غیرخطی LS-DYNA، نتایج به‌دست آمده مقایسه گردیده‌اند، تا دقت مدل ساده‌شده و هم‌چنین رابطه مقاومت خمشی استخراج‌شده صحت‌سنجی گردد.*

واژه‌های کلیدی جاذب انرژی، دایروی-مربعی، ضربه، تخریب خمشی، مدل ساده‌شده.

Bending Collapse of Thin Walled Energy Absorber and Presenting Numerical Simplified Model

A. Rahmati M. Ghazanfari M. Shahravi

Abstract Impact energy absorption systems in various industries such as automotive and railway have a particular importance to minimize the impact on passengers and enhance vehicle safety. This paper focuses on the bending collapse behavior of thin-walled energy absorber with circular and square cross sections. The theory that is applied is global energy equilibrium and the prevalent bending collapse mode for obtaining the relationship is considered. On the same basis, obtained relations are compared with the published results for the bending strength of tubular structures which were derived from experimental and analytical studies. Subsequently by using the derived bending strength formula, simplified models for circular and square tubes is introduced. The main advantage of these simplified models as a critical modeling technique is dramatically reducing the time of computer simulation in early design stages with the results close to the original model. For this purpose, by axial crash simulation of curved tube by using nonlinear dynamic finite element software LS-DYNA, the results are compared to verify the efficiency of the proposed simplified model and the accuracy of the derived relationship for tube's bending strength.

Key Words Energy absorber, Circular-square, Crash, Bending collapse, Simplified model.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۲/٤/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۰/۷ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک (ماشین‌های ریلی)، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران.

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک (ماشین‌های ریلی)، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران.

(۳) نویسندهٔ مسئول، استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران. m_shahravi@iust.ac.ir

مقدمه

سازه‌های جدار نازک به‌طور گسترده در صنایع متعدد مهندسی به‌ویژه صنعت خودرو و ریلی به‌عنوان جاذب‌های انرژی استفاده می‌شوند. از جمله این کاربردها می‌توان به جذب انرژی ضربهٔ ناشی از حوادث رانندگی اشاره کرد. لوله‌های جدار نازک به‌خاطر سبکی، ظرفیت جذب انرژی بالا، طول لهیدگی زیاد و نسبت جذب انرژی به وزن بالا به‌عنوان یکی از کارآمدترین سیستم‌های جذب انرژی کاربرد روزافزونی پیدا کرده‌اند. تاکنون مطالعات انجام‌شده برای افزایش کارایی جذب انرژی، ایمنی و قابلیت اطمینان آن‌ها در برابر رفتار ضربه مورد توجه بسیاری از محققان بوده است. این مقاله نیز بر روی یک جاذب انرژی S شکل که می‌توان آن را به‌عنوان شکل ساده‌ای از انتهای جلوی سر شاسی خودرو در نظر گرفت، تمرکز می‌کند. در اینجا با استفاده از روش تعادل انرژی، روابط بین نیروها و کاهش طول محوری در فشردگی و هم‌چنین رابطهٔ ممان اعمال‌شده و زاویهٔ چرخش در ضربهٔ خمشی به‌دست آمده است. لازم به ذکر است مطالعات قبلی معادلات ریاضی متعددی را برای شرح و پیش‌بینی ارتباط انواع سازه‌های جدار نازک توسعه داده‌اند. این معادلات در پیش‌بینی رفتار ضربهٔ این‌گونه از سازه‌ها اهمیت بسیاری دارند. ایدهٔ این تحقیق نیز بر این اصل تأکید می‌کند که معادلات مربوط می‌توانند جهت معرفی مدل‌های ساده‌شده برای سازه‌های جدار نازک استفاده شوند و هم‌چنین قابلیت جایگزینی با مدل‌های دقیق در تحلیل‌های ضربه را دارا هستند. مزیت اصلی مدل‌های ساده‌شده کاهش زمان تحلیل در رایانه با ارائه نتایج نزدیک به مدل اصلی است.

لیو و دی [1] مشخصات خمشی تیرهای جدار نازک با مقطع کانالی شکل C را توسعه دادند. هم‌چنین ککمن [4]، ویرزبیکی و همکارانش [5-6] معادلاتی را توسعه دادند که مقاومت خمشی و محوری تیرهای جدار نازک را با مقطع قوطی شکل پیش‌بینی می‌نماید. علاوه بر این سازه‌ها، لوله‌های دایروی جدار نازک سازه‌های مهمی هستند که به‌طور گسترده در صنایع خودروسازی در طراحی وسایل سبک‌وزن استفاده می‌شوند. تاکنون ضربهٔ محوری لوله‌های دایروی جدار نازک به‌طور کامل بررسی و به‌صورت آزمایشگاهی و تحلیلی با تئوری‌های مناسب شرح داده شده‌اند.

آبراموویچ و همکارانش [7] رفتار ضربهٔ محوری لوله‌های دایروی را بررسی نمودند که شامل اثر سرعت ضربه و مشخصه‌های جذب انرژی این لوله‌ها هست. در کار آن‌ها معادلات مهمی استخراج گردید که بر پایهٔ روش‌های عددی و تأییدشده با آزمایش هستند. علاوه بر این مورد، ژنگ و همکارانش [8] پاسخ ممان–زاویه را برای سازه‌های لوله‌ای از طریق بررسی‌های تحلیلی و آزمایشگاهی به‌دست آوردند.

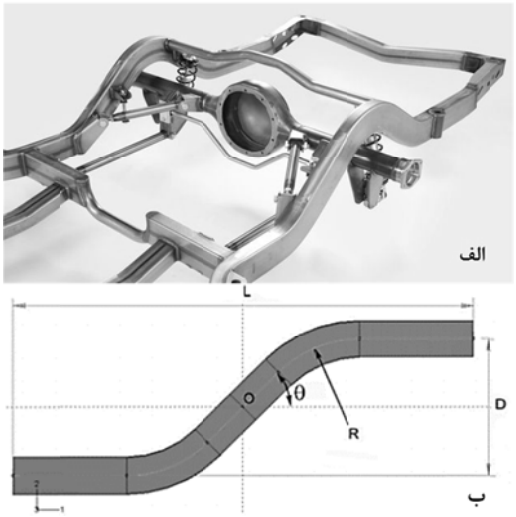
در این مقاله، مکانیزم تخریب خمشی لولهٔ جدار نازک بررسی شده است و بر پایهٔ آن پاسخ ممان–زاویه از طریق روش تعادل انرژی استخراج گردیده است. در ادامه، یافته‌های این تحقیق با نتایج ژنگ برای صحت‌سنجی مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است مدل ساده‌شده نیز یک تکنیک مدل‌سازی بحرانی است که می‌تواند به‌طور مستقیم در مراحل اولیهٔ طراحی برای ارزیابی تحلیل‌های ضربه و شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گیرد.

مدل ساده‌شده، یک مدل اجزای محدود می‌باشد که شامل المان‌های تیر و فنر است که در قیاس با مدل دقیق به‌کار و زمان کمتری برای تحلیل نیاز دارد. ضمناً می‌تواند به‌عنوان پاسخ مناسب برای شبیه‌سازی سریع و کارآمد کامپیوتری در نظر گرفته شود [1]. در این مدل از رابطهٔ ممان–زاویهٔ به‌دست آمده از روش تعادل انرژی استفاده شده است تا در آن المان‌های فنر غیرخطی تعریف گردد و رفتار ضربه برای خطوط پلاستیک محوری شبیه‌سازی شود [10]. نتایج مقایسه تطابق مناسبی را بین مدل ساده‌شده و مدل دقیق نشان می‌دهد، لذا صحت رابطهٔ ممان–زاویهٔ استخراج‌شده

برای لوله جدار نازک تأیید می‌گردد.

جاذب انرژی S شکل

شکل (۱-الف) نمایی از شاسی یک خودرو را نشان می‌دهد. بسیاری از قطعات شاسی و بدنهٔ خودروها از سازه‌های جدار نازک فولادی تشکیل شده‌اند. مطابق شکل (۱-ب) سازه جدار نازک S شکل را می‌توان به‌عنوان یک نمونهٔ ساده‌شده از نردهٔ پایین قسمت جلوی شاسی خودرو در نظر گرفت [2, 11].



شکل ۱ جاذب انرژی S شکل (الف) شاسی خودرو (ب) مدل ساده‌شده برای نردهٔ پایین و جلوی شاسی خودرو

مکانیزم تخریب خمشی

در این بخش روابط ممان-زاویه برای لوله‌های جدار نازک با به‌کارگیری روش تعادل انرژی کل استخراج می‌شود. مود تخریب متداول این لوله‌ها در شکل ۲ نشان داده شده است. این مود از نتایج شبیه‌سازی عددی لولهٔ استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده در معرض تخریب خمش سه نقطه‌ای پیش‌بینی و نیز از طریق آزمایش‌های خمش تأیید شده است [9]. لازم به ذکر است اگرچه در این شکل مود تخریب خمش سه نقطه مد نظر است اما هم‌چنان می‌تواند با مود تخریب ضربهٔ محوری تطبیق داده شود [9] و این فرض با مقایسهٔ شکل تغییریافته برای مدل لوله‌های دایروی جدار نازک بعد از تست ضربهٔ محوری و خمش سه‌نقطه تأیید می‌گردد (شکل ۳).

در حین استخراج روابط، فرض شده است که کل کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ نیروهای خارجی توسط سازه جذب گردد و به‌کار خارجی تبدیل شود. بر اساس روش کار مجازی، انرژی درونی در طول ٦ خط گذرندهٔ محوری توزیع می‌گردد (خطوط ۱ تا ٦ در شکل ۲) که برابر با حاصل‌ضرب ممان خمشی بر واحد طول (M_0) در اندازهٔ هر کدام از خطوط محوری است.

بر پایه فرض‌های بالا رابطهٔ ممان $M(\theta)$ می‌تواند طبق فرمول‌های زیر محاسبه شود. از روابط هندسی نشان داده‌شده در شکل (۲) می‌توان دریافت:

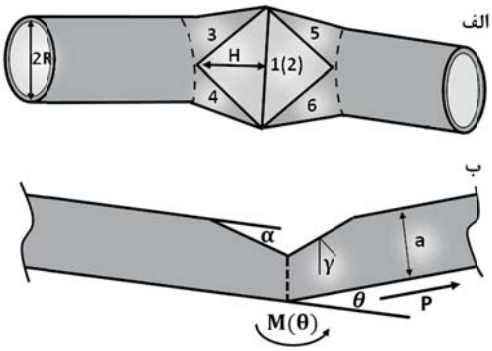
$$\delta = 2H(1-\cos\alpha) \qquad (۱)$$

که δ کاهش طول محوری مربوط به تاشدگی پلاستیک، H نصف طول تاشدگی و α زاویهٔ تاشدگی است. بر پایهٔ تعادل انرژی در حین ضربه، نرخ انرژی درونی جذب‌شده با مکانیزم تخریب بایستی برابر با نرخ کار انجام‌شده توسط نیروهای خارجی باشد. بنابراین:

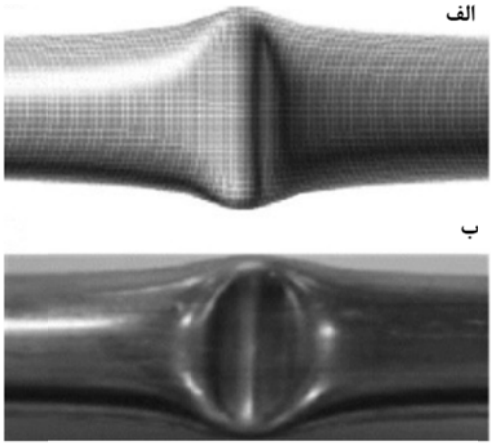
$$E_{ext} = E_{int} \Longrightarrow \dot{E}_{ext} = \dot{E}_{int} \qquad (۲)$$

بر پایهٔ قانون کار مجازی، نرخ کار نیروی خارجی می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضرب نیروی لحظه‌ای و سرعت نسبی متناظر با مکانیزم کوتاه‌شدگی محوری بیان شود. بنابراین کار در واحد زمان برای نیروی خارجی برابر خواهد بود با:

$$\dot{E}_{ext} = P\dot{\delta} = 2PH\,\sin\alpha\,\dot{\alpha} \qquad (۳)$$



شکل ۲ مکانیزم تخریب لولهٔ دایروی (الف) نمای صفحه‌ای (ب) نمای برش خورده، نیروی لحظه‌ای P و ممان M(θ)



شکل ۳ مود تخریب از شبیه‌سازی کامپیوتری (الف) ضربهٔ محوری (ب) خمش سه نقطه‌ای [3]

نیروی P همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده است نیروی ضربهٔ ایجادشده حاصل از برخورد لوله جدار نازک با دیوار صلب است که در قسمت بعد به‌صورت عبارتی از شعاع متوسط لوله، ضخامت t و زاویهٔ خمش لحظه‌ای θ معرفی می‌گردد. از شکل (۲) مشاهده می‌گردد که تاشدگی در این شش خط محوری رخ می‌دهد، لذا فرض می‌شود در حین ضربه، انرژی درونی در طول ٦ خط محوری (۱ تا ٦) توزیع گردد و هم‌چنین به‌دلیل مکانیزم متقارن، انرژی درونی به‌طور مساوی بین خطوط ۱ تا ٦ تقسیم می‌گردد. بنابراین نرخ کل انرژی جذب‌شده برابر است با:

$$\dot{E}_{int} = \sum_{i=1}^{6} \dot{E}_i = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + 4\dot{E}_3 \qquad (٤)$$

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود طول خطوط محوری ۱ و ۲ برابر با نصف محیط دایره یعنی (πR) و طول خطوط ۳ تا ٦، $\sqrt{\frac{(\pi R)^2}{4} + H^2}$ محاسبه می‌شود. بنابراین نرخ چرخش خط محوری ۱ برابر با نرخ خمش H (یعنی $\dot{\alpha}$) است. از شکل مشابه نتیجه می‌گردد که نرخ چرخش خط محوری ۲ برابر با $\dot{\theta}$ است. خطوط محوری ۳ تا ٦ نیز با زاویهٔ متفاوتی نسبت به خطوط ۱ و۲ چرخش دارند. در روابط ذیل این چرخش با زاویهٔ $\dot{\gamma}$ نشان داده شده است. (شکل ٤)

مطابق جدول (۱) نرخ انرژی توزیع‌شده در طول خطوط محوری برابر است با:

$$\dot{E}_1 = M_0 \pi R \dot{\alpha} \qquad (٥)$$

$$\dot{E}_2 = M_0 \pi R \dot{\theta} \qquad (٦)$$

$$\dot{E}_3 = M_0 \sqrt{\frac{(\pi R)^2}{4} + H^2}\,\dot{\gamma} \qquad (٧)$$

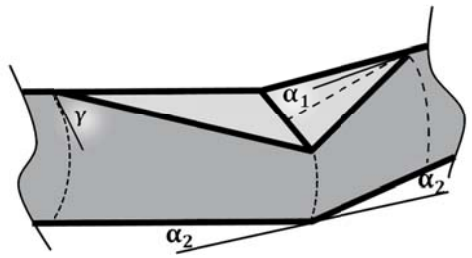
جدول ۱ خطوط محوری در مود تخریب لوله جدار نازک

خط محوری	نرخ زاویه چرخش	اندازه
خط ۱	$\dot{\alpha}$	πR
خط ۲	$\dot{\theta}$	πR
خط ۳ الی ٦	$\dot{\gamma}$	$\sqrt{\frac{(\pi R)^2}{4} + H^2}$

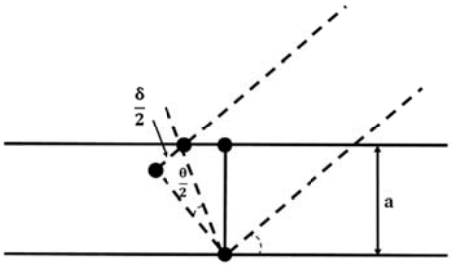
از شکل (٥) استنباط می‌شود که: $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{\delta}{2}}{a} = \frac{H(1-\cos(\alpha))}{a}$. پارامتر a عرض معادل سطح مقطع مربعی برای سطح مقطع دایروی است. از بررسی‌های قبلی در مرجع [8] در مورد سازه‌های جدار نازک می‌توان دریافت که مشخصه‌های حل برای مقاطع مربعی و دایروی بسیار شبیه هم هستند. بنابراین هر لولهٔ دایروی می‌تواند با استفاده از لولهٔ مربعی معادل، تقریب زده شود. مطابق مرجع [8] عرض معادل لوله

مربعی با روش تحلیلی، R ۱/٦۳ محاسبه و تأیید شده است که با این مقدار ممان اول سطح مقطع دایروی و مربعی یکسان است. برای مقادیر کوچک زوایای α و θ رابطهٔ زیر می‌تواند با استفاده از بسط تیلور نوشته شود:

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\frac{\delta}{2}}{a}=\frac{H(1-\cos(\alpha))}{a}=\frac{H\left(1-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right)}{a}$$
$$\Longrightarrow \theta=\frac{H}{a}\alpha^2 \Longrightarrow \alpha=\left(\frac{a\theta}{H}\right)^{0.5} \quad (۸)$$



شکل ٤ زاویهٔ چرخش γ برای خطوط محوری ۳ تا ٦



شکل ٥ رابطه بین α و θ

زاویهٔ γ با رابطهٔ $\tan(\gamma)=\left(\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\sin(\alpha)}\right)$ به α و θ مرتبط می‌شود.

$$\gamma=\frac{(\theta/2)}{\alpha}=\frac{1}{2}\frac{H}{a}\alpha \Longrightarrow \gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{H\theta}{a}\right)^{0.5} \quad (۹)$$

از جای‌گذاری رابطهٔ (۹ و ۸) در روابط (۷-٤) رابطهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$\dot{E}_{int}=M_0\dot{\alpha}\left(\pi R+\frac{2\pi\alpha H}{1.63}+\sqrt{\left(\frac{\pi^2R^2}{4}+H^2\right)}\left(\frac{H}{1.63R}\right)\right) \quad (۱۰)$$

جای‌گذاری رابطهٔ (۱۰ و ۳) در رابطهٔ (۲) و با فرض زاویهٔ کوچک α نیروی لحظه‌ای P می‌تواند طبق رابطهٔ زیر محاسبه شود:

$$P=M_0\left(\frac{\pi R}{2H\alpha}+\frac{\pi}{1.63}+\sqrt{\left(\frac{\pi^2R^2}{4}+H^2\right)}\left(\frac{H}{1.63R\alpha}\right)\right) \quad (۱۱)$$

طبق بررسی‌های ژنگ[8]:

$$H=1.84R(t/2R)^{0.5} \quad (۱۲)$$

که t ضخامت لوله است. رابطهٔ (۱۲) یک پاسخ تحلیلی برای قسمت تاشدهٔ لولهٔ دایروی است که با مینیمم کردن انرژی جذب‌شده نسبت به H به‌دست آمده است. این معادله براساس مدل پلاستیک و رابطهٔ ضخامت لوله ($\frac{R}{t}<30$) توسعه داده‌شده که در محدودهٔ پلاستیک تغییر شکل داده است. با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۲ و ۸) در رابطهٔ (۱۱) رابطهٔ بین نیروی لحظه‌ای P و زاویه θ به‌دست می‌آید:

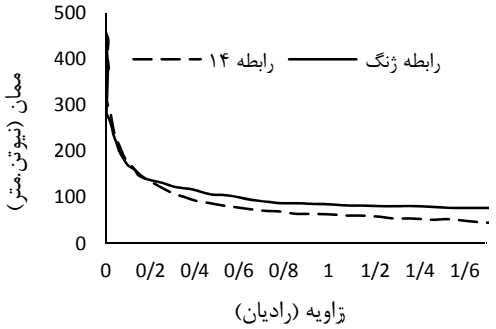
$$P=M_0\left(\begin{array}{l}1.08\left(\frac{R}{t}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)+1.93+\\ \sqrt{(0.75R+0.51t)}\left(\frac{t^{1/4}}{R^{3/4}}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)\end{array}\right) \quad (۱۳)$$

از رابطهٔ (۱۳ و ۱۱) مشاهده می‌شود که نیروی لحظه‌ای P در حین تخریب خمش تابعی از زاویهٔ خمش(θ) است. سرانجام M(θ) یعنی ممان خمشی که از نیروی P به‌دست می‌آید، می‌تواند به‌سادگی از رابطهٔ (۱٤) برابر با حاصل‌ضرب نیرو در بازو مشخص گردد.

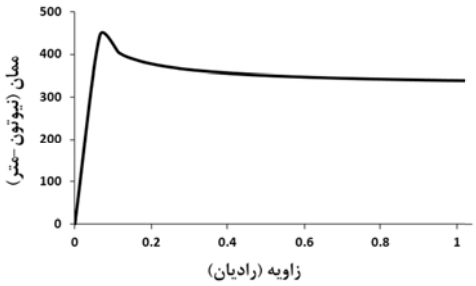
$$M(\theta)=Pa=P(1.63R)=M_0\left(\begin{array}{l}1.76\left(\frac{R^{5/4}}{t^{1/4}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)+3.15\\ +\sqrt{(2R+1.36t)}(Rt)^{1/4}\left(\frac{1}{\theta}\right)\end{array}\right) \quad (۱٤)$$

نمودار رابطهٔ (۱٤) در شکل (٦) رسم شده است. از این شکل می‌توان دریافت که بایستی رابطهٔ M(θ)

برای زوایای بیشتر از ۰/۲ رادیان استفاده گردد، چرا که با ترسیم رابطهٔ (۱٤) و بزرگ‌نمایی در شکل (۷) مشخص می‌شود که در زوایای کمتر از ۲ رادیان نمودار ممان، صعودی است. بایستی تأکید گردد، در بخش بعدی رابطهٔ (۱٤) به‌منظور مدل‌سازی فنر پیچشی غیرخطی در مدل ساده‌شده لولهٔ جدار نازک که مهم‌ترین قسمت مدل ساده‌شده برای تغییر شکل‌های پلاستیک است، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.



شکل ٦ رابطهٔ ١٤(ممان-زاویه) برای لوله جدار نازک



شکل ۷ نمودار ممان-زاویه خمش ورودی به نرم‌افزار LS-DYNA

اعتبارسنجی

در این قسمت رابطهٔ ممان-زاویهٔ استخراج‌شده (رابطهٔ ١٤) برای لولهٔ دایروی با مقایسهٔ رابطهٔ ممان-زاویهٔ منتشرشده در مرجع [8] برای سازه‌های لوله‌ای تأیید شده است. ژنگ [8] یک حل تحلیلی (معادلهٔ ۱۵) برای خمش سازه‌های لوله‌ای براساس تئوری خطوط محوری پلاستیک استخراج نموده است که با داده‌های آزمایشگاهی نیز صحت‌سنجی شده‌اند.

$$M(\theta) = 4t^2 M_0 \left(-\frac{4}{3} + 2.6117 \left(\frac{R}{t}\right)^{11/12} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)\right) \quad (۱۵)$$

در معادلات (۱۵ و ١٤)، M_0 ممان پلاستیک بر واحد طول دیوارهٔ مقطع است که برابر با $(\sigma_0 t^2/4)$ است. ابعاد مدل لولهٔ منحنی شکل دایروی جدار نازک به‌کار گرفته شده، D=50mm و t=1.5mm می‌باشد. منحنی‌های ممان-زاویه برای معادلات (۱۵ و ١٤) در شکل (٦) رسم شده‌اند. از این شکل می‌توان دریافت که رابطهٔ $M(\theta)$ تطابق مناسبی با پاسخ ژنگ [8] دارد.

مدل ساده‌شدهٔ عددی

اکنون معادلهٔ (١٤) برای مدل ساده به‌کار گرفته می‌شود و از آن برای تحلیل‌های ضربه استفاده خواهد شد. در شبیه‌سازی‌های پیشرو مدل لولهٔ جدار نازک با یک سرعت اولیه به دیوار صلب برخورد می‌کند و تخریب حاصل می‌شود. از مرجع [1] می‌توان دریافت هنگامی‌که تیر جدار نازک بدون خم با دیوار صلب برخورد می‌کند، کمانش محوری رخ می‌دهد و هیچ‌گونه تخریب خمشی ظاهر نمی‌گردد. با این وجود هنگامی که تیر جدار نازک دارای خم با دیوار برخورد کند دچار خمش خواهد شد و تخریب خمشی بر روی خطوط محوری پلاستیک متمرکز می‌شود. بنابراین در اینجا مدل لولهٔ جدار نازک دارای خم با مقطع دایروی و مربعی برای تحلیل ضربه استفاده می‌شود تا تخریب خمشی را نشان دهد.

