

## تابع اولیه گیری به روش نیمه‌ضمنی از معادله‌های بنیادی با سخت‌شوندگی در هم ناخطی\*

## مقاله پژوهشی

مجتبی عقیقه گل شیخی<sup>(۱)</sup> مهرزاد شریفیان<sup>(۲)</sup> مهرداد شریفیان<sup>(۳)</sup>

**چکیده** در این پژوهش، نخست بهنگام‌سازی تنش به شیوه نیمه‌ضمنی برای الگوی مومسانی وان‌مایسز با سخت‌شوندگی ناخطی همگن شاپوش و ناخطی پویای آرمسترانگ فردریک در محدوده تغییر شکل‌های کوچک رابطه‌سازی می‌شود. برای این منظور، از روش تابع اولیه‌گیری نگاشت نمایشی بهره‌جویی می‌شود. سپس برای بررسی درستی، دقت و هم‌گرایی روش نو پیشنهادی، آزمون‌های عددی گسترده‌ای انجام می‌شود و نتایج آن‌ها با روش‌های پذیرفته‌شده پیشین سنجش می‌شود. یافته‌ها، افزایش دقت درخور ملاحظه و هم‌گرایی مرتبه دوم روش پیشنهادی این مقاله را نشان می‌دهد. باتوجه به این‌که در این پژوهش رابطه‌سازی‌ها به‌گونه‌ای انجام شده است که بتوان داده‌های مسئله را از هر نقطه دل‌خواه در طول گام مومسان برداشت کرد، در پایان بررسی می‌شود که برداشتن داده‌ها در چه نقطه‌ای از گام مومسانی منجر به دقیق‌ترین پاسخ می‌شود.

**واژه‌های کلیدی** تابع اولیه‌گیری، نگاشت نمایشی، شیوه نیمه‌ضمنی، مومسانی وان‌مایسز، سخت‌شوندگی ناخطی ترکیبی.

## مقدمه

انجام شده است که در ادامه به آن می‌پردازیم. از مهم‌ترین این تلاش‌ها می‌توان به ایجاد روش ضمنی ویلکینز در سال ۱۹۶۴ اشاره کرد [1] یا روش‌هایی برپایه نگاشت‌نمایی که نخستین بار آئوریکیو و بیرائو در سال ۲۰۰۳ ارائه کردند [2]. شیوه ارائه‌شده آئوریکیو و بیرائو سازگاری مومسانی را برقرار نمی‌کرد، ولی زمینه پیدایش روش‌های نو با دقت بیشتر و سرعت هم‌گرایی بالاتر در سال‌های پس از آن را برای پژوهشگران دیگر فراهم کرد. در سال ۲۰۰۵ آرتیولی و همکاران سازگاری با سطح تسلیم را برای الگوی وان‌مایسز با سخت‌شوندگی خطی در شیوه نگاشت‌نمایی برقرار کردند [3]. همچنین، آرتیولی و همکاران در سال ۲۰۰۶ یک الگوریتم دیگر برای الگوی وان‌مایسز با سخت‌شوندگی خطی ارائه کردند که از هم‌گرایی مرتبه دوم برخوردار بود [4]. در سال ۲۰۰۷ نیز آرتیولی و همکاران فن بهنگام‌سازی تنش را برای الگوی وان‌مایسز

در تحلیل‌های کشسان مومسان هنگامی که بارگذاری فراتر از ناحیه کشسان ادامه داشته باشد و مصالح وارد تغییر شکل‌های مومسان (ماندگار) شود، باید تنش و متغیرهای داخلی مومسانی را با تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی حاکم بر رفتار کشسان مومسان مصالح بهنگام کرد. در تحلیل‌های اجزای محدود ناخطی، این تابع اولیه‌گیری روی نقطه‌های گاوس جزء‌ها در هر تکرار از هر نمو بارگذاری انجام می‌شود. از سوی دیگر، از آن‌جا که حل تحلیلی بسته برای این تابع اولیه‌گیری‌ها به‌جز برای الگوهای مومسانی ساده وجود ندارد، از شیوه‌های عددی استفاده می‌شود. باید دانست دقت شیوه تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی مومسانی اثر چشمگیری بر روی پاسخ‌های نهایی تحلیل دارد. بنابراین، پژوهش‌های بسیاری در زمینه گسترش و افزایش دقت شیوه‌های تابع اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی

DOI: 10.22067/jacsm.2021.56463.0

\* تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱۲/۱۳ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۰/۲/۱۴ می‌باشد.

(۱) کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان.

(۲) نویسنده مسئول: استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان.

(۳) استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان.

Email: m.sharifian@qiet.ac.ir

آسیب پیوسته لیماپتر رابطه‌سازی کردند. مارینلی و بوسکارنرا [16]، برای الگوی گسیختگی نرخ وابسته، یک روش ضمنی گسترش یافته برپایه اولر پسر و پیشنهاد کردند. کیم و کیم [17] برای الگوی بنیادی مومسانی لزج یک الگوریتم بهنگام‌سازی تنش ضمنی استخراج کردند. لی و همکاران [18] ۲ معیار آسیب مومسان لزج بنیادی همراه با الگوریتم‌های عددی وابسته به آن‌ها را معرفی و رابطه‌سازی کردند. شریفیان و شریفیان [19] برای مومسانی لزج برپایه الگوی پریک، یک روش کارا برای تابع اولیه‌گیری پیشنهاد کردند.

در این پژوهش، برای افزایش دقت در بهنگام‌سازی تنش، تابع اولیه‌گیری به روش نیمه‌ضمنی از معادله‌های بنیادی مومسانی رابطه‌سازی می‌شود که در این رابطه‌سازی‌ها حالت کلی ترکیب سخت‌شوندگی همگن ناخطی شابوش و سخت‌شوندگی پویای ناخطی آرمسترانگ‌فردریک در نظر گرفته می‌شود. در ادامه، برای بررسی درستی، دقت و هم‌گرایی شیوه نو پاسخ‌های این روش با روش‌های اولر پیشرو، اولر پسر و روش نمایی صریح سنجش می‌شود. برای رسیدن به پاسخ‌های دقیق‌تر در این مقاله، رابطه‌سازی‌ها به‌طور کلی برای یک نقطه دل‌خواه در طول گام مومسان انجام می‌شود. نخست محاسبات برای حالت خاصی انجام می‌شود که شعاع سطح تسلیم از نقطه میانی گام مومسانی برداشت شود. در ادامه، شعاع سطح تسلیم از ۳ نقطه واقع در یک‌چهارم نخست، یک‌چهارم پایانی و نقطه میانی طول گام مومسان برداشت و نمودار خطای نسبی رسم می‌شود. سپس بررسی می‌شود که برداشت داده‌ها از چه نقطه‌ای در طول گام مومسان به دقیق‌ترین پاسخ‌ها خواهد رسید.

لازم به توضیح است که روش نیمه‌ضمنی نگاشت نمایی برای الگوی وان‌مایسز و سخت‌شوندگی خطی پیش از این رابطه‌سازی و نشان داده شده است که این روش بسیار کارآمد است. بنابراین، پیاده‌سازی و انجام

با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای ناخطی آرمسترانگ‌فردریک گسترش دادند [5]. از جمله راهکارهای ارائه‌شده برای افزایش دقت، استفاده از روش‌های نیمه‌ضمنی بوده است که نخستین بار رضایی‌پژند و نصیری در سال ۲۰۰۷ برای الگوی وان‌مایسز پیشنهاد کردند [6] و از دقت مرتبه دوم برخوردار بود. همچنین، رضایی‌پژند و نصیری در سال ۲۰۰۸ دو شیوه نیمه‌ضمنی برای الگوی مومسان مطلوب دراکرپراگر ارائه کردند [7] که هر دو الگوریتم ارائه‌شده از هم‌گرایی مرتبه دوم برخوردار است. سپس، رضایی‌پژند و همکاران در سال ۲۰۱۰ نیز یک فن تابع اولیه‌گیری نمایی برای الگوی وان‌مایسز با سخت‌شوندگی پویای ناخطی ارائه کردند [8]. همچنین، رضایی‌پژند و شریفیان در سال ۲۰۱۱ روش تابع اولیه‌گیری را بر پایه زاویه بین نرخ کرنش و تنش جابه‌جاشده و تنش بازگشتی رابطه‌سازی کردند که از قابلیت کنترل خودکار خطا برخوردار بود [9]. در ادامه رضایی‌پژند و همکاران در سال ۲۰۱۱ دو شیوه تابع اولیه‌گیری نمایی با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای پراگر ارائه کردند که ماهیت صریح داشت [10]. سپس، رضایی‌پژند و همکاران در سال ۲۰۱۳ دو الگوریتم تابع اولیه‌گیری نیمه‌ضمنی برپایه نگاشت نمایی و شیوه‌های اولر پیشرو و اولر پسر و برای الگوی دراکرپراگر با سخت‌شوندگی درهم ناخطی رابطه‌سازی کردند [11]. همچنین، در سال ۲۰۱۶ حاجی‌آقاجان‌پور و شریفیان روش نیمه‌ضمنی را برای الگوی وان‌مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی گسترش دادند [12]. در سال ۲۰۱۸ شریفیان و همکاران یک شیوه بهنگام‌سازی تنش را برای الگوی بیگونی‌پیکولراز رابطه‌سازی کردند [13]. سرانجام در سال ۲۰۱۸ برای تحلیل کشسان مومسان مصالح وابسته به فشار آب ایستا یک فن بهنگام‌سازی تنش نیمه‌ضمنی از سوی شریفیان و همکاران [14] پیشنهاد شد. طاووسی و همکاران [15] روش‌های تابع اولیه‌گیری صریح و ضمنی برای الگوی

از مرتبه یکم به مرتبه دوم نیز افزایش خواهد یافت. لازم به توضیح است، این رویکرد حل نیمه‌ضمنی برای الگوهای مومسانی دیگر مانند الگوی مومسانی وان‌مایسز همراه با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای خطی در مرجع شماره [6] نیز استفاده شده است.

### معادله‌های بنیادی برای تحلیل‌های کشسان-

#### مومسان

در این بخش هدف ارائه معادله‌های بنیادی مومسانی در محدوده تغییر شکل‌های کوچک است. معادله‌های پایه مومسانی شامل جداسازی کرنش به بخش‌های کشسان و مومسان، معادله حاکم بر سطح تسلیم مصالح، قانون کشسانی برای مصالح، قانون جریان مومسانی، قانون‌های سخت‌شوندگی و شرط‌های بارگذاری باربرداری است که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود.

