

## آنالیز مودال پره ردیف دوم یک توربین گاز صنعتی به روش اجزای محدود و مقایسه با نتایج تجربی\*

عبداللهی قهیه<sup>(۱)</sup>محمدهادی صیادنژاد<sup>(۲)</sup>

**چکیده** در این پژوهش، آنالیز مودال پره ردیف دوم یک توربین گاز صنعتی انجام گردیده و مودهای ارتعاشی پره در شرایط مختلف به دست آمده است. جهت صحت گذاری، ابتدا در یک حالت خاص، تحلیل المان محدود با استفاده از نرم افزار NASTRAN-PATRAN مطابق شرایط تست تجربی انجام گردیده و پس از اطمینان از وجود تطابق بین نتایج تحلیل المان محدود و نتایج تجربی، تحلیل مطابق شرایط کاری توربین گاز انجام گردیده و در نهایت دیاگرام کمپل رسم گردیده است. با توجه به مدلسازی صورت گرفته و همچنین محاسبه فرکانس تحریک در شرایط توربین گازی و رسم دیاگرام کمپل، مشخص شد هیچ گونه مشکل رزونانسی در پره به وجود نیامده، ضمن اینکه تطابق قابل قبولی بین نتایج تحلیلی و تجربی وجود دارد.

**واژه‌های کلیدی** سوپر آلیاژ، پره توربین، فرکانس طبیعی، فرکانس تشدید، المان محدود

### Modal Analysis of a Second Stage Blade in a Gas Turbine and Comparison with Experimental Results

A. Asadolahi Ghohieh

M.H. Sayyadnezhad

**Abstract** In this research, modal analysis of a second stage blade in a gas turbine is investigated and vibration modes of blade are found in various conditions. The numerical calculation by finite element method using NASTRAN-PATRAN software based on experimental test conditions is utilized and there is a good agreement between the experimental and FEM results. Finally by calculating excitation frequency in gas turbine work conditions and using a Campbell diagram, it is concluded that there is not any resonant problems in the blade and there is a good agreement between the experimental and FEM results as well.

**Key Words** Super alloy, Turbine Blade, Natural Frequency, Resonant Frequency, Finite element

\*نسخه اول مقاله در تاریخ ۸۸/۶/۱۸ نسخه پذیرش آن در تاریخ ۸۹/۹/۱۷ و نسخه آماده چاپ آن در تاریخ ۹۰/۵/۸ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) استادیار، دانشکده صنعت هواپیمایی کشوری

(۲) نویسنده‌ی مسؤول: کارشناس ارشد هوافضا، سازمان هواپیمایی کشوری

## مقدمه

ردیف دوم یک توربین گاز صنعتی و مقایسه نتایج تحلیلی به دست آمده با نتایج تجربی رفتار ارتعاشی پره، و بررسی فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی در دور کاری توربین می‌باشد.

تحقیقات بسیاری از گذشته تا به حال در ارتباط با آنالیز مودال پره‌های توربوماشین‌ها صورت گرفته است و سعی تمامی آن‌ها در جلوگیری از شکست پره در شرایط و دوره‌های مختلف کاری بوده است. بررسی و تحلیل پره‌های توربین گازی در منابع مختلف به روش‌های متفاوتی صورت گرفته است. اولین بار استودولا (Stodola) طی یک مطالعه تحلیلی فرکانس طبیعی یک پره را تخمین زد [1]. بعدها اثرات نیروی گریز از مرکز بر سختی توسط لمب (Lamb) [2] مورد بررسی قرار گرفت. کرون (Kroon) [3] مطالعات و آزمایش‌های بسیاری را در مورد رفتار ارتعاشی پره‌های ردیف اول یک توربین تحت شرایط عملکرد در دمای بالا انجام داد. در طی سال‌های ۱۹۴۱ الی ۱۹۴۵ و با پیشرفت در پره‌های موتورهای جت در آمریکا، انگلستان و عموماً در آلمان مطالعات زیادی بر روی خرابی پره‌ها در اثر ارتعاشات صورت گرفت [4]. شاید بتوان شروع کاربرد روش‌های عددی بر روی رفتار ارتعاشی پره‌ها را در سال ۱۹۴۴ دانست [5]. در سال ۱۹۵۱ به وسیله جارت (Jarrett) و وارنر (Warner) [6] روشی جهت بررسی فرکانس‌های طبیعی پره ردیف آخر یک توربین بخار ارائه شد. ریگر (Rigger) و مک کالین (McCallion) [7] ارتعاشات یک شبکه متشکل از تعدادی تیر با مقطع منشوری یکنواخت را بررسی کردند. گرچه تحلیل آن‌ها به طور خاص برای تحلیل پره‌ها نبود، اما عمومیت مدل مورد استفاده اجازه می‌دهد که نتایج آن‌ها قابل استفاده در این حوزه نیز باشد. روش المان محدود اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط توماس (Thomas) و همکاران [8] و اندرسون (Anderson) و همکاران [9] انجام گرفت. اشکال کار آن‌ها در آن زمان عدم در نظر گرفتن اثرات بار گریز از

اهمیت پره‌های توربین گاز در کاربردهای هوایی و صنعتی و تأثیر آن‌ها بر عملکرد و کارایی توربین باعث شده است که امروزه جهت ساخت پره‌ها تست‌های مختلفی به لحاظ متالورژیکی و سازه‌ای بر روی آن‌ها صورت گیرد. یکی از آزمایش‌هایی که بر روی پره‌های توربین گاز صورت می‌گیرد، آنالیز مودال پره‌ها و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی پره در دوره‌های کاری می‌باشد تا بدین وسیله محدوده عملکرد مطمئن پره به لحاظ عدم بروز پدیده تشدید در شرایط مختلف کاری به دست آید. پره‌های توربین تحت تنش‌های مختلفی قرار می‌گیرند. یکی از دلایل مهم شکست پره‌ها به علت خستگی در اثر ارتعاش در محدوده تشدید پره می‌باشد. بنابراین باید مودهای ارتعاشی که پره در آن‌ها در حالت تشدید قرار می‌گیرد شناسایی شده و از آن‌ها دوری شود که این کار به روش آنالیز مودال صورت می‌گیرد. از آنجا که با توجه به پیچیدگی شکل هندسی پره، به دست آوردن مودهای فرکانسی ارتعاش پره به کمک روش‌های تحلیلی و استفاده از فرمول‌های تحلیلی تقریباً غیرممکن می‌باشد، لذا در این تحقیق از یکی از نرم‌افزارهای المان محدود جهت آنالیز مودال پره توربین استفاده شده است.