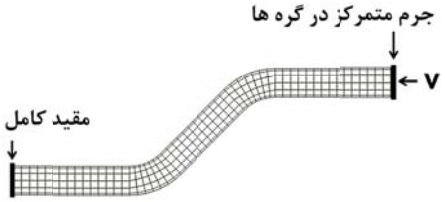
بایستی تأکید گردد که اگرچه معادلهٔ (١٤) برای لوله‌های بدون خم استخراج شده است، ولی با این وجود هم‌چنان می‌تواند برای لوله‌های دارای خم نیز استفاده شود؛ زیرا لوله‌های دارای خم در ضربهٔ محوری و بدون خم در خمش سه‌نقطه‌ای، مکانیزم تخریب

یکسانی از خود نشان می‌دهند [1, 3, 10].

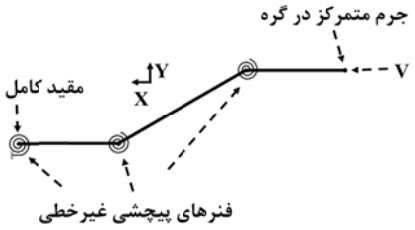
شکل (۸) مدل دقیق شامل المان‌های پوسته‌ای و شکل (۹) مدل ساده‌شده را نشان می‌دهد که از روش مدل‌سازی لیو در مرجع [1] ایجاد شده است. در این مدل از المان‌های قنر چرخشی غیرخطی براساس رابطهٔ (١٤) برای مدل‌سازی خطوط محوری پلاستیک استفاده می‌شود. اساس این مدل ساده‌شده بر فنر پیچشی غیرخطی استوار است که در نقاط حساس مدل قرار می‌گیرد، پس برای تعریف المان فنر چرخشی غیرخطی در LS-DYNA، داده‌های ممان-زاویه مطابق شکل (۷) و رابطهٔ تحلیلی (١٤) به‌کار گرفته شده است. در مدل ساده‌شده گره پایانی تیر دارای خم، با ثابت نگه‌داشتن ٦ درجه آزادی به‌طور کامل مقید و تنها درجه آزادی، جابه‌جایی طولی برای گره ابتدایی آزاد شده است که در آنجا سرعت اولیه لحاظ گردیده است. به‌علاوه چون لولهٔ دارای خم در صفحهٔ دو بعدی تعریف شده است، قیدهای دیگری نیز بایستی به‌منظور جلوگیری از حرکت خارج از صفحه در نظر گرفته شود. ضمناً دو گره مشابه هم در مکان‌های المان فنری تعریف می‌شود. کلیه درجات آزادی آن‌ها به‌جز درجهٔ آزادی چرخشی کوپل شده‌اند. جدول (۲) جزئیات شرایط ضربه و اطلاعات مدل‌های نرم‌افزاری را بیان می‌کند.

جدول۲ مشخصات مواد، هندسه و شرایط ضربه

مدول یانگ	2.1 e11Pa
چگالی	7830 ($^{Kg}/_{m^3}$)
تنش تسلیم	2e8 Pa
مدول سخت شوندگی	6.3e8 Pa
ضریب پواسون	0.3
طول کل	1455 mm
قطر	50 mm
ضخامت	1.5 mm
جرم اضافه‌شده	400 Kg
سرعت اولیه	$15^{m}/_{s}$
زمان ضربه	0.01 sec



شکل ۸ مدل دقیق برای مقطع دایروی و مربعی

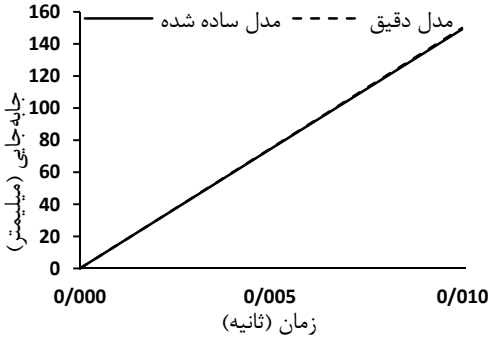


شکل ۹ مدل ساده‌شده برای مقاطع دایروی و مربعی

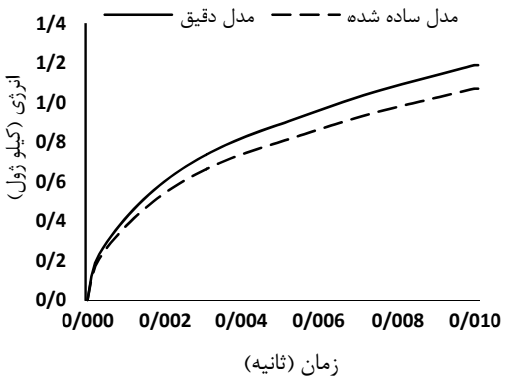
نتایج

در شبیه‌سازی با هیدروکد LS-DYNA، مدل‌ها با یک دیوار صلب با سرعت ۱۵ متر بر ثانیه در مدت زمان ۰/۰۱ ثانیه برخورد می‌کنند. نتایج حاصل‌شده از هر دو مدل در شکل‌های (۱۹-۱۰) و جدول (۳) مقایسه شده‌اند. جدول (۳) نشان می‌دهد که نتایج دینامیکی به‌دست آمده از مدل ساده‌شده با مدل دقیق، درصد اختلاف کمی در پارامترهای جابه‌جایی، نیروی ضربه و انرژی جذب‌شده دارند و تطابق خوبی مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است مقدار پارامتر جابه‌جایی، بسیار نزدیک به مدل دقیق (نزدیک به صفر) به‌دلیل استفاده از المان‌های تیر زیاد و هم‌چنین با درجهٔ تابعِ شکل بالاتر به‌دست آمده است و این خود تأییدی بر صحت مدل ساده‌شده می‌باشد. در ادامه مقایسه‌ای بین مدل ساده‌شده و دقیق برای دو مقطع متفاوت مربعی و دایروی انجام شده است. نتایج مربوط به آن در نمودار میزان جذب انرژی سازه (شکل ۲۰ و ۱۵) آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد بیش‌ترین میزان جذب انرژی مربوط به مقطع مربعی برای هر دو مدل ساده و

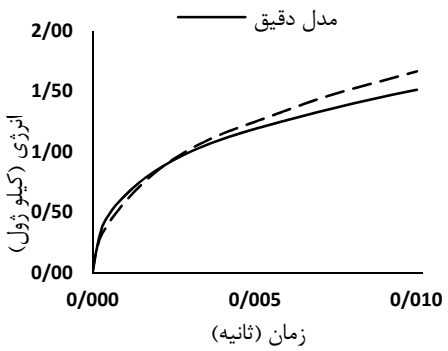
دقیق است. از این طریق می‌توان بسته به اهمیت انرژی جذب‌شده یا نیروی واردشده به سازه به انتخاب مقطع مناسب پرداخت. همان‌طور که از شکل‌های (١٤-١١) مشخص است، اگر در طراحی میزان انرژی جذب‌شده مهم باشد بایستی از جاذب با مقطع مربعی و اگر نیروی واردشده به سازه از اهمیت بیشتری برخوردار باشد بایستی از جاذب با مقطع دایروی استفاده شود. دلیل افزایش نیروی وارد به سازه با مقطع مربعی می‌تواند گوشه‌دار بودن سطح مقطع مربعی و به تبع آن ایجاد تمرکز تنش در سازه باشد. به‌عنوان مثال می‌توان به این موضوع اشاره کرد که جاذب‌های انرژی استفاده‌شده در قطار اکثراً از نوع دایروی و جاذب‌های انرژی استفاده‌شده در شاسی خودرو اکثراً مربعی می‌باشند.



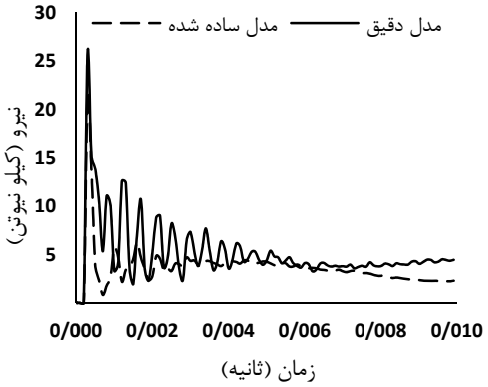
شکل ١٠ جابه‌جایی کلی مدل‌های ساده‌شده و دقیق دایروی



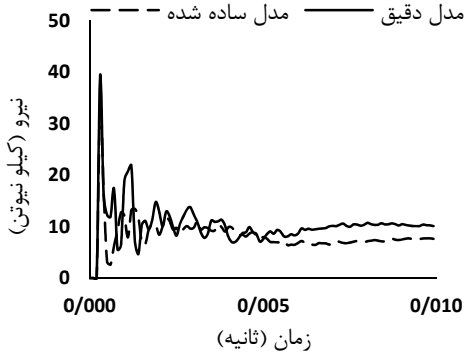
شکل ١١ انرژی جذب‌شدهٔ مدل دقیق و ساده‌شدهٔ دایروی



شکل ١٢ انرژی جذب‌شدهٔ مدل دقیق و ساده‌شدهٔ مربعی

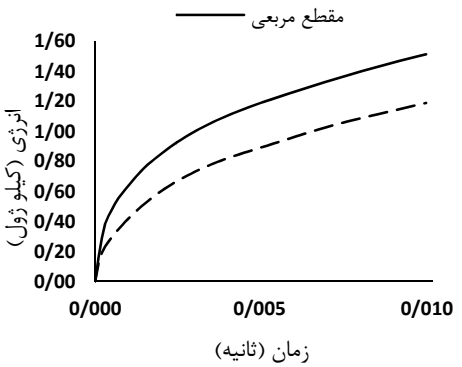


شکل ١٣ نیروی ضربه برای مدل دقیق و ساده‌شدهٔ دایروی



شکل ١٤ نیروی ضربه برای مدل دقیق و ساده‌شدهٔ مربعی

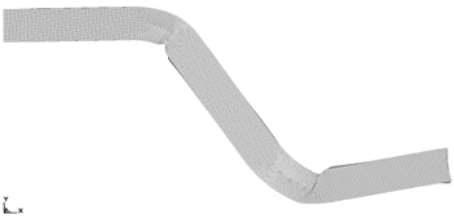
اشکال (١٩-١٦) نیز فرم تغییر شکل‌یافته از مدل دقیق و ساده‌شده را نشان می‌دهند که تقریباً ساختار مشابهی بین آن‌ها در هر دو مقطع مربعی و دایروی وجود دارد. در مجموع با بررسی نتایج و نزدیک بودن نتایج مدل ساده‌شده با مدل دقیق، صحت رابطهٔ (١٤) و نیز روش مدل‌سازی تأیید می‌شود.



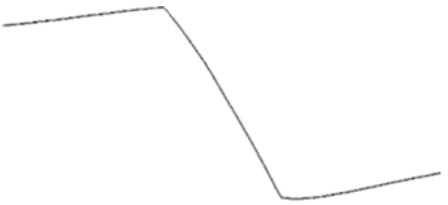
شکل ۱۵ انرژی جذب‌شدهٔ مدل‌های دقیق دایروی و مربعی



شکل ۱٦ مدل دقیق تغییر شکل یافته برای مقطع دایروی



شکل ۱۷ مدل دقیق تغییر شکل یافته برای مقطع مربعی



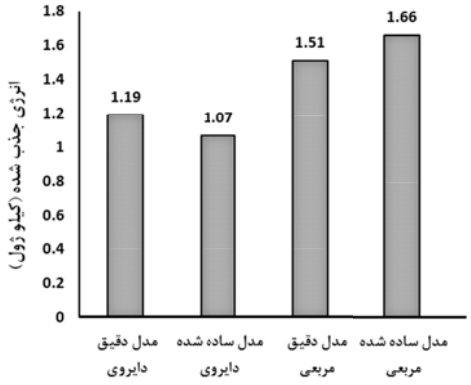
شکل ۱۸ مدل ساده‌شده و تغییر شکل یافته برای مقطع دایروی



شکل ۱۹ مدل ساده‌شده و تغییر شکل یافته برای مقطع مربعی

جدول ۳ مقایسهٔ نتایج حاصل از مدل دقیق و ساده‌شده برای مقاطع دایروی و مربعی

	مدل دقیق دایره	مدل ساده دایره	درصد اختلاف (٪)	مدل دقیق مربع	مدل ساده مربع	درصد اختلاف (٪)
جابه‌جایی (mm)	۱٤۹	۱٤۸/۸	۰/۱۳	۱٤۹	۱٤۸/۹	۰/۰٦
نیروی ضربه (kN)	۲۵/۹	۲۱/۵	۱٦/۹	۳۹/۳	۳٤/٤	۱۲/۵
انرژی جذب‌شده (kJ)	۱/۱۹	۱/۰۷	۱۰	۱/۵۱	۱/٦٦	-۹/۹



شکل ۲۰ مقایسهٔ انرژی جذب‌شده

نتیجه‌گیری

این مقاله تخریب خمشی لوله‌های جدار نازک را به‌دلیل کاربرد فراوان در صنایع خودرو و ریلی با ارائهٔ مدل ساده‌شدهٔ عددی بررسی می‌نماید. با شبیه‌سازی ضربهٔ محوری و مقایسه نتایج و تئوری‌های منتشرشده صحت رابطهٔ (۱٤) برای پیش‌بینی رفتار ضربهٔ لوله های جدار نازک تأیید شده است که قابل کاربرد برای تخصیص المان‌های فنر چرخشی غیرخطی به مدل ساده‌شده می‌باشد. هم‌چنین مقایسه‌ای بین لوله‌های جدار نازک با مقاطع دایروی و مربعی صورت گرفته است تا بتوان از این مسیر برای بعضی از قطعات

شاسی خودرو با توجه به اهمیت انرژی جذب‌شده یا نیروی وارد به سازه انتخاب صحیحی صورت پذیرد. انتخاب نوع مقطع می‌تواند برای مثال در هنگام برخورد خودرو با موانع برای اتومبیل و سرنشینان بسیار مهم باشد. در انتها با مقایسهٔ نتایج مربوط به مدل دقیق و مدل ساده‌شده مشاهده می‌گردد که درصد انحراف نتایج در پارامترهای جابه‌جایی، نیروی ضربه و انرژی جذب‌شده ناچیز است، لذا از این تکنیک مدل‌سازی بحرانی که در مراحل اولیهٔ طراحی برای ارزیابی تحلیل‌های ضربه و شبیه‌سازی کامپیوتری استفاده می‌شود، می‌توان به‌منظور کاهش زمان محاسبات و صرفه‌جویی در منابع بهره برد.

مراجع

1. Liu YC, Day ML. "Simplified modelling of thin walled box section beam", *I.J. Crash*, Vol. 11, No. 3, pp. 263–272, (2006).
2. Hamza K, Saitou K, "Design optimization of vehicle structures for crashworthiness using equivalent mechanism approximations", *Journal of Mechanical Design*, pp. 127 / 485, (2005).
3. Liu, Y.C., "Development of simplified models for crashworthiness analysis", PhD thesis, Louisville, University of Louisville, (2005).
4. Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W. and Gholami, T., "Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading", *I. Compression. ComputStruct*, pp. 51(6):611–23. (1994).
5. Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W., Gholami, T. and Huang, J., "Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading"—*II. Bending. Comput. Struct.*, pp. 51(6): 623–41, (1994).
6. Kecman, D., "Bending collapse of rectangular and square section tubes", *Int. J. MechSci*, pp. 25 (9–10) 623–36, (1983).
7. Abramowicz, W., "Simplified crushing analysis of thin-walled columns and beams", *RozprInzEng Trans*, pp. 29(1):5–26, (1981).
8. Zheng, L. and Wierzbicki, T., "Quasi-static crushing of S-shaped aluminum front rail", *Int. J. crashworthiness*, pp. 9(2):155–73, (2004).
9. Mamalis, A., Manolakos, D., Loannidis M. and Kostazos, P., "Bending of cylindrical steel tubes: numerical modeling", *Int. J. Crashworthiness*, pp. 11(1):37–47, (2006).
10. Kim, HS, Kang, SY, Lee, IH, Park, SH. and Han, D.C. "Vehicle frontal crashworthiness analysis by simplified structure modeling using nonlinear spring and beam elements", *Int. J. crashworthiness*, pp. 2(1):107–17, (1996).
11. خلخالی، ابوالفضل، درویزه، ابوالفضل، نریمان زاده، نادر و معصومی،ابوالفضل.، «تحلیل تئوریک تغییر شکل‌های بزرگ در جاذب‌های انرژی S شکل»، هفدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، تهران، (۱۳۸۸).

تحلیل نظری و تجربی پس‌کمانش حرارتی ستون‌ها*

(یادداشت پژوهشی)

حامد باقریان[۱] حمید اختراعی طوسی[۲]

چکیده *بسیاری از سازه‌های مکانیکی در محیط‌هایی با اختلاف دمای زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند. تغییر دما، تنش‌ها و تغییرشکل‌های قابل ملاحظه‌ای ایجاد می‌کند. در مواردی که سازهٔ مکانیکی از عناصر لاغر یا به عبارتی از تیرها تشکیل شده باشد، یکی از مشکلات عمدهٔ ناشی از افزایش دما، وقوع پدیدهٔ کمانش حرارتی خواهد بود. تداوم افزایش دما پس از وقوع کمانش، همچنان تنش و تغییرشکل‌های حاکم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در راستای مطالعهٔ آثار پس از کمانش حرارتی، ضمن معرفی روش تحلیل پس‌کمانش حرارتی براساس نظریهٔ تغییرشکل کوچک تیرها، شیوهٔ تحلیل یک تیر دوسرمفصل هنگام افزایش دمای یکنواخت و در حضور بار عرضی گسترده با استفاده از رویکرد تغییرشکل بزرگ معرفی می‌شود. اعتبار نتایج حاصل از روش تغییرشکل بزرگ توسط مقایسهٔ نتایج با روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک، مدل‌سازی خطی و غیرخطی در محیط نرم‌افزار آباکوس (ABAQUS) و آزمایش تجربی ارزیابی می‌گردد. در این راستا ضمن معرفی ساختار طراحی شده برای انجام آزمایش، نتایج حاصل از مقایسهٔ تحلیل پس‌کمانش طبق نظریهٔ تغییرشکل بزرگ با سایر روش‌های تحلیلی و تجربی ارائه می‌گردد. نمودارهای توزیع تغییرمکان عرضی تیر تحت مقادیر متفاوت بار به‌روش‌های مختلف و نیز نمودارهای تأثیر دما بر تغییرمکان میانهٔ تیر معرفی می‌گردد. پس از جمع‌بندی نتایج در مورد شیوهٔ مناسب تحلیل، اظهار نظر می‌شود.*

واژه‌های کلیدی تغییرشکل بزرگ، پس‌کمانش حرارتی، روش اختلاف تربیعی، نرم‌افزار آباکوس.

Theoretical and Experimental Thermal Post Buckling Analysis of Columns

H. Bagheriyan H. Ekhteraei Toussi

Abstract *Many of the mechanical structures are employed in high temperature conditions. Any variation of temperature may cause considerable side effects such as the creation of thermal stress or deformation. When a structure is composed of slender members such as beams or columns, one of the main problems concerning the rise of temperature is the incidence of thermal buckling. The continuing rise of temperature beyond the onset of thermal buckling level, continually affects the dominant forces and deformations. To study the post buckling phenomenon, following the introduction of different small deformation methods of thermal buckling analysis, a through large deformation scheme is developed to analyze the buckling of a simply supported column. For the case of large deformation analysis the validity of the results is evaluated by comparing with the results obtained by using of the small deformation theory, the linear and nonlinear simulations of ABAQUS software as well as the experimental data. The results characterize the deflection of a beam with uniformly distributed load by different solution techniques as well as the effect of temperature on the mid span deflection of a post buckled beam. Based on the obtained results, the validity of different methods is evaluated.*

Key Words Large Deformation, Post- Thermal Buckling, Differential Quadrature Method, ABAQUS

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۱/٦/۱٤ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۹/۱۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. ekhteraee@um.ac.ir

مقدمه

اعمال بار حرارتی در برخی از سازه‌ها اجتناب‌ناپذیر و در برخی دیگر تصادفی می‌باشد. برخی از سازه‌ها در طول دورهٔ کاری، به دفعات تحت بارگذاری‌های حرارتی قرار می‌گیرند. تأثیر حرارت بر ساختار و عملکرد سازه‌هایی چون فضاپیماها، راکتورهای هسته‌ای و مبدل‌های حرارتی نمونه‌هایی از این نوع بارگذاری‌های حرارتی می‌باشند. از طرفی ممکن است بار حرارتی به‌طور تصادفی به یک سازه اعمال گردد. از این نمونه نیز می‌توان به آتش‌سوزی در ساختمان‌ها و تأسیسات شهری و صنعتی اشاره کرد. بدون در نظر گرفتن اثرات بار حرارتی، طراحی یک سازه، کامل و ایمن نخواهد بود. یک دسته از اعضای مهم در میان سازه‌ها، تیر–ستون‌ها می‌باشند که در بسیاری از موارد خود بخش بزرگی از تشکیلات یک ساختار مرکب را تشکیل می‌دهند. از مهم‌ترین آثار حرارت در تیر–ستون‌ها، وقوع پدیدهٔ کمانش حرارتی (Thermal buckling) می‌باشد. چنان‌چه سازه‌ای را که دچار کمانش حرارتی شده است کماکان قابل استفاده تشخیص دهیم، مطالعهٔ رفتار دما– تغییر مکان در دورهٔ پس از کمانش که از آن تعبیر به پس‌کمانش می‌شود، حائز اهمیت است. ریل‌ها، خطوط انتقال نفت یا ترموستات‌های دوفلزی از جمله مواردی هستند که مطالعهٔ آثار پس‌کمانش حرارتی در رفتار مکانیکی آنها دارای اهمیت است.

هنگامی که بارهای اعمالی روی یک عضو، تغییرشکل‌های بزرگ ایجاد نماید، کاربرد روش‌هایی مانند نظریهٔ تغییرشکل کوچک یا روش‌های خطی، مناسب نیست و طراحی براساس این تئوری‌ها، طراحی مناسبی نمی‌باشد. در این حالت لازم است برای طراحی و تحلیل از روش‌هایی چون نظریهٔ تغییرشکل بزرگ ارتجاعی استفاده نمود. برای مطالعهٔ پس‌کمانش حرارتی تیر–ستون‌ها به‌کمک نظریهٔ تغییرشکل بزرگ تیرها آشنایی با سابقهٔ این قبیل مطالعات یک گام نخست محسوب می‌شود. تا آن‌جا که بررسی مؤلفان نشان می‌دهد، تاکنون به‌طور اختصاصی تحقیقی در زمینهٔ کاربرد نظریهٔ تغییرشکل‌های بزرگ برای مطالعهٔ پس‌کمانش حرارتی تیرها منتشر نشده است. بنابراین به‌منظور بررسی تاریخچهٔ این پژوهش به‌طور مجزا پیشینهٔ تحقیق در مسائل کمانش حرارتی و مسائل تغییرشکل بزرگ معرفی می‌شود.

تیرهایی که تحت بار فشاری ناپایدار می‌گردند، به‌عبارت دیگر ستون‌ها برای اولین بار در اوایل قرن ۱۸ توسط اولر مورد مطالعه قرار گرفتند. در سال‌های اخیر توجه زیادی به مطالعهٔ پدیدهٔ کمانش حرارتی جلب شده است. از این نمونه می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. رائو و راجو [1,2] (Rao and Raju) به بررسی کمانش حرارتی صفحه‌ها و ستون‌ها پرداختند. گوس و انتمن [3] (Gauss and Antman) توصیف کلی در مورد ویژگی‌های حالت کمانش حرارتی غیرخطی تیر و صفحات الاستیک ارائه کردند. لی و دیگران [4] (Li *et al.*) پاسخ پس‌کمانش یک تیر الاستیک با دو تکیه‌گاه ساده، تحت افزایش دمای غیریکنواخت را بررسی نمودند. آکباس و کوکاتورک [5] (Kocaturk Akbas and) آنالیز غیرخطی یک تیر با دو تکیه‌گاه ساده، ساخته شده از مواد هایپر الاستیک (hyper elastic) را توسط روش اجزای محدود (Finite element method) انجام دادند. واز و دیگران (Vaz et al.) [6] حل پرتوربیشن (perturbation) رفتار پس‌کمانش اولیهٔ یک تیر نازک با دو انتهای ثابت را ارائه نمودند.