سطح تسلیم وان‌مایسز در محدوده تغییر شکل‌های کوچک با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\|\Sigma\| - R = 0 \quad (1)$$

در این رابطه  $R$  شعاع سطح تسلیم است. همچنین، برای معرفی اندازه هندسی از علامت  $\|\cdot\|$  استفاده شده است و  $\Sigma$  بردار تنش انتقالی است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Sigma = s - \alpha \quad (2)$$

برای معرفی  $s$  نخست تانسورهای تنش و کرنش را به بخش‌های حجمی و انحرافی مانند رابطه‌های زیر تجزیه می‌کنیم. در این رابطه‌ها  $s$  قسمت انحرافی تنش است و اگر تنش بازگشتی  $a$  را به بخش‌های انحرافی و حجمی تقسیم کنیم،  $\alpha$  قسمت انحرافی تنش بازگشتی را معرفی می‌کند. یادآوری می‌شود که در تراکم‌ناپذیری مومسان، تنش کامل بازگشتی و قسمت انحرافی‌اش یکسان‌اند.

$$\sigma = s + pI \quad \text{و} \quad p = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (3)$$

رابطه‌سازی این روش برای مومسانی‌های پیشرفته‌تری مانند مومسانی وان‌مایسز همراه با سخت‌شوندگی‌های ناخطی موضوع پژوهش نویسندگان قرار گرفت تا بتوان این روش دقیق و پربازده را برای انجام تحلیل‌های مومسانی به‌کار برد و الگوریتم آن در دسترس تحلیلگران و پژوهشگران باشد. شایان ذکر است، این روش نیمه‌ضمنی نخستین بار در این پژوهش برای الگوی مومسانی وان‌مایسز همراه با سخت‌شوندگی‌های ناخطی همگن شاپوش و پویای آرمسترانگ‌فردریک رابطه‌سازی شده است.

خاطر نشان می‌کند، در مرجع [8] برای حالتی که الگوی مومسانی وان‌مایسز همراه با سخت‌شوندگی پویای ناخطی کلی در نظر باشد، یک روش بهنگام‌سازی تنش صریح برپایه نگاشت نمایی ارائه شده است که منجر به دقت مرتبه یکم می‌شود. در حقیقت، برای حل دستگاه معادله افزوده در روش نگاشت نمایی به فرم کلی  $\dot{X} = \mathbb{B}X$  با استفاده از یک حل نمایی باید ماتریس ضرایب  $\mathbb{B}$  را در طول گام بارگذاری ثابت پنداشت؛ حال آن‌که ماتریس ضرایب  $\mathbb{B}$  برای حالتی که سخت‌شوندگی همگن خطی یا ناخطی و سخت‌شوندگی پویای ناخطی وجود دارد، ثابت نبوده است و باید برای اندازه شعاع سطح تسلیم و تنش بازگشتی مقداری ثابت در طول بخش کشسان مومسان گام بارگذاری فرض کرد. در مرجع [8] با یک رویکرد صریح، تنش بازگشتی را برابر با مقدار آن در آغاز گام کشسان مومسان پنداشته است که این روش منجر به یک حل صریح مرتبه یکم خواهد شد. در پژوهش کنونی نویسندگان از یک رویکرد نیمه‌ضمنی برای حل دستگاه معادله مزبور استفاده می‌کنند، به این معنی که نخست مقدار شعاع سطح تسلیم و تنش بازگشتی را در میانه بخش کشسان مومسان گام مومسانی می‌یابند، سپس از آن مقادارها برای ماتریس ضرایب  $\mathbb{B}$  استفاده می‌کنند. در نتیجه زمانی که ماتریس ضرایب  $\mathbb{B}$  با یک مقدار در میانه گام کشسان مومسان تقریب زده شود، دقت حل افزوده می‌شود و سرعت حل

سخت‌شوندگی مصالح می‌تواند همگن یا پویا یا ترکیبی از هر دو باشد. سخت‌شوندگی همگن نشان‌دهنده افزایش یکسان شعاع سطح تسلیم در همه راستاهای موجود است و سخت‌شوندگی پویا فقط انتقال سطح تسلیم را تعریف می‌کند. در این پژوهش، از قانون سخت‌شوندگی همگن ناخطی که شاپوش در سال ۱۹۸۶ ارائه کرد، استفاده می‌شود [20]:

$$\dot{R} = \bar{b}(R_0 + R_s + R)\dot{\gamma} \quad (10)$$

در این رابطه،  $R_0$  شعاع سطح تسلیم نخستین را نشان می‌دهد و  $R_s$  و  $\bar{b}$  ثابت‌های ماده در سخت‌شوندگی همگن هستند. از حل معادله (۱۰) همراه با شرط  $R = R_0$  و  $\dot{\gamma} = 0$  می‌توان شعاع سطح تسلیم را با رابطه زیر به دست آورد:

$$R = R_0 + R_s[1 - \exp(-\bar{b}\dot{\gamma})] \quad (11)$$

از طرفی، براساس قانون سخت‌شوندگی پویا و با استفاده از مدل آرمسترانگ‌فردریک [21] می‌توان نوشت:

$$\dot{\alpha} = H_{kin}\dot{\gamma}n - \dot{\gamma}H_{nl}\alpha \quad (12)$$

که در این رابطه عامل‌های  $H_{nl}$  و  $H_{kin}$  از ویژگی‌های ماده هستند. سرانجام، شرط‌های بارگذاری و باربرداری کان‌تاگر با ۳ رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad F \leq 0 \quad \text{و} \quad \dot{\gamma}F = 0 \quad (13)$$

در این رابطه‌ها، هنگامی که  $\dot{\gamma} > 0$  باشد، رفتار ماده مومسان است و اگر  $\dot{\gamma} = 0$  باشد، رفتار ماده کشسان است. در پایان، ضریب مومسانی با اعمال شرط  $\dot{F} = 0$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\gamma} = \frac{2G(n^T \dot{e})}{2\bar{G} + \bar{b}(R_0 + R_s - R) - n^T H_{nl} \alpha} \quad (14)$$

که در آن:

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\theta i \quad \text{و} \quad \theta = \text{tr}(\varepsilon) \quad (4)$$

در رابطه‌های بالا  $\sigma$  و  $\varepsilon$  تانسورهای تنش و کرنش هستند.  $e$  کرنش انحرافی و  $i$  بردار معادل تانسور همانی مرتبه دوم است.  $p$  و  $\theta$  به ترتیب فشار آب ایستا و کرنش حجمی هستند. علامت  $\text{tr}()$  نشان‌دهنده اثر ماتریس و برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی است. در این جا از جریان مومسانی وابسته استفاده می‌شود. همچنین، با توجه به آن که سطح تسلیم وان‌مایسز مستقل از فشار آب ایستاست، بخش حجمی کرنش مومسان صفر خواهد بود. بنابراین، فشار آب ایستا را می‌توان با استفاده از مدول بالک  $K$  به صورت زیر محاسبه کرد:

$$p = K\theta \quad (5)$$

وقتی بارگذاری از حد کشسان فراتر رود و ماده وارد مرحله مومسانی شود، کرنش انحرافی را می‌توان به ۲ قسمت مومسان و کشسان مانند رابطه زیر تقسیم کرد:

$$e = e^p + e^e \quad (6)$$

که در قسمت کشسان قانون هوک بین تنش انحرافی و کرنش انحرافی رابطه زیر را دارد:

$$s = 2Ge^e = 2G(e - e^p) \quad (7)$$

برای معرفی نرخ کرنش مومسان از رابطه زیر استفاده می‌شود که در این رابطه  $\dot{\gamma}$  ضریب مومسانی نام دارد و برابر اندازه نرخ کرنش مومسان است. همچنین،  $n$  بردار یکه عمود بر سطح تسلیم است.

$$\dot{e}^p = \dot{\gamma}n \quad (8)$$

$$n = \frac{\partial F}{\partial \Sigma} = \frac{\Sigma}{\|\Sigma\|} = \frac{\Sigma}{R} \quad (9)$$

$$\overline{2G} = 2G + H_{kin} \quad (15)$$

### روش تابع اولیه گیری بر پایه نگاشت نمایی

روش های بر پایه نگاشت نمایی ماهیت صریح دارند، زیرا در سرتاسر گام مومسان شعاع سطح تسلیم یکسان و برابر مقدار آن در آغاز گام مومسان پنداشته می شود. دستگاه معادله نمایی که آئوریکو و بیرائو برای معادله های بنیادی مواد در سال ۲۰۰۳ ارائه کردند، به صورت  $\dot{X} = \mathbb{B}X$  است که در این معادله  $X$  یک بردار تنش افزوده با  $n+1$  درایه است و  $\mathbb{B}$  در مدل های با سخت شونده گی ناخطی ماتریسی وابسته به  $X$  است. هدف این بخش استخراج دستگاه معادله اشاره شده برای معادله های بنیادی مدنظر است.

برای دستیابی به دستگاه معادله نمایی مدنظر، نخست رابطه (۷) در رابطه (۲) جایگزین و سپس از رابطه به دست آمده نسبت به زمان مشتق گرفته می شود. در صورتی که رابطه های (۱۲) و (۱۵) در رابطه به دست آمده جای گذاری شوند، نتیجه به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\dot{\Sigma} = 2G\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}H_{nl}\alpha - 2\overline{G}\dot{\epsilon}^p \quad (16)$$

اکنون، رابطه های (۸) و (۹) در رابطه بالا قرار داده می شود و پس از کمی ساده سازی، رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{\Sigma} + 2\overline{G}\frac{\Sigma}{R}\dot{\gamma} = 2G\dot{\phi} \quad (17)$$

که در این رابطه  $\dot{\phi}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{\phi} = \dot{\epsilon} + \frac{\dot{\gamma}}{2G}H_{nl}\alpha \quad (18)$$

اکنون، بردار تنش انتقالی بدون بعد  $\overline{\Sigma}$  به صورت زیر معرفی می شود:

$$\overline{\Sigma} = \frac{\Sigma}{R} \quad (19)$$

با مقایسه رابطه (۹) و (۱۹) به سادگی می توان دریافت که در گام مومسان بردارهای  $n$  و  $\overline{\Sigma}$  هم ارز یکدیگرند. در این جا، از رابطه (۱۹) مشتق گرفته و سپس

رابطه (۱۱) در آن جای گذاری می شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\dot{\Sigma} = \frac{\dot{\Sigma}}{R} - \frac{R_s \bar{b} \exp(-\bar{b}\gamma)}{R} \dot{\gamma} \overline{\Sigma} \quad (20)$$

در صورتی که رابطه های (۱۷) و (۱۹) در رابطه (۲۰) جای گذاری شوند، رابطه زیر در دسترس قرار می گیرد:

$$\dot{\Sigma} + \left( \frac{2\overline{G} + R_s \bar{b} \exp(-\bar{b}\gamma)}{R} \right) \dot{\gamma} \overline{\Sigma} = \frac{2G}{R} \dot{\phi} \quad (21)$$

معادله (۲۱) یک رابطه کلی و در بر گیرنده هر حالت کشسان و مومسان است و برای حل آن عامل تابع اولیه گیری  $X^0$  با استفاده از رابطه زیر معرفی می شود:

$$X^0 \dot{\Sigma} + X^0 \left( \frac{2\overline{G} + R_s \bar{b} \exp(-\bar{b}\gamma)}{R} \right) \dot{\gamma} \overline{\Sigma} = \frac{d}{dt} (X^0 \overline{\Sigma}) \quad (22)$$