بنابراین به طور خلاصه ضرورت و اهمیت بحث تحلیل مودال پره توربین به شرح زیر می‌باشد:

- ۱- یافتن فرکانس‌های طبیعی پره جهت دوری از دوره‌هایی که سبب تشدید شده یا در نزدیکی دوره‌های بحرانی کار می‌کنند.
  - ۲- اصلاح پروفیل پره جهت اجتناب از تشدید.
  - ۳- افزایش راندمان توربین و عملکرد بهتر در اثر کنترل تغییر شکل‌های پره تحت تأثیر ارتعاش و در نتیجه عمر بیشتر پره و هزینه پایین تعویض و یا تعمیر پره‌ها.
- لذا هدف از انجام این پژوهش، تحلیل مودال پره

اشکال کار وی نیز عدم در نظر گرفتن بار گریز از مرکز وارد بر پره بود. وی تحلیل خود را تنها در حالت استاتیکی و در دمای محیط به انجام رساند. کریستف پیر (Christophe Pierre) [18] به تحلیل ارتعاشی پره‌های دارای شروود پرداخت. وی در تحقیق خود بیان نمود که ارتعاشات پره‌های چرخان متأثر از نیروی گریز از مرکز وارد بر پره می‌باشد. جیسون کیلب (Jason Kielb) [19] به مطالعه میرایی های سازه‌ای و آیرودینامیکی در پره توربین پرداخت و دیباگرام کمپل (Campbell Diagram) ۵ مود اول ارتعاشی پره توربین گاز صنعتی را به دست آورد. نتیجه مهم تحقیق وی بیانگر این مطلب بود که دمای محیط تاثیر چندانی بر سطح میرایی ندارند. همچنین وی بیان نمود که میرایی آیرودینامیکی بخش مهمی از میرایی کل در پره توربین بوده، و می‌توان از میرایی سازه‌ای در مقایسه با آن صرف‌نظر نمود. ژیمین (Zhimin) و همکاران [20] به کمک روش المان محدود، عمر خزشی پره توربین را در دمای ثابت ۹۰۰ درجه سانتیگراد و در دور ۳۶۰۰ دور در دقیقه به دست آوردند. استوارت موفات (Stuart Moffatt) [21] در مقاله‌ای به بررسی پیشگویی پاسخ تحریکات اجباری پره توربین گاز صنعتی پرداخت و با استفاده از نرم‌افزارهای المان محدود فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای پره توربین را به دست آورد. وی با اعمال نیروی گریز از مرکز بر پره روتور از جنس تیتانیوم فرکانس‌های طبیعی ۵ مود اول پره را به دست آورد.

همان‌طور که بیان گردید، اکثر تحقیقاتی که تاکنون در مورد آنالیز مودال و تحلیل رفتار ارتعاشی پره توربین گاز انجام گردیده، تنها در یک بعد به بررسی موضوع پرداخته و تحلیل‌های متعددی بر روی پره توربین گاز جهت اطمینان از صحت بیشتر نتایج انجام نگردیده است. در برخی از تحقیقات تنها به بررسی رفتار ارتعاشی پره در حالت آزاد و مقایسه با نتایج تجربی اکتفا شده است. در بعضی دیگر تست و تحلیل

مرکز بر سختی پره بود. با پیدایش کدهای تجاری مهم و اساسی حل المان محدود نظیر NASTRAN در سال ۱۹۶۸ و ANSYS در سال ۱۹۷۰ پیشرفت چشمگیری در حل مسائل ارتعاشی پره‌ها برداشته شد. از آن زمان تاکنون روش المان محدود به عنوان یک روش پایه و اساسی مطرح شده است. با پیشرفت در روش‌های محاسباتی، دیمتریادیس (Dimitriadis) [10] بررسی ارتعاشی یک پره توربین را با در نظر گرفتن دیسک صلب با قطر محدود و به روش اجزای محدود انجام داد. مشابه این کار توسط سالاما (Salama) و همکارانش [11] انجام گرفت. جاج (Judge) و همکارانش [12] الگوی پاسخ مجموعه دیسک-پره را بررسی کردند. گوردون (Gordon) و هولکمپ (Hollcamp) [13] روی مجموعه دیسک و پره یکپارچه تحقیقاتی انجام دادند. همچنین آن‌ها یک نمونه مقیاس شده از پره مرحله اول یک موتور توربین گازی را با موفقیت تحت تست مودال قرار دادند. پیرا (Pereira) و همکارانش [14] آنالیز مودال پره مرحله پنجم یک توربین را انجام دادند. آن‌ها با محاسبه فرکانس تحریک پره در دور کاری توربین، به نتیجه عدم وقوع پدیده تشدید در پره رسیدند. هو (Hou) و ویکز (Wicks) [15] آنالیز مودال یک پره توربین گاز را در دو حالت آزاد و استاتیکی به دست آورده و با نتایج آزمایشی مقایسه نمودند. آن‌ها در تحقیق خود بیان نمودند مهمترین عواملی که بر فرکانس‌های طبیعی پره توربین تاثیر گذارند، بارهای گریز از مرکز و دما می‌باشند. اختلاف بین فرکانس‌های تحلیلی به دست آمده از حل المان محدود مدل تهیه شده توسط هو و ویکز با نتایج آزمایشی آن‌ها در حد قابل قبول بود. اشکال عمده تحقیق آن‌ها عدم در نظر گرفتن دور و توزیع دما در طول پره بود. رومر (Roemer) [16,17] تست مودال مجموعه دیسک - پره یک توربین صنعتی را به روش آزمایشی و در دمای محیط به انجام رساند و با نتایج المان محدود مقایسه نمود.