در تحلیل کمانش حرارتی اغلب مطالعهٔ دو کمیت در کانون توجه قرار می‌گیرد. در حالی که اغلب، شناخت بار بحرانی سازه دارای اهمیت است، در برخی موارد نیز میزان تغییرشکل پس‌کمانشی برای طراح اهمیت دارد. از آن‌جا که انتظار می‌رود تغییرشکل‌های پس‌کمانش مقادیر بزرگی داشته باشد، در تحلیل از تئوری تغییرشکل بزرگ (Large Deformation Theory) استفاده خواهد شد. این تئوری اولین بار

به‌طور گسترده توسط هاگز [7] (Hodges) برای تحلیل تغییرشکل رتور کشتی به‌کار گرفته شد. هاگز و هنانت (Hinnant and Hodges) [8] به بررسی و آنالیز نتایج تجربی حاصل از یک تیر تحت تغییرشکل بزرگ پرداختند. بخشی از آزمایشی که توسط آنان ترتیب داده شده بود شامل مطالعهٔ یک تیر یک‌سرگیردار بود که به انتهای آن یک جرم متصل گردیده بود. آن‌ها با احتساب آثار تغییرشکل بزرگ و با استفاده از روش انرژی، شکل دقیق‌تری از تغییرشکل تیر را پیش‌بینی نمودند. مطالعه دیگری با این رویکرد توسط لوئیس و موناسا (Monasa and Lewis) [9] انجام شده است. آن‌ها اثرات غیرخطی را تنها در انحنای تیر در نظر گرفتند و از معادلهٔ (۱) به شرح زیر برای معرفی رابطهٔ میان انحنا و خیز در طول تیر استفاده کردند.

$$\kappa = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۱)$$

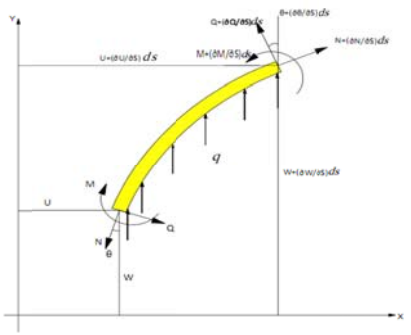
از دیگر مطالعات بر روی تغییرشکل بزرگ تیرها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

ونگ [10] (Wang) به حل تعدادی مسائل تغییرشکل بزرگ تیر الاستیک خطی توسط روش پرتوربیشن پرداخت. لوئیس و موناسا (Lewis and Monasa) [11] مسائل تغییرشکل بزرگ در تیرهای یکسر گیردار الاستیک غیرخطی را به روش عددی حل نمودند. بیونگ و دیگران [12] (Byoung *et al.*) با استفاده از روش رانج-کوتا (Raung-Kutta) به بررسی تغییرشکل بزرگ یک تیر الاستیک خطی با سطح مقطع متغیر پرداختند. بیکر [13] (Baker) منحنی ارتجاعی تغییرشکل بزرگ یک تیر الاستیک خطی با توزیع بار دلخواه را با استفاده از معادلات حاکم اولر برنولی یافت. این‌ها مواردی چند از مطالعات انجام شده در زمینهٔ تغییرشکل بزرگ تیرها تحت بار مکانیکی بود که به‌طور نمونه بدان اشاره شد.

در این مقاله ابتدا یکی از نظریه‌های رایج مدل‌سازی تغییرشکل بزرگ تیرها معرفی خواهد شد. سپس برای بررسی صحت و اعتبار این رویکرد، نتایج حاصل از تحلیل یک تیر دوسرگیردار تحت بار یکنواخت عرضی با نتایج حاصل از روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک و تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. روند تحلیل برای هر یک از روش‌های ذکر شده به‌تفصیل بیان می‌گردد. در مرحله بعد روش تغییرشکل بزرگ برای تحلیل تأثیر بارهای حرارتی به‌کار خواهد رفت. برای این منظور یک تیر دوسرمفصل که به‌طور هم‌زمان تحت بار یکنواخت عرضی و افزایش دمای یکنواخت قرار دارد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این مورد نیز نتایج حاصل از روش تغییرشکل بزرگ، شبیه‌سازی رایانه‌ای و روش آزمایش تجربی با یکدیگر مقایسه می‌گردند تا میزان صحت روش تغییرشکل بزرگ در بارگذاری‌های حرارتی معلوم شود.

معادلات حاکم

به‌منظور حفظ انسجام مطالب، در این بخش فرمول‌بندی معادلات حاکم بر تغییرشکل بزرگ تیرها که از مرجع [14] اقتباس گردیده است، معرفی می‌شود. مطابق شکل (۱) یک المان از تیری با تغییرشکل بزرگ به‌صورت یک منحنی به طول ds در نظر گرفته می‌شود. در این تصویر u تغییرمکان تیر در راستای محور x، w تغییرمکان تیر در راستای محور y، θ زاویهٔ راستای تیر و محور y پس از تغییرشکل و θ_0 مقدار این زاویه پیش از تغییرشکل می‌باشد.



شکل ۱ المان منحنی شکل با طول ds

شرایط تعادل استاتیک برای این المان، دسته معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial s}(N\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial s}(Q\cos\theta)=0 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(N\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{Q}\sin\theta)+\mathrm{q}=0 \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s}-\mathrm{Q}=0 \qquad (٤)$$

که در آن M گشتاور خمشی، N نیروی محوری، Q نیروی برشی می‌باشد. برای سهولت نسبت کشیدگی R به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R=\frac{N}{EA}+1 \qquad (٥)$$

لذا با توجه به هندسهٔ تغییرشکل داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial s}=R\cos\theta \qquad (٦)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=R\sin\theta \qquad (٧)$$

هم‌چنین با چشم‌پوشی از آثار نیروی برشی، رابطهٔ گشتاور M و زاویهٔ راستای تیر با محور قائم یعنی زاویهٔ θ به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathrm{M}=\mathrm{EI}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}} \qquad \mathrm{Q}=\mathrm{EI}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{ds}^2} \qquad (٨)$$

از مقایسهٔ روابط (۷ و ٦)،یک معادلهٔ حاکمه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{du}{ds}=\frac{dw}{ds}\tan\theta \qquad (٩)$$

از ادغام روابط (۸ و ٤)، مقدار Q برحسب θ و از ادغام روابط (۵) با روابط (۷ و ٦) مقدار N به‌دست می‌آید. از قرار دادن این مقادیر در روابط (۳ و ۲)، دو معادلهٔ حاکمهٔ دیگر به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\eta\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}-\sin\theta\right)-\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\cos\theta\right)=0 \qquad (١٠)$$

$$\eta\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}-\cos\theta\right)-\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\sin\theta\right)+q=0 \qquad (١١)$$

که$\eta=\frac{AL^2}{EI}$ می‌باشد. در این روابط A سطح مقطع تیر، L طول تیر و I گشتاور دوم سطح مقطع است. حل هم‌زمان معادلات حاکمه (۱۱-۹) با در نظر گرفتن شرایط مرزی موجود، منجر به یافتن u، w و θ در نقاط مختلف تیر می‌شود. معادلهٔ حاصل غیرخطی و غیرهمگن است. برای پاسخ‌یابی این معادله باید از روش‌های عددی کمک گرفت. یک روش موثر و دارای میزان دقت بالا، روش موسوم به اختلاف تربیعی یا (Diffrentional Quadrature Method: DQM) [5] است. این روش در بخش بعد به اجمال معرفی می‌شود.

روش اختلاف تربیعی

روش اختلاف تربیعی یک روش برای مجزاسازی و حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در این روش، مشتق تابع نسبت به یک متغیر توسط ترکیبی از مقادیر تابع در تعدادی نقطهٔ خاص جایگزین می‌گردد. اگر n تعداد نقاط ویژه در دامنهٔ مورد بررسی باشد، طبق قانون اختلاف تربیعی، مشتق مرتبهٔ N یک تابع دل‌خواه مانند f(x) در نقطهٔ $x=x_i$ به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود [15]:

$$\frac{d^N f(x_i)}{dx^N}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^{(N)}f(x_k) \qquad i=1,\ldots,n \qquad (١٢)$$

در معادلهٔ فوق، در محدودهٔ مورد بررسی مقادیر A_{ik} یعنی ضرایب وزن، به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$A_{ij}^{1}=\frac{\Pi(x_i)}{(x_i-x_j)\Pi(x_i)} \qquad i,j=1,2,\ldots,n \text{ and } i\neq j \qquad (١٣)$$

$$A_{ij}^{(k)}=\mathrm{k}\left[A_{ii}^{(k-1)}A_{ij}^{(1)}-\frac{A_{ij}^{(k-1)}}{x_i-x_j}\right] \qquad 2\le k\le n-1 \qquad (١٤)$$

$$A_{ii}^{(m)}=-\sum_{\substack{j=1\\ i\neq i}}^{n}A_{ij}^{(m)} \qquad m=1,\ldots,n-1 \qquad (١٥)$$

که $\prod(x_i) = \prod_{j=1,j\neq i}^{n}(x_i - x_j)$ می‌باشد. در شکل ماتریسی می‌توان رابطهٔ بازگشتی زیر را برای تعیین توابع وزن استفاده نمود.

$$[A^{(r)}]=[A^{(1)}][A^{(r-1)}] = [A^{(r-1)}][A^{(1)}] \qquad (16)$$

نقاط ویژه‌ای که در روابط (۱۳ و ۱۲) با متغیر اندیسی x_i مشخص شده‌اند همان ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف- لوباتو (Chebychev- Lobatto) می‌باشند که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند.

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)L\right] \qquad (17)$$

i=2,…, n-1 $\quad x_1=0 \quad x_n=L$

با جایگزین نمودن مشتقات به روش اختلاف تربیعی، معادلات (۱۱-۹) به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)} U_k = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)} W_k\right) \tan\theta_i \qquad (18)$$

$$\eta\left[\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(1)} U_j - sin\theta_k\right) - \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(2)}\ \theta_j\right)cos\theta_k\right]=0 \qquad (19)$$

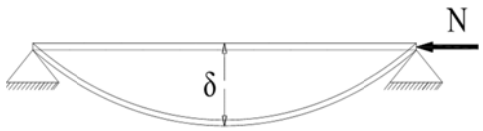
$$\eta\left[\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(1)} W_j - cos\theta_k\right) + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(2)}\ \theta_j\right)sin\theta_k\right] + q=0 \qquad (20)$$

که در آن، i=2,…,n-1 می‌باشد. اکنون با فرض آن‌که حل عددی معادلات به روش DQM بسط داده شود روند تحلیل کمانش حرارتی در تیرهای تحت افزایش دمای یکنواخت توسط تئوری تغییرشکل کوچک و تئوری تغیر شکل بزرگ معرفی می‌شود.

مدل‌سازی پدیدهٔ کمانش حرارتی

در این بخش با دو رویکرد متفاوت تغییرشکل کوچک و بزرگ مسألهٔ کمانش حرارتی تیر- ستون‌ها بررسی می‌شود.

مطالعه با دیدگاه تغییرشکل کوچک. برای مطالعه از دیدگاه تغییرشکل کوچک مطابق شکل (۲) فرض می‌شود تیر دوسرمفصلی تحت افزایش دمای یکنواخت قرار گیرد. در این حالت ثابت بودن موقعیت تکیه‌گاه‌ها موجب ایجاد نیروی محوری فشاری در تیر می‌گردد. مقدار این نیرو برابر است با $N = E\,\alpha\,A\,\Delta T$ که در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی، A سطح مقطع، E ضریب ارتجاعی و ΔT افزایش دما می‌باشد. با افزایش دما، نیروی محوری مورد نظر نیز افزایش می‌یابد تا مقدار آن به میزان لازم برای کمانش برسد. طبق رابطهٔ اولر برای بار بحرانی تیرها، در چنین تیری دمای لازم برای وقوع کمانش برابر $\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{L^2\,A\,\alpha}$ است که در آن L طول اولیهٔ تیر و I گشتاور دوم سطح می‌باشد.



شکل ۲ کمانش تیر دو سر مفصل تحت اثر بار محوری

با افزایش دما به میزانی بالاتر از دمای بحرانی و به پیروی از آن، افزایش نیروی محوری تا بیش از نیروی بحرانی، شرایط پس‌کمانش ایجاد می‌شود. در این محدوده خیز تیر با دو رویکرد متفاوت تغییرشکل‌های کوچک و بزرگ بررسی می‌شود. طبق نظریهٔ تغییرشکل کوچک در این حالت خیز تیر تحت بار عرضی از معادله زیر که با نام معادلهٔ تیر- ستون [14] شناخته می‌شود، پیروی می‌کند:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + N\frac{d^2w}{dx^2} = q \qquad (21)$$

که در آن w تغییرمکان تیر در راستای قائم، N بار محوری و F_y بار گسترده است. در حالت پس‌کمانش حرارتی یعنی زمانی که $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$ باشد، در غیاب بار عرضی پاسخ معادلهٔ (۲۱) یعنی منحنی خیز تیر

مانند شکل (۲) به‌صورت تابع سینوسی $w= \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ خواهد بود. در این حالت با احتساب افزایش طول ناشی از انبساط حرارتی، با توجه به الگوی تغییرشکل تیر، با قرار دادن $w = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ در رابطهٔ محاسبهٔ طول یک منحنی، طول تیر به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

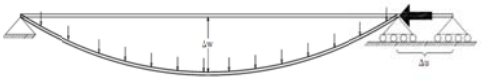
$$s = \int_0^L \sqrt{1 + w'^2}\, dx \qquad (۲۲)$$

$$= \int_0^L \sqrt{1 + \left[\frac{\delta\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2}\, dx \qquad (۲۳)$$

که به‌کمک آن خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{2L}{\pi} \sqrt{\alpha\, \Delta T + \frac{(\alpha\, \Delta T)^2}{2}} \qquad (۲٤)$$

کمیت δ مقدار بیشینهٔ خیز در میانهٔ تیر را مشخص می‌کند. در یک مدل‌سازی مبتنی بر فرض تغییرشکل بزرگ استفاده از الگوی سینوسی برای منحنی پس‌کمانش تیر مصداق نخواهد داشت. در این مقاله روشی که در ادامه پیشنهاد شده است برای انجام این مدل‌سازی به‌کار رفته است.



شکل ۳ جایگزینی اثر افزایش دمای تیر دو سر مفصل توسط تغییرمکان تکیه‌گاه

مطالعه با دیدگاه تغییرشکل بزرگ. فرض می‌کنیم مطابق شکل (۲) تیری توسط دو تکیه‌گاه مفصلی با فاصلهٔ ثابت مهار شده باشد. در اثر افزایش دمای یکنواخت، طول تیر افزایش می‌یابد. در این حالت تیر خمیده می‌شود و به تکیه‌گاه‌ها نیرو وارد می‌کند. تکیه‌گاه‌ها نیز متقابلاً تیر را تحت فشار قرار می‌دهند. اکنون فرض می‌کنیم در غیاب تغییرات دما، یکی از دو تکیه‌گاه تیر مانند شکل (۳) یک تکیه‌گاه غلتکی با قابلیت تغییرمکان افقی باشد. در این صورت اعمال یک تغییرمکان افقی موجب فشردگی تیر و ایجاد آثار کمانشی مشابه عوارض ناشی از افزایش دما خواهد بود.

حال اگر مدل ریاضی مورد استفاده امکان ایجاد ارتباط میان میزان تغییرمکان تکیه‌گاه غلتکی و تغییر طول تیر را داشته باشد از آن‌جا که رابطهٔ میان دما و تغییر طول تیر نیز ساده و به‌صورت رابطهٔ زیر در دست‌رس است می‌توان رابطهٔ میان دما و تغییرمکان افقی تکیه‌گاهی را به‌دست آورد.

$$\Delta s= L\, \alpha\, \Delta T \qquad (۲۵)$$

در رابطهٔ (۲۵) Δs افزایش طول تیر، L طول اولیه، α ضریب انبساط حرارتی و ΔT افزایش دمای تیر است. در صورت در اختیار داشتن منحنی تغییرشکل تیر، یافتن میزان افزایش طول تیر با استفاده از رابطهٔ (۲۲) میسر است. با داشتن مقدار Δs و با استفاده از معادلهٔ (۲۵) می‌توان دمای معادل را یافت. مدل ریاضی معرفی شده در روابط (٤-۲) و روش اختلاف تربیعی معرفی شده در بخش قبل امکان محاسبهٔ رابطهٔ میان تغییرمکان تکیه‌گاه مفصلی (به‌عنوان یک شرط کرانی)، شکل تیر و به پیروی از آن محاسبهٔ تغییر طول تیر را فراهم نموده است. بدین ترتیب با معادل قرار دادن تغییر طول ناشی از تغییرمکان مرز با تغییر طول قرینهٔ ناشی از افزایش دما می‌توان مفهوم افزایش دما را جایگزین خیز مفصلی کرد و از روی آن عوارض ناشی از تأثیر دما بر شکل تیر را مطالعه نمود.

تحلیل به‌وسیلهٔ نرم‌افزار ABAQUS

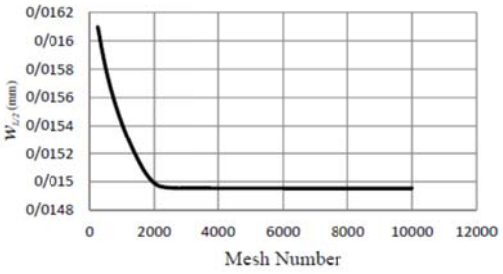
در این مقاله به‌منظور بررسی صحت نتایج و اعتبارسنجی نتایج مدل تحلیلی ارائه‌شده هم‌زمان از دو

روش آزمون تجربی و مدل‌سازی در نرم‌افزار ABAQUS استفاده گردیده است. المان مورد استفاده از نوع المان‌های solid است و خواص حرارتی آن مطابق جدول (۱) می باشد.

جدول ۱ خواص حرارتی فولاد [16]

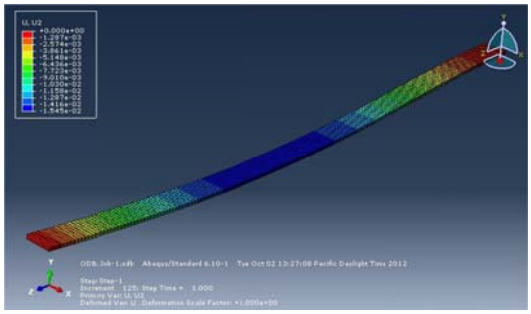
ضریب انبساط طولی $(\frac{1}{^\circ C})$	ظرفیت گرمائی ویژه $(\frac{J}{kg.^\circ K})$	ضریب هدایت $(\frac{W}{m.^\circ K})$
$\alpha = ۱۱٫۷ \times ۱۰^{-۶}$	C=٤٤٧	K=۸۰٫۲

در تحلیل حرارتی از تئوری الاستیسیتهٔ خطی و غیرخطی استفاده شده است. در ارتباط با تحلیل نرم‌افزاری یکی از مسائل با اهمیت، یافتن تعداد مش بهینه برای تحلیل دقیق و مناسب می‌باشد. برای این منظور مقدار خیز ماکزیمم به ازای تعداد مش‌های مختلف محاسبه می‌شود. چنان‌چه با افزایش تعداد مش‌ها خیز محاسبه شده تغییر نکند تعداد مش مورد استفاده مناسب خواهد بود. در این تحقیق مقدار تغییرمکان عمودی در افزایش دمای $۱۸۰^\circ C$ در مش‌بندی‌های مختلف به‌دست آمده و شکل (٤) رسم گردیده است.



شکل ٤ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر در مقابل تعداد مش به ازای افزایش دمای $۱۸۰^\circ C$

همان‌گونه که از نمودار پیداست مقادیر تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر از ۳۰۰۰ مش به بعد ثابت شده است. بنابراین عدد ۳۰۰۰ تعداد مش بهینه را مشخص می‌کند. در این حالت مطابق شکل (۵) یک نمونهٔ توزیع تغییرمکان در مش‌بندی بهینه ملاحظه می‌شود.



شکل ۵ نمونه تحلیل با مش‌بندی بهینه در نرم‌افزار آباکوس

نتایج

در این قسمت ابتدا به بررسی اعتبار روش تغییرشکل بزرگ پرداخته می‌شود. برای این منظور در غیاب تأثیر حرارت، نتایج حاصل از تحلیل تیر دوسرگیردار تحت بار گسترده به‌روش تغییرشکل بزرگ با نتایج حاصل از روش‌هایی چون تحلیل تغییرشکل کوچک و شبیه‌سازی خطی و غیرخطی توسط نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌گردد. در مرحلهٔ بعد، پس از کسب اطمینان از توانایی شیوه‌های تحلیلی به بیان نتایج حاصل از تحلیل تیر دو سر مفصل تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی- مکانیکی با استفاده از روش‌های متفاوت پرداخته خواهد شد. بدین منظور یک تیر دوسرگیردار تحت بار گستردهٔ عرضی q در نظر گرفته می‌شود. تغییرمکان عمودی w در نقاط مختلف تیر با خواصی به شرح جدول (۲) برای بارهای N ۱۰۰=q و N ۱۰۰۰۰=q با روش‌های متفاوت اندازه‌گیری و با یکدیگر مقایسه می‌شود.

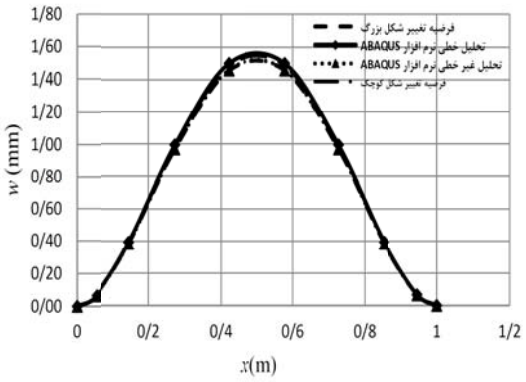
جدول ۲ خواص فیزیکی و مکانیکی تیر دوسر گیردار

گشتاور اینرسی (m^4)	سطح مقطع (m^2)	طول (m)	مدول الاستیسیته (Pa)	ضریب پواسون	بار گسترده (N/m)
$۱۰^{-۱۰}$	$۱۰^{-۴}$	۱	۲۰۰×۱۰^{۹}	۰٫۳	۱۰۰ و ۱۰۰۰۰

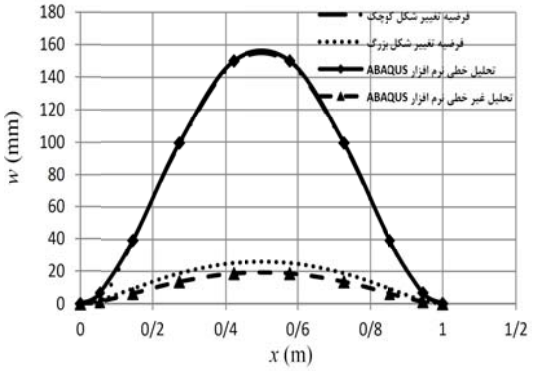
در شکل (٦) مقادیر تغییرمکان عمودی تیر w، در نقاط مختلف آن در تئوری‌های تغییرشکل بزرگ، تغییرشکل کوچک، تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس در بار q= ۱۰۰ N ارائه گردیده است. همان‌گونه که از نمودار مشخص است، به‌دلیل کوچک بودن مقدار بار جانبی، تغییرمکان حاصل از تمامی روش‌ها بسیار نزدیک به یکدیگر می‌باشد.

در شکل(۷) مقادیر تغییرمکان عمودی تیر در بار q= ۱۰kN در نقاط مختلف و براساس تئوری‌های متفاوت مقایسه گردیده است. همان‌گونه که از این نمودار پیداست تغییرمکان عمودی در دو روش تغییرشکل کوچک و تحلیل خطی نرم‌افزار آباکوس دارای مقادیری شش مرتبه بزرگ‌تر از دو روش دیگر است. لازم به تأکید است که به‌طور معمول به‌دلیل اعمال قیود تحلیلی کمتر، تغییرمکان‌های حاصل از روش تغییر مکان کوچک، بیشتر از تغییرمکان‌های حاصل از روش تغییرمکان بزرگ هستند. این مقایسه حاکی از آن است که هر چند در بارهای کوچک اختلاف چندانی میان روش‌های مورد نظر مشاهده نمی‌شود، اما با افزایش میزان بار، اختلاف در جواب‌ها افزایش می‌یابد. از آن‌جا که دقت نتایج حاصل از روش‌های غیرخطی بیشتر است، این اختلاف شدید نشان‌دهندهٔ عدم پاسخ‌گویی روش‌های خطی در تغییرشکل‌های بزرگ می‌باشد.

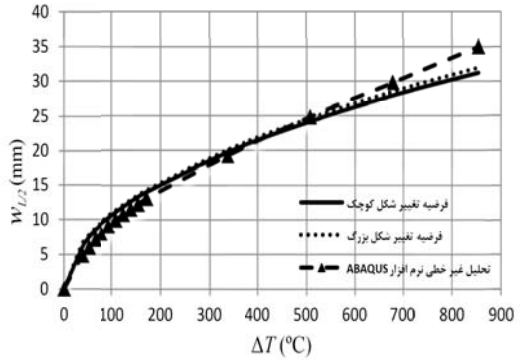
اکنون با به‌کارگیری روش‌هایی چون تحلیل تیرها بر پایهٔ نظریهٔ تغییرشکل کوچک و نظریهٔ تغییرشکل بزرگ، شبیه‌سازی خطی و غیرخطی در محیط نرم‌افزار آباکوس و روش تجربی، نتایج حاصل از بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی روی تیر دو سر مفصلی با مشخصات فیزیکی و مکانیکی مطابق جدول (۱) بررسی خواهد شد. نتایج به‌صورت مقادیر تغییرمکان عمودی وسط تیر $w_{L/2}$، در برابر افزایش دما ΔT ارائه شده است.