یا به شکل ساده زیر می توان آن را بیان کرد:

$$\dot{X}^0 = \left( \frac{2\overline{G} + R_s \bar{b} \exp(-\bar{b}\gamma)}{R} \right) \dot{\gamma} X^0 \quad (23)$$

اگر مقدار نخستین  $X^0(0) = 1$  در آغاز حل در نظر گرفته شود، پاسخ رابطه (۲۳) منجر به رابطه زیر می شود:

$$X(\gamma) = \begin{cases} \left( \frac{(R_0 + R_s) \exp(\bar{b}\gamma) - R_s}{R_0} \right)^{1/\beta} \exp(-b\gamma); & \bar{b} \neq 0 \\ \exp\left(\frac{2\overline{G}}{R_0}\gamma\right) & \bar{b} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\beta = \frac{\bar{b}(R_0 + R_s)}{2\overline{G} + \bar{b}(R_0 + R_s)} \quad (25)$$

با استفاده از رابطه های (۲۱) و (۲۲) رابطه زیر را می توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} (X^0 \overline{\Sigma}) = X^0 \frac{2G}{R} \dot{\phi} \quad (26)$$

$$\frac{X^0}{2} \frac{d}{dt} \|\Sigma\|^2 + \dot{X}^0 \|\Sigma\|^2 = \frac{2G}{R} \dot{\phi}^T (X^0 \overline{\Sigma}) \quad (27)$$

و سپس به رابطه زیر رسید:

## الگوریتم بهنگام سازی تنش

به صورت معمول برای ارائه روش بهنگام سازی تنش، یک گام شبه زمانی کلی از  $t_n$  تا  $t_{n+1}$  در نظر گرفته می شود؛ همچنان که در زمان  $t=t_n$  متغیرهای  $\alpha_n, e_n, s_n$  و  $\gamma_n$  و نیز کرنش در زمان  $t = t_{n+1}$  که با  $e_{n+1}$  نمایش داده می شود، معلوم است. بنابراین، الگوریتم پیشنهادی باید ضمن حل معادله های مومسانی، تنش بهنگام شده و سایر متغیرها را در زمان  $t = t_{n+1}$  به دست بیاورد. اکنون، برای حل معادله دیفرانسیل (۳۲) از شرط نخستین زیر در لحظه  $t_n$  استفاده می شود:

$$X_n = \begin{Bmatrix} X_n^s \\ X_n^0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

در این صورت پاسخ معادله (۳۲) به صورت زیر است:

$$X_{n+1} = \exp(\mathbb{B}\Delta t) X_n \quad (37)$$

برای محاسبه  $\exp(\mathbb{B}\Delta t)$  باید ماتریس  $\mathbb{B}$  ثابت باشد، اما چون ماتریس  $\mathbb{B}$  در طول گام مومسان دارای مقدار ثابت نیست، برای حل در روش نمایی صریح مقدار آن در هر گام زمانی ثابت و برابر مقدار آن در آغاز گام زمانی یعنی  $\mathbb{B}_n$  پنداشته می شود و می توان نوشت:

$$X_{n+1} = \exp(\mathbb{B}_n \Delta t) X_n = \bar{\mathbb{G}}_n X_n \quad (38)$$

که  $\bar{\mathbb{G}}_n$  در حالت های کشسان و مومسان رابطه زیر را دارد:

$$\bar{\mathbb{G}}_n = \begin{cases} \bar{\mathbb{G}}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \frac{2G}{R_n} \Delta e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbb{G}}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} + (a-1)\Delta \hat{\phi} \Delta \hat{\phi}^T & b\Delta \hat{\phi}^T \\ b\Delta \hat{\phi}^T & a \end{bmatrix} \end{cases} \quad (39)$$

پارامترهای به کار گرفته شده در رابطه (۳۹) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{X}^0 = \frac{2G}{R} \hat{\phi}^T (X^0 \Sigma) \quad (28)$$

با استفاده از معادله های (۲۷) و (۲۸) یک سیستم معادله دیفرانسیل در فضای تنش افزوده به دست خواهد آمد:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} X^0 \bar{\Sigma} \\ X^0 \end{Bmatrix} = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9 \times 9} & \hat{\phi} \\ \hat{\phi}^T & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \begin{Bmatrix} X^0 \bar{\Sigma} \\ X^0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

بردار تنش افزوده  $X$  و ماتریس  $\mathbb{B}$  در فضای  $n+1$  بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$X = \begin{Bmatrix} X^0 \bar{\Sigma} \\ X^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^s \\ X^0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbb{B} = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9 \times 9} & \hat{\phi} \\ \hat{\phi}^T & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (31)$$

که  $\mathbb{O}_{9 \times 9}$  یک ماتریس صفر  $9 \times 9$  مؤلفه ای است. با جای گذاری رابطه های (۳۰) و (۳۱) در رابطه (۲۹) دستگاه معادله نمایی زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{X} = \mathbb{B}X \quad (32)$$

که در حالت کشسان ماتریس  $\mathbb{B}$  خواهد بود:

$$\mathbb{B} = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9 \times 9} & \hat{e} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (33)$$

و چون در حالت کلی کشسان مومسان ماتریس  $\mathbb{B}$  وابسته به بردار  $X$  است، معادله دیفرانسیل (۳۲) ناخطی خواهد شد.

## سازگاری الگوریتم عددی

چنانچه ۲ شرط زیر از شرایط کان تا کر به طور هم زمان برآورده شود، در محدوده مومسان قرار داریم:

- ۱- تنش روی سطح تسلیم قرار گیرد؛ یعنی:

$$\|X^s\|^2 = (X^0)^2 \quad (34)$$

۲- جهت رشد کرنش باید به سمت خارج از سطح تسلیم و مطابق رابطه (۳۵) باشد:

$$(X^s)^T \dot{e} > 0 \quad (35)$$

است. در غیر این صورت رفتار ماده کشسان مومسان است و باید قسمت های کشسان و مومسان از هم جدا شوند. برای این، پارامتر  $\alpha$  به گونه ای معرفی می شود که در بازه زمانی  $\Delta t$ ، محدوده  $\alpha \Delta t$  ناحیه کشسان و محدوده  $(1-\alpha)\Delta t$  ناحیه کشسان مومسان را مشخص می کند. با این شرایط  $\alpha$  رابطه زیر را دارد:

$$\alpha = \frac{\sqrt{C^2 - DM} - C}{D} \quad (47)$$

$$\begin{cases} D = \left( \frac{2G}{R_n} \mathbf{X}_n^0 \|\Delta \mathbf{e}\| \right)^2 \\ C = \frac{2G}{R_n} \mathbf{X}_n^0 (\mathbf{X}_n^0)^T \Delta \mathbf{e} \\ M = \|\mathbf{X}_n^0\|^2 - \|\mathbf{X}_n^0\|^2 \end{cases} \quad (48)$$

با به دست آمدن پارامتر  $\alpha$ ، تنش افزوده در نقطه برخورد را می توان با رابطه زیر به دست آورد:

$$\mathbf{X}^c = \mathbb{G}^c \mathbf{X}^n \quad (49)$$

$$\mathbb{G}^c = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \frac{2G}{R_n} \alpha \Delta \mathbf{e} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

اکنون، برای محاسبه تنش در گام کشسان در رابطه (39) از  $\alpha \Delta \mathbf{e}$  به جای  $\Delta \mathbf{e}$  استفاده می شود و در گام مومسان نیز در معادله (39) به جای  $\Delta \mathbf{e}$  از  $(1-\alpha)\Delta \mathbf{e}$  استفاده می شود تا ماتریس  $\mathbb{G}_p$  و پس از آن بردار تنش افزوده  $\mathbf{X}_{n+1}$  با رابطه های زیر محاسبه شود.

$$\mathbb{G}_n = \begin{cases} \mathbb{G}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \frac{2G}{R_n} \alpha \Delta \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} + (a-1)\Delta \hat{\Phi} \Delta \hat{\Phi}^T & b \Delta \hat{\Phi}^T \\ b \Delta \hat{\Phi}^T & a \end{bmatrix} \end{cases} \quad (51)$$

$$\Delta \Phi = (1-\alpha)\Delta \mathbf{e} + \frac{\mathbf{n}_n^T (1-\alpha)\Delta \mathbf{e}}{2\bar{G} + \bar{b}(R_s + R_0 - R_n)\mathbf{n}_n^T H_{nl} \alpha_n} H_{nl} \alpha_n \quad (52)$$

$$\Delta \Phi = \Delta \mathbf{e} + \frac{\mathbf{n}_n^T \Delta \mathbf{e}}{2\bar{G} + \bar{b}(R_s + R_0 - R_n)\mathbf{n}_n^T H_{nl} \alpha_n} H_{nl} \alpha_n \quad (40)$$

$$\begin{aligned} a &= \cosh g & b &= \sinh g \\ g &= \frac{2G}{R_n} \|\Delta \Phi\| \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Delta \hat{\Phi} = \frac{\Delta \Phi}{\|\Delta \Phi\|} \quad (42)$$

### بهنگام سازی شعاع سطح تسلیم

با استفاده از رابطه (41) و با یک رویکرد صریح می توان  $\gamma_{n+1}$  را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_n + \frac{2G(\mathbf{n}_n^T \Delta \mathbf{e})}{2\bar{G} + \bar{b}(R_s + R_0 - R_n)\mathbf{n}_n^T H_{nl} \alpha_n} \end{aligned} \quad (43)$$

اکنون، با داشتن مقدار  $\gamma_{n+1}$  و با استفاده از رابطه (11) مقدار  $R_{n+1}$  به دست می آید:

$$R_{n+1} = R_0 + R_s [1 - \exp(-\bar{b}\gamma_{n+1})] \quad (44)$$

### الگوریتم کلی حل کشسان مومسان (بهنگام سازی تنش)

نخست مقدارهای آزمایشی در حالت کشسان محاسبه می شود.

$$\mathbf{X}_{n+1}^{Tr} = \mathbb{G}^e \mathbf{X}_n \quad (45)$$

سپس، برای بررسی درستی پاسخ، آزمایش به دست آمده رابطه زیر به کار گرفته می شود:

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{s,Tr}\| \leq X_{n+1}^{0,Tr} \quad (46)$$

اگر رابطه (46) برقرار باشد، در محدوده کشسان قرار داریم و پاسخ به دست آمده پذیرفتنی و پاسخ نهایی

$$\gamma_r = \gamma_n + \frac{2G\mathbf{n}_r^T r(1-\alpha)\Delta\mathbf{e}}{2\bar{G} + \bar{b}(R_s + R_0 - R_c) - \mathbf{n}_r^T H_{nl}\alpha_r} \quad (58)$$

پس از به دست آمدن  $\gamma_r$ ، برای محاسبه شعاع سطح تسلیم، رابطه (۱۱) در لحظه دل خواه  $r(1-\alpha)\Delta t$  بازنویسی می شود:

$$R_r = R_{n+\alpha+r(1-\alpha)} = R_0 + R_s[1 - \exp(-\bar{b}\gamma_r)] \quad (59)$$