حرارتی قرار می‌گیرد. عمده‌ترین تنش‌های آن ناشی از نیروی مجازی گریز از مرکز می‌باشد که یکی از نامطلوب‌ترین بارگذاری‌ها در قطعات دوار یک توربین گاز به شمار می‌رود و به پارامترهای متغیری از جمله سرعت دورانی روتور، فاصله هر المان از محور دوران و جنس ماده بستگی دارد.

نیروی مجازی گریز از مرکز نسبت به نیروهای دیگر وارد بر پره توربین بزرگترین مقدار را دارد. نیروی مجازی گریز از مرکز نیرویی حجمی است که بر اثر سرعت دورانی به وجود می‌آید. اگر جرم یک المان که با سرعت زاویه ای  $\omega$  در فاصله  $r$  حول محور دوران می‌چرخد را  $m$  فرض کنیم، مقدار نیروی مجازی گریز از مرکز وارد بر این المان برابر است با [22]:

$$F = m\omega^2 r \quad (1)$$

اگر  $\omega$  ثابت باشد داریم:

$$m\omega^2 = C$$

$$F = rC$$

که  $C$  یک مقدار ثابت است.

برای یک پره با سطح مقطع متغیر که تحت اثر نیروی گریز از مرکز قرار دارد، نیروی گریز از مرکز وارد بر هر المان از پره برابر است با:

$$dF = \rho\omega^2 A_r r dr \quad (2)$$

در این رابطه  $A_r$  برابر سطح مقطع در فاصله  $r$  از شعاع دوران،  $\rho$  جرم حجمی پره و  $\omega$  سرعت دورانی آن می‌باشد. با انتگرال گیری از رابطه (2) داریم:

$$F = \int dF = \rho\omega^2 \int A_r r dr \quad (3)$$

مودال پره در دمای محیط انجام گردیده و بحث دور لحاظ نگردیده است. در برخی دیگر که بحث دور لحاظ شده است بحث دما نادیده گرفته شده است. به طور کلی آنچه که در این تحقیق نسبت به دیگر کارهای انجام شده تاکنون حائز اهمیت است موضوع در نظر گرفتن دور و دمای پره می‌باشد که همان‌گونه که بیان گردید در تحقیق‌های مشابه این کار صورت نگرفته و بحث تحلیل مودال یا فقط در حالت آزاد انجام گردیده و یا صرفاً با در نظر گرفتن دور کاری پره و یا دما انجام گردیده و هر دو مورد با هم بررسی نشده است. در مواردی هم که بحث دور و دما با هم لحاظ گردیده شرایط دمایی یکنواخت منظور شده است، در حالی که در تحقیق حاضر، آنالیز مودال پره‌ها با در نظر گرفتن توزیع دما در سطح پره انجام گردیده که مسلماً نتایج دقیق‌تری به دست می‌دهد.

### بارگذاری پره توربین

اصولاً پره‌های توربین همواره در معرض بارگذاری‌های متعددی قرار دارند که عمده آن‌ها ناخواسته می‌باشند. این بدان معناست که در یک سیکل توربین گاز برای تولید توان مکانیکی، قطعات توربین به ناچار برخی از بارهای غیر مفید و آسیب رسان را تحمل می‌کنند. عمده‌ترین بارهای وارد بر پره توربین ناشی از نیروی گریز از مرکز می‌باشد.

بارهای وارد بر یک پره روتور با دو عامل محدود می‌شوند. از یک طرف ایرفویل پره برای انجام وظیفه خود در توربین گاز، یعنی تبدیل انرژی گاز به انرژی جنبشی روتور، باید شکل آیرودینامیکی خاصی داشته باشد. از طرف دیگر دمای گاز برای افزایش راندمان توربین باید افزایش یابد.

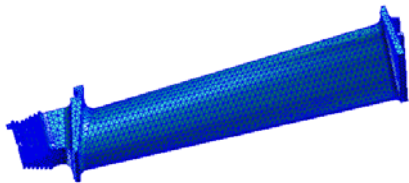
نیروی مجازی گریز از مرکز. پره توربین گاز تحت نیروهای مختلف آیرودینامیکی، گریز از مرکز و

تفاوت با این حد، حدود ۶٪ می‌باشد. با قرار دادن مقدار ۰/۵ به جای کسر فوق داریم:

$$\sigma_{CR} = \rho\omega^2 R^2 (1-\beta^2)(1+\theta)/4 \quad (9)$$

### تشریح مسأله و تعریف شرایط مرزی

آنالیز المان محدود به منظور ارزیابی مقادیر فرکانس‌های طبیعی پره‌ها، بر روی پره از جنس سوپراآلیاژ nimonic115 صورت گرفته است. جهت انجام آنالیز، مدل سه بعدی پره به نرم افزار PATRAN وارد شده است. سپس عملیات مش بندی انجام گردید. المان مورد نظر جهت مش بندی المان Tet10 (هرمی چهار وجهی) (Tetrahedral) انتخاب گردید. این المان برای مش بندی مدل‌های بی‌قاعده مناسب است. همچنین یک المان مهم برای مدل سازی مدل های سه بعدی می‌باشد. المان مذکور نواحی نزدیک به دیواره‌ها و جداره‌ها را در اجسام بی‌قاعده و دارای هندسه نامنظم و سطوح دارای انحنا، بهتر مدل می‌کند. جدول (۱) مشخصات المان به کار رفته در مدل و شکل (۱)، المان بندی ایجاد شده در پره توربین مورد نظر را با استفاده از المان مذکور در نرم افزار PATRAN نشان می‌دهد که دارای ۶۲۳۸۲ المان و ۹۵۳۹۳ گره می‌باشد. مشخصات هندسی و جرمی پره مطابق جدول (۲) می‌باشد:



شکل ۱ المان بندی ایجاد شده در نرم افزار PATRAN

با فرض یکنواخت بودن تنش در هر مقطع داریم:

$$\sigma_z = \frac{F}{A_r} = \frac{\rho\omega^2}{A_r} \int A_r r dr \quad (4)$$

تغییرات سطح مقطع با شعاع دوران  $r$  معمولاً در پره‌ها به صورت خطی می‌باشد. در حالت کلی رابطه سطح مقطع با شعاع دوران به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_r = A_0 [1 - x(1-\theta)^m] \quad (5)$$

در این رابطه:

$A_0$  سطح مقطع ایرفویل در  $r = R_1$

$m$  پارامتر مشخص کننده هندسه پره

$\theta$  نسبت سطح مقطع ایرفویل در انتهای ایرفویل به

سطح مقطع آن در  $r = R_1$

$x$  نیز طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$x = \frac{r - \beta R}{R(1-\beta)} \quad (6)$$

$R$  فاصله نوک پره تا شعاع دوران و  $\beta$  برابر نسبت  $R_i/R_0$  می‌باشد. با جایگذاری روابط (۶) و (۵) در رابطه (۴) و با فرض  $m=1$  و انجام انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$F_c = \rho\omega^2 R^2 A_r \left\{ \frac{1-\beta^2}{2} + \frac{(\theta-1)(2-3\beta^2+\beta^3)}{6(1-\beta)} \right\} \quad (7)$$

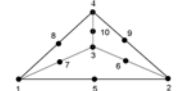
مقدار تنش یکنواخت در پایین‌ترین سطح مقطع ایرفویل ( $r = R_i$ ) برابر است با:

$$\sigma_{CR} = \frac{\rho\omega^2 R^2 (1-\beta^2)}{2} \left\{ 1 + (\theta-1) \frac{2-3\beta^2+\beta^3}{3(1-\beta)(1-\beta^2)} \right\} \quad (8)$$

مقدار کسر  $\frac{2-3\beta^2+\beta^3}{3(1-\beta)(1-\beta^2)}$  وقتی  $\beta \rightarrow 1$  دارای

حدی برابر ۰/۵ می‌باشد. وقتی  $\beta = 0.7$  باشد مقدار

جدول ۱ مشخصات المان به کار رفته در مدل المان محدود

تعداد وجه	تعداد گره	شکل المان	توپولوژی	نوع المان
۴	۴		Tetmesh	Tet10

جدول ۲ مشخصات هندسی و جرمی پره

m(kg)	$\rho(\text{kg/m}^3)$	L(mm)	$r_h(\text{mm})$	$r_t(\text{mm})$	c(mm)		
					$r_1$	$r_2$	$r_3$
۰/۲۴	۷/۸۶	۱۸۰	۲۴۰	۴۰۵	۳۶/۰۱	۳۷/۱۸	۴۰/۷۵

میرایی) و شرایط مرزی وارد بر سازه تعیین می‌گردند. هر مود به وسیله فرکانس طبیعی و شکل آن شناسایی می‌گردد. مودها برای سیستم های خطی و ایستا تعریف شده و برای توصیف و مشخص کردن حالت تشدید مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه ارتعاش در حالت تشدید از مهم ترین عوامل خرابی در سازه‌ها به شمار می‌آیند. لذا جهت فهم بهتر مشکلات ارتعاش سازه‌ای، حالات تشدید سازه باید شناسایی گردند. ارتعاش تشدید، زمانی اتفاق می‌افتد که یک یا چند مود طبیعی ارتعاشی یا تشدید ارتعاشی یک سازه، تحریک گردند.

در اکثر نرم‌افزارهای المان محدود مانند ANSYS و NASTRAN آنالیز مودال به صورت یک مساله خطی در نظر گرفته می‌شود. معمولاً در این حالت هر کدام از اجزاء به صورت منفرد و در شرایط تکیه‌گاهی کاملاً آزاد (بدون هیچ تکیه‌گاهی) مورد آنالیز مودال قرار می‌گیرند. با توجه به نکته بیان شده، شش فرکانس اول به دست آمده صفر یا بسیار نزدیک به صفر می‌باشند که در واقع ناشی از حرکت صلب جسم می‌باشد.

به این دلیل که تحلیل نرمال مود، حالت کلی محسوب شده و تمامی فرکانس‌های طبیعی را شامل می‌شود، تحلیل مذکور در حالت آزاد و بدون هیچ‌گونه بارگذاری صورت می‌گیرد.

**نحوه انجام آزمایش.** مطابق شکل (۲) نحوه تست آزمایشی به این شکل می‌باشد که پره را درون دیسک جا زده و مجموعه را که از یک سمت گیردار و از طرف دیگر آزاد، به دستگاه بسته شده است. در حالت آزمایشی، پره در دو حالت آزاد و چرخان تست گردیده است. نحوه تست چرخان بدین شکل است که پس از تنظیم سیستم در یک دور معین (۳۱۵ دور در دقیقه) پره را تحریک کرده و سپس با تنظیم دستگاه در مود اندازه گیری مناسب، اتواسپکترم (Auto spectrum) پاسخ پره به تحریک را محاسبه کرده و فرکانس‌های طبیعی مربوط به دست آمده است.