شکل ٦ تغییرمکان عمودی (w) در نقاط مختلف طول تیر(x)، به‌ازای q=۱۰۰N



شکل ۷ تغییرمکان عمودی(w) در نقاط مختلف طول تیر(x)، به‌ازای q=۱۰kN



شکل ۸ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

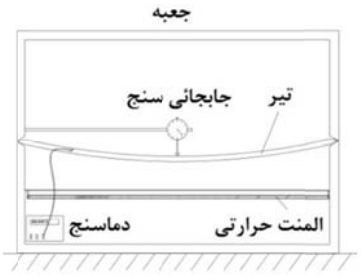
در شکل(۸) تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر در اثر افزایش دمای یکنواخت یک تیر دوسرمفصل، حاصل از سه روش تغییرشکل کوچک، تغییرشکل بزرگ و

تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس ارائه شده است. همان‌گونه که از نمودار پیداست مقادیر تغییرمکان و روند تغییرات در سه روش بسیار نزدیک به هم می‌باشند.

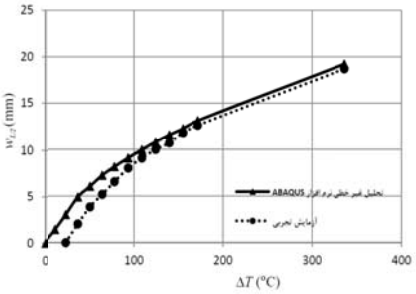
به موازات اتخاذ رویکردهای متفاوت تحلیلی برای مدل‌سازی و محاسبهٔ خیز جانبی پس‌کمانشی، برای اعتباربخشی به نتایج، تأثیر دما بر خیز جانبی به‌صورت تجربی نیز مطالعه شده است. اکنون روند تجربی آزمون کمانش حرارتی تیر–ستون مورد بررسی معرفی شده و نتایج حاصل از آن با تحلیل‌های نظری مقایسه می‌گردد.

در مدل تجربی، تیری با مشخصات فیزیکی معرفی شده در جدول (۱) در یک قاب چوبی با ضریب انبساط حرارتی C°/μ ۴٫۴ که مقدار آن در برابر ضریب انبساط حرارتی فولاد C°/μ ۱۱٫۷ کوچک است، قرار داده می‌شود. گرمایش تیر توسط المنت‌های حرارتی که در فاصله‌ای مناسب از تیر قرار گرفته است تأمین می‌گردد. به‌علت ضخامت کم تیر می‌توان فرض کرد که دمای تیر به‌طور یکنواخت در همه جوانب آن توزیع شده است. برای اندازه‌گیری دمای تیر از یک دماسنج دیجیتال استفاده شده است. کمیت مورد بررسی در این آزمایش تغییرمکان عمودی در وسط تیر است که برای اندازه‌گیری آن از ساعت اندازه‌گیری استفاده شده است. نمودار تجهیزات به‌کار رفته در آزمایش را می‌توان در شکل (۹) مشاهده کرد.

نکتهٔ مورد اهمیت در آزمایش این است که دمای قاب چوبی نیز به‌همراه دمای تیر بالا می‌رود. حال اگر این عامل در تحلیل نتایج در نظر گرفته نشود موجب خطا می‌گردد. لذا لازم است میزان تغییر دمای قاب در فرمول‌بندی وارد شود. برای این منظور با احتساب اثر دما در انبساط قاب چوبی، یک دمای معادل برای تیر فلزی به‌صورت $\Delta T_{eq}=\left(1-\frac{\alpha_w}{2\alpha_s}\right)\Delta T_s$ به‌دست می‌آید.

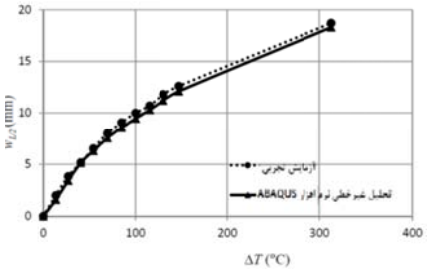


شکل ۹ مدل تیر دوسرمفصل در آزمایش تجربی



شکل ۱۰ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

نمودار(۱۰) به مقایسهٔ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر دوسرمفصل در دو روش تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس و آزمایش تجربی می‌پردازد. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد ترسیمهٔ مربوط به آزمایش تجربی از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. در واقع شروع کمانش در این روش تقریباً از افزایش دمای معادل ۲٤°C می‌باشد. دلیل این رخداد به اختلاف میان شرایط واقعی و نظری باز می‌گردد. در شرایط واقعی اتصال مفصلی دارای مقدار قابل‌ملاحظه‌ای لقی یا عدم انطباق است. در شروع آزمایش با افزایش دمای نمونه و همراه با آن افزایش طول تیر، تا زمان درگیرشدن تیر داخل قاب، امکان ایجاد نیروی داخلی در تیر، کمانش و بروز شرایط پس‌کمانش وجود ندارد. از این‌رو منحنی دما– تغییرمکان در شکل (۱۲) با تأخیر شروع شده است. برای مقایسهٔ بهتر نتایج با وجودی که در تحلیل، اثر انبساط حرارتی قاب نیز لحاظ شده بود، لازم بود نمودار آزمایش تجربی به میزان ۲٤°C به سمت چپ انتقال داده شود تا هر دو منحنی از یک مبدأ آغاز شده باشند. تنها در این صورت مقایسهٔ نمودارهای تحلیلی و تجربی می‌توانست مفید و معنادار باشد.



شکل ۱۱ تغییرمکان عمودی میانه تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

در شکل (۱۱) هر دو نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد. در این حالت ملاحظه می‌شود مقادیر تغییرمکان مربوط به روش آزمایش تجربی با نتایج حاصل از روش تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس دارای هم‌خوانی می‌باشد. اختلاف اندک بین دو نمودار که در حد متعارف آزمون‌های مکانیکی است به انحراف شرایط هندسی و مادی نمونهٔ آزمون از شرایط فرضی مورد استفاده در تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس وابسته است. در دو شکل (۱۱ و ۱۰) مقایسهٔ نتایج تا افزایش دمای حدوداً ۳۳۰°C انجام گرفته است. علت این امر وجود محدودیت در افزایش دمای تجهیزات مورد استفاده بوده است. در واقع در این روش به‌علت چوبی بودن قاب نگه‌دارنده، افزایش دما دارای محدودیت بوده است.

براساس نتایج حاصل از تحلیل‌های نظری و عملی ملاحظه می‌شود در تمام موارد نمودار خیز جانبی در مقابل دما دارای پیوستگی می‌باشد. درحقیقت هنگام کمانش طبق مدل نظری بایستی در دمای بحرانی یک پرش ناگهانی در خیز جانبی روی دهد. اما به‌طوری‌که در شکل (۸) ملاحظه می‌شود خیز جانبی طبق مدل‌های تغییرشکل کوچک، تغییرشکل بزرگ و تحلیل نرم‌افزاری، مشابه نتایج تجربی یک رابطهٔ پیوسته با دما را از خود نشان می‌دهد. این رفتار با واقعیت رویداد پدیدهٔ کمانش هماهنگی دارد. درحقیقت هم‌چنان‌که در مراجعی مانند [16] نشان داده شده، هنگام کمانش به‌دلیل حضور خفیف عواملی از قبیل ناصافی ستون، خارج از مرکزیت بار محوری یا وجود بار جانبی (مثلاً وزن تیر–ستون در شکل ۳)، کمانش به‌صورت ناگهانی روی نمی‌دهد بلکه به شکل یک رویداد تدریجی (با افزایش بار یا دما) ظاهر می‌شود. به‌طور مشابه در تحلیل عددی این اختلاف با شرایط ایده‌آل از طریق خطاهای عددی پاسخ را به شرایط واقعی نزدیک‌تر می‌نماید. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود عوامل خطا در تحلیل محاسباتی و شیوهٔ کاربرد نظریه‌های تغییرشکل کوچک و بزرگ برای تحلیل کمانش حرارتی، همگی در جهتی تأثیر می‌نمایند که مشابه روند واقعی، کمانش به‌صورت رویدادی تدریجی و پایدار ظاهر می‌شود. در حقیقت به‌دلیل بزرگ بودن کرنش‌های حرارتی در فلزات، برای هندسهٔ مورد تحلیل دمای کمانش که از رابطهٔ $\Delta T_{cr}=\frac{\pi^2 I}{L^2 A \alpha}$ حاصل می‌شود مقدار اندکی و برابر ۳/۳۷ °C به‌دست می‌آید. این نکته معرف آنست که شکل‌های (۱۱ و ۸) به‌طور عمده روند تغییر خیز جانبی پس از کمانش را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر اگر کمانش نوعی ناپایداری تلقی شود بایستی در خیزهای متناظر با دمای کمتر از این مقدار خیز جانبی هم‌چنان صفر در نظر گرفته شود. از سوی دیگر مقادیر عددی خیز در شکل‌های (۱۱ و ۸) حاکی از آن است که با وجود عبور دما از حد کمانش، خیز ایجاد شده مقدار اندکی است که قابل مقایسه با ۵۰۰ میلی‌متر طول تیر نیست. به عبارت دیگر خیز جانبی به اندازه‌ای که بتوان کاربرد نظریهٔ تغییرشکل بزرگ را موجه دانست، بزرگ نیست. این ویژگی نزدیکی نتایج حاصل از تحلیل بر پایهٔ نظریه‌های کوچک و بزرگ را توجیه می‌نماید. در بخش بعد بر مبنای نتایج معرفی شده در این قسمت در مورد رویکرد مناسب تحلیل اظهارنظر می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله دو موضوع اصلی مورد بررسی قرار

گرفت. در ابتدا به بیان تئوری تغییرشکل بزرگ و اعتبارسنجی این نظریه در تحلیل تیرهای تحت بارگذاری مکانیکی پرداخته شد. اعتبارسنجی روش بسط داده شده برمبنای نظریهٔ تغییرشکل بزرگ از طریق مقایسهٔ نتایج کاربرد آن در تحلیل تیر دوسر گیردار تحت بار گستردهٔ عرضی با نتایج حاصل از روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک و تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس انجام گرفت. همان‌گونه که مشاهده گردید نزدیکی نتایج حاصل میان رویکردهای مختلف نشان‌دهندهٔ معتبر بودن روش تغییرشکل بزرگ و حصول دقتی نزدیک به تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس بوده است. قابل‌توجه است که تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس مبتنی بر دیدگاه تغییرشکل بزرگ الاستیسیته می‌باشد که در میان تئوری‌های تحلیلی از دقت بیشتری برخوردار است. مرحله اول یعنی اعتبارسنجی تئوری تغییرشکل بزرگ تیر در بارگذاری مکانیکی مقدمه‌ای بود برای مرحلهٔ اصلی که بررسی اعتبار روش تغییرشکل بزرگ در تحلیل پس‌کمانش حرارتی تیرها می‌باشد. بدین منظور تیری با دو تکیه‌گاه مفصلی ثابت، تحت بار گستردهٔ عرضی و افزایش دمای یکنواخت مورد تحلیل قرار گرفت. روش‌های بررسی شامل روش تغییرشکل کوچک، روش تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس و روش آزمایش تجربی بوده است. نتایج حاصل از روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه گردید تا اعتبار روش تغییرشکل بزرگ در تحلیل‌های حرارتی نیز معلوم گردد. مقایسهٔ نتایج نشان داد که روش‌های تغییرشکل بزرگ، تحلیل غیرخطی آباکوس و تغییرشکل کوچک در تحلیل کمانش حرارتی دارای دقت مشابه با یکدیگر می‌باشند. ملاحظه می‌شود برای محاسبهٔ خیز کمانش در یک محدودهٔ گسترده از تغییرات دما، اگرچه روش تغییرشکل کوچک بسیار ساده‌تر و کوتاه‌تر از دو روش تغییرشکل بزرگ و تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس می‌باشد ولی دقتی مشابه با این دو روش دارد. در واقع ریشهٔ این رفتار به مقدار تغییرشکل‌های حرارتی باز می‌گردد. به‌طوری‌که از نمودارهای (۱۱ و ۸) ملاحظه می‌شود حتی در بیشترین دماها میزان خیز تنها کسر ناچیزی از طول تیر بوده است. به عبارت دیگر با فرض ثابت ماندن فاصله و نوع تکیه‌گاه‌ها، کمانش حرارتی به‌طور ذاتی موجب تغییرشکل کوچک می‌شود. بدین سبب جای تعجب نخواهد بود که مدل‌های تغییرشکل بزرگ و کوچک هم‌سان رفتار نموده‌اند.

فهرست علائم

سطح مقطع	A
گرمای ویژه	C
مدول الاستیسیته	E
گشتاور اینرسی	I
ضریب رسانش حرارتی	K
طول اولیه تیر	L
گشتاور خمشی	M
بار محوری	N
بار بحرانی کمانش	N_{cr}
بار گسترده	q
نیروی برشی	Q
نسبت کشیدگی محوری	R
طول نهایی تیر	s
دما	T
دمای اولیه	T_0
دمای بحرانی کمانش	T_{cr}
دمای معادل	T_{eq}
دمای معادل تیر	T_s
تغییرمکان افقی	u
تغییرمکان عمودی	w
تغییرمکان عمودی وسط تیر	$w_{L/2}$
فاصله از ابتدای تیر در حالت اولیه	X
فاصله از ابتدای تیر در حالت تغییرشکل یافتهx	$\bar{X}$
ضریب انبساط حرارتی	α
ضریب انبساط حرارتی فولاد	α_s
ضریب انبساط حرارتی چوب	α_w
تغییرمکان عمودی وسط تیر	δ

عملگر تفاضلی	Δ	زاویه بردار عمود بر سطح مقطع تیر و محور عمود	
ضریب سطح مقطع بی‌بعد	η	پیش از تغییرشکل	θ_0
زاویهٔ بردار عمود بر سطح مقطع تیر و محور عمود		انحنای تیر	κ
پس از تغییرشکل	θ	ضریب پواسون	ν
		تنش	σ

مراجع

1. Raju, K.K. and Rao, G.V., "Thermal post-buckling of thin simply supported orthotropic square plate", *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 149-154, (1989).
2. Raju, K.K. and Rao, G.V., "Finite element analysis of thermal post-buckling of tapered columns", *Computers and Structures*, Vol. 19(4), pp. 617-620, (1984).
3. Gauss, R.C. and Antman, S.S., "Large thermal buckling of non-uniform beam and plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20(11), pp. 979–1000, (1984).
4. Li, S.R., Cheng, C.J. and Zhou, Y.H., "Thermal post-buckling of an elastic beam subjected to a transversely non-uniform temperature rising", *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, Vol. 24(5), pp. 514-520, (2003).
5. Kocatürk, T. and Akbas, S.D., "Post-buckling analysis of a simply supported beam under uniform thermal loading", *Scientific Research and Essays*, Vol. 6(4), pp. 1135-1142, (2011).
6. Vaz, M.A., Cyrino, J.C.R. and Neves, A.C., "Initial thermo-mechanical post-buckling of beams with temperature-dependent physical properties", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45(3), pp. 256–262, (2010).
7. Hodges, D.H., "Proper definition of curvature in nonlinear beam kinematics", *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1825-1827, (1984).
8. Hinnant, H.E. and Hodges, D.H., "Nonlinear analysis of a cantilever beam", *AIAA Journal*, Vol. 26, pp. 1421-1727, (1988).
9. Monasa, F. and Lewis G. "Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials", *International Journal of Computers and Structures*, Vol. 14(5), pp. 357-360, (1981).
10. Wang, C.Y., "Large deflection of an inclined cantilever with an end load", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 16(2), pp. 155-164, (1981).
11. Lewis, G. and Monasa, F., "Large deflection of cantilever beam of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment", *Journal of Non-Linear Mechanics*, 17(1), pp. 1-6, (1982).
12. Byoung, K.L., Wilson, J.F. and Oh, S.J., "Elastica of cantilevered beams with variable cross sections", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 28(5), pp. 579-589, (1993).
13. Baker, G., "On the large deflection of non-prismatic cantilevers with a finite depth", *Computers and Structures*, Vol. 46(2), pp. 365-370, (1993).
14. Saha, G. and Banu, S., "Buckling load of a beam-column for different end conditions using multi-segment integration technique", *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 2, pp. 27-33, (2007).
15. Hu, Y.J., Yang, J. and Kitipornchai, S., "Pull-in analysis of electrostatically actuated curved micro-beams with large deformation", *Smart Material and Structures*, Vol. 19, pp. 1- 9, (2010).
16. Beer, F.P., Johnston, E.R. and DeWolf, J.T., "*Strength of Materials, 3rd Edition*", McGraw Hill, USA, (2002).

تحلیل تأثیر پارامترهای هندسی و دینامیکی کامیونت بر انحراف عرضی ناشی از نابالانسی نیروی ترمزی*

(یادداشت پژوهشی)

موسی رضائی[۱] امین ترقی اسگوئی[۲] حسام الدین ارغند[۳]

چکیده *ایمنی خودروهای باری در حین ترمزگیری علاوه بر نابالانسی نیروی ترمزی، متأثر از تغییرات پارامترهای دینامیکی کامیونت ناشی از نحوهٔ بارگذاری آن می‌باشد. در مقالهٔ حاضر تأثیر پارامترهای دینامیکی، هندسی و نحوهٔ بارگذاری کامیونت بر انحراف عرضی آن در حضور نابالانسی نیروی ترمزی مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور برخی از پارامترهای دینامیکی مورد نیاز برای کامیونت مورد نظر با انجام تست‌های تجربی به‌دست آمده و در معادلات دینامیکی حاصل براساس فرض واقع‌بینانهٔ کاهش سرعت خودرو در حین ترمزگیری، اعمال شده است. سپس معادلات حاکم با استفاده از روش‌های عددی، حل شده است. در نتایج ارائه شده اثر پارامترهای دینامیکی و هندسی تأثیرگذار بر انحراف عرضی کامیونت و نحوهٔ بارگذاری مطلوب برای به حداقل رساندن مقدار انحراف عرضی در اثر ترمزگیری مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که حالت بهینهٔ بارگذاری برای کاهش تأثیر خطای نیروی ترمزی در انحراف عرضی زمانی حاصل می‌شود که مرکز جرم خودرو به محور جلو نزدیک باشد.*

واژه‌های کلیدی خطای نیروی ترمزی، انحراف عرضی، پارامترهای هندسی و دینامیکی، دینامیک خودرو.

An Investigation on the Effects of Geometric and Dynamic Parameters on the Truck Lateral Deviation Due to the Braking Force Imbalance

M. Rezaee A.Taraghi Osguei H.A. Arghand

Abstract *Besides the braking force error, the dynamic and geometric parameters of a truck affect its safety during the braking process. In this paper, the effect of dynamic and geometric parameters and the way of loading on the dynamic behavior of a truck in the presence of the braking force error is studied. To this end, some dynamic parameters of the truck have been obtained experimentally and applied to the truck governing equations of motion. Then, by using the realistic assumption in which the velocity of the truck decreases with a constant rate during the braking process, the governing equations are solved using a numerical technique. Finally, the load distribution on the truck as well as the dynamic and geometric parameters which affect the truck lateral deviation, are discussed and the results are presented in appropriate figures. The results show that the best load distribution for decreasing the effect of braking force imbalance on lateral deviation, can be achieved when the mass center approaches the front axis.*

Key Words Brake force error, Lateral deviation, Geometric and dynamic parameters, Vehicle dynamic.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۱۱/۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۱/۵ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز. m_rezaee@tabrizu.ac.ir

(۲) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۳) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

مقدمه

امروزه صنعت خودروسازی در نگرش جهانی، صنعتی مادر محسوب می‌شود و هر روز خودرویی نوین با کارایی بهتر به بازار ارائه می‌شود و زمینهٔ عمدهٔ رقابت در این صنعت رعایت نکات ایمنی و پارامترهای کاهش سوخت و آلودگی محیط زیست می‌باشد.

یکی از دانش‌های بسیار با اهمیت در زمینه خودرو، دینامیک خودرو است. این علم مرتبط با عملکرد کلی خودرو است و در واقع به بررسی و آنالیز حرکت خودرو به‌عنوان یک سیستم پویا می‌پردازد. رهاورد بررسی دینامیک خودرو، فراهم‌آوری طراحی بهینه در صنایع خودروسازی برای تأمین آسایش و ایمنی سرنشین، کنترل‌پذیری و پایداری است.

واکنش میان خودرو، راننده و محیط را می‌توان به‌صورت یک سیستم کنترلی مداربسته مدل کرد. لذا برای بهبود عملکرد سیستم کنترلی، ابتدا شناخت و مدل‌سازی هرچه دقیق‌تر رفتار دینامیکی خودرو تحت تأثیر عوامل مختلف موثر در موضوع مورد مطالعه ضروری است.

برای بررسی سیستم کنترلی خودرو، مطالعات زیادی در مورد تأثیر پارامترهای انسانی و محیطی بر روی تصادفات صورت گرفته است [1]. خودرو به‌عنوان سیستم کنترل‌شونده از بخش‌های زیادی تشکیل شده است که با هماهنگی هم کار می‌کنند و از میان این بخش‌ها سیستم‌های تعلیق، ترمز و فرمان، دینامیک حرکت را دیکته می‌کنند و عملکرد، فرمان‌پذیری و سواری خودرو به این سیستم‌ها وابسته است.

سیستم تعلیق که رابط میان جرم‌های فنربندی شده و فنربندی نشده است در مطالعات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [2-4]. بخش دیگر خودرو سیستم ترمزگیری آن است که با توجه به نیازمندی‌های خودرو و ضرورت ایمنی خودرو و سرنشینان آن طراحی می‌شود. با توجه به اهمیت این سیستم برای بهبود عملکرد خودرو استفاده از عملگرهای هوشمند در سیستم ترمز و سیستم فرمان برای بررسی پایداری یاو خودرو مورد مطالعه قرار گرفته است [5]. برخی دیگر از این مطالعات بر روی تایرها متمرکز است، زیرا به غیر از نیروهای گرانشی و پسای آیرودینامیکی، سایر نیروهای وارد به خودرو از سوی تایرها و در سطح تماس تایر و جاده اعمال می‌گردند [6, 7]. بخشی از مطالعات نیز بر طراحی انواع جدیدی از ترمزهای پیشرفته متمرکز شده‌اند [8, 9]. به‌علاوه، رفتار خودرو در شرایط ترمزگیری و توقف اضطراری نیز مورد بررسی قرار گرفته است [10]. در سیستم‌های جدید، کنترل روی هر چرخ به‌صورت جداگانه انجام می‌گیرد تا نیروی لازم برای ترمزگیری فراهم شود. زیرا ممکن است به دلایل مختلف در سیستم ترمزگیری هر یک از چرخ‌ها اختلال ایجاد شود. در این راستا مطالعه روی رفتار دینامیکی خودرو در شرایطی که هر یک از چرخ‌ها قابلیت ترمزگیری را از دست بدهند صورت گرفته است [11]. علاوه بر آن امکان ایجاد نابالانسی نیروهای ترمزی بسیار زیاد است و برای طراحی سیستم‌های کنترلی جدید بررسی این پدیده مورد نیاز است [12, 13].

پایداری دینامیکی خودرو همواره یکی از موارد مورد مطالعه بوده است [14, 15] و یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر روی آن نابالانسی نیروی ترمزی یا خطای نیروی ترمزی در طی فرآیند ترمزگیری می‌باشد که به اختلاف نیروی ترمزی چرخ‌های طرفین محور خودرو اطلاق می‌شود و مهم‌ترین عوامل ایجاد آن عبارتند از: خطای ناشی از عملگرهای ترمز و خطاهای ابعادی قطعات ترمز، وجود هر گونه اختلاف در پارامترهای سیستم تعلیق و نامیزانی فرمان و اختلاف در ضریب اصطکاک تایرهای طرفین محور که علت آن می‌تواند فرسودگی تایرها و ناهمگنی سطح جاده باشد.

یکی از عمده‌ترین تحقیقات صورت گرفته در این زمینه مطالعات الکساندر هاک [16] می‌باشد که به

بررسی تأثیر خطای نیروی ترمزی بر روی دینامیک خودرو پرداخته است. در این مطالعه با اعمال فرض ساده‌کننده و صرف‌نظر کردن از تغییرات سرعت در حین فرآیند ترمزگیری معادلات دینامیکی استخراج و حل شده است. در تکمیل این مدل، رضائی و همکاران [۱۷] با در نظر گرفتن فرضیات واقع‌بینانه‌تر، این فرآیند را مورد تحلیل قرار داده‌اند.