سایر پارامترهای مورد نیاز را نیز می توان به ترتیب زیر در لحظه دل خواه  $r(1-\alpha)\Delta t$  به دست آورد:

$$\Delta\mathbf{e}_r^p = \lambda_r \mathbf{n}^c \quad (60)$$

$$\mathbf{n}^c = \frac{\Sigma_c}{\|\Sigma_c\|} = \frac{\mathbf{X}_c^s}{X_0} \quad (61)$$

قسمت انحرافی تنش و بردار تنش انتقالی در لحظه مدنظر، رابطه های زیر را دارد:

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{s}^c + 2Gr(1-\alpha)\Delta\mathbf{e} - 2G\Delta\mathbf{e}_r^p \quad (62)$$

$$\Sigma_r = \mathbf{s}_r - \alpha_r \quad (63)$$

با داده های به دست آمده رابطه (۳۹) بازنویسی و ماتریس  $\mathbb{G}_p$  به دست می آید:

$$\mathbb{G}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} + (a-1)\Delta\bar{\Phi}\Delta\bar{\Phi}^T & b\Delta\bar{\Phi} \\ b\Delta\bar{\Phi}^T & a \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\Delta\Phi = (1-\alpha)\Delta\mathbf{e} + \frac{\mathbf{n}_r^T(1-\alpha)\Delta\mathbf{e}}{\bar{b}(R_s + R_0 - R_r) - \mathbf{n}_r^T H_{nl}\alpha_r} H_{nl}\alpha_r \quad (65)$$

و متغیرهای  $a$ ,  $g$  و  $b$  عبارت اند از:

$$g = \frac{2G}{R_r} \|\Delta\Phi\| \quad (66)$$

$$a = \cosh g \quad (67)$$

$$a = \cosh g \quad b = \sinh g \quad g = \frac{2G}{R_n} \|\Delta\Phi\| \quad (53)$$

$$\Delta\hat{\Phi} = \frac{\Delta\Phi}{\|\Delta\Phi\|} \quad (54)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \bar{\mathbb{G}}_n \mathbf{X}_n \quad (55)$$

### رابطه سازی های نو در روش پیشنهادی

باتوجه به این که در الگوریتم ارائه شده برای به دست آوردن ماتریس  $\mathbb{B}_n$  در رابطه (۳۸) از شعاع سطح تسلیم  $R_n$  و تنش بازگشتی  $\alpha_n$  در آغاز گام مومسان استفاده شد، در نتیجه روش ماهیت صریح دارد. از طرفی، وجود سخت شونده گی همگن و پویای ناخطی سبب می شود که با تغییر شعاع سطح تسلیم و تنش بازگشتی در طول بخش کشسان مومسان گام بارگذاری، ماتریس  $\mathbb{G}_p$  نیز تغییر کند. بنابراین، روش صریح ارائه شده دقت کافی را ندارد. در این جا، برای افزایش دقت محاسبات، شیوه نیمه ضمنی رابطه سازی می شود و این رابطه سازی به گونه ای انجام خواهد شد که در برپا کردن ماتریس  $\mathbb{B}_n$  به جای استفاده از  $R_n$  و  $\alpha_n$  بتوان شعاع سطح تسلیم و تنش بازگشتی را از هر نقطه دل خواه در طول گام مومسان برداشت کرد. سپس، این متغیرها در تمام طول گام زمانی ثابت در نظر گرفته می شود. برای این، پارامتر عددی  $r$  در بازه  $[0,1]$  در نظر گرفته می شود. برای محاسبه مقدار شعاع سطح تسلیم و تنش بازگشتی در لحظه دل خواه  $r(1-\alpha)\Delta t$  در محدوده مومسان، باید متغیرهای  $\mathbf{n}$  و  $\gamma$  را در همان لحظه به دست آورد. بنابراین، رابطه های (۹)، (۱۲) و (۴۳) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\mathbf{n}_{n+\alpha+r(1-\alpha)} = \frac{\Sigma_{n+\alpha+r(1-\alpha)}}{\|\Sigma_{n+\alpha+r(1-\alpha)}\|} \quad (56)$$

$$\alpha_r = \alpha_{n+\alpha+r(1-\alpha)} = \quad (57)$$

$$H_{kin} H_{nl} \mathbf{n}_c - H_{nl} \lambda_r \alpha_n + \alpha_n$$



مشخصات مکانیکی [22] Carbon Steel CK15

$$b = \sinh g \quad (68)$$

$$E = 2800 \text{ MPa} \quad H_{\text{kin}} = \frac{2}{3} \times 1900 \text{ MPa}$$

سرانجام، با به‌دست آمدن  $G_p$  از رابطه (55) مقدار  $X_{n+1}$  به‌دست می‌آید.

$$H_{\text{nl}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 8.5 \quad R_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sigma_{y,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times$$

$$300 \quad \bar{b} = 10 \quad R_s = 25 \quad \nu = 0.3$$

### آزمون‌های عددی

مشخصات مکانیکی Chromium-nickel

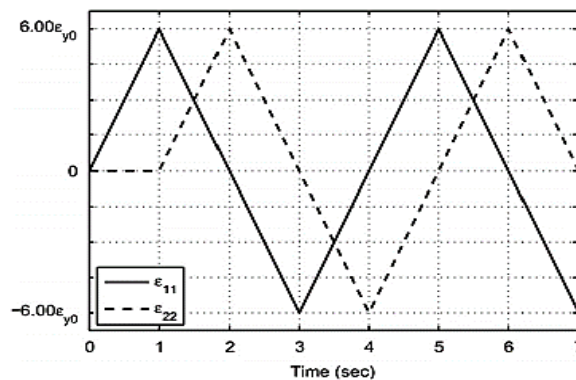
برای بررسی درستی و دقت روش پیشنهادی، ۲ تاریخچه بارگذاری کرنش نامتناسب که در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است، به ماده مختلف Chromium-nickel و Carbon Steel و Stainless Steel X5CRNR18.9 اعمال می‌شود. در این بارگذاری‌ها مؤلفه‌های کرنش شامل  $\epsilon_{11}$  و  $\epsilon_{12}$  و سایر مؤلفه‌های کرنش، صفر در نظر گرفته شده است.

[13] Stainless Steel X5CRNR18.9

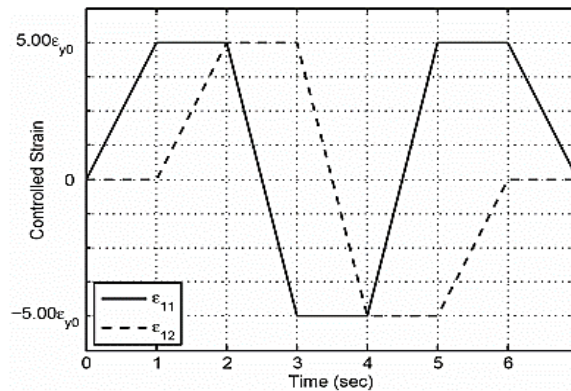
$$E = 2800 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3 \quad H_{\text{nl}} = 525 \quad \bar{b} = 0$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sigma_{y,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 170, \quad R_s = 0$$

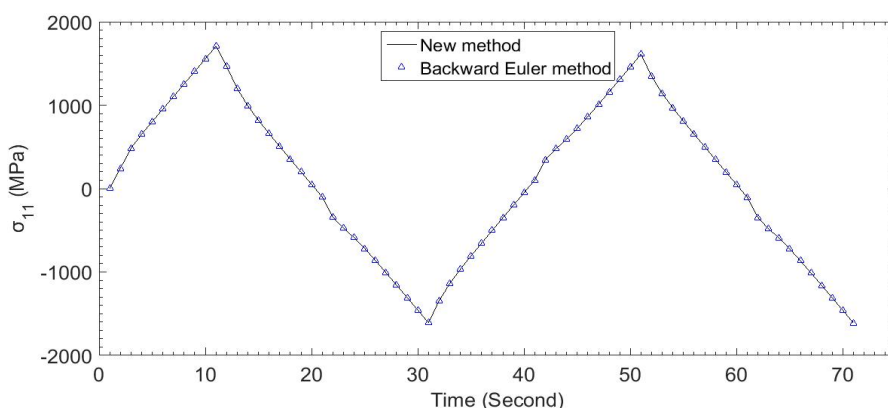
$$H_{\text{kin}} = 41080 \text{ MPa}$$



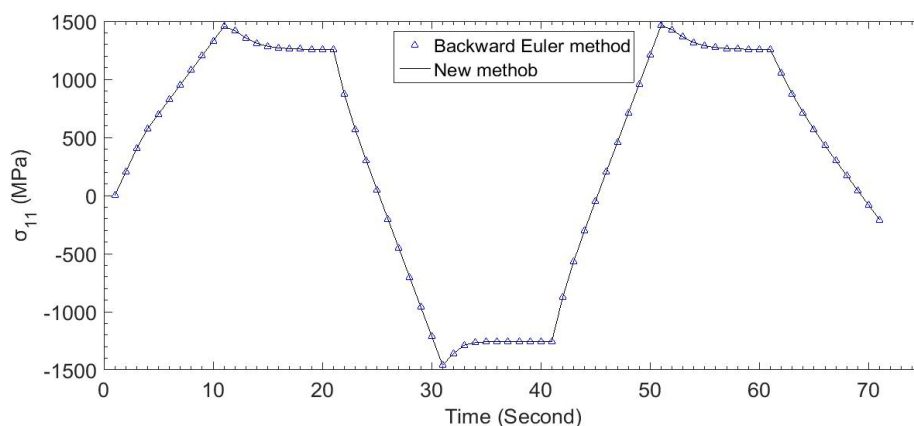
شکل ۱ تاریخچه بارگذاری مسیر کرنش نخست [23]



شکل ۲ تاریخچه بارگذاری مسیر کرنش دوم [8]



شکل ۳ مقایسه روش اولر پسرو و روش جدید با مسیر کرنش نخست در ماده Carbon Steel CK15



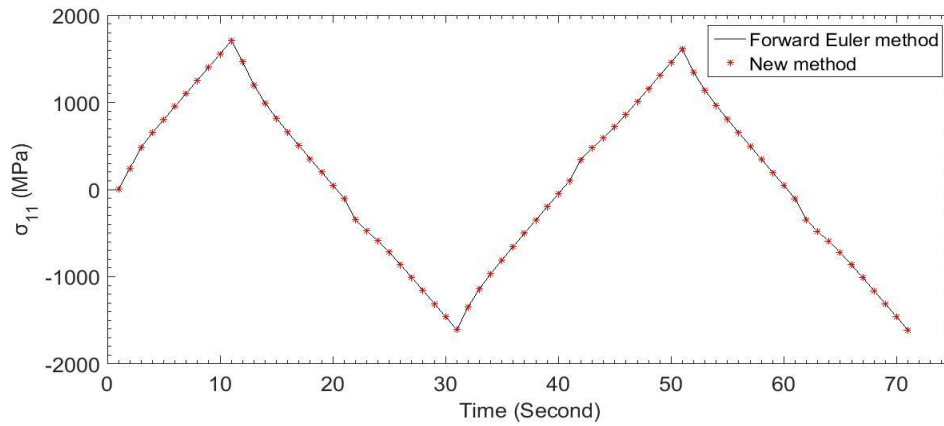
شکل ۴ مقایسه روش اولر پسرو و روش جدید در ماده Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش دوم

نمودار تنش  $\sigma_{11}$  که برای هر ۳ روش در شکل‌های ۳ تا ۱۰ رسم شده است، به روشنی نشان می‌دهد که تنش‌های به‌نگام‌شده با روش نو پیشنهادی و نیز پاسخ به‌دست‌آمده از روش‌های اولر پسرو و پیشرو برای ماده مدنظر، عملاً باهم یکسان بوده است و درستی رابطه‌سازی انجام‌شده را می‌توان نتیجه گرفت.