شکل ۲ نحوه تست آزمایشی پره در آزمایشگاه

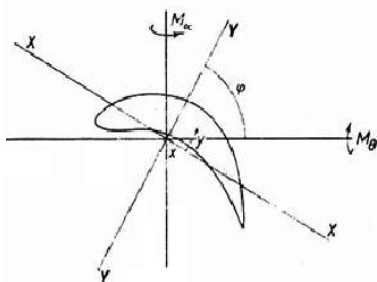
**شرایط مرزی در تحلیل آزاد.** به طور کلی مودهای طبیعی از خصوصیات ذاتی یک سازه می‌باشد که به طور مستقیم مستقل از بارها یا نیروهای وارد بر سازه می‌باشد. مودها به وسیله خواص ماده (جرم، سختی،

تجربی) و توزیع دمای  $700^{\circ}\text{C}$  (مطابق شرایط کاری پره در توربین)  
۵- از نیروهای ناشی از فشار سیال صرف نظر شده است.

**بارهای آیرودینامیکی.** پره توربین علاوه بر نیروی مجازی گریز از مرکز در معرض تنش‌های خمشی ناشی از فشار سیال قرار دارد که به صورت زیر است [23]:

$$\sigma = \frac{x}{I_{yy}} [M_{\theta} \cos \varphi - M_{\alpha} \sin \varphi] - \frac{y}{I_{yy}} [M_{\alpha} \cos \varphi + M_{\theta} \sin \varphi] \quad (20)$$

که در آن  $I_{yy}$  ممان اصلی سطح مقطع بوده و  $x$ ،  $y$ ،  $M_{\alpha}$ ،  $M_{\theta}$  و  $\varphi$  نیز در شکل (۴) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴ مقطع پره به همراه محورهای اصلی سطح و محورهای ممان

از طرفی نیروهای آیرودینامیکی روی سطوح پره‌ها با استفاده از تئوری توربوماشین قابل محاسبه می‌باشند. برای این منظور با توجه به شکل (۵) و با در نظر گرفتن یک حجم کنترل در اطراف پره در حال چرخش در میان یک مجموعه پره و با استفاده از تئوری توربوماشین‌ها و نوشتن معادله مومنتوم در دو جهت، توزیع نیروهای آیرودینامیکی در طول پره قابل محاسبه است [23].

**شرایط مرزی در تحلیل ثابت.** در تعریف شرایط مرزی در این حالت فرض می‌شود که پره به صورت تیر یک سر درگیر بوده و بر روی دیسک به صورت صلب در نظر گرفته می‌شود. با توجه به انبساط ریشه پره و دیسک، وجود پین و نیروی گریز از مرکز، این مفروضات منطقی می‌باشد. مطابق شکل، در این حالت پره در حالت یکسر گیردار و در دمای محیط مورد تحریک قرار گرفته و فرکانس‌های آن اندازه گیری می‌شوند.



شکل ۳ شرایط مرزی در حالت ثابت (مانند تیر یکسرگیردار و در دمای محیط)

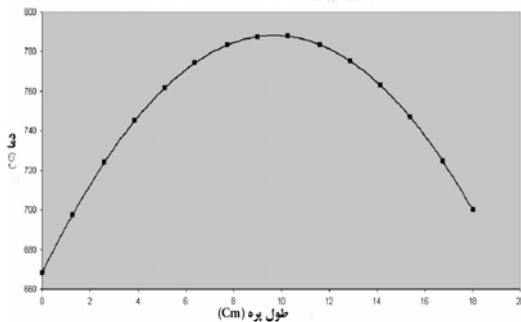
**شرایط مرزی در تحلیل چرخان.** به طور کلی بارهای وارد بر پره‌های متحرک توربین گازی عبارتند از: بارهای گریز از مرکز، بارهای آیرودینامیکی و تنش‌های حرارتی ناشی از کار پره در دمای بالا. یکی از نیروهای قابل توجه در اجزاء دوار توربین گازی، نیروی مجازی گریز از مرکز می‌باشد.

از این رو در تحلیل چرخان با لحاظ کردن سرعت روتور که  $7000$  دور در دقیقه می‌باشد، نیروی مجازی گریز از مرکز بر پره اعمال می‌گردد. شرایط مرزی در این حالت به صورت زیر اعمال شده‌اند:

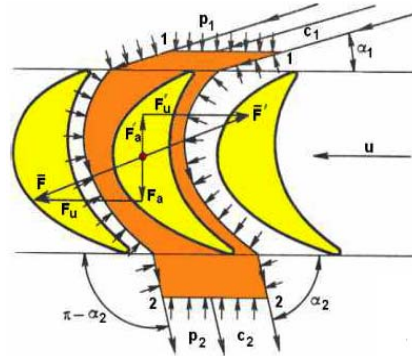
- ۱- نیروی مجازی گریز از مرکز که از چرخش پره در سرعت دورانی  $315$  دور در دقیقه (مطابق شرایط تست تجربی) و  $7000$  دور در دقیقه (مطابق شرایط کاری توربین) حاصل می‌شود.
- ۲- شرط مرزی تغییر مکان ثابت که در ریشه پره اعمال شده است.
- ۳- اعمال خصوصیات مواد.
- ۴- اعمال دمای محیط (مطابق شرایط تست

**شرایط مرزی حرارتی.** تنش‌های حرارتی ناشی از اختلاف دما می‌باشند. تابعی که برای توزیع دما در نظر گرفته می‌شود یک معادله درجه ۲ برای طول پره بوده که نموداری به شکل سهمی برای توزیع دما می‌دهد. در تحلیل حرارتی شرایط مرزی برای انتقال حرارت باید به یکی از صورت‌های زیر تعریف شود:  
الف. درجه حرارت ثابت (توزیع دمای یکنواخت در سطح پره).

ب. در نظر گرفتن توزیع دما در سطح پره. با توجه به اینکه دمای سطح پره یکنواخت نمی‌باشد، بنابراین توزیع دما در پره را در نظر می‌گیریم.  
توزیع دما در طول پره در شرایط کاری به صورت شکل (۶) و جدول (۳) می‌باشد.