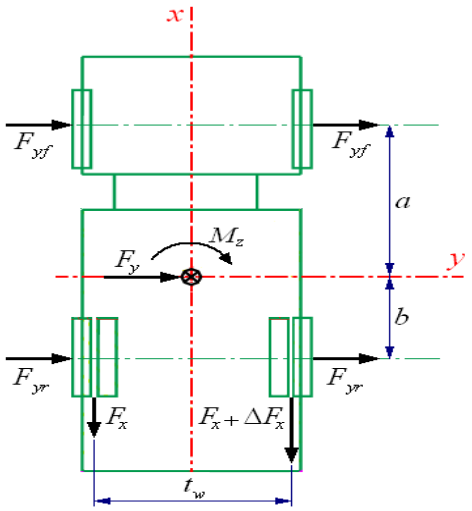
با توجه به این‌که بارگذاری کامیونت و نحوهٔ توزیع بار تأثیر مهمی بر پارامترهای دینامیکی آن دارد و میزان انحراف عرضی کامیونت در طی فرآیند ترمزگیری متأثر از پارامترهای دینامیکی و هندسی آن می‌باشد لذا در پژوهش حاضر با اعمال تئوری اصلاح شدهٔ هاک که توسط رضایی و همکاران [۱۷] برای یک خودروی باری (کامیونت آذرخش) ارائه شده است، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و دینامیکی و نحوهٔ بارگذاری بر انحراف عرضی خودرو در حضور نابالانسی نیروی ترمزی مورد بررسی قرار گرفته است.

نحوهٔ بارگذاری کامیونت و توزیع آن با تغییر سه پارامتر جرم، ممان اینرسی جرمی و محل مرکز جرم بار بر انحراف عرضی خوردرو اثر می‌گذارد که در تحقیق حاضر، میزان تأثیر هر کدام از موارد اخیر به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است. ضمناً به‌منظور عدم نیاز به مراجعه به مرجع [۱۷] و کمک به خواننده، معادلات دینامیکی فرآیند ترمزگیری به‌صورت خلاصه در بخش ذیل ارائه می‌شود.

معادلات حاکم بر دینامیک ترمزگیری

برای مطالعهٔ تأثیر نابالانسی نیروی ترمزی بر روی انحراف عرضی کامیونت حین ترمزگیری مدلی با دو درجه آزادی در نظر گرفته شده و معادلات حرکت آن بر حسب زاویهٔ سمت‌گیری، $\psi(t)$، و انحراف عرضی خودرو، $Y(t)$، استخراج شده است.

در مدل ارائه شده در شکل (۱) نیروی ترمزی چرخ‌های طرفین محور جلو، برابر در نظر گرفته شده است. این فرض به دو دلیل وجود دارد: اول آن‌که در سیستم‌های ترمز هیبریدی در چرخ‌های جلو از عملگرهای هیدرولیکی و در چرخ‌های عقب از عملگرهای الکتریکی استفاده می‌کنند و در چنین حالتی خطای ترمزهای الکتریکی بیشتر از ترمزهای هیدرولیکی است. دوم آن‌که تأثیر نابالانسی نیروهای ترمزی چرخ‌های جلو عمدتاً وابسته به نوع خودرو و زاویهٔ ورودی فرمان است [16].



شکل ۱ مدل دینامیکی کامیونت حین ترمزگیری

با توجه به شکل (۱) و استفاده از قوانین نیوتن می‌توان معادلات حرکت را به شکل زیر نوشت:

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} + F_y \qquad (۱\text{-الف})$$

$$I_{zz}\dot{\Omega} = F_{yf}\,a - F_{yr}\,b + M_z \qquad (۱\text{-ب})$$

در معادلات بالا m جرم خودرو، I_{zz} ممان اینرسی خودرو حول محور یاو، a_y شتاب جانبی مرکز جرم خودرو، a و b به‌ترتیب فاصلهٔ محورهای جلو و عقب از مرکز جرم خودرو و t_w عرض خودرو می‌باشد. F_{yf} و F_{yr} به‌ترتیب نیروهای جانبی وارد بر تایرهای کامیونت در محورهای جلو و عقب هستند. M_z گشتاور اغتشاشی و F_y نیروی اغتشاشی جانبی است که می‌تواند ناشی از نیروی عرضی باد، نیروهای

آیرودینامیکی و یا شرایط جاده باشد. ΔF_x نابالانسی نیروی ترمزی یا خطای نیروی ترمزی است که ناشی از اختلاف نیروهای ترمزی چرخ‌های محور عقب خودرو می‌باشد.

مطابق مدل ارائه شده برای تایر، نیروهای جانبی متناسب با زاویهٔ لغزش تایر است [18].

$$F_{yf} = -c_f \alpha_f = -c_f \left(\frac{v_y + a\Omega}{v_x} - \delta \right) \qquad (۲\text{-الف})$$

$$F_{yr} = -c_r \alpha_r = -c_r \frac{v_y - b\Omega}{v_x} \qquad (۲\text{-ب})$$

در معادلات بالا، c_f و c_r به‌ترتیب بیانگر ضرایب سفتی جانبی تایرهای جلو و عقب است. α_f و α_r به‌ترتیب زوایای لغزش جانبی تایرهای محورهای جلو و عقب است. δ زاویهٔ فرمان چرخ‌های جلو و v_y و v_x به‌ترتیب سرعت‌های جانبی و طولی مرکز جرم خودرو در دستگاه مختصات متصل به خودرو می‌باشد.

از طرف دیگر رابطهٔ سینماتیکی زیر برای شتاب جانبی مرکز جرم خودرو برقرار است:

$$a_y = \dot{v}_y + v_x \Omega \qquad (۳)$$

با قرار دادن معادلات (۳ و ۲) در معادلهٔ (۱) داریم:

$$\dot{v}_y = a_{11}(v_x) v_y + a_{12}(v_x) \Omega + b_1 \delta + d_1 F_y \qquad (۴\text{-الف})$$

$$\dot{\Omega} = a_{21}(v_x) v_y + a_{22}(v_x) \Omega + b_2 \delta + d_2 M \qquad (۴\text{-ب})$$

با توجه به این‌که سرعت طولی خودرو، v_x، متناسب با شتاب ترمزگیری خودرو کاهش می‌یابد، بنابراین:

$$v_x = v_{x_0} + a_x t \qquad (۵)$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۵) ضرایب معادلات (۴-الف و ۴-ب) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
a_{11}(v_x) &= -\frac{C_f + C_r}{m(v_{x_0} + a_x t)} \\
a_{12}(v_x) &= \frac{-C_f a + C_r b}{m(v_{x_0} + a_x t)} - (v_{x_0} + a_x t) \\
a_{21}(v_x) &= \frac{-C_f a + C_r b}{I_{zz}(v_{x_0} + a_x t)} \\
a_{22}(v_x) &= -\frac{C_f a^2 + C_r b^2}{m(v_{x_0} + a_x t)} \\
b_1 &= \frac{C_f}{m} \; ; \; b_2 = \frac{a C_f}{I_{zz}} \\
d_1 &= \frac{1}{m} \; ; \; d_2 = \frac{1}{I_{zz}}
\end{aligned} \qquad (۶)$$

با توجه به این‌که ضرایب دستگاه معادلات (۴) توابعی از زمان می‌باشند، ارائهٔ حل تحلیلی و دقیق برای آن کار ساده‌ای نیست. از این‌رو معادلات فوق با استفاده از روش‌های عددی حل شده و سرعت زاویه‌ای Ω و سرعت جانبی v_y استخراج می‌شوند.

با استخراج سرعت زاویه‌ای، زاویهٔ سمت‌گیری خودرو از معادلهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$\psi(t) = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \qquad (۷)$$

هم‌چنین با داشتن v_x ، v_y و ψ می‌توان سرعت طولی و عرضی خودرو در دستگاه مختصات مرجع ثابت را به‌صورت زیر استخراج کرد:

$$V_x = v_x \cos\psi - v_y \sin\psi \qquad (۸\text{- الف})$$

$$V_y = v_x \sin\psi + v_y \cos\psi \qquad (۸\text{- ب})$$

موقعیت طولی و جانبی خودرو نیز با انتگرال‌گیری از سرعت‌های متناظر بیان شده در دستگاه مختصات مرجع ثابت به‌دست می‌آید:

$$X(t) = \int_0^t V_x(\tau)d\tau \quad (۹- الف)$$

$$Y(t) = \int_0^t V_y(\tau)d\tau \quad (۹- ب)$$

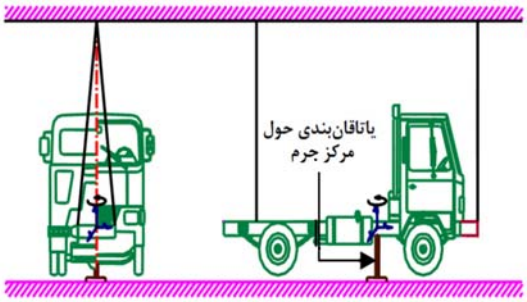
بدین ترتیب انحراف عرضی خودرو از مسیر مستقیم Y، در اثر نیروی نابالانسی ترمز به‌دست می‌آید.

تعیین تجربی پارامترهای دینامیکی خودرو و حل عددی معادلات

پس از انجام مدل‌سازی مناسب و به‌دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم دینامیکی، حل این معادلات با روش رونگ-کوتای مرتبهٔ ٤ انجام شده است. مقادیر پارامترهای مورد نیاز در حل عددی، مربوط به کامیونت آذرخش با بار کامل می‌باشد.

برای حل معادلات در این بخش به‌ازای تمام کمیت‌های مورد نیاز، مقادیر عددی استفاده شده و اثر تغییرات شتاب مورد بررسی قرار گرفته است. برخی از این کمیت‌ها با انجام آزمایش‌های تجربی و برخی دیگر از جمله ضرایب سفتی جانبی تایرهای جلو و عقب، از طریق استعلام از شرکت‌های سازنده به‌دست آمده است.

در تعیین ممان اینرسی جرمی خودرو از روش تعلیق دو سیمه استفاده شده است. برای انجام این تست که در شرکت خودروسازان دیزلی آذربایجان انجام گردید نیاز به تعبیهٔ بازوهایی در قسمت جلوی خودرو و در امتداد شاسی بود که قطعات مذکور تهیه و به شاسی خودرو متصل شد و پس از تعلیق خودرو مطابق شکل (۲) پریود نوسانات زاویه‌ای خودرو حول محور یاو اندازه‌گیری شد و برای افزایش دقت، این آزمایش چند بار تکرار گردید و از میانگین نتایج به‌دست آمده، ممان اینرسی جرمی خودرو محاسبه شد. البته روش‌های دیگری نیز برای تعیین خواص اینرسی خودرو وجود دارد [19]. پارامترهای دینامیکی و هندسی مورد نیاز در جدول (۱) ارائه شده است.



شکل ۲ تعیین تجربی ممان اینرسی جرمی خودرو به‌روش تعلیق دو سیمه

هم‌چنین تنظیمات لازم بر روی خودروی مورد استفاده در تست‌های تجربی مطابق با فرضیات صورت گرفته برای حل معادلات اعمال شد.

برای صحه‌گذاری و بررسی اثر فرض واقع‌بینانهٔ کاهش سرعت در حین ترمزگیری، منحنی‌های انحراف عرضی و زاویه‌ای کامیونت برای شتاب‌های مختلف در بازه زمانی محدود در مرجع [۱۷] ارائه شده است.

جدول ۱ پارامترهای دینامیکی و هندسی کامیونت

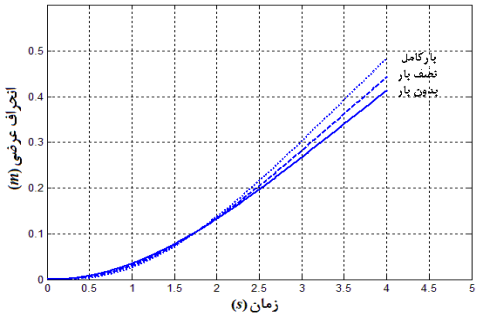
پارامتر	جرم	ممان اینرسی	ضریب سفتی تایرهای جلو	ضریب سفتی تایرهای عقب	فاصلهٔ مرکز جرم از محور جلو	فاصلهٔ مرکز جرم از محور عقب
نماد (واحد)	m (kg)	I_{zz}(kg.m2)	C_f (N/Rad)	C_r (N/Rad)	a (m)	b (m)
مقدار	٦۰۰۰	۱۰۲٦٥	٦۳۰۲٥	٦۸۷٥٥	۲/۲	۱/۱

با استفاده از تئوری ارائه شده توسط هـاک [16] و با فرض ساده‌کنندهٔ ثابت بودن سـرعت در طـی فرآینـد ترمزگیری، امکان به‌دست آوردن مقدار انحراف عرضی خودرو در لحظهٔ توقف وجود ندارد. چرا که با در نظـر گرفتن این فرض، خودرو هرگز متوقف نخواهد شـد و انحراف عرضی تا بی‌نهایت ادامه پیـدا مـی‌کنـد. نتـایج پژوهش‌های پیشین و نتایج حاصل از مـدل واقـع‌بینانـه ارائه شـده، در مقالـهٔ دیگـر از نویسـندگان بـه‌صـورت کامل‌تر مقایسه شـده اسـت و صـحت مـدل بـه اثبـات رسیده است [۱۷].

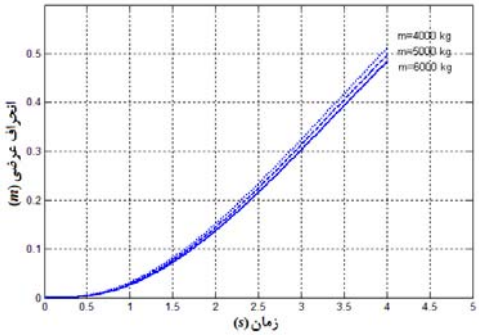
در ادامهٔ مقاله حاضر با در نظر گـرفتن پارامترهـای دینامیکی و هندسـی حالـت بـارگیری کامـل کامیونـت آذرخش به‌عنوان حالت پایه، تأثیر تغییرات هـر یـک از این پارامترها شامل جرم، ممان اینرسی جرمی، موقعیت مرکز جرم، سفتی جانبی تایرها، سرعت اولیهٔ خـودرو و گشتاور نابالانسی بر انحـراف عرضـی کامیونـت مـورد بررسی قرار می‌گیرد.

بررسی تأثیر نحوهٔ بارگذاری

براساس مقدار و نحوهٔ بارگذاری، پارامترهـای مـؤثر در ضرایب معادلات حرکـت (٤–الـف و ٤–ب) از جملـه جرم، ممان اینرسی جرمی حول محور یاو و محل مرکز جرم تغییر مـی‌کننـد. از ایـن رو مـی‌تـوان سـه حالـت بارگیری خودرو شامل بار کامل، نصف بار و بدون بـار را در نظر گرفت که در هر یـک از ایـن حالـت‌هـا بـار به‌صورت یکنواخت و در کل اتاقـک بـارگیری توزیـع شده است. ضـرایب معـادلات بـرای هـر یـک از ایـن حالت‌ها محاسبه شده و منحنی‌هـای مربـوط در شـکل (۳) ارائه شده است. براساس منحنی‌های این شـکل بـا افزایش بار، انحراف عرضی افـزایش مـی‌یابـد. ولـی از آن‌جایی که هر سه پارامتر جرم، ممان اینرسی جرمـی و محل مرکز جرم هم‌زمان تغییر می‌کنند، به بررسی تـأثیر هر یک از این پارامترها با ثابت فرض کردن دو پـارامتر دیگر می‌پردازیم.



شکل ۳ انحراف عرضی خودرو به‌ازای سه نوع بارگذاری مختلف در ٤ ثانیهٔ اول ترمزگیری

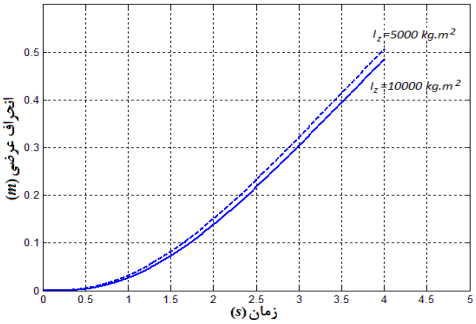


شکل ٤ منحنی انحراف عرضی خودرو به‌ازای تغییر جرم و ثابت نگه داشتن ممان اینرسی جرمی و محل مرکز جرم

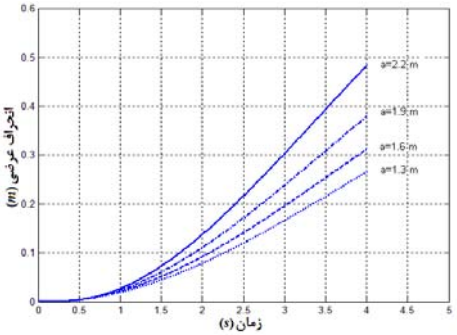
اثر جرم. اگر بار در مرکز جرم و بـه‌صـورت متمرکـز اعمال شود، ممان اینرسی جرمی خـودرو حـول محـور یاو تغییر نخواهد کرد. لذا با در نظر داشتن این فرض و اعمال آن تغییرات انحراف عرضی خودرو بـه‌ازای سـه جرم متفاوت در بازهٔ مجـاز بـرای بـارگیری خـودرو و داشتن ممان اینرسی و مرکز جـرم یکسـان در هـر سـه حالت مورد بررسی قرار گرفته اسـت کـه نتـایج آن در شکل (٤) نشان داده شده است.

چنانچه این نتایج نشـان مـی‌دهـد، افـزایش جـرم موجـب کـاهش انحـراف عرضـی خـودرو در حـین ترمزگیری مـی‌شـود. زیـرا مقاومـت خـودرو در برابـر افزایش انحراف عرضی به‌واسطهٔ افـزایش جـرم، بیشـتر شده است.

اثر ممان اینرسی جرمی. توزیع بار در اتاقک بار کامیونت را می‌توان در حالت‌های مختلف به‌گونه‌ای تغییر داد که ضمن ثابت ماندن جرم و محل مرکز جرم خودرو، ممان اینرسی جرمی حول محور یاو تغییر کند. با در نظر گرفتن تغییرات ممان اینرسی جرمی در بازهٔ مورد قبول و ثابت فرض کردن سایر پارامترها می‌توان انحراف عرضی کامیونت را بررسی کرد. نتایج مربوط به دو حالت متفاوت که با تغییرات قابل توجه ممان اینرسی جرمی به‌دست آمده است، در شکل (۵) رسم شده‌اند.



شکل ۵ منحنی انحراف عرضی خودرو در برابر تغییر ممان اینرسی جرمی و ثابت نگه داشتن جرم و محل مرکز جرم



شکل ٦ منحنی تغییرات انحراف عرضی خودرو به‌ازای تغییر موقعیت مرکز جرم و ثابت نگه داشتن جرم و ممان اینرسی جرمی

چنانچه در شکل (۵) ملاحظه می‌شود، تغییرات قابل‌توجه در ممان اینرسی جرمی در اثر تغییر نحوهٔ توزیع بار باعث کاهش جزئی در مقدار انحراف عرضی خودرو شده است.

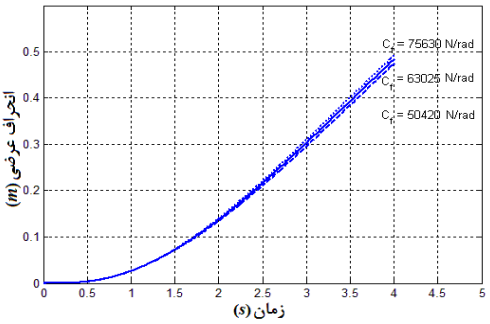
اثر جابه‌جایی مرکز جرم. با تغییر نحوهٔ توزیع بار بر روی اتاقک کامیونت می‌توان حالت‌های مختلفی را در نظر گرفت که ضمن ثابت ماندن جرم و ممان اینرسی جرمی خودرو حول محور یاو، مرکز جرم خودرو تغییر کند. فاصلهٔ بین دو محور کامیونت آذرخش مورد آزمون ۳/۳ متر است. اثر تغییرات فاصلهٔ مرکز جرم خودرو از محور جلو، a، در حالی که سایر پارامترها ثابت فرض شده است مورد بررسی قرار گرفته است. شکل (٦) چهار حالت متفاوت از توزیع بارگذاری و جابه‌جایی مرکز جرم را نشان می‌دهد.

نتایج ارائه شده در شکل (٦) نشان می‌دهد که افزایش فاصلهٔ مرکز جرم از محور جلو اثر شدیدی بر افزایش انحراف عرضی خودرو دارد. دلیل این افزایش قابل توجه، اثر جابه‌جایی مرکز جرم در افزایش زاویهٔ لغزش تایرهای محور جلوی کامیونت است.

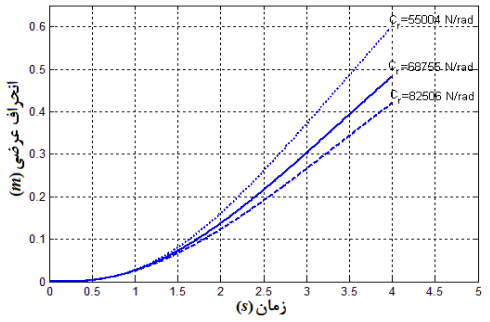
بررسی جداگانهٔ اثر پارامترهایی که با افزایش بار تغییر می‌کنند، نشان می‌دهد که جابه‌جایی مرکز جرم به سمت محور عقب خودرو اثر غالب را در منحنی‌های ارائه شده در شکل (۳) دارد، به‌گونه‌ای که ضمن افزایش جرم و ممان اینرسی جرمی در اثر افزایش بار، انحراف عرضی کامیونت افزایش یافته است.

بررسی تأثیر سفتی جانبی تایرها

در اثر تغییرات شرایط محیطی مانند دما، رطوبت و با توجه به نوع تایرها و هم‌چنین شرایط سطح جاده و باد لاستیک‌ها، ضریب سفتی جانبی تایرها می‌تواند تغییر کند. سفتی تایرها در جهت مورد مطالعه کاملاً غیرخطی است، لذا برای بررسی تأثیر تغییر ضرایب سفتی جانبی تایرها در انحراف عرضی خودرو می‌توان تغییراتی در حدود ۲۰٪ را برای ضرایب سفتی در نظر گرفت. در شکل (۷) منحنی انحراف عرضی خودرو در برابر زمان به‌ازای تغییرات ۲۰± درصدی ضریب سفتی جانبی تایرهای محور جلو رسم شده و با مقدار مبنا مقایسه شده است.



شکل ۷ منحنی تغییرات زمانی انحراف عرضی خودرو به‌ازای تغییرات ٪۲۰± ضریب سفتی جانبی تایرهای جلو نسبت به مقدار مبنا ($C_f = 63025\,N/Rad$)

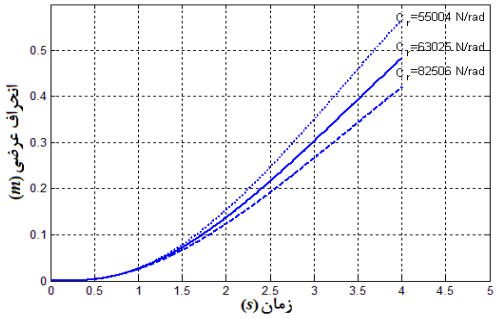


شکل ۸ منحنی تغییرات زمانی انحراف عرضی خودرو به‌ازای تغییرات ٪۲۰± ضریب سفتی تایرهای عقب نسبت به مقدار مبنا ($C_r = 68755\,N/Rad$)

با توجه به شکل (۷) مشاهده می‌گردد که با افزایش C_f انحراف عرضی افزایش جزئی می‌یابد، که دلیل آن تغییر ضرایب معادلات (٤–الف و ٤–ب) می‌باشد. به طریق مشابه می‌توان منحنی تغییرات زمانی انحراف عرضی خودرو در برابر تغییرات ٪۲۰± درصدی در ضریب سفتی تایرهای محور عقب را رسم کرد (شکل ۸).

با افزایش ضریب سفتی جانبی تایرهای عقب، انحراف عرضی کاهش می‌یابد. علت اصلی تغییرات زیاد منحنی مربوط به تایرهای محور عقب، تعداد بیشتر تایرهای محور عقب نسبت به تعداد تایرهای محور جلو در کامیونت است. با بررسی ضرایب ارائه شده در روابط (۲) مشاهده می‌شود که افزایش C_f و C_r تأثیر متفاوتی روی ضرایب a_{12} و a_{21} معادلات (٤–الف و ٤–ب) دارد که دلیل تفاوت رفتار منحنی‌های ارائه شده در شکل‌های (۸ و ۷) است.

برای بررسی بهتر تأثیرات ضرایب سفتی جانبی تایرها در انحراف عرضی خودرو می‌توان مطابق با شرایط ممکن برای کامیونت، با ثابت نگه داشتن نسبت C_f / C_r، ضریب سفتی جانبی تایرهای محور عقب را ٪۲۰ تغییر داد (شکل ۹).