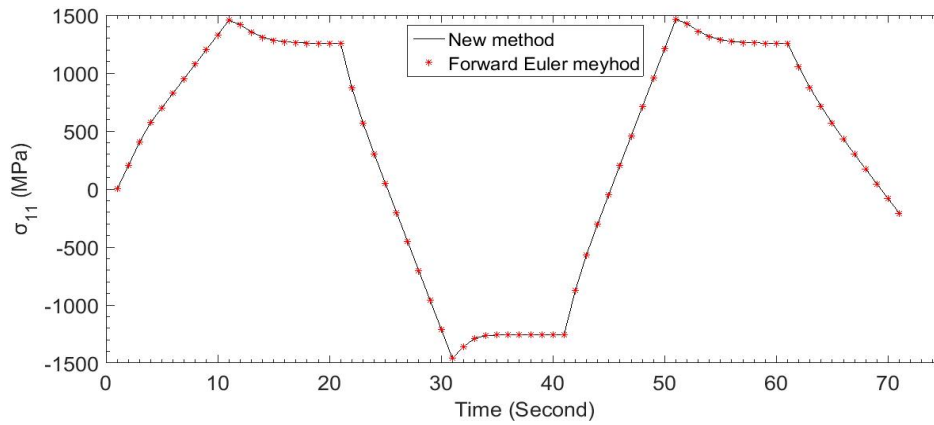
برای بررسی دقت این روش، خطای نسبی محاسبه و نمودار آن در گام زمانی کاربردی  $\Delta t=0.025$  sec برای روش نو پیشنهادی و روش‌های اولر پسرو و پیشرو رسم می‌شود. در این‌جا هم در روش نو پیشنهادی  $r=0.5$  در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه خطای نسبی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$E_n^\sigma = \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \quad (69)$$

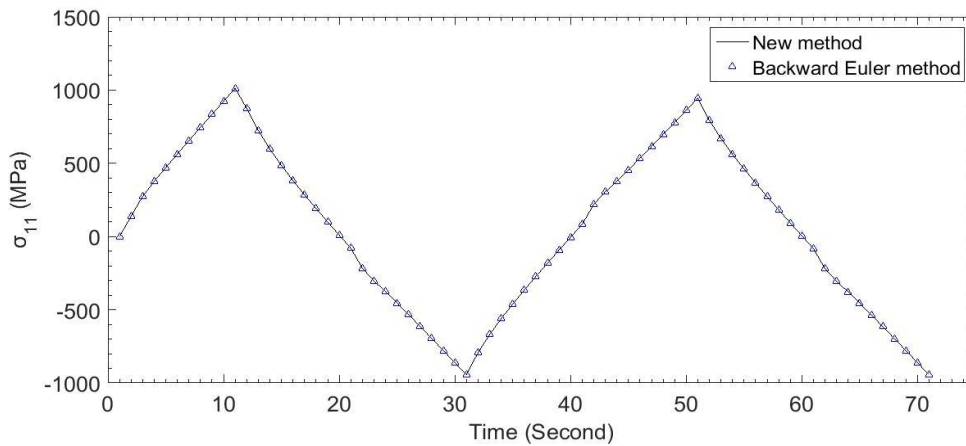
برای بررسی درستی این روش، ۲ تاریخچه بارگذاری کرنش معرفی‌شده در شکل‌های ۱ و ۲، به هر یک از ماده آزمون‌شده وارد و تنش‌ها به‌نگام می‌شود. سپس، نمودار مؤلفه تنش به‌نگام‌شده  $\sigma_{11}$  با روش نو پیشنهادی و نیز روش‌های اولر پسرو و پیشرو برای گام زمانی کوچک  $\Delta t=0.001$  sec در نمودارهای شکل‌های ۳ تا ۱۰ رسم می‌شود. با توجه به این‌که در شیوه ارائه‌شده در این پژوهش رابطه‌سازی‌ها به‌گونه‌ای انجام شده است که بتوان داده‌ها را از هر نقطه دل‌خواه در طول گام مومسان برداشت کرد، در محاسبات این قسمت در روش نو پیشنهادی  $r=0.5$  در نظر گرفته شده است. همچنین، خاطر نشان می‌کند مانند این محاسبات را می‌توان برای سایر مؤلفه‌های تنش نیز انجام داد.



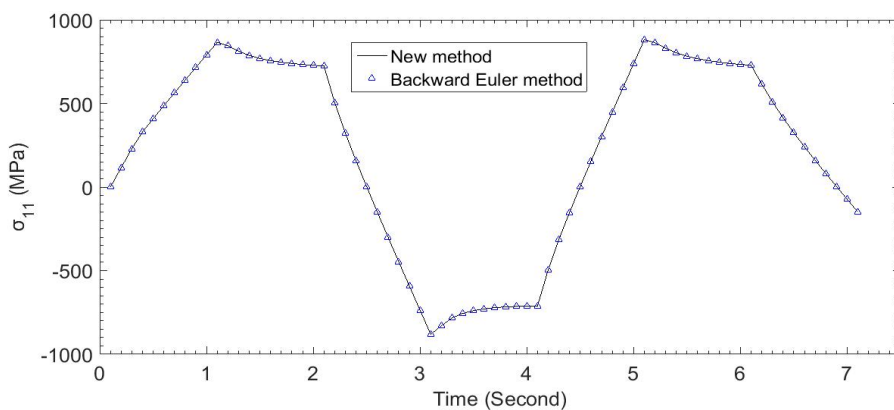
شکل ۵ مقایسه روش اولر پیشرو و روش جدید با مسیر کرنش نخست در ماده Carbon Steel CK15



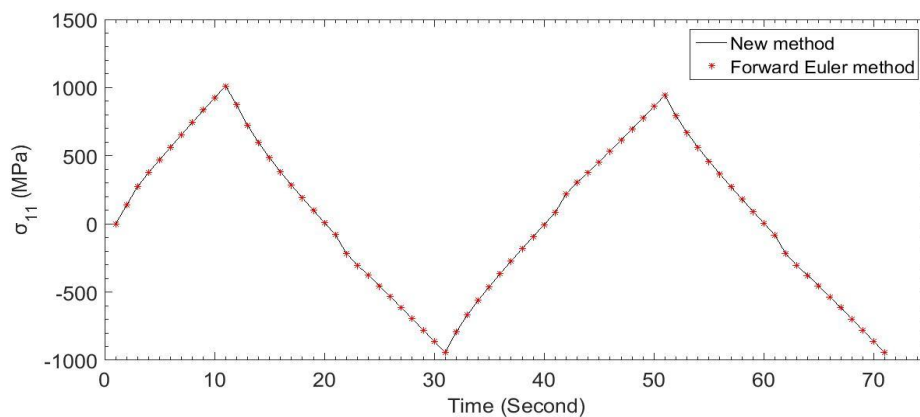
شکل ۶ مقایسه روش اولر پیشرو و روش جدید در ماده Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش دوم



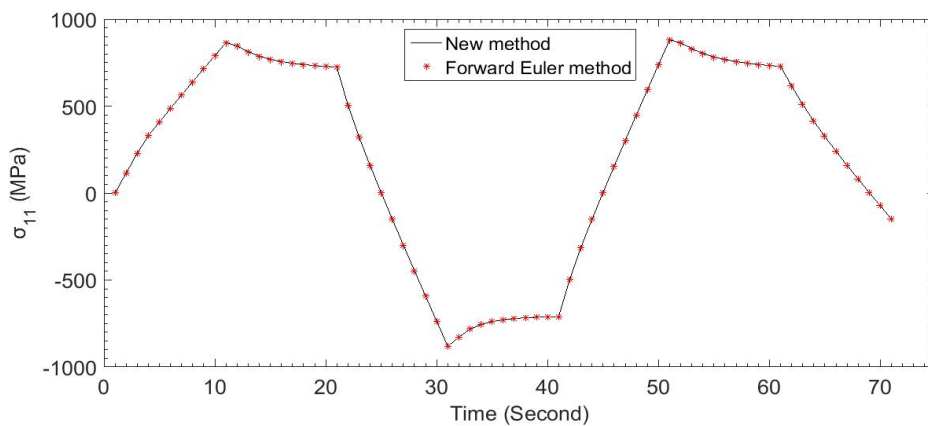
شکل ۷ مقایسه روش اولر پسرو و روش جدید با مسیر کرنش نخست در ماده Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9



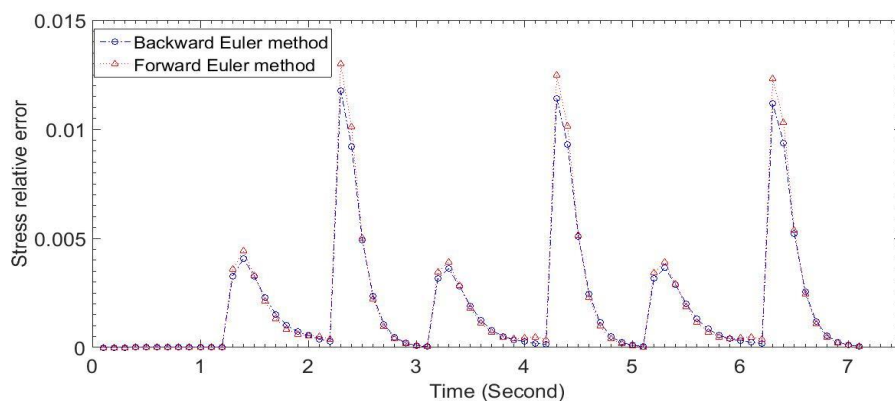
شکل ۸ مقایسه روش اولر پسرو و روش جدید با مسیر کرنش دوم در ماده Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9