شکل ۶ منحنی توزیع دما در طول پره در دور کاری ۷۰۰۰ در دقیقه



شکل ۵ طرحی از پره‌های متحرک توربین با یک حجم کنترل اطراف آن

$$q_u = \rho_b \cdot C_{2a} \cdot (C_{1u} + C_{2u}) \cdot t_b \quad (21)$$

$$q_a = [\rho_b \cdot C_{2a} \cdot (C_{1a} - C_{2a}) + \Delta P] t_b \quad (22)$$

در روابط فوق  $q$  نیروی آیرودینامیکی خطی شده،  $\rho_b$  چگالی گاز داغ،  $C$  سرعت گاز داغ،  $t_b$  فاصله گام پره‌های متحرک از یکدیگر،  $\Delta P$  افت فشار گاز،  $a$  معرف جهت محوری و  $u$  معرف جهت محیطی است.

با توجه به زیاد بودن تنش گریز از مرکز نسبت به تنش خمشی (حدوداً ۱۰ برابر)، می‌توان از نیروهای ناشی از فشار سیال بر پره صرف‌نظر کرد. این مورد، در مقاله ژیمین و همکارانش (۲۰۰۱) [20] نیز لحاظ شده است. به همین خاطر در این تحقیق از نیروهای ناشی از فشار سیال به پره، صرف نظر شده است.

جدول ۳ جدول تغییرات دما در طول پره در دور کاری توربین

$\omega = 7000\text{rpm}$														
X(mm)	۱۲/۸	۲۵/۷	۳۸/۵	۵۱/۴	۶۴/۲	۷۷/۱	۹۰/۰	۱۰۲/۸	۱۱۵/۶	۱۲۸/۵	۱۴۱/۳	۱۵۴/۲	۱۶۷/۱	۱۸۰
T(°C)	۶۹۸	۷۲۳/۵	۷۴۴/۷	۷۶۱/۷	۷۷۴/۵	۷۸۳/۱	۷۸۷/۵	۷۸۷/۶	۷۸۳/۶	۷۷۵/۳	۷۶۲/۹	۷۴۶/۲	۷۲۵/۲	۷۰۰



ماده مورد استفاده در پره که سوپرآلیاژ nimonic115 و به صورت همگن می باشد را وارد می کنیم. جدول (۴) ترکیب شیمیایی سوپر آلیاژ مذکور را نشان می دهد.

مقادیر مدول الاستیک سوپرآلیاژ در جدول (۵) آورده شده است. آگاهی از مقادیر مدول الاستیک برای پیش بینی رزونانس های نامطلوب در قطعاتی که در حال گردش یا نوسان هستند لازم می باشد.

در جدول (۶) خواص کششی سوپرآلیاژ nimonic115 نشان داده شده است.

همچنین مقادیر ضریب انبساط حرارتی سوپرآلیاژ nimonic115 در جدول (۷) آورده شده است.

در جدول (۸) خواص ارتعاشی که در بررسی خواص رزونانسی مورد استفاده قرار می گیرند، در دمای محیط آورده شده است.

اعمال شرایط دمایی به این صورت است که با توجه به در اختیار داشتن تمایل دمایی در ریشه (Root)، وسط و سر (Tip) پره، و اعمال آن در سطوح ایرفویل و با در نظر گرفتن خواصی نظیر ضریب هدایت حرارتی، ظرفیت گرمایی ویژه، توزیع دما در حالت پایدار در پره به دست می آید. همان طور که ملاحظه می گردد بیشترین دما در نزدیکی وسط طول پره می باشد. ذکر این نکته نیز ضروری است که پره مربوط به یک توربین جریان محوری صنعتی و بدون خنک کاری می باشد.

### اعمال خواص ماده مورد استفاده در پره و

#### مشخصات هندسی پره

در قسمت Material از نرم افزار PATRAN، خواص

جدول ۴ ترکیب شیمیایی سوپرآلیاژ Nimonic115

آلیاژها	C	Co	Si	Cu	Fe	Mn	Cr	Ti	Al	Mo	B	Zr	W	Ta	Cb
Nimonic115	۰/۲	۱۴/۰	۱/۰	۰/۲	۱/۰	۱/۰	۱۵/۰	۴/۰	۵/۰	۴/۰	۰/۰۱۵	۰/۱۵	---	---	---

جدول ۵ مدول یانگ سوپرآلیاژ Nimonic115 در دماهای مختلف

دما (°C)	۲۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
E(Gpa)	۲۱۲	۲۰۹	۲۰۴	۱۹۹	۱۹۳	۱۸۷	۱۸۱	۱۷۴	۱۶۵	۱۵۳

جدول ۶ خواص کششی سوپرآلیاژ Nimonic115

دما (°C)	UTS(Mpa)	Y.S(Mpa)	EL (%)
۲۱	۱۲۴۰	۸۶۵	۲۷
۵۳۸	۱۰۹۰	۷۹۵	۱۸
۶۵۰	۱۱۲۵	۸۱۵	۲۳
۷۶۰	۱۰۸۳	۸۰۰	۲۴
۸۷۱	۸۳۰	۵۵۰	۱۶

جدول ۷ مقادیر ضرایب انبساط حرارتی سوپرآلیاژ Nimonic115 نسبت به دمای ۲۱°C

آلیاژ	93°C $\left(\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6}\right)$	538°C $\left(\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6}\right)$	871°C $\left(\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6}\right)$
Nimonic115	۱۲/۳۵	۱۳/۹۵	۱۵/۹۳

جدول ۸ خواص سوپرآلیاژ Nimonic115 در دمای محیط

آلیاژ	E(Gpa)	$\rho$ (gr/cm <sup>3</sup> )	$\frac{\sqrt{E}}{\rho}$
Nimonic115	۲۱۲	۷/۸۶	۱/۸۵

(۹) می‌باشد. لازم به ذکر است که در این حالت ۶ مود اول پره برابر صفر می‌باشد.