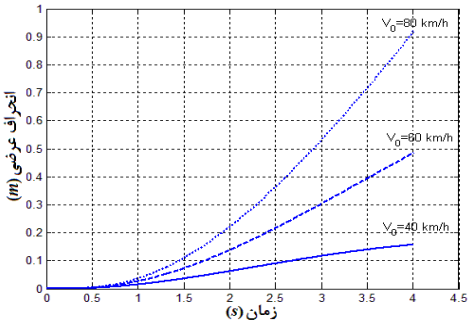
شکل ۹ منحنی تغییرات زمانی انحراف عرضی خودرو به‌ازای تغییرات ٪۲۰± ضریب سفتی تایرهای عقب و ثابت نگه داشتن نسبت C_f / C_r

با توجه به شکل (۹) مشاهده می‌گردد که تأثیر تغییر هم‌زمان مقدار سفتی جانبی تایرهای محورهای جلو و عقب باعث کاهش انحراف عرضی می‌شود. زیرا چنانچه منحنی‌های رسم شده در شکل (۸ و ۷) نیز نشان می‌دهند، اثر تغییرات ضریب سفتی تایرهای عقب بر اثر تغییرات ضریب سفتی تایرهای جلو غلبه دارد.

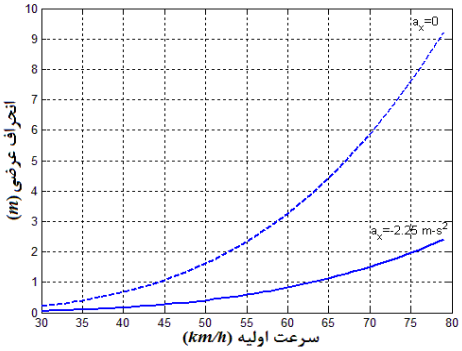
بررسی تأثیر سرعت اولیه

پارامتر دیگر ظاهر شده در معادلات حرکت که بر روی انحراف زاویه‌ای و عرضی خودرو اثرگذار است، سرعت طولی خودرو در شروع فرآیند ترمزگیری است.

منحنی تغییرات انحراف عرضی نسبت به زمان به‌ازای سه مقدار متفاوت سرعت اولیه در شکل (۱۰) رسم شده است. افزایش قابل توجه انحراف عرضی در اثر افزایش سرعت اولیه در این شکل قابل مشاهده می‌باشد.



شکل ۱۰ منحنی تغییرات انحراف عرضی نسبت به زمان به‌ازای سرعت‌های اولیه متفاوت



شکل ۱۱ منحنی تغییرات انحراف عرضی کامیونت در برابر تغییرات سرعت اولیه در لحظهٔ توقف به‌ازای دو حالت با در نظر گرفتن شتاب و بدون در نظر گرفتن شتاب

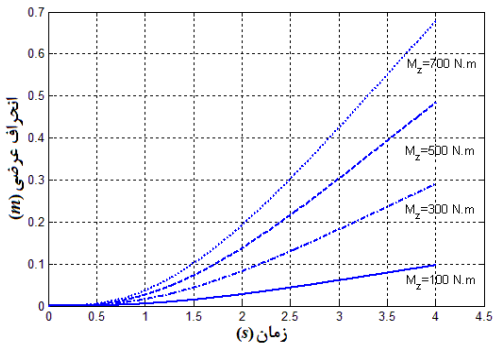
سرعت طولی خودرو بر روی مقدار سرعت و انحراف عرضی تأثیرگذار است، که این اثر در درجهٔ اول به‌طور مستقیم در این رابطه دیده می‌شود و ثانیاً در حل دستگاه معادلات (٤)، پارامتر سرعت طولی در مقدار سرعت و انحراف زاویه‌ای اثرگذار است.

شکل (۱۱) میزان انحراف عرضی کامیونت در لحظهٔ توقف در برابر سرعت اولیهٔ خودرو را نشان می‌دهد. منحنی رسم شده به‌ازای شتاب $a_x = -2.25 m/s^2$ در شکل (۱۱) نشان‌دهندهٔ مقدار انحراف عرضی کامیونت در لحظهٔ توقف، در برابر تغییرات سرعت اولیهٔ آن است. در منحنی دوم این شکل که به‌ازای شتاب $a_x = 0$ رسم شده است، با توجه به ثابت ماندن سرعت خودرو در صورت عدم وجود شتاب، محاسبهٔ انحراف عرضی در لحظهٔ توقف بی‌معنی است. لذا برای انجام مقایسه بین این دو حالت و مشاهدهٔ اثر شتاب، انحراف عرضی به‌ازای هر سرعت، در لحظهٔ متناظر با توقف خودرو با همان سرعت و شتاب $a_x = -2.25 m/s^2$ رسم شده است.

مقایسهٔ دو منحنی رسم شده در این شکل اثر چشم‌گیر شتاب در انحراف عرضی را نشان می‌دهد و مشاهده می‌گردد که نتایج ارائه شده بر پایهٔ مدل و فرضیات پژوهش پیشین در مرجع [16]، برای تحلیل انحراف عرضی ناشی از وجود خطای نیروی ترمزی قابل قبول نیست.

اثر گشتاور نابالانسی ناشی از خطای نیروی ترمزی

خطای نیروی ترمزی تایرهای طرفین خودرو گشتاور نابالانسی M_z را ایجاد می‌کند، که در دستگاه معادلات (٤) ظاهر شده است. لذا تغییرات M_z باعث تغییر مقدار انحراف عرضی خودرو می‌گردد. منحنی تغییرات انحراف عرضی به‌ازای ٤ گشتاور نابالانسی متفاوت در شکل (۱۲) رسم شده است. نتایج ارائه شده در شکل (۱۲) نشان دهندهٔ افزایش انحراف عرضی به‌ازای افزایش مقدار خطای نیروی ترمزی و در نتیجه گشتاور نابالانسی متناظر با آن است.



شکل ۱۲ منحنی تغییرات انحراف عرضی کامیونت در برابر زمان به‌ازای ٤ گشتاور نابالانسی متفاوت

نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر رفتار دینامیکی خودرو در حین فرآیند ترمزگیری در حضور خطای نیروی ترمزی بین تایرهای طرفین محور عقب مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور پارامترهای مورد نیاز برای حل معادلات از طریق آزمایش‌های تجربی استخراج و معادلات حاکم با استفاده از روش‌های عددی حل شده است.

در این مقاله تأثیر پارامترهای هندسی و دینامیکی به‌طور جداگانه بر روی انحراف عرضی بررسی شده است و نتایج حاصل از این تحلیل‌ها نشان می‌دهد که کاهش سرعت در حین ترمزگیری اثر قابل توجهی بر انحراف عرضی آن دارد. به‌طوری که افزایش شتاب ترمزگیری موجب کاهش انحراف عرضی خودرو می‌گردد. لذا نمی‌توان از تئوری ارائه شده توسط الکساندر هاک با فرض ثابت بودن سرعت در حین ترمزگیری [16] برای برآورد انحراف عرضی خودرو استفاده کرد.

نحوهٔ بارگذاری کامیونت، سه پارامتر جرم، ممان اینرسی جرمی و موقعیت مرکز جرم را که در معادلات حرکت ظاهر می‌شوند تحت تأثیر قرار می‌دهد. بررسی جداگانهٔ این سه پارامتر نشان می‌دهد که افزایش هر یک از پارامترهای جرم و ممان اینرسی جرمی باعث کاهش انحراف عرضی می‌شود، حال آن‌که جابه‌جایی مرکز جرم به سمت محور عقب کامیونت موجب افزایش انحراف عرضی می‌گردد. در بارگذاری یکنواخت بر روی اتاقک بار کامیونت، اثر جابه‌جایی مرکز جرم بر افزایش جرم و ممان اینرسی جرمی غالب است و نهایتاً موجب افزایش انحراف عرضی کامیونت می‌گردد.

با توجه به نتایج به‌دست آمده، بهترین نحوهٔ بارگذاری برای کاهش انحراف عرضی ناشی از خطای نیروی ترمزی زمانی است که مرکز جرم بار تا حد امکان به محور جلو نزدیک باشد.

ضرایب سفتی جانبی تایرها نیز که در معادلات حرکت ظاهر شده‌اند بر روی انحراف عرضی خودرو تأثیر گذارند. به گونه‌ای که افزایش سفتی جانبی تایرهای جلو موجب افزایش اندک انحراف عرضی می‌شود، در صورتی که افزایش ضریب سفتی تایرهای محور عقب انحراف عرضی را کاهش می‌دهد. چنانچه سفتی تایرهای جلو و عقب هم‌زمان و متناسب با هم تغییر کند، اثر تغییرات سفتی تایرهای عقب غالب بوده و افزایش هم‌زمان سفتی تایرها موجب کاهش انحراف عرضی خودرو می‌گردد.

سرعت اولیهٔ خودرو در شروع فرآیند ترمزگیری نیز بر انحراف عرضی اثر گذار است. به‌طوری که هرچه سرعت اولیه در آغاز ترمزگیری بیشتر باشد، مقدار انحراف عرضی نیز بیشتر می‌شود. آزمایش‌های تجربی برای اندازه‌گیری انحراف عرضی خودرو با سرعت اولیهٔ مشخص، نشان‌دهندهٔ تطابق نتایج تجربی با نتایج تئوری حاصل از تحلیل مدل ارائه شده است. تحلیل تئوری انحراف عرضی در پایان ترمزگیری و لحظهٔ توقف بر پایهٔ تحلیل‌های پیشین امکان‌پذیر نیست؛ زیرا مطابق با فرض صورت گرفته برای حل تحلیلی مسأله از اثر شتاب صرف‌نظر شده است و لذا در این حالت خودرو هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود. حال آن‌که بر پایهٔ فرض استفاده شده در این مقاله و حل عددی صورت گرفته، محاسبهٔ مقدار انحراف عرضی در لحظهٔ توقف امکان‌پذیر است و نتایج آن با نتایج تست‌های تجربی مطابقت می‌کند.

افزایش خطای نیروی ترمزی نیز که گشتاور نابالانسی را ایجاد می‌کند باعث افزایش انحراف عرضی خودرو می‌شود.

تشکر و سپاسگزاری

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از شرکت خودروسازان دیزلی آذربایجان به‌سبب فراهم آوردن شرایط انجام آزمایش‌های تجربی تشکر و قدردانی نمایند.

مراجع

1. Farmer, C.M. and Lund, A.K., "Rollover risk of cars and light trucks after accounting for driver and environmental factors" *Accident Analysis and Prevention*, 34, pp. 163-173,(2002).
2. Hac, A., "Rollover Stability Index Including Effects of Suspension Design", *SAE World Congress, Detroit, Michigan*, March 4-7, (2002).
3. Takano, S., Nagai, M., Taniguchi, T. and Hatano, T., "Study on vehicle dynamics model for improving roll stability", *JASE Review*, 24, pp. 149-156, (2003).
4. Zheng, X., Wu, J. and Zhou, Y., "Numerical analysis on dynamic control of five-degree-of-freedom Maglev Vehicle Moving on Flexible Guideways", *Journal of Sound and Vibration*, 235, pp. 43-61, (2000).
5. Poussot-Vassal, C., Sename, O., Dugard L. and Savaresi, S. M., "Vehicle dynamic stability improvements through gain-scheduled steering and braking control", *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 49 (10) , pp. 1597-1621, (2011).
6. Zebala, J., Ciepka, P., Reza, A. and Janczur, R., "Influence of rubber compound and tread pattern of retreated tires on vehicle active safety", *Forensic Science International* 167, pp. 173-180, (2007).
7. Onoa, E., Asanoa, K., Sugaia, M., Itob, S., Yamamotob, M., Sawadac, M. and Yasuid, Y., "Estimation of automotive tire force characteristics using wheel velocity", *Control Engineering Practice*, 11, pp. 1361-1370, (2003).
8. Andrew, H., Gosline, C. and Hayward, V., "Eddy Current Brakes for Haptic Interfaces: Design, Identification and Control", *ASME Transactions on mechatronics*, 13(6), (2008).
9. Choi, S.B., "Antilock Brake System With a Continuous Wheel Slip Control to Maximize the Braking Performance and the Ride Quality", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(5), (2008).
10. Kudarauskas, N., "Analysis of emergency braking of a vehicle", *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 22(3), pp. 154-159, (2007).
11. Lukoseviciene O. and Sokolovskij, E., "Movement of the vehicle being braked when some wheels are incapable of braking or have lost touch with the road surface", *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 21(1), pp. 8-11, (2006).
12. Xiang, W., Richardson, P., C., Zhao, C. and Mohammad, S., "Automobile Brake-by-Wire Control System Design and Analysis*", IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 57(1), (2008).
13. Eslamian, M., Mirzaei, M. and Alizade, G., "Enhancement of Vehicle Lateral Stability by Non-linear Optimal Control of Yaw Dynamics", *Mech. & Aerospace Eng. J.*, 2(3), (2007).
14. Anwar, S., "Predictive Yaw Stability Control of a Brake-By-Wire Equipped Vehicle via Eddy Current Braking", *American Control Conference, New York City, USA*, July 11-13 (2007).,
15. Schiebahn, M., Zegelaar, P.W., Lakehal-Ayat M. and Hofmann, O., "The yaw torque influence of active systems and smart actuators for coordinated vehicle dynamics controls", *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 48(11), pp. 1269-1284, (2010).
16. Hac, A., "Effects of Brake Actuator Error on Vehicle Dynamics and Stability", *SAE World Congress, Detroit, Michigan,* April 11-14, (2005).

۱۷. رضائی، موسی، ارغند،حسام‌الدین، ترقی اسگوئی، امین، بافندگان، محمد، «مطالعهٔ تئوری و تجربی خطای نیروی ترمزی بر میزان انحراف عرضی خودرو» نشریهٔ علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، سال بیست و سوم، شمارهٔ یک، (۱۳۹۰).

18. Wong, J.Y., "Theory of Ground Vehicles", Third Edition, John Wiley & Sons, (2001).

19. Rozyn M. and Zhang, N., “A method for estimation of vehicle inertial parameters”, *Vehicle System Dynamics: I. J. of Vehicle Mechanics and Mobility*, 48(5), pp. 547-565, (2010).

Dynamics Modeling and Analysis as a New Mechanism for Automatic Control of Angular Velocity of a Rotary Axis

Kh. Faraji Mahyari[1], A. Jafari[2*], S. S. Mohtasebi[2], A. Hajiahmad[3]

1- Introduction

In many rotary systems, input power is supplied from a source with unsteady angular velocity which causes fluctuations in the system output and changes in the efficiency. The rotary power has two components, i.e. the angular velocity and torque, and rotary power is determined by their product. Generally, systems design is based on a specified angular velocity or torque. Therefore, maximum efficiency is achieved only at a nominal angular velocity or a specified torque. For example, in wind and hydro turbines, input angular velocity is almost unsteady. Also, in some systems that obtain their required power from an unsteady source such as internal combustion engines, it is hard to keep the angular velocity of the input shaft constant. Moreover, systems such as agricultural machineries obtain the required power for driving and operating their components from tractor Power Take-Off (PTO). Tractor PTO shaft provides a rotational motion for agricultural implements, and its angular velocity should be exactly 540 or 1000 rpm at nominal engine speed based on ASABE S207.12 standard. If the engine speed becomes less or greater than the nominal rate, the PTO rotational speed will be changed. Higher or lower PTO angular velocity than the standard values reduces the efficiency of the machine, damages the moving parts and creates problems such as sticking agricultural products in the machine.

The aim of this research is to introduce the mechanism for automatic control of angular velocity of a rotary axis and to present its dynamic analysis and also its modeling. The mechanism can be used as a suitable coupling between tractor PTO shaft and agricultural machineries and their implementation.

2- Structure of the Mechanism of Angular Velocity Control

The mechanism of angular velocity control design is based on the relationship between the centrifugal force and the angular velocity ($F = mr\omega^2$). The first angular velocity control system (fly-ball governor) and planetary gear set concepts are utilized for mechanism of angular velocity control design.

As seen in Figure 1., the system consists of two similar sets of planetary gear trains and two sets of heavy and light weight hanging pulleys. These sets are linked together by a belt. In addition, each of the hanging pulleys is connected to the center of the mechanism by a spring that causes the pulleys to hang.

These two sets of planetary gear trains have been placed in series and are connected to each other through a fixed common ring gear. In the first planetary gear set, the sun gear is a driver and the carrier follows it. However, in the second set, the carrier is a driver and the power is issued from the sun gear. The parts shown in Figure 1. are described in Table.1.

Planetary gear sets of the mechanism are schematically shown in Figure 2. In the mechanism, planetary gears, heavy and lightweight hanging pulleys, and rollers have a rotational motion in addition to the orbital motion. Meanwhile, the input and output shafts rotate in the same direction.

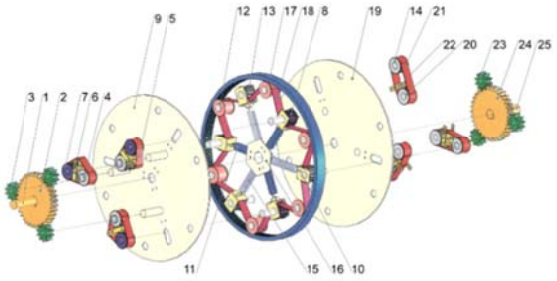


Figure 1. Exploded view and parts numbers of the mechanism

Table 1. Numbers and parts description of the mechanism in accordance with Figure 1.

Number	Part Name	Number	Part Name
1,2	Input shaft & sun gear in the first set	12	Roller
3,23	Planetary gear in the first & second set	13	Inner light weight hanging pulleys
4	Coaxial pulley with planetary gear in the first set	14	Outer light weight hanging pulleys
5,21	Short toothed belt	11,15	Holder spring of heavy & light weight hanging pulleys
6,22	Belt strengthener	17	Ring gear
7	Outer heavy hanging pulleys	18	Long toothed belt
8	Inner heavy hanging pulleys	20	Coaxial pulley with planetary gear in the second set
9,19	Carrier	24,25	Output shaft & sun gear in the second set

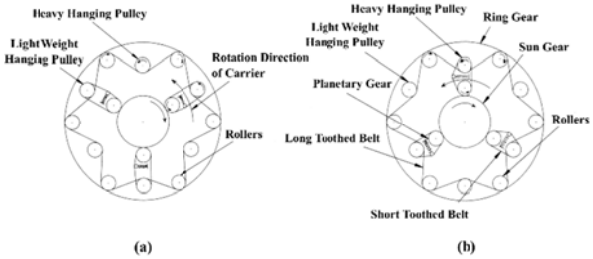


Figure 2. Schematic diagram of (a) the second planetary gear set, (b) the first planetary gear set

[1] M.Sc., Department of Agricultural Machinery Engineering, University of Tehran, Karaj, Iran
[2] Professor, Department of Agricultural Machinery Engineering, University of Tehran, Karaj, Iran
[3] Assistant Proffessor, Department of Agricultural Machinery Engineering, University of Tehran, Karaj, Iran
* Corresponding auther, Email Address: jafarya@ut.ac.ir

By increasing the angular velocity of the input shaft, the angular velocity of planetary gears and the carriers increases. Then, the heavy hanging pulleys (Parts 7 and 8 in Figure 1.) move away from the rotation center of the mechanism (By overcoming the spring's and force pushing them toward the center of rotation). Therefore, the lightweight hanging pulleys (Parts 13 and 14 in Figure 1.) will come closer to the rotation center of the mechanism influenced by their springs tension. On the contrary, by decreasing the angular velocity of the input shaft, planetary gears and heavy hanging pulleys will decrease their rotational motion; and also, they will force the carriers to reduce their angular velocity. Consequently, by reducing the centrifugal force, heavy hanging pulleys come closer to the rotation center of the mechanism influenced by their spring tension. Therefore, lightweight hanging pulleys will move away from the rotation center of the mechanism by overcoming their spring's force.

3- Analysis of the Mechanism and Its Results

Kinematics is a branch of dynamics which is often mentioned as geometric description. In order to extract the equations and perform kinematics analysis, the mechanism of angular velocity control is studied in four main sections:

- The first planetary gear set located at the input of the mechanism (Parts 2, 3 and 9 in Figure 1.) It is nonholomonic.
- The second planetary gear set located at the output of the mechanism (Parts 19, 23 and 24 in Figure 1.) that includes a holonomic constraint.
- The carriers
- The intermediate section consisting of hanging pulleys set, their holder springs and long toothed belt. This section includes a holonomic constraint.

In the intermediate section, differential algebraic equations (DAEs) represent holonomic constraint in this mechanism. These equations were modeled in MATLAB software, version 7.10.0 assuming steady state conditions. $\dot{x}$ and $\ddot{x}$ are dropped from equations.

Combining the holonomic and nonholonomic constraints models, the transmission ratio (or train value) of the mechanism was modeled. In order to reduce the error in this model, the iteration method was used.

According to investigations on the effects of various parameters and considering the desired angular velocity equal to 56 $Rads^{-1}$ (approximately 540 rpm, equal to the tractor PTO speed), the optimum values for the design parameters of this mechanism of angular velocity control were extracted. The input power of the mechanism is considered to be 30 kW (40 hp). The modeling results of the error percentage of the system based on optimum values are shown in Figure 3. As it is shown in this Figure, although the input shaft angular velocity has variations, the proposed mechanism controls the angular velocity of the output shaft acceptably. At angular velocity of 38 to 84 $Rads^{-1}$ (0.68 to 1.5 times of the desired angular velocity), the output angular velocity is controlled very well and the error of the output angular velocity is less than 10%.

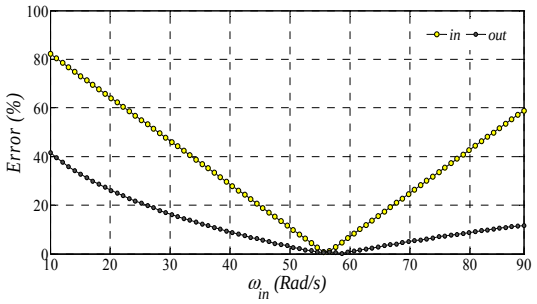


Figure 3. The modeling results of error percentage of input and output shafts of angular velocity

4- Conclusions

In this research, using the unique characteristics of planetary gear sets, a new mechanism for automatic control of angular velocity of a rotary axis was investigated. This mechanism can regulate input angular velocity on constant value. The dynamic equations of the mechanism were extracted and constraint type i.e. holonomic or nonholonomic was recognized. These modeled equations were differential algebraic equations with an index of three. The modeling results showed that this mechanism has a good performance for the angular velocity close to the desired value and has the capability which can be utilized as a suitable coupling between tractor PTO shaft and agricultural machinery.

Analytical Solution for Buckling FGM Plates with Integrated Piezoelectric Layers under Open and Closed Circuit Conditions

M.A. Ghasemabadian[1] A.R. Saidi.[2]

1- Introduction

Functionally graded material (FGM) is an inhomogeneous composite composed of a mixture of metals and ceramics along a determined direction. By gradually varying the volume fraction of the constituent materials, their properties appear in a smooth and continuous variation from one surface to another, as a result of which these type of materials have more effective properties compared to the layered composite materials. Also, due to their intrinsic coupling of mechanical and electric fields, piezoelectric materials have been widely used as actuators and sensors in smart and adaptive systems.

In the past few years, study of hybrid plate structures where a substrate made of FGMs is coupled with surface-bonded piezoelectric has become increasingly important. One of the most widely studied problems on these hybrid structures is the buckling analysis of the plates.

In the present paper and based on the classical plate theory, buckling analysis of piezoelectrics coupled with FGM rectangular plates is investigated. By assuming the transverse distribution of electric potential to be a combination of a parabolic and a linear function of thickness coordinate, the equilibrium equations for buckling analysis of the plate with surface bonded piezoelectric layers are established. Maxwell's equation and all boundary conditions including the conditions on the top and the bottom surfaces of the plate for closed and open circuited and Levy type of boundary conditions are satisfied. Numerical results show that the critical buckling load for the open circuit is more than that of the closed circuit. Furthermore, the critical buckling loads increase by increasing the thickness of the piezoelectric layers.

2- Stability equations

As shown in Figure 1, a flat rectangular plate consisting of three symmetric FGM layers and two piezoelectric layers is considered. Based on the classical plate theory (CPT) and considering the Von-Karman hypothesis, the non-linear form of strain components is obtained.

Also, for the piezoelectric layers, due to the coupling between electrical and mechanical fields, the stress field and the electric displacement vector are expressed as the strain field and the electric field.

Furthermore, in order to satisfy Maxwell's equation and electrical boundary conditions on the piezoelectric surfaces, the transverse distribution of electric potential is assumed to be a combination of a parabolic and a linear function of thickness coordinate.

Next, using the principle of minimum total potential energy and considering the adjacent equilibrium criterion, the equilibrium equations are obtained.

It should be noted that, for symmetric laminated plates, the two in-plane equations are decoupled from out-of-plane equation and could be neglected. Besides the equilibrium equations, the variables should also satisfy Maxwell's equation. Therefore, two coupled equations must be solved.

By doing some simple algebraic calculations, the above mentioned equations can be decoupled.

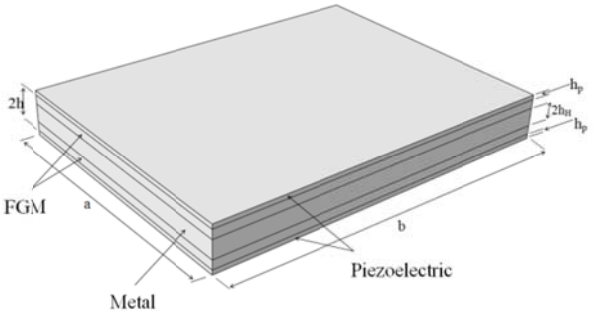


Fig. 1. The coordinate system and the geometric parameters of the plate

Electrical boundary conditions

Two different electrical boundary conditions are considered: closed and open–closed circuits. These conditions are stated in the following:

In the open-closed circuit condition, the outer surface of the plate is in contact with a medium with low permittivity such as air or vacuum and the inner surface is held at zero voltage whereas in the closed circuit condition, both surfaces are short circuited (zero voltage).