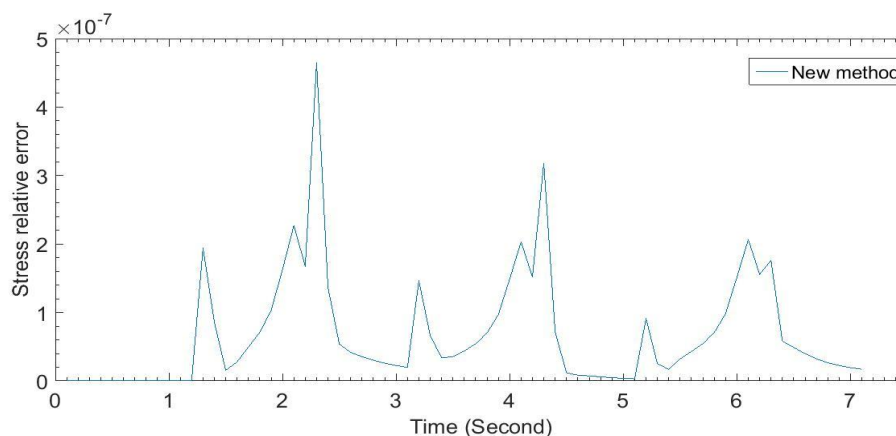
شکل ۹ مقایسه روش اولر پیشرو و روش جدید با مسیر کرنش نخست در ماده Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9



شکل ۱۰ مقایسه روش اولر پیشرو و روش جدید با مسیر کرنش دوم در ماده Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9



شکل ۱۱ نمودار خطای نسبی روش‌های اولر پیشرو و اولر پسرو برای مادهٔ Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش نخست



شکل ۱۲ نمودار خطای نسبی روش جدید برای مادهٔ Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش نخست

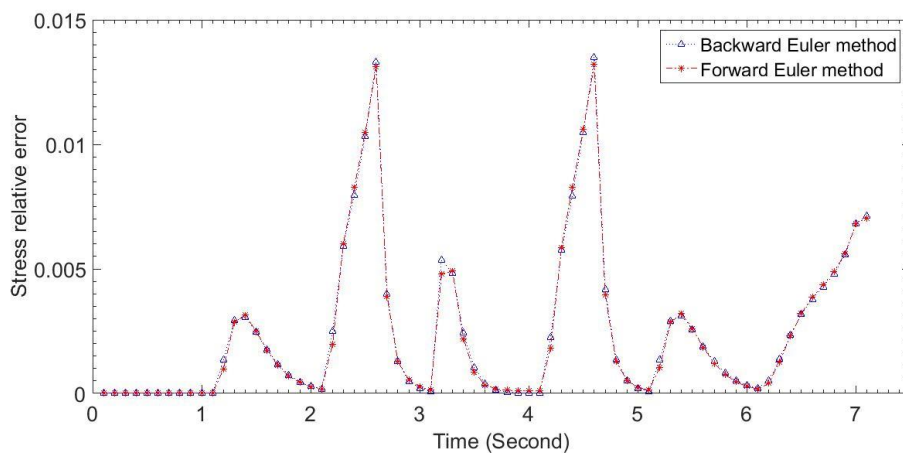
روش نیمه‌ضمنی نو پیشنهادی برای ۲ مسیر کرنش یکم و دوم بررسی می‌شود. برای این، خطای نسبی مجموع (کل) با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$E_T^\sigma = \sum \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \quad (70)$$

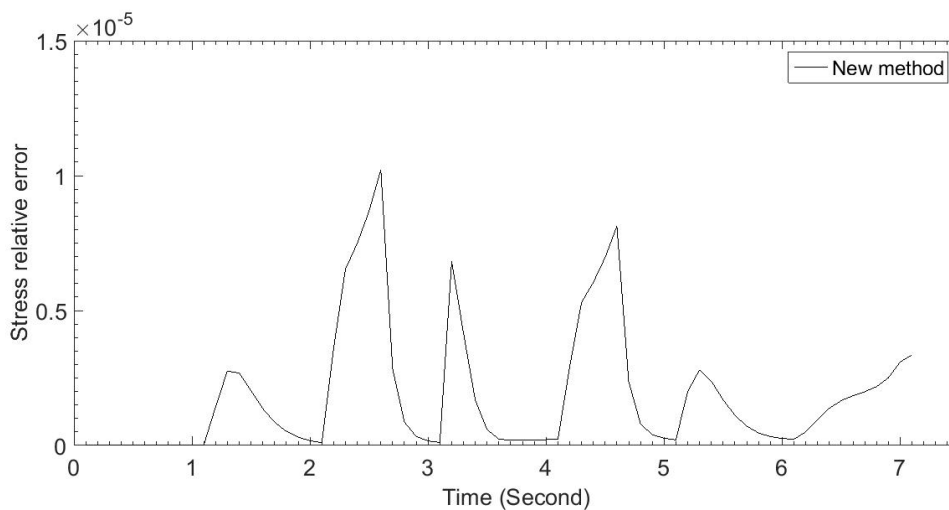
محاسبهٔ خطای نسبی مجموع برای ۴ گام زمانی مختلف  $\Delta t = 0.0125, 0.025, 0.05, 0.1$  sec و با  $r=0.5$  انجام می‌شود. گام‌های زمانی به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که طول هر گام دو برابر گام پیشین باشد. نتیجه محاسبات این قسمت در جدول‌های ۱ تا ۴ ارائه شده است.

در این رابطه  $E_n^\sigma$ ، اندازهٔ خطای نسبی،  $\sigma_n$  تنش بهنگام‌شده در لحظهٔ  $t = t_n$  و  $\bar{\sigma}_n$  بردار تنش دقیق است. برای محاسبهٔ تنش دقیق، روش اولر پسرو با گام زمانی بسیار کوچک  $\Delta t = 0.00001$  sec استفاده می‌شود. باتوجه به نمودارهای خطای نسبی تنش رسم‌شده در شکل‌های ۱۱ تا ۱۸ می‌توان دریافت که دقت روش اولر پسرو از روش اولر پیشرو بیشتر بوده و دقت روش نو پیشنهادی بسیار بیشتر از روش‌های اولر است که نشان دهندهٔ توانمندی و دقت زیاد شیوهٔ نیمه‌ضمنی رابطه‌سازی شده است.

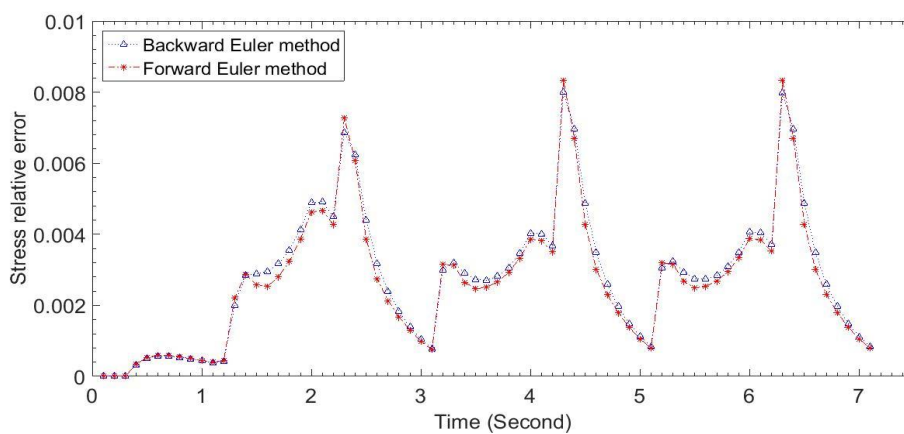
در این قسمت نرخ هم‌گرایی به پاسخ دقیق برای روش‌های اولر پیشرو، اولر پسرو، روش نمایی صریح و



شکل ۱۳ نمودار خطای نسبی روش‌های اولر پیشرو و اولر پسرو برای ماده Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش دوم

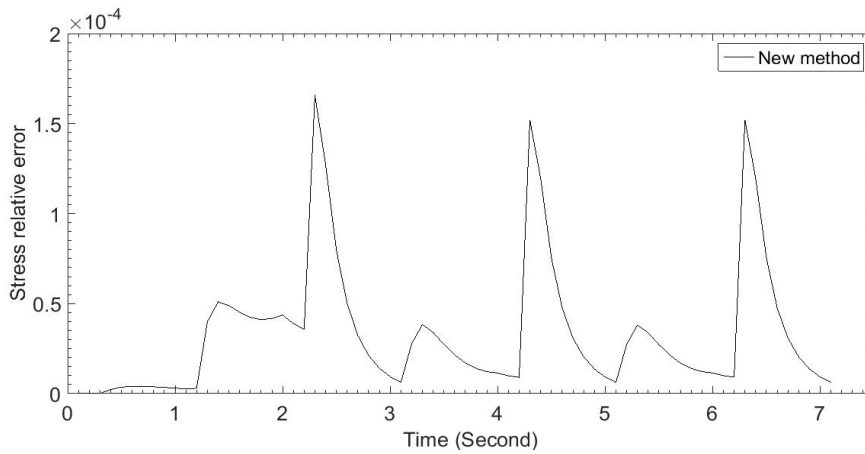


شکل ۱۴ نمودار خطای نسبی روش جدید برای ماده Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش دوم

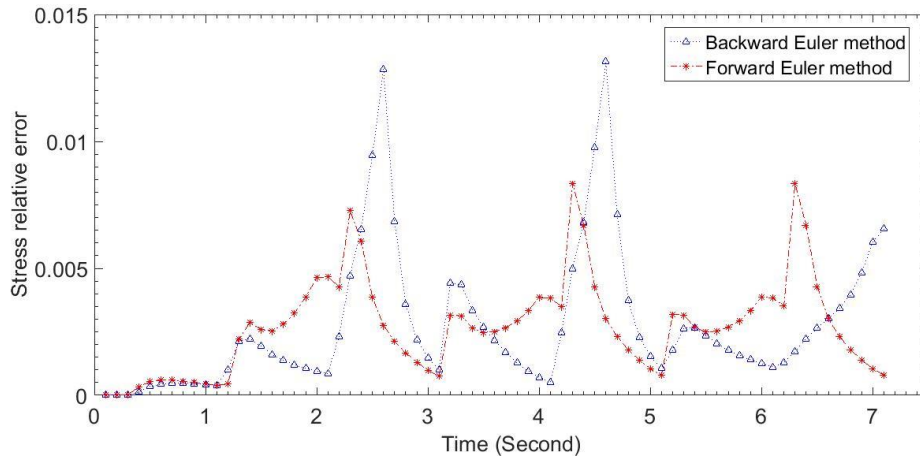


شکل ۱۵ نمودار خطای نسبی روش‌های اولر با مسیر کرنش نخست برای ماده

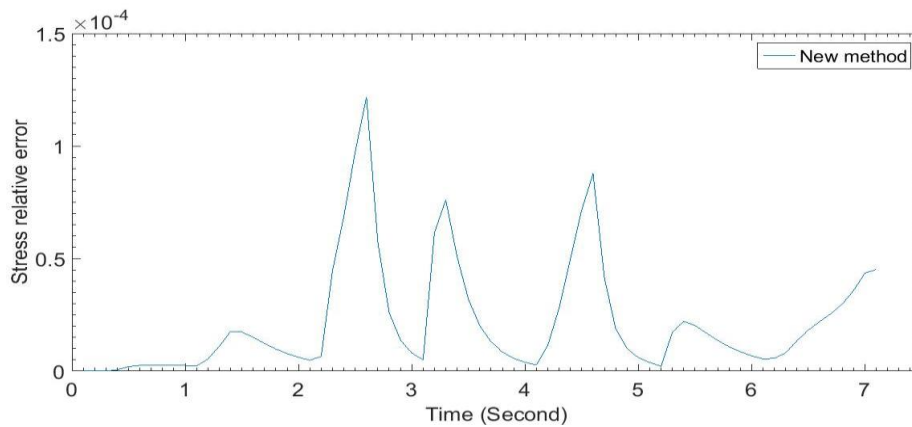
Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9