جدول ۹ مقایسه فرکانس‌های طبیعی به دست آمده پره در دو حالت تجربی و تحلیلی در حالت آزاد

شماره مود	فرکانس تحلیلی به دست آمده (هرتز)	فرکانس تجربی (هرتز)	اختلاف %
مود اول الاستیک	۱۰۱۴/۹	۱۰۶۳/۱	۴/۵
مود دوم الاستیک	۲۳۸۲/۹	۲۱۶۲	-۱۰/۲
مود سوم الاستیک	۲۵۹۴/۵	۲۶۸۹/۴	۳/۵
مود چهارم الاستیک	۴۱۵۵/۵	۴۴۶۴/۹	۶/۹

شکل (۸) چهار مود اول به دست آمده در پره توربین را در حالت آزاد نشان می‌دهد.

با توجه به نتایج جدول مذکور نتایج حاصل از تحلیل المان محدود مدل، تطابق قابل قبولی با نتایج تجربی دارد.

### به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی پره در

#### حالت ثابت

با تحلیل مودال مجموعه در حالت استاتیکی پره یکسر گیردار (شکل ۹)، مقادیر و شکل مودهای به دست آمده مطابق جدول (۱۰) می‌باشد.

### به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی پره در حالت آزاد مطابق تست تجربی

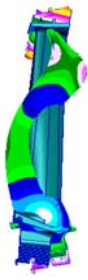
در حالت کلی شکل مودهای به وجود آمده در یک پره توربین به صورت خمشی (Bending)، پیچشی (Twisting) و یا ترکیبی از این دو مود می‌باشد. هدف از انجام این آنالیز، تعیین فرکانس‌های طبیعی سازه و به دست آوردن شکل مودهای آن می‌باشد. نحوه تست آزمایشی در این حالت بدین گونه بوده است که مطابق شکل (۷) پره به ۱۸ قسمت، شبکه بندی شده و توابع پاسخ فرکانسی در حالت آزاد-آزاد (Free-Free) برای ۱۸ نقطه به دست آمده است. بنابراین ۱۸ منحنی تابع پاسخ فرکانسی به دست آمده است. سپس با انجام مودال تجربی بر روی توابع پاسخ فرکانسی اندازه گیری شده، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به دست آمده است.



شکل ۷ نحوه تست آزمایشی پره در آزمایشگاه در حالت آزاد-آزاد

در تست تحلیلی انجام شده نیز مانند روش آزمایشی، مدل به صورت آزاد-آزاد (Free-Free) تحت آنالیز مودال قرار می‌گیرد. برای تحلیل مقادیر ویژه که همان فرکانس‌ها و توابع ویژه که معرف شکل مودهای مساله ارتعاشات آزاد می‌باشند را با ورودی تنش‌های اولیه در نظر می‌گیریم.

پس از انجام تحلیل توسط نرم افزار NASTRAN، نتایج فرکانس‌های طبیعی به دست آمده مطابق جدول



شکل مود چهارم الاستیک



شکل مود سوم الاستیک



شکل مود دوم الاستیک

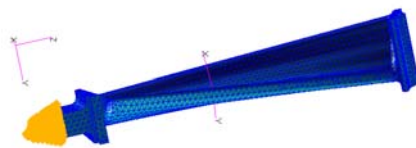


شکل مود اول الاستیک

شکل ۸ چهارم مود اول به دست آمده پره در حالت آزاد

جدول ۱۰ فرکانس‌های طبیعی به دست آمده پره در حالت ثابت

شماره مود	فرکانس (هرتز)	شکل مود به دست آمده
مود اول الاستیک	۲۷۳/۴	خمش
مود دوم الاستیک	۸۲۴/۳	خمش
مود سوم الاستیک	۱۲۸۰/۷	خمش-پیچش
مود چهارم الاستیک	۱۴۸۸/۶	خمش-پیچش



شکل ۹ پره یکسر گیردار در نرم افزار

شرایط مرزی است. با توجه به پیچیدگی‌های مدل کردن دیسک، در قسمت اتصال بین تیغه و دیسک در درجات آزادی پیچشی و جابجایی صفر است [24]. به بیانی دیگر، قیود تیغه مانند قیود تیر یکسر گیردار مدل شده است.

فرکانس‌ها و شکل مودها، تابع مقدار سرعت دورانی می‌باشند. بدین صورت که به علت اعمال نیروی مجازی گریز از مرکز بر پره، صلبیت آن افزایش یافته و به تبع آن فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. با اعمال نیروی مجازی گریز از مرکز بر المان‌ها با سرعت زاویه‌ای ۳۱۵ دور در دقیقه، مقادیر و شکل مودهای به دست آمده از آن، مطابق جدول (۱۱) و شکل (۱۰) می‌باشد.

### به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی پره در حالت چرخان مطابق تست تجربی

قبل از بررسی روند انجام تحلیل، ذکر این مطلب لازم است که مدل در تست آزمایشی در دور ۳۱۵ دور در دقیقه مورد تست قرار گرفته و فرکانس‌های طبیعی آن در حالت دورانی به دست آمده‌اند. جهت قید کردن کامل ریشه پره در این قسمت، با توجه به اینکه ریشه کاملاً درون دیسک جازده شده و با این فرض که ریشه هیچ حرکتی در سه جهت مختصات ندارد، تمامی عناصر جابجایی در نرم افزار را برابر صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین ریشه پره به صورت گیردار و صلب بوده و انتهای دیگر آن آزاد است. نکته مهم در مدلسازی صورت گرفته در این قسمت استفاده از

جدول ۱۱ مقایسه فرکانس‌های طبیعی به دست آمده مجموعه در دو حالت تجربی و تحلیلی در دور 315rpm

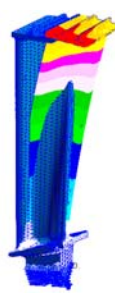
شماره مود	فرکانس تحلیلی به دست آمده (هرتز)	فرکانس تجربی (هرتز)	اختلاف %
مود اول الاستیک	۲۸۵/۰۱	۳۰۰/۶	۵/۱
مود دوم الاستیک	۸۵۰/۴	۸۲۴/۸	-۳/۱
مود سوم الاستیک	۱۳۳۴/۴	---	---
مود چهارم الاستیک	۱۵۷۰/۶	---	---