Mechanical boundary conditions

It is assumed that the plate is simply supported at two opposite edges in the y-direction and there are arbitrary boundary conditions at two other edges (e.g. Clamped, Simply supported and Free). Furthermore, the plate is assumed to be insulated at the edges in the y-direction.

Buckling analysis

In this study, the rectangular plate is subjected to in-plane loads. The pre-buckling forces are obtained through using the equilibrium conditions. Since the plate is simply supported along two opposite edges in the *y*-directions, the Levy type solution is considered. Therefore, a set of homogenous algebraic equations are obtained by imposing mechanical and electrical boundary conditions. The buckling load can be

1-Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
2- Professor, Department of Mechanical Engineering, ShahidBahonar University of Kerman, Kerman, Iran
(Corresponding Author) saidi@mail.uk.ac.ir

determined by setting the determinant of the coefficient matrix to zero.

3-Conclusion

In the present article, an analytical method has been developed for the buckling analysis of functionally graded rectangular plates with surface bonded piezoelectric layers. Based on the classical plate theory (CPT), the stability and equilibrium equations have been derived. Coupled stability equations have been decoupled using some analytical functions. The critical buckling loads for the Levy type of mechanical boundary conditions and closed and open circuit electrical boundary conditions have been presented. From the numerical results, the following conclusions can be made:

- At a constant overall thickness of piezoelectric coupled plate, an increase in the piezoelectric layer thickness leads to an increase in the critical buckling load.
- Increasing the thickness of piezoelectric layers increases the critical buckling load regardless of mechanical boundary conditions, loading conditions and open and closed circuit conditions.
- In all mechanical boundary conditions, changing the open circuit condition to the closed one reduces the critical buckling loads.
- The smallest critical buckling load belongs to a plate under biaxial compression and tension loading, and the largest value belongs to a plate under biaxial compression loading.
- Under similar loading type and boundary conditions, the smallest and the largest values of the critical buckling loads belong to PZT-5A and PZT-6B, respectively.

Experimental Investigation of the Effects of Process Parameters in Laser Forming ofClosed-cell Aluminium Foam Sheets

A.H. Roohi[1], H. Moslemi Naeini[2], M. H. Gollo[3], M. Soltanpour[4]

1-Introduction

In the laser Forming (LF) process, a laser beam which scans with a specific velocity is irradiated on the metal sheet surface. Due to a steep temperature gradient across the sheet thickness, thermal stresses are induced and this leads to a plastic deformation in the heated region. When the laser passes, the sheet temperature cools down and a permanent bending angle is produced. Repetition of laser scans increases the final bending angle.

Metal foam sheets are a new class of materials which are important because of their appropriate physical and mechanical properties such as low density, and simultaneously, high stiffness an also, good thermal properties. This material is used in lightweight structures and in energy absorbing applications. Metal foams, especially aluminium foams, are utilized in automotive and aerospace industries.

In the current article, closed-cell aluminium foams, which cannot be formed by any conventional mechanical forming approaches, are formed by the irradiation of a laser beam through the laser forming process. Moreover, the effects of three parameters including laser power, scan velocity and the number of scan passes is investigated. The method of Analysis of Variance (ANOVA) is used to determine the effects of the mentioned parameters on the final bending angle of closed-cell aluminium foam sheets. Also, Response Surface Methodology (RSM) of design of experiments is applied to limit the number of experimentations. Finally, twenty laser forming tests are carried out and an equation is derived to predict the final bending angle as a function of the input parameters.

2- Process Theory

The mechanisms of the LF process are determined based on the induced temperature distribution. This temperature distribution depends on process parameters such as laser power, beam diameter, etc. Three different LF processes are Temperature Gradient Mechanism (TGM), Buckling Mechanism (BM), and Upsetting Mechanism (UM). The temperature gradient mechanism is the most common mechanism used in LF applications. (Fig. 1). Because of a relatively rapid heating of the sheet surface by a laser beam and slow thermal conduction to the lower layers (especially in thicker sheets), a large temperature gradient develops in the thickness direction of the sheet. At the beginning of the process, the sheet experiences a bending away from the laser beam which is called counterbending (Fig. 1 (a)). Further heating causes a decrease of mechanical strength in the heated zone. When thermal strains reach the maximum elastic strains, further thermal expansion converts into the plastic compressive strains. This is because free thermal expansion of the heated zone is limited by the surrounding zone. In the cooling process, upper layers contract and also endure a localized shortening due to the compressive stresses (Fig. 1 (b)). This result in a permanent bending angle toward the laser beam. The final bending angle depends on the selection of process parameters.

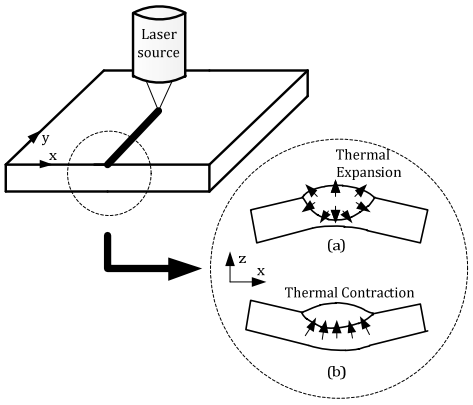


Fig. 1. Temperature gradient mechanism

3- Experimental Approach

Laser forming tests were carried out by a pulsed CO2 laser, Bystronic Model, with the maximum mean laser power of 3kW. Foam sheets are cut with a wire-cut machine with dimensions of 100×50×5 [mm]. The mean cell sizes of the foam pores are 1mm and the average relative density of foam sheets are 0.4. The mean cell size measurement is done by image processing. A Fixture was designed for the cantilevered clamping of the sheets. One of the complexities of the laser forming on the aluminium sheets is its small absorption coefficient which limits the formation of temperature gradients across the sheet thickness. In order to increase the laser absorption coefficient of aluminium foams, the sheet was coated with a graphite spray. After the LF process, the bending angle of the foam sheets is measured with a universal bevel protractor with the accuracy of ±5'. Final experimental bent sample of aluminium foam sheet is illustrated in Fig. 2 in order to show the bending angle.

[1] Ph.D. Student of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
[2] Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran, Moslemi@modares.ac.ir (Corresponding author)
[3] Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Lavizan, Tehran, Iran.
[4] Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.



Fig. 2. Foam sheet bent by LF process

4- Results and Discussion

The effect of process parameters

The effects of process parameters on the bending angle are illustrated in Fig. 3 to Fig. 5. When laser power increases, the bending angle increases significantly (Fig. 3). The increase in power leads to an increase in input energy and laser effectiveness. Thus, with the increase in power, the temperature of the upper layers of the sheet increases, temperature gradient increases and as a result, the bending angle increases. The effect of scan velocity is shown in Fig. 4. In general, velocity affects the input energy in the scan path length. In the velocity range investigated here, its influence is negligible. Also, the bending angle increases due to an increase in the number of passes (Fig. 5). Increase in the number of passes corresponds to the repetition of scan passes and leads to an increase in forming magnitude.

Final equation to predict the bending angle

Based on the analysis of variance of the experimental results, the bending angle can be predicted according to the following equation (1).

$$\text{Bending angle} = -6.4097 + 0.0676 \times P - 2.0625E\text{-}005 \times v - 0.1846 \times n + 0.0198 \times n^2 \quad (1)$$

Where, P is laser power [W], v is scan velocity [mm/min], and n is the number of scan passes.

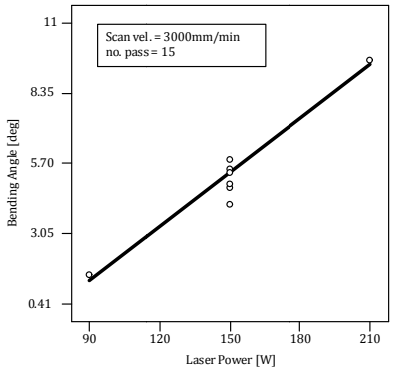


Fig. 3. The effect of laser power on bending angle

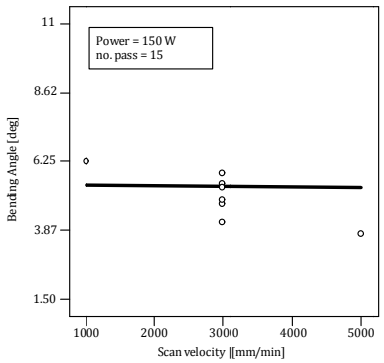


Fig. 4. Effect of scan velocity on bending angle

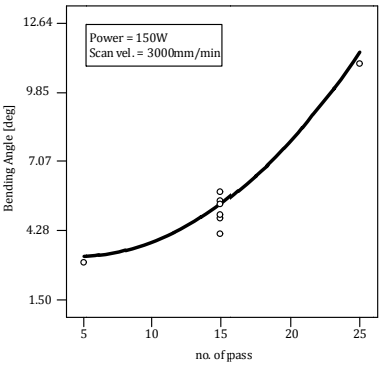


Fig. 5. Effect of no. of scan pass on bending angle

5- Conclusion

In this article, laser forming of closed-cell aluminium foam sheets is studied. Metal foam sheets cannot be formed by the conventional mechanical forming processes due to their weak tensile strength. Thus, laser forming process, as a thermal forming approach, is applied to achieve a bending angle in metal foam sheets. Also, process parameters affect the final bending angle of the process. So, three main process parameters including laser power, scan velocity, and the number of scan passes are considered and the effects of these factors on the final bending angle is investigated. Also, an equation is derived to predict the bending angle of closed-cell aluminium foams. Generally, increase in laser power increases the bending angle due to an increase in input energy. Repetition of the scan passes leads to an increase in bending angle. However, there is a reverse relationship between the scan velocity and the bending angle. Briefly, the effects of the mentioned parameters are as follows:

1. When laser power increases from 90W to 210W, the bending angle increases from 1.31deg to 9.43deg. It is assumed that the other parameters are held constant.
2. Increase in scan velocity from 1000mm/min to 5000mm/min leads to a slight decrease in the bending angle from 5.41deg to 5.33deg.
3. The bending angle increases from 3.25deg to 11.46deg when the number of scan passes increases from 5 to 25.

Vibration of FGM Plates with Distributed Mass Using Third Order Shear Deformation Theory

A. Shooshtari[1], R. Motahari[2], M. Kari[3]

1- Introduction

Many engineering structures can be considered as rectangular plates and rectangular structures form an essential part of many aerospace, marine and automobile structures. These structural components, in many instances, are subjected to vibration. So, the vibration problem of rectangular plates has been studied by many researchers in various disciplines. Due to the high degree of anisotropy and low rigidity in transverse shear, classical theory of plates is no longer adequate, and a number of shear deformable theories such as first order shear deformation theory (FSDT) or third order shear deformation theory (TSDT) have been proposed to the present date. These hypotheses state that the transverse normal to the mid-plane of a plate does not remain straight and normal after deformation because of the transverse shear effects.

Analysis of the vibration problem of plates carrying masses started with the design of electronic systems. The printed circuit boards and plate-like chassis can be approximated as flat rectangular plates carrying several masses and they are subjected to vibration. Considering these masses as distributed masses can give us better and more accurate results. So, the vibration problem of plates carrying distributed masses has a great importance. Furthermore, due to the continuous change in material properties through thickness, functionally graded materials (FGM) were introduced to eliminate the stress singularities. The wide use of these materials in construction of plate structures leads to increasing literature concerning FGM plates in the last twenty years.

In this paper, the free vibration of a simply supported FGM plate with distributed patch mass is emphasized. The problem is solved using the Hamilton's Principle by means of the double Fourier series. We present the third order shear deformation theory which is based on the same assumptions as the classical (CLPT) and the first order shear deformation plate theories, except that the assumption on the straightness and normality of the transverse normal is relaxed. The material properties of the FGM plates are assumed to change continuously throughout the thickness of the plate, according to the volume fraction of the constituent materials based on the power-law, sigmoid and exponential functions. The effects of distributed patch mass dimensions and mass ratio on the fundamental natural frequency of the plate are studied.

2- Mechanical Properties of FGM Plates

Consider a rectangular FGM plate of length a, width b, thickness h and density p (Fig. 1). The plate is carrying a distributed patch mass (M) with dimensions c and d. It is assumed that the mass does not prevent any bending of the plate segment on which it is located.

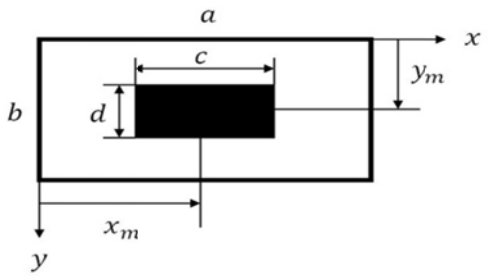


Fig. 1. Plate with Distributed Patch Mass

The Poisson's ratio of the FGM plate is assumed to be constant; but its Young's modulus varies continuously throughout the thickness direction according to the volume fraction of constituents defined by power-law, sigmoid, and exponential functions. The volume fraction of the P-FGM is assumed to obey a power-law function:

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^p \quad (1)$$

Where p is the material parameter. The mechanical properties of a P-FGM can be determined by the rule of mixture [9]:

$$E(z) = g(z)E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (2\text{-a})$$

$$\rho(z) = g(z)\rho_1 + [1 - g(z)]\rho_2 \quad (2\text{-b})$$

where E_1 and E_2 are the Young's moduli of the lowest $z = h/2$ and top $z = -h/2$ surfaces. For the S-FGM plate, it can be written:

$$g_1(z) = 1 - 1/2\left(\frac{h/2 - z}{h/2}\right)^p \ , \ 0 \le z \le h/2 \quad (3\text{-a})$$

$$g_2(z) = 1/2\left(\frac{h/2 + z}{h/2}\right)^p \ , \ -h/2 \le z \le 0 \quad (3\text{-b})$$

$$E(z) = g_1(z)E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \ , 0 \le z \le h/2 \quad (3\text{-c})$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \ , -h/2 \le z \le 0 \quad (3\text{-d})$$

$$\rho(z) = g_1(z)\rho_1 + [1 - g_1(z)]\rho_2 \ , 0 \le z \le h/2 \quad (3\text{-e})$$

$$\rho(z) = g_2(z)\rho_1 + [1 - g_2(z)]\rho_2 \ , -h/2 \le z \le 0 \quad (3\text{-f})$$

And it can be written for the E-FGM plate as follows:

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (4\text{-a})$$

$$\rho(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (4\text{-b})$$

$$A = E_2 \ , \ B = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (4\text{-c})$$

[1] Associate professor, Dept. of Mech. Eng., School of Engineering, Bu Ali Sina University, Hamedan, Iran.
E-mail: shooshta@basu.ac.ir
[2] MSc. Student, Dept. of Mech. Eng., School of Engineering, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Hamedan, Iran.
[3] Lecturer, Dept. of Mech. Eng., School of Engineering, Saveh Branch, Islamic Azad University, Saveh, Iran.

3- Basic Formulation

The TSDT is based on the following assumed displacement field:

$$u(x,y,z,t) = u_0 + z\phi_x(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \quad (5\text{-a})$$

$$v(x,y,z,t) = v_0 + z\phi_y(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \quad (5\text{-b})$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad (5\text{-c})$$

where u,, v and w are the displacement components in the x, y and z directions, respectively. And u_0, v_0 and w_0 are the displacements of the middle plane. And ϕ_x, ϕ_y are the shear rotations. The strain displacement equations can be obtained by using linear elastic relations. Also by using the constitutive relations, stress and stress resultants per unit length can be easily found. The strain energy of the FGM plate is:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}]dxdydz \quad (6)$$

The kinetic energy of the plate without mass is:

$$T_p = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}\rho[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2]dxdydz \quad (7)$$

The kinetic energy of the distributed patch mass located on the top surface of the plate is:

$$T_m = \frac{1}{2}\int_{x_m-c/2}^{x_m+c/2}\int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2}\gamma_m[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2]dxdy \quad at: z = -h/2 \quad (8)$$

The total kinetic energy (T) is the summation of the kinetic energy of the plate without mass and the kinetic energy of the distributed patch mass. By choosing a suitable displacement field and a boundary condition for the simply supported rectangular plate, the following Lagrangian can be written:

$$L = T - U \quad (9)$$

It can be verified that the first variation of the Lagrangian, (i.e., Hamilton's principle) leads to the equation of motion. Substitution of total kinetic and strain energy equations in terms of displacements into the first variation of the Lagrangian gives a set of linear equations. Solving this system of equations, the non-dimensional fundamental frequency of the plate can be calculated.

4- Numerical Results

The following material properties are used:

$$E_1 = 200\ \text{Gpa},\ \rho_1 = 5700\ \text{kg/m}^3,\ v = 0.3 \quad (10\text{-a})$$

$$E_2 = 70\ \text{Gpa},\ \rho_2 = 2702\ \text{kg/m}^3,\ v = 0.3 \quad (10\text{-b})$$

The effect of the mass ratio

Consider a P-FGM plate (p=1) with distributed patch mass acting on it in a square area at the center of the plate with dimensions ratios of c/a and d/b which are equal to each other and which are equal to 0.4. The effect of the mass ratio (distributed patch mass over mass of the plate, r_m) on the non-dimensional fundamental frequencies of a square plate with length to thickness ratio of 10 is presented in Fig. 2. According to this Figure, by increasing the amount of local mass, the stiffness of the plate decreases and causes a decrease in the non-dimensional frequencies.

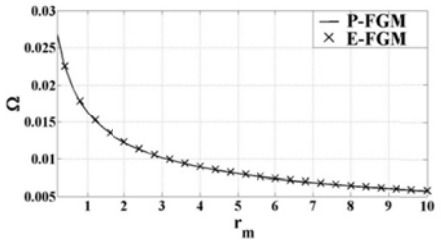


Fig. 2. The effect of mass ratio on non-dimensional fundamental frequency of a square plate

The effect of the mass dimensions

Expanding the area of the patch mass (with constant mass ratio of *0.5*), causes an increase in the stiffness of the same square plate, and consequently an increase in the non-dimensional fundamental frequency (Fig. 3).

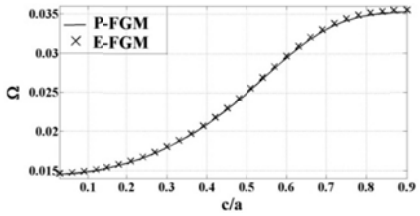


Fig. 3. The effect of distributing mass area on non-dimensional fundamental frequency of a square plate

5- Conclusion

In this work, the free vibration of a simply supported rectangular FGM plate carrying a distributed patch mass was investigated. The Hamilton's Principle, using the third order shear deformation theory, was applied to rectangular plates carrying a distributed patch mass, to determine the effect of the distributed patch mass on the fundamental frequencies of the plates. The effects of mass ratio and distributed patch mass area on the plate's behavior have been investigated. It was shown that increasing the amount of local mass causes a decrease in the non-dimensional frequencies. Also, expanding the area which is occupied with mass (with constant mass ratio) causes an increase in the non-dimensional fundamental frequency. The analysis also showed that the fundamental frequency depends on the amount of the patch mass and its dimensions.

Improvement of Stress and Error Estimation by Patch Equilibrium in Isogeometric Analysis

B. Hassani[1], A. Ganjali[2]

1- Introduction

Amongst the first attempts to use the computer design techniques in engineering analysis, the works by Kagan and Hollig [2-4] can be mentioned in which they used the spline basis functions instead of the common finite element shape functions. In 2005, the idea was further developed by Hughes and his co-workers [5] by employing the NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) functions and it was named Isogeometric analysis. In this approach, in addition to using the properties of splines and NURBS for the accurate definition of curves, surfaces and volumes, similar to the finite element method, they are also employed for interpolation as well as approximation. On the other hand, errors are inevitable in numerical analyses and are the main concern of researchers in regard to the reliability of their results. Stress recovery based on Stress Recovery in Isogeometric analysis (SRI) was introduced by Hassani *et al* [1]. A method based on satisfaction of equilibrium equations was later introduced by the same researchers who delivered better error estimation in the isogeometric analysis method and its efficiency was assessed for three dimensional elasticity problems [7]. In this research, while studying the performance of the approach via a couple of problems with curved geometrical boundaries, the effect of the number of Gauss quadrature integration points is taken into consideration.

The circular cantilever beam and circular disk under concentrated point load are the two examples presented in this research. To investigate the effect of the number of Gauss integration points, the ratio of the exact and approximate error norms, i.e. the effectivity index, was evaluated with 4, 9, 16, 25 and 36 Gauss points for the above two examples as well as the three examples of reference [7]. The obtained results indicate better accuracy of this approach in comparison with the error estimation based on the superconvergent points.

2- Stress recovery by using the constraint of equilibrium equations

The basis of this method is equating the forces needed for a patch of the domain of interest to be in equilibrium with the obtained stress field from the isogeometric analysis with the forces on the patch that are obtained from the improved stress field. The resultant of the applied forces over a patch of the isogeometric analysis domain can be written as follows:

$$\mathbf{F}_p = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{iso} d\Omega \tag{1}$$

The same can also be defined for the recovered stress field, i.e.

$$\mathbf{F}_p{}^* = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \tag{2}$$

In this approach, the recovered stress field is defined by the same NURBS basis functions that are used for the estimation of the unknown function as follows:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \tag{3}$$

Where m and n are the number of control points in the x and y directions of each patch, respectively. R are the NURBS shape functions and P are the coordinates of the control points defining the stress surface where their third coordinate is the unknown of the problem to be determined.

Now, from minimization of the functional Π in (4), that is roughly equivalent to equating $\mathbf{F}_p$ and $\mathbf{F}_p{}^*$, the third coordinate of the vector of control points is obtained for each of the stress components as follows:

$$\Pi = \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{iso} d\Omega\right)^T \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{iso} d\Omega\right) \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_z = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{F}_p \quad , \quad \mathbf{H} = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{R} d\Omega \, . \tag{5}$$

3- Circular cantilever beam

The parameters used in modeling as well as analysis of this problem are as follows:

$a = 8$, $b = 10$, $P = 100$, $E = 2\times10^5$, $\nu = 0.3$

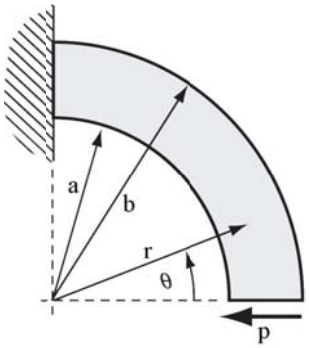


Fig.1. Problem definition of circular cantilever beam

The effectivity index for this problem obtained from the presented approach is 0.75, while its value from our previous approach, i.e. SRI, becomes 0.59. This is an indication of better performance of the current method. Also, the variations of the stress tensor component σ_y obtained from exact and IGA together

1- Professor, Mechanical Engineering department, Ferdowsi University of Mashhad
2- Assistant Professor, Civil Engineering, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.ahmad.ganjali@yahoo.com

with the recovered stresses by the old and new methods at the location x=0.04 are shown in Figure 2. As it can be observed, in this example the improved stresses obtained from the method based on satisfaction of the equilibrium equations are more accurate than those obtained by the method based on using the superconvergent points.

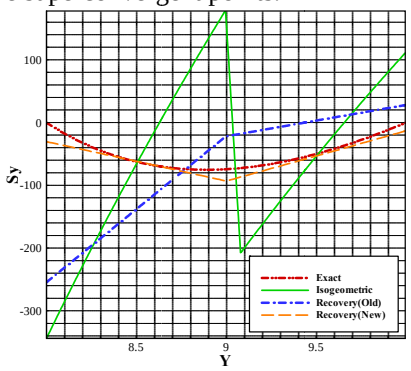


Fig.2. Stress variation of the circular cantilever beam at x=0.04

4- Circular disk under compressive point loads

The parameters used in the analysis of this problem are as follows:

$$R=2\ ,\ P=100\ ,\ E=1000\ ,\ \nu=0.3$$

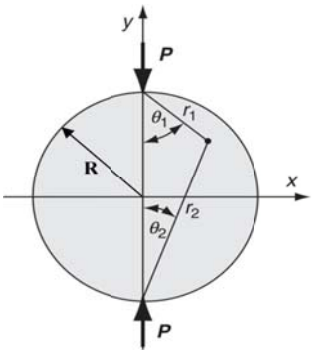
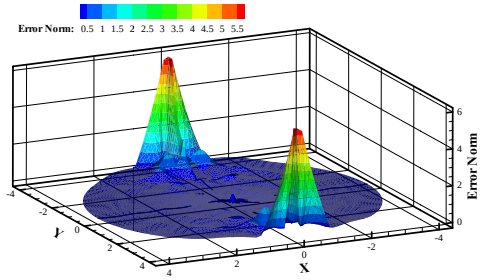


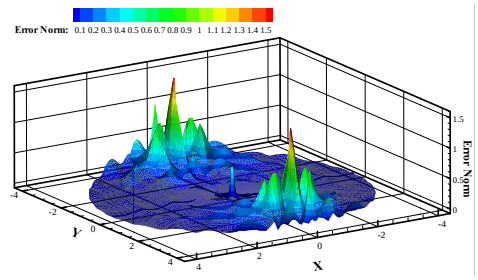
Fig.3. Problem definition of the circular disk

Distribution of the exact and approximate energy norms obtained by the method based on superconvergent points (old method) and the method based on satisfaction of equilibrium within the patches (new method) are illustrated in Figure 4. As it is observed, in the current method the variations of the approximate energy error norm in the tip of the load are closer to the exact energy norm compared to the energy norm obtained by our older method which indicates better efficiency of the current method. The effectivity index for this problem has increased from 0.42 for the last method to 0.52 for the current approach. This increase indicates the superiority of the current method in comparison with the previous approach.