شکل ۱۶ نمودار خطای نسبی روش جدید با مسیر کرنش نخست برای ماده  
Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9



شکل ۱۷ نمودار خطای نسبی با روش‌های اولر با مسیر کرنش دوم برای ماده



شکل ۱۸ نمودار خطای نسبی روش جدید با مسیر کرنش دوم برای ماده  
Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9

جدول ۱ محاسبه خطای نسبی کل برای Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش نخست

	روش اولر پسرو	روش اولر پیشرو	روش نمایی صریح	روش نو پیشنهادی
$\Delta t = 0.1$	0.4956	0.4673	$0.8452 \times 10^{-3}$	$0.8979 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 0.05$	0.2642	0.2760	$0.4231 \times 10^{-3}$	$0.1963 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 0.025$	0.1387	0.1457	$0.2147 \times 10^{-3}$	$0.4809 \times 10^{-5}$
$\Delta t = 0.0125$	0.0721	0.0754	$0.110 \times 10^{-3}$	$0.1242 \times 10^{-5}$

جدول ۲ محاسبه خطای نسبی کل برای Carbon Steel CK15 با مسیر کرنش دوم

	روش اولر پسرو	روش اولر پیشرو	روش نمایی صریح	روش نو پیشنهادی
$\Delta t = 0.1$	0.6430	0.5531	$0.1000 \times 10^{-2}$	$0.1603 \times 10^{-3}$
$\Delta t = 0.05$	0.3411	0.3131	$0.5201 \times 10^{-3}$	$0.3634 \times 10^{-4}$
$\Delta t = 0.025$	0.1760	0.1738	$0.2598 \times 10^{-3}$	$0.8598 \times 10^{-5}$
$\Delta t = 0.0125$	0.0894	0.0910	$0.1299 \times 10^{-3}$	$0.2090 \times 10^{-5}$

جدول ۳ محاسبه خطای نسبی کل با مسیر کرنش نخست برای

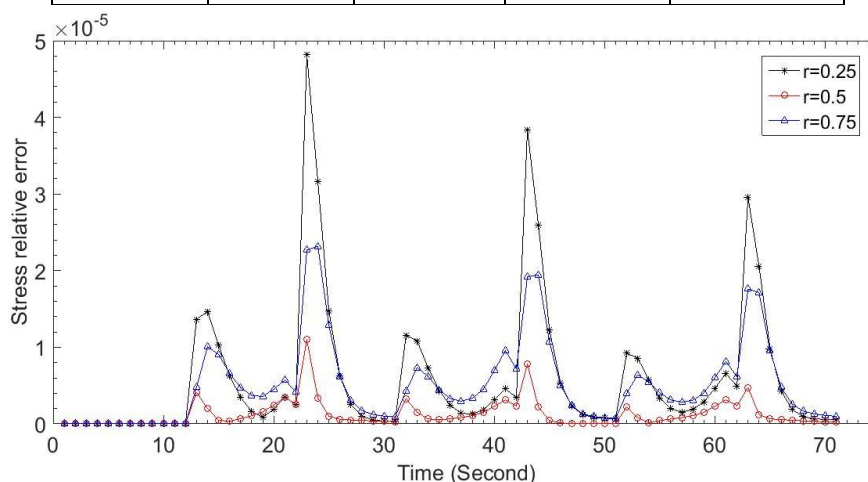
Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9

	روش اولر پسرو	روش اولر پیشرو	روش نمایی صریح	روش نو پیشنهادی
$\Delta t = 0.1$	0.7342	0.6419	0.1615	$0.3830 \times 10^{-1}$
$\Delta t = 0.05$	0.3895	0.3695	0.0769	$0.9400 \times 10^{-2}$
$\Delta t = 0.025$	0.2025	0.1925	0.0377	$0.2400 \times 10^{-2}$
$\Delta t = 0.0125$	0.1043	0.0986	0.0186	$0.6016 \times 10^{-3}$

جدول ۴ محاسبه خطای نسبی کل با مسیر کرنش دوم برای

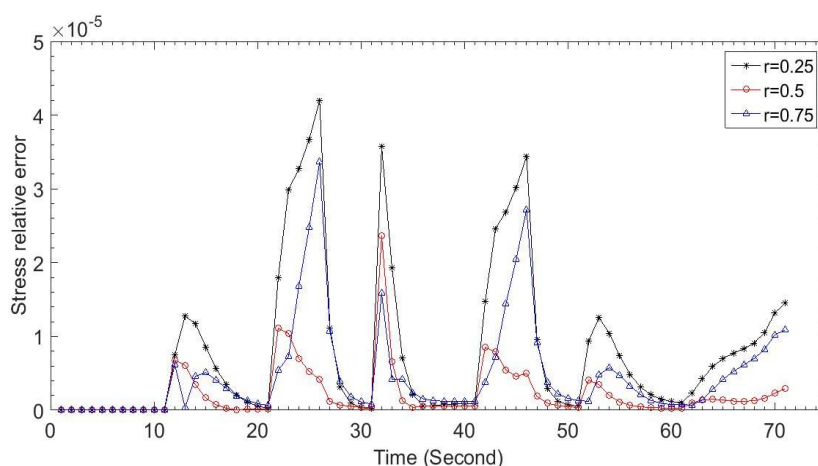
Chromium-nickel Stainless Steel X5CRNR18.9

	روش اولر پسرو	روش اولر پیشرو	روش نمایی صریح	روش نو پیشنهادی
$\Delta t = 0.1$	0.4957	0.4849	0.1280	$0.2570 \times 10^{-1}$
$\Delta t = 0.05$	0.2643	0.3066	0.1076	$0.6400 \times 10^{-2}$
$\Delta t = 0.025$	0.1387	0.1747	0.1220	$0.1500 \times 10^{-2}$
$\Delta t = 0.0125$	0.0721	0.0923	0.1337	$0.3739 \times 10^{-3}$



شکل ۱۹ مقایسه برداشت داده‌ها از نقاط مختلف گام مومسان با مسیر کرنش نخست با رسم نمودار خطای نسبی برای Carbon Steel CK15





شکل ۲۰ مقایسه برداشت داده‌ها از نقاط مختلف گام مومسان با مسیر کرنش دوم با رسم نمودار خطای نسبی برای Carbon Steel CK15

### نتیجه‌گیری

در این پژوهش، الگوی مومسانی وان‌مایسز همراه با قانون‌های سخت‌شوندگی همگن ناخطی شاپوش و سخت‌شوندگی پویای ناخطی آرمسترانگ‌فردریک در محدوده تغییر شکل‌های کوچک در نظر گرفته شد. برای معادله‌های بنیادی مدنظر، یک شیوه نیمه‌ضمنی برپایه نگاشت نمایی رابطه‌سازی شد.

باید دانست که در روش‌های نیمه‌ضمنی برپایه نگاشت نمایی، باید از اندازه شعاع سطح تسلیم و متغیرهای داخلی مومسانی در یک نقطه در فرایند حل استفاده کرد؛ در اینجا رابطه‌ها به‌گونه‌ای استخراج شد که این امکان فراهم باشد که بتوان از هر نقطه‌ای در میان بخش مومسانی متغیرهای مزبور را محاسبه کرد.

برای بررسی درستی، دقت و نرخ هم‌گرایی شیوه نو پیشنهادی از آزمون‌های عددی استفاده شد و پاسخ‌ها با روش‌های اولر پیشرو، اولر پسرو و نمایی صریح سنجش شد. یافته‌ها درستی روش نو پیشنهادی را تأیید کرد و نشان داد که شیوه تابع اولیه‌گیری استخراج‌شده دارای بیشترین دقت در مقایسه با روش‌های پیشین موجود است. از سوی دیگر، نرخ هم‌گرایی به پاسخ دقیق برای شیوه نو پیشنهادی از مرتبه دوم است که یک توانمندی مهم محسوب می‌شود.

سپس، محاسبات در ۳ حالت برداشت داده‌ها از یک

همان‌گونه که در این جدول‌ها مشاهده می‌شود، روش‌های اولر پیشرو، اولر پسرو و روش نمایی صریح دارای دقت مرتبه یکم‌اند؛ زیرا در هر مرحله با نصف شدن طول گام بارگذاری، خطای نسبی کل نیز به نصف رسیده است. اما روش نیمه‌ضمنی نو پیشنهادی دارای دقت مرتبه دوم است؛ زیرا با نصف‌شدن گام بارگذاری، مقدار خطای نسبی کل به یک‌چهارم رسیده است.

در بررسی‌های عددی یادشده برای بهنگام‌سازی تنش، داده‌های مسئله از نقطه میانی گام مومسان  $r = 0.5$  برداشت شده بود. اکنون بررسی می‌شود که برداشتن داده‌ها از چه نقطه‌ای از گام مومسان با روش نیمه‌ضمنی نو پیشنهادی به دقیق‌ترین پاسخ‌ها منجر خواهد شد. برای این، نمودار خطای نسبی برای ماده Carbon Steel CK15 در گام زمانی  $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$  برای هر ۲ تاریخچه بارگذاری کرنش محاسبه و رسم می‌شود و ۳ مقدار 0.25, 0.5, 0.75 برای  $r$  در نظر گرفته می‌شود. نمودارها در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ رسم شده است.

باتوجه به نمودارهای اشاره‌شده می‌توان دریافت که کمترین خطای نسبی هنگامی است که  $r=0.5$  در نظر گرفته شود. بنابراین، برداشت داده‌ها از نقطه میانی گام مومسان منجر به دقیق‌ترین پاسخ‌ها خواهد شد.

$H_{kin}, H_{nl}$	ضریب‌های سخت‌شوندگی پویا	چهارم نخست، یک‌چهارم پایانی و نقطه میانی گام
$\mathbf{I}$	ماتریس همانی	مومسانی انجام و نمودار خطای نسبی هر ۳ حالت رسم
$K$	مدول بالک	شد؛ سنجش نمودار خطای نسبی این ۳ حالت با یکدیگر
$\mathbf{n}$	بردار یکه عمرد بر سطح تسلیم	نشان داد که بهترین پاسخ‌ها زمانی رخ می‌دهد که شعاع
$p$	تنش حجمی	سطح تسلیم و متغیرهای داخلی مومسانی از نقطه میانی
$R$	شعاع سطح تسلیم	گام مومسان برداشت شود.

## واژه‌نامه

		$\mathbf{a}$	تنش بازگشتی
		$b, R_s$	ضریب‌های سخت‌شوندگی همگن
		$\mathbf{B}$	ماتریس کنترل
		$\mathbf{e}$	کرنش انحرافی
		$\mathbf{e}^e$	کرنش کشسان انحرافی
		$\mathbf{e}^p$	کرنش مومسان انحرافی
		$E_n^\sigma$	خطای نسبی تنش
		$E_t^\sigma$	خطای نسبی کل
		$F$	تابع سطح تسلیم
		$G$	ضریب کشسانی برشی
		$\mathbf{G}$	ماتریس ضرایب
	<b>نمادهای یونانی</b>		
$\alpha$	تنش بازگشتی انحرافی		
$\Delta t$	گام زمانی		
$\mathcal{K}$	ضریب مومسانی		
$\lambda$	نمو ضریب مومسانی		
$\sigma$	تنش		
$\Sigma$	تنش انتقالی (جابجاشده)		
$\bar{\Sigma}$	تنش انتقالی بی‌بعد		
$\theta$	کرنش حجمی		

## مراجع

1. Wilkins, M.L., "Calculation of elastic-plastic flow", Method of Computational Physics3, Academic Press, (1964).
2. Auricchio, F., Beirão da Veiga, L., "On a new integration scheme for von-Mises plasticity with linear hardening", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 1375–1396, (2003).
3. Artioli, E., Auricchio, F., Beirão da Veiga, L., "Integration schemes for von-Mises plasticity models based on exponential maps: numerical investigations and theoretical considerations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, pp.1133–1165, (2005).
4. Artioli, E., Auricchio, F., Beirão da Veiga, L., "A novel 'optimal' exponential based integration algorithm for von-Mises plasticity with linear hardening: Theoretical analysis on yield consistency,

- accuracy, convergence and numerical investigations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67(4), pp.449–498, (2006).
5. Artioli, E., Auricchio, F., Beirão da Veiga, L., " Second-order accurate integration algorithms for von-Mises plasticity with a nonlinear kinematic hardening mechanism", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp.1827–1846, (2007).
  6. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C., " Accurate integration scheme for von-Mises plasticity with mixed-hardening based on exponential maps", *Engineering Computations*, Vol. 24(6), pp. 608–635, (2007).
  7. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C., "On the integration schemes for Drucker-Prager's elasto-plastic models based on exponential maps", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 799–826, (2008).
  8. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C., Sharifian, M., "Application of exponential-based methods in integrating the constitutive equations with multicomponent nonlinear kinematic hardening", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136(12), pp.1502–1518, (2010).
  9. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C., Sharifian, M., "Integration of nonlinear mixed hardening models", *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, Vol. 7 No. 3, 2011 pp. 266-305, (2011).
  10. Rezaiee-Pajand, M., Sharifian, M., Sharifian, M., "Accurate and approximate integrations of Drucker-Prager plasticity with linear isotropic and kinematic hardening", *European Journal of Mechanics, A/Solids* 30 (2011) 345-361, (2011).
  11. Rezaiee-Pajand, M., Sharifian, M., "A novel formulation for integrating nonlinear kinematic hardening Drucker-Prager's yield condition", *European Journal of Mechanics A/Solids* 31, pp.163–178, (2012).
  12. Haji Aghajanzpour, N., M. Sharifian., " Investigation on semi-implicit integration method based on exponential map for von-Mises plasticity model with linear mixed hardening", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 163-169, 2016(in Persian)
  13. Sharifian, M., Sharifian, M., Krysl, P., Sharifian, M., "Stress-update algorithms for Bigoni-Piccolroaz yield criterion coupled with a generalized function of kinematic hardening laws", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 67, pp.1-17, (2018).
  14. Sharifian, M., Sharifian, M., Sharifian, M., "Nonlinear elastoplastic analysis of pressure sensitive materials", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. Vol.14 (3), pp. 329-344, (2018).
  15. Tavoosi, M., Sharifian, M., Sharifian, M., "Updating stress and the related elastoplastic parameters for Lemaitre damage model", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. Vol. 44(4), pp.1–13 (2019).

16. Marinelli, F., Buscarnera, G., "A Generalized Backward Euler algorithm for the numerical integration of a viscous breakage model", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol. 43, pp. 3–29 (2019).
17. Kim, J., Kim, D.-N., "Robust stress integration algorithms for implicit elastoviscoplastic finite element analysis of materials with yield-point phenomenon", *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 150, pp. 277–289 (2019).
18. Lee, J.-H., Ryu, D.-M., Lee, C.-S., "Constitutive-damage modeling and computational implementation for simulation of elasto-viscoplastic-damage behavior of polymeric foams over a wide range of strain rates and temperatures", *International Journal of Plasticity*. Vol. 130, pp. 1–25 (2020).
19. Sharifian, M., Sharifian, M., "A new stress-updating algorithm for viscoplasticity", *Mechanics of Time-Dependent Materials* (published online) (2021).
20. Chaboche, J.L., "Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity", *International Journal of Plasticity*, Vol.2, pp.149–188, (1986).
21. Armstrong, P.J., Frederick, C.O., "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect", Report RD/B/N731, CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkeley, UK, (1966).
22. Angelis, F., Taylor, R., "A Comparative Analysis of Linear and Nonlinear Kinematic Hardening Rules in Computational Elastoplasticity", *Technische Mechanik*. Vol. 32(2), pp.164-173, (2012).
23. Rezaiee-Pajand, M., Sharifian, M., Sharifian, M., "Angles based integration for generalized non-linear plasticity model", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 87, 241–257, (2014).

## Semi-Implicit Integration of Constitutive Equations with Non-Linear Mixed Hardening

Mojtaba Afife Golsheikhi<sup>1</sup> Mehrzad Sharifian<sup>2</sup>  
Mehrdad Sharifian<sup>3</sup>

### 1. Introduction

In the elastoplastic analyses, when the loading continues beyond the yielding stress and the materials endure the plastic deformations, the stress and the internal variables in the plasticity should be updated by integrating the constitutive equations. In this kind of non-linear finite element analysis, the integration process is performed on Gauss points of the elements in each iteration of every loading increment. On the other hand, since, generally there is no closed-form analytical solution for this process, usually numerical methods for stress-updating process are used.

It should be noted that the accuracy of the integration method of the constitutive equations influences strongly the final answers of the analysis. Therefore, many researches have tried to develop and increase the accuracy and the efficiency of integration schemes.

In this research, to increase the accuracy of the stress-updating process, a semi-implicit method for integrating the elastoplastic constitutive equations is suggested. In fact, here, the von Mises yield surface along with Chaboche nonlinear isotropic hardening and Armstrong-Frederick non-linear kinematic hardening are considered.

For using the exponential based integration algorithm, the system of the differential constitutive equations must be firstly transformed into the augmented stress space to develop the augmented system of the differential equations in the general form of  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{B}\mathbf{X}$ . In this equation,  $\mathbf{X}$  is an augmented stress vector with  $n + 1$  components, and  $\mathbb{B}$  is an  $\mathbf{X}$ -dependent matrix in a nonlinear hardening model. Therefore, if the coefficient matrix  $\mathbb{B}$  is considered to be constant during a load step, the aforementioned system of the differential equations can be solved in a closed-form way.

### 2. The Semi-implicit Exponential Method

In the present study, to solve the augmented system of the differential equations the authors used a semi-implicit procedure. To do this, in the first stage, the value of the yield surface radius and the back stress in the middle of the elastic-plastic part of the load step are calculated, and then the values are applied for computing the coefficient matrix  $\mathbb{B}$ . As a result, this process will increase the accuracy of the solution as well as the convergence rate of the solution from the first-order convergence rate to the second-order convergence rate.

In this research, firstly, the scheme is developed in a general form for a desired point in the elastoplastic part of the load step. Then, the calculations are done for a special case in which the radius of the yield surface is taken from the midpoint of the elastoplastic part of the load step.

Moreover, the solution is done based on the computation of the radius of the yield surface for three points located in the first quarter, the last quarter, and the midpoint of the interval of the elastoplastic load step. Afterwards, by plotting the stress relative errors of the solution, it is examined to see picking up the data from which point of the elastoplastic load step leads to the most accurate answers.

### 3. Numerical Tests

In order to evaluate the correctness, accuracy and convergence rate of the new integration scheme, the answers of the proposed method are examined by the numerical tests and comparing the solution with the backward Euler method, the forward Euler method and the explicit exponential method.

To check the accuracy of this method, two strain loading histories are applied to the two materials and the corresponding stresses are updated.

In the calculations of this section, for the proposed method, the plastic internal variables are taken from the midpoint of the elastoplastic load step. The comparison of the resulting diagrams for three methods in question, considering very fine load step, clearly shows that the updated stress of the proposed method as well as the response obtained from the backward and forward Euler methods are practically the same and the correctness of the derived relationships can be concluded.

<sup>1</sup> MSc in Structural Engineering, Civil Engineering Department, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

<sup>2</sup> Corresponding author. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran. Email: m.sharifian@qiet.ac.ir

<sup>3</sup> Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

To evaluate the accuracy of the method, the relative stress errors are calculated by  $E_n^\sigma = \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\sigma_n\|}$  for the practical load steps. In the aforementioned equation,  $\sigma_n$  is the updated stress at the time  $t = t_n$  by the integration method and  $\bar{\sigma}_n$  is the stress calculated by the backward Euler method with very fine load step which is considered as an exact solution.

The stress relative error diagrams illustrate that the accuracy of the proposed method is much higher than the other methods in question, which proves the high capability and accuracy of the new semi-implicit method.

Moreover, to check the convergence rate to the exact answer, the total stress relative errors for the different load steps are computed by the integration schemes. The findings show that all the forward Euler method, the backward Euler method and the explicit exponential method have the first-order convergence rate as it is expected; However, the proposed new semi-implicit method poses a second-order convergence rate, i.e., by halving the loading step, the error of the updated stresses is reduced in a quarter.

Finally, it is examined that for the new proposed semi-implicit method, taking data from which point of the elastoplastic part of the load step will lead to the most accurate answers. The results demonstrate that the midpoint of the elastoplastic part of the load step yields the most accurate answers.

#### 4. Conclusion

In this research, the von Mises yielding model along with the mixed non-linear hardenings was considered in the small strain realm, and a semi-implicit integration based on the exponential mapping method was proposed.

The obtained augmented system of differential equations is solved, using the value of the variables by a point in the interval of the elastoplastic part of the load step. This strategy leads to the high precision as well as the second-order rate of the convergence which is a desirable feature for an integration algorithm in plasticity.

In order to examine the suggested semi-implicit integration scheme, a broad range of the numerical tests was performed. In the numerical studies, the classical forward Euler and backward Euler methods and the explicit exponential mapping scheme are utilized to compare the results of the new method with the aforementioned schemes.

All the findings demonstrated the high performance and robustness of the proposed semi-implicit second-order exponential-map algorithm.