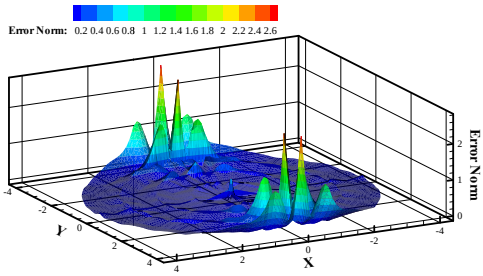
From investigation of the effect of the number of Gauss integration points on the performance of this error estimation it was concluded that its effect is not considerable and the obtained effectivity indices for all numbers of Gauss points are almost the same.



(a) Exact error distribution



(b) Approximate error distribution (Old)



(c) Approximate error distribution (New)

Fig.4. Distribution of energy error norm for the disk under diametrical compression

5- Conclusion

In this article, the performance of the suggested error estimator based on satisfaction of the equilibrium equations for improvement of the stress field was studied by using two examples. For this purpose, two sample problems were taken into consideration and were solved by the isogeometric analysis method and the effect of the number of Gauss points on the effectiveness of the error estimator is studied. The main advantage of the proposed method is that it does not need the superconvergent points and it uses the NURBS shape function in estimation of displacements as well as the improved stress surface. It can be concluded from the obtained results of this research that the proposed error estimator based on patch equilibrium is more efficient than the method based on using the superconvergent points. Hence, this method can be used as a simple engineering approach for error estimation and stress recovery within the context of isogeometric analysis. Also, it was concluded that the effect of the number of Gauss integration points is negligible and a similar effectivity index is obtained almost in all cases.

Study of Microstructure and Grain Size Effect on Superficial Hardening of AISI1045 within High Efficiency Deep Grinding

H. Fazli Shahri[1] A.A Akbari[2]

1- Introduction

Grinding is one of the most important methods which directly affect tolerances in dimensions, quality and finished surface of products. Recently more attention is paid to the HEDG process due to the high rate of wheel speed, depth of cut and cross feed, simultaneously. The main source of residual stresses is plastic deformation itself which is generally compressive; but thermal stresses often lead to tensile residual stresses. The residual stress is induced by the grinding force. The level of the latter is usually much greater than that of the former. The present paper aims to suggest a grinding method aimed at reduction of surface residual tensile stress by investigating various microstructures of samples. The changes in hardness and mechanical properties due to the grinding process within different microstructures have also been studied.

In brief, this work outlines the influence of microstructure and grain size on surface hardening within high efficiency deep grinding (HEDG). To do that, different samples with various microstructures and grain sizes were prepared through specific heat treatments. Then they underwent the grinding operation with constant operating conditions. Finally, the variation of micro hardness was recorded. It was observed that the higher the primary hardness of the material was, the more the surface hardening amount increased. But this trend was not observed for super hard materials and the hardening percent was decreased after a critical primary hardness. This hardening amount was more for fine grain materials in comparison with coarse grain materials. The rolled samples experienced the same as the non-rolled samples. It was found that grinding in the direction of elongated grains resulted in increasing superficial hardening in comparison with the condition in which grinding was perpendicular to elongated grains.

2- Experimental Procedure

2-1- Surface Microhardness Measurement

To study hardness variation at the surface of the workpiece, which is caused by HEDG conditions (a schematic diagram shown in Figure 1), a Vickers microhardness sweep Buheler-4046 tester, is employed in the traverse section of the ground area. The applied force to measure microhardness is 100gf for 15s. The indentations are made in the traverse area of the workpieces, with a distance of 0.5 mm, covering the entire surface (i.e. from one side to the other side of the workpiece).

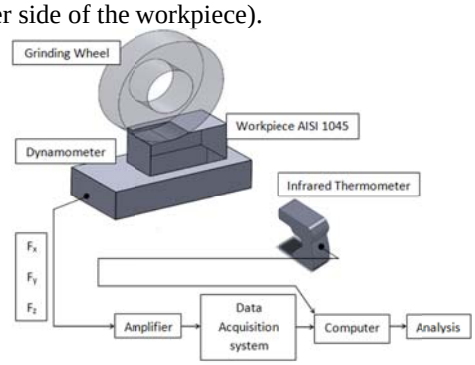


Fig. 1 The schematic of the experimental setups

3- Results and Discussion

For the evaluated conditions, metallographic analysis of the hardness values lead to the following conclusions. Microstructure variations and grain size of the materials lead to change in surface hardness of the samples. Although the occurrence of some changes in microstructure of the samples was expected, microstructural changes before and after the process were insignificant even for those samples subjected to excess heat. The surface microhardness has been changed and recorded three times before and after HEDG process and as illustrated in Table 1, a considerable increase was observed in superficial microhardness. In fact, the grinding process produces fine and equiaxed grains in the structure of annealed materials, samples 4, 5 and 6 as ductile samples which are prepared at three different temperatures, as shown in Figure 2. Thus, the process leads to an increase in surface hardness. Also, excessive plastic deformation beneath the surface which is due to the grinding wheel provides a more hardened surface. As a consequence, hardness enhancement is the result of the finer microstructure achieved and a severe plastic deformation is induced by material removal process in the workpiece. Figure 3 depicts three hardened and brittle samples (samples 22, 23 and 24) in which machining force and temperature are high, and no special microstructural changes are observed.

An observation in the experimental measurement of hardness shows that the increasing trend of the surface hardness is not smooth. Figure 4 shows the measured microhardness values in a cross section of the workpiece and perpendicular to the grinding direction. As this Figure shows, the microhardness measurements within a specific section of the workpiece demonstrated a significant increase as the depth of measurement decreases. This change was due to the intensive machining heat and the severe cooling rate at the surface of the workpiece as well as the severe plastic deformation.

Increase in surface hardness and residual stress of the material can be due to the severe plastic deformation during the grinding process. There is a probability of converting residual austenite to martensite in the material due to the plastic deformation. Hence surface hardness can be increased. The residual stress under the relatively excessive mechanical load of the grinding process is converted to martensite and results in raising the

1- MSc student of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Gas Company (SPGC)
2-Associate Professor, Mechanical Engineering department, Ferdowsi University of Mashhad, akbari@um.ac.ir (Corresponding Auther)

hardness of the material. Note that since the mechanical load of the grinding wheel needed for cutting the material which has a considerable residual austenite is relatively high, maximum hardening of the surface occurs.

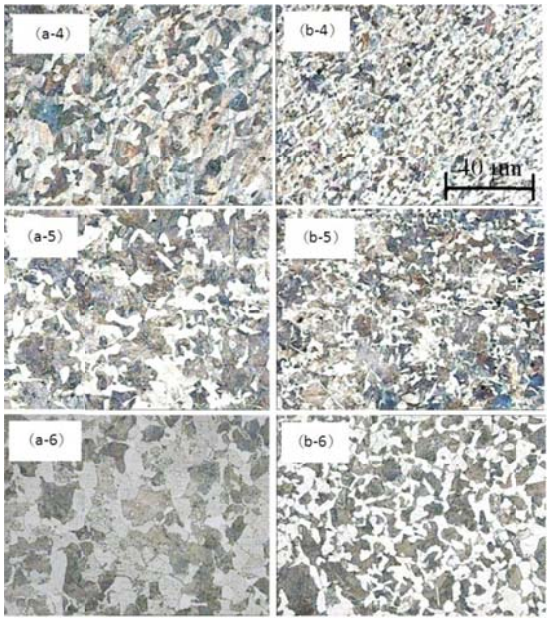


Fig. 2 The optical micrograph of a polished surface illustrating Ferrite and Perlite at AISI1045 steel, samples 4, 5 and 6 before the process, (B) after HEDG

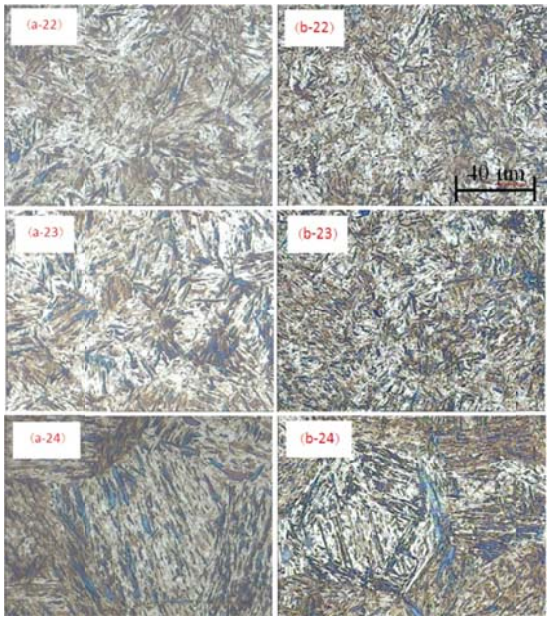


Fig. 3 The optical micrograph of a polished surface illustrating martensite at AISI1045 steel, samples 22, 23 and 24 before the process, (B) after HEDG

Table 1 The measured values of Vickers microhardness before (A) and after (B) process

	1st Value	2nd Value	3rd Value	Average
State A	334	339	329	334
State B	461	454	459	458

4-

Based on Barbacki's research, the severe plastic deformation of the grinding process can lead to increased density of dislocations at the surface of the material.

Another observation in this study reveals that the quantity of superficial hardening of the sample after the grinding process considerably relates to the initial hardness of the samples. Figure 5 shows that higher initial hardness of the samples leads to a higher percentage of superficial hardening due to the grinding process. However, the observed trend continues to a critical initial hardness (≈37 %) of the material 19 in which initial hardness is 334 Vickers with martensite structure.

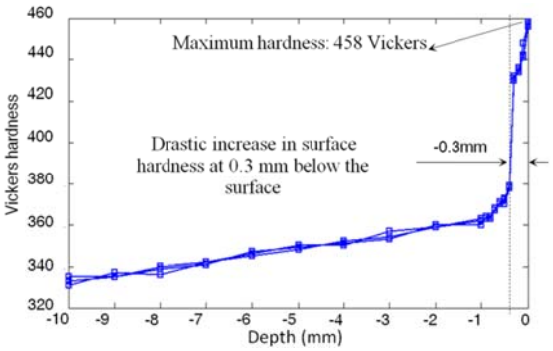


Fig. 4 The graph of microhardness below the surface under optimized condition which is obtained by experiment

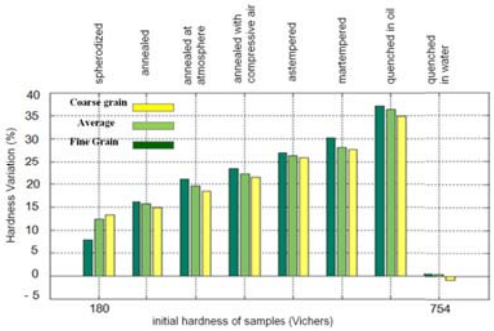


Fig. 5 The graph of microhardness variation for all non-rolled samples (1 to 24)

It should be noted in Figure 5 that every three samples are categorized based on three levels of grain size. It is observed that the superficial hardening in fine grain samples is higher than that of the coarse ones. This is due to the higher grinding force of fine grain samples. That is, plastic deformation of fine grain samples is more excessive than that of coarse grain samples.

5- Concluding Remarks

1- The amount of hardening due to grinding is related to microstructure and initial hardness. The more the initial hardness of material is, the more its surface hardening will be.

2- The less the grain size of the microstructure is, the more the surface hardening will be.

Simulation of Rubber Vulcanization for Calculation of the Curing Time with Modification of the Kinetic Model

M. Erfanian[1*], M. Javadi[2], M. Moghiman[3].

1- Introduction

The injection molding process is one of the most widely used manufacturing processes in the rubber industry. Since imperfect heating or overheating of rubber compound causes reduction in physical properties of rubber, the computation of curing time of rubber is necessary. At the present time, finding curing time is based on inefficient trial and error methods. Various experiments are performed for determining the best curing time. Thus, employing a numerical simulation is a very proper method for this purpose.

2. Mathematical Modeling

In this study, the injection molding process containing the mold filling and the curing stage are studied numerically using the Fluent software for an automotive rubber part. Governing equations are: conservation of mass, momentum and energy for two phases.

The curing of rubbery materials is a complex process. During the curing process, a chemical reaction takes place whereby cross-links between polymer chains are produced. For curing rubbery articles, the degree of cure (α) represents the extent of reaction, and its value goes between 0 (uncured rubber) and 1 (completely cured rubber). For calculation of degree of cure, the empirical kinetic model proposed by Kamal and Sourour has been used. This model is regression models that fit the experimentally measured data based on assuming a particular functional form. In the current study, the traditional Kamal kinetic model has been modified for consideration of the variation of order of reaction with temperature. The equations of curing kinetics were introduced into the Fluent software using a new User-Defined-Function (UDF) developed in C program. Thus, the cure field of rubber would be shown at any time during the vulcanization process.

[1]Ph. D. Student, Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
* Corresponding author,
E-mail address: mohammad.erfanian09@gmail.com
[2]Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Quchan University of Advanced Technologies, Quchan, Iran.
[3]Professor, Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

3. The Experiments

In this study, Rheometery tests are performed to specify the curing constants of the kinetic model. In the Rheometry tests, torque response of the rubber sample (Fig. 1.) is measured during its cure. The experiments in the current study are performed for various temperatures of 160, 170 and 180 °C.

A viscometry analysis is performed in order to describe the non-Newtonian fluid model of rubber compound. For determining temperature dependent specific heat of rubber, the DSC tests are done at different temperatures.

In order to evaluate the best curing time, the rubber articles are submitted to mechanical compression test to determine which time presents the maximum stiffness of the article. So, it indicates the best curing time.

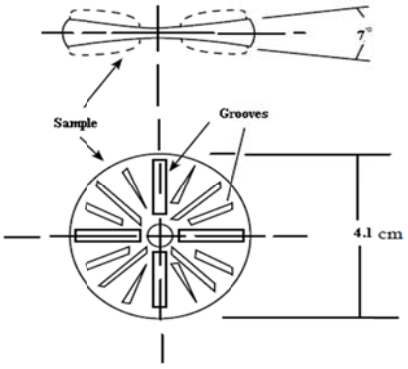
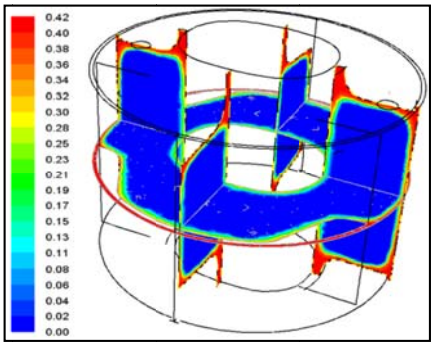


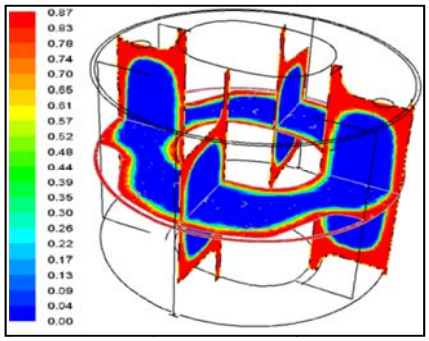
Fig.1. Cured sample of rubber in MDR instrument

Fig. 2 represents the degree of cure distribution of the rubber article on a symmetry plane normal to the z-direction at different times (250, 300, 350 and 420 s). As it can be seen in the Figure, the curing has been started from regions which are closer to the mold. These regions reach the mold temperature in a shorter time. At t=350s, the closer region to the mold is completely cured, whereas the degree of cure for the middle region of the rubber article is zero. This is because the thermal conductivity of rubber is very

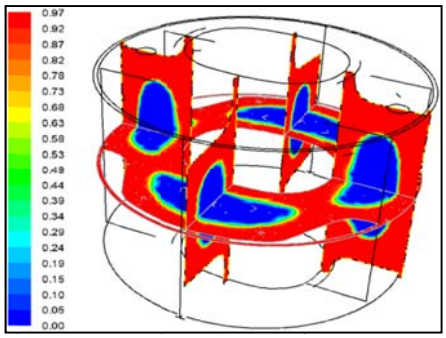
low. Finally at t=420 s, the rubber article completely cured.



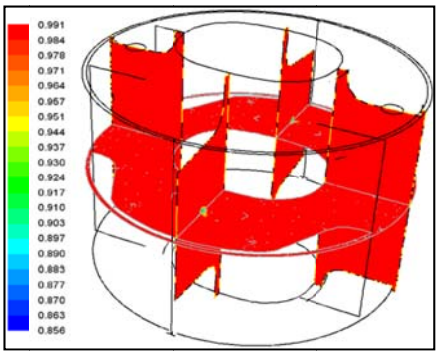
t=250 s



t=300 s



t=350 s



t=420 s

Fig. 2. Degree of cure distribution of rubber article on symmetry planes

In order to evaluate the curing time, different curing time values are selected for the mechanical compression experiment. For each time value, the stiffness of the article is measured. The resultant curve is depicted in Fig. 3. The best curing time is the time which corresponds to the maximum stiffness point. The figure shows that the best cure time occurs at$t \approx 427\ s$. The traditional Kamal kinetic model predicted the curing time occurs at t=450 s.

As can be seen, the numerical result obtained using the modified Kamal model, is in a better agreement with the experimental result.

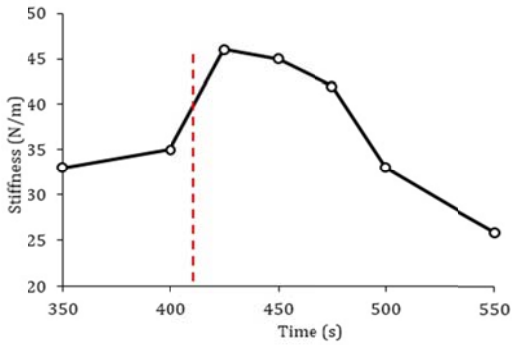


Fig. 3. Experimental values of the rubber article stiffness at various curing times.

4- Conclusion:

In this paper, the injection molding and curing process of an automotive rubber has been studied numerically. The traditional Kamal and Sourour kinetic model for rubber curing was modified with consideration of variable order of reaction in the kinetic model. The proposed model was introduced to the fluent commercial software via a computer code written in the UDF form.

The parameters of the kinetic model were determined from Rheometry tests at three different temperatures.

DSC and viscometery experiments were carried out to determine the specific heat of rubber and the non-Newtonian fluid model constants, respectively. Also various Mechanical compression experiments were performed on the rubber article at different times of the cure process to determine the best curing time experimentally.

The numerical predictions of the mold filling and the curing times were compared with those of experiments which confirmed the accuracy and capability of the proposed method.

CONTENTS

Dynamics Modeling and Analysis a New Mechanism for Automatic Control of Angular Velocity of a Rotary Axis	Kh. Faraji Mahyari A. Jafari S. S. Mohtasebi A. Hajiahmad	1
Analytical Solution for Buckling of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Layers under Open and Closed Circuit Conditions	M.A. Ghasemabadian A.R. Saidi	15
Experimental Investigation on Process Parameters Effects in Laser Forming of Closed-cell Aluminium Foam Sheets	A.H. Roohi H. Moslemi Naeini M. Hoseinpour Gollo M. Soltanpour	33
Estimation of Heat Shocks in Inverse Heat Transfer Problems using Kalman Filtering	M. Molavi A. Sedaghat M.R. Salimpour	45
Vibration of FGM Plates With Distributed Mass Using Third Order Shear Deformation Theory	A. Shooshtari R. Motahari M. Kari	55
Improvement of Stress and Error Estimation by Patch Equilibrium in Isogeometric Analysis	A. Ganjali B. Hassani	73
Study of Microstructure and Grain Size Effect on Superficial Hardening of AISI1045 Within High Efficiency Deep Grinding	H.R. Fazli Shahri A.A. Akbari	89
Simulation of Rubber Vulcanization for Calculation of the Curing Time with Modification of the Kinetic Model	M.R. Erfanian S. M. Javadi M. Moghiman	107
Bending Collapse of Thin Walled Energy Absorber and Presenting Numerical Simplified Model (Research Note)	A. Rahmati M. Ghazanfari M. Shahravi	119
Theoretical and Experimental Thermal Post Buckling Analysis of Columns (Research Note)	H. Bagheriyan H. Ekhteraei Toussi	129
An Investigation on the Effects of Geometric and Dynamic Parameters on the Truck Lateral Deviation Due to the Braking Force Imbalance (Research Note)	M. Rezaee A.Taraghi Osguei H. A. Arghand	141

JOURNAL OF APPLIED AND COMPUTATIONAL SCIENCES IN MECHANICS

Ferdowsi University of Mashhad

ISSN: 2008-918X

Editor- in-Chief: Dr. M.R. Mahpeykar
General Director: Dr. H. Niazmand
Published: Ferdowsi University of Mashhad

Editorial Board:

M.H. Abolbashari	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
H. Ahmadian	Professor	Iran University of Science & Technology
A. Baradaran Rahimi	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
M. Boroomand	Associate professor	AmirKabir University of Technology
M. Pasandideh Fard	Associate professor	Ferdowsi University of Mashhad
M. Taj Far	Associate professor	AmirKabir University of Technology
M.R. Khalili	Professor	K. N. Toosi University of Technology
M. Salimi	Professor	Isfahan University
E. Shirani	Professor	Isfahan University of Technology
M. Tahani	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
A. Abedian	Associate professor	Sharif University of Technology
M. Kadkhodayan	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
M.R. Mahpeykar	Professor	Ferdowsi University of Mashhad
H. Niazmand	Professor	Ferdowsi University of Mashhad

Text Editor: Dr. M.H. Abolbashari and E. Dehghan
Administrative Director: T. Hooshmand

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics
Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad
P. O. Box: 91775-1111, Mashhad, I.R. IRAN
Tel : +98 51 38806024 **F**ax : +98 51 38763301
Email : ejour@um.ac.ir Web site : http://jm.um.ac.ir

ISSN 2008 - 918X

Ferdowsi University
of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

(Journal of Faculty of Engineering)

Sarial No. 12

Dynamics Modeling and Analysis a New Mechanism for Automatic Control of Angular Velocity of a Rotary Axis 1
Kh.FarajiMahyari - A.Jafari - S. S. Mohtasebi - A. Hajiahmad

Analytical Solution for Buckling of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Layers under Open and Closed Circuit Conditions 15
M.A. Ghasemabadian - A.R. Saidi

Experimental Investigation on Process Parameters Effects in Laser Forming of Closed-cell Aluminium Foam Sheets 33
A.H. Roohi - H. MoslemiNaeini - M. HoseinpourGollo
M. Soltanpour

Estimation of Heat Shocks in Inverse Heat Transfer Problems using Kalman Filtering 45
M. Molavi - A. Sedaghat - M.R. Salimpour

Vibration of FGM Plates With Distributed Mass Using Third Order Shear Deformation Theory 55
A. Shooshtari - R. Motahari - M. Kari

Improvement of Stress and Error Estimation by Patch Equilibrium in Isogeometric Analysis 73
A. Ganjali - B. Hassani

Study of Microstructure and Grain Size Effect on Superficial Hardening of AISI1045 Within High Efficiency Deep Grinding 89
H.R. FazliShahri - A.A. Akbari

Simulation of Rubber Vulcanization for Calculation of the Curing Time with Modification of the Kinetic Model 107
M.R. Erfanian - S. M. Javadi - M. Moghiman

Bending Collapse of Thin Walled Energy Absorber and Presenting Numerical Simplified Model (Research Note) 119
A. Rahmati - M. Ghazanfari - M. Shahravi

Theoretical and Experimental Thermal Post Buckling Analysis of Columns (Research Note) 129
H. Bagheriyan - H. EkhteraeiToussi

An Investigation on the Effects of Geometric and Dynamic Parameters on the Truck Lateral Deviation Due to the Braking Force Imbalance (Research Note) 141
M. Rezaee - A.TaraghiOsguei - H. A. Arghand

Vol. 26, No.2,
Spring & Summer, 2015