شکل مود چهارم الاستیک



شکل مود سوم الاستیک



شکل مود دوم الاستیک



شکل مود اول الاستیک

شکل ۱۰ چهار مود اول به دست آمده پره چرخان با سرعت زاویه ای ۳۱۵ دور در دقیقه

می‌شود. خط تشدید، به صورت فرکانس عبور شیپوره (Nozzle guide passing frequency)، تعریف می‌شود. در مورد توربین گاز مورد بحث، با توجه به اینکه تعداد نازل‌های طبقه دوم ۶۱ عدد می‌باشد، فرکانس تحریک نازل‌های مرحله دوم از رابطه (۲۳) محاسبه می‌شود:

$$f_2 = n_2 W_2 \times \quad (25)$$

که در آن  $n$  معرف تعداد نازل هر ردیف و  $w$  تعداد دوران روتور در ثانیه می‌باشد بنابراین:

$$7116/6 = 116/6 \times 61 = \text{فرکانس تحریک نازل‌های طبقه دوم توربین}$$

همچنین تعداد نازل‌های مرحله اول توربین برابر ۵۹ عدد می‌باشد، لذا با انجام محاسبه‌ای مشابه داریم:

$$w_1 \times f_1 = n_1 \quad (24)$$

بنابراین:

$$6883/3 = 116/6 \times 59 = \text{فرکانس تحریک نازل‌های طبقه اول توربین}$$

با توجه به اطلاعات مواد، مدل المان‌های محدود در حالت ریشه ثابت با دور ۷۰۰۰ دور در دقیقه دوران

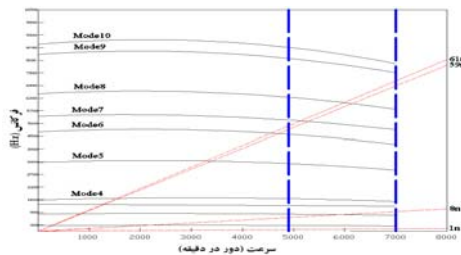
همان‌طور که مشاهده گردید تحلیل انجام شده بر روی پره نتایج قابل قبولی را در مقایسه با نتایج تجربی در بر دارد.

### استخراج دیاگرام کمپل

جهت بررسی احتمال پدیده رزونانس در توربین‌ها از دیاگرام کمپل استفاده می‌شود. در این دیاگرام، مودهای مختلف فرکانس طبیعی پره به دست آمده از روش آزمایشگاهی و یا شبیه سازی به روش المان محدود و فرکانس تشدید توربین در مقابل هم رسم می‌شوند، احتمال بروز پدیده تشدید در مودهای مختلف در نزدیکی ضرایب صحیحی از تعداد پره‌های ثابت توربین مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرکانس تحریک پره به تعداد پره‌های ثابت و سرعت چرخش روتور بستگی دارد. جهت تحلیل نتایج حاصل، شکل مودها در یک نمودار خط تشدید- تشدید هارمونیک (نمودار کمپل) رسم می‌گردد. تحریک هارمونیک به صورت تعداد پره‌های ثابت (Number of nozzle guide vanes)، در نظر گرفته

تداخل پیدا می کنند را نشان می دهد. این شرط تداخل فرکانسی به عنوان "احتمال رزونانس" خوانده می شود. منبع اساسی تحریک، نازلها هستند و فرکانس تحریک نازل تابعی از تعداد نازلها و سرعت توربین می باشد. شکل (۱۱) نمودار کمپل به دست آمده را نشان می دهد.



شکل ۱۱ دیاگرام کمپل برای پره در دور 7000rpm

در شکل (۱۱) خطوط 59n و 61n به ترتیب فرکانسهای تحریک نازل های ردیف اول و دوم و خط 8n معرف تحریک سوخت پاشها می باشد. همانطور که از نمودار کمپل به دست آمده مشاهده می گردد در محدوده کاری توربین، تداخل فرکانسی بین فرکانسهای تحریک و فرکانسهای طبیعی به دست آمده از پره مشاهده نگردیده و بنابراین هیچ گونه مشکل رزونانسی برای پره در دور کاری به وجود نمی آید. ضمن اینکه نتایج به دست آمده بیانگر این مطلب است که پره در حاشیه ایمنی مطلوبی قرار دارد.

### نتیجه گیری

در این پروژه، پره ردیف دوم یک توربین گاز صنعتی، مورد تحلیل مودال قرار گرفت. جهت انجام کار ابتدا مدل هندسی پره تهیه گردید. سپس با ایجاد مدل المان محدود، پره توسط نرم افزار NASTRAN مورد تحلیل المان محدود قرار گرفت. همچنین با داشتن نتایج حاصل از آزمایشهای تجربی، نتایج در هر دو روش بررسی و مقایسه گردیدند. با توجه به هندسه پیچیده پره، روشهای تحلیلی موجود ضعیف بوده، روشهای تجربی نیز علی رغم دقت بالا وقت گیر و هزینه بر

داده شده و فرکانسهای طبیعی محاسبه شده اند که نتایج به دست آمده در جدول (۱۲) مشاهده می گردد.

جدول ۱۲ فرکانسهای طبیعی به دست آمده پره در دور کاری توربین

$\omega = 7000\text{rpm}$	
مود	فرکانس (Hz)
۱	۲۵۵/۳
۲	۷۶۰/۸
۳	۱۱۹۵/۴
۴	۱۴۰۵/۵
۵	۲۹۰۶/۴
۶	۴۱۱۱/۷
۷	۴۸۰۲/۷
۸	۵۷۶۸/۹
۹	۷۵۰۲/۶
۱۰	۷۹۳۳/۸

اصولاً فرکانس طبیعی پره توربین با افزایش بار گریز از مرکز و به تبع آن افزایش سختی افزایش و با افزایش دما کاهش می یابد. در صورتی که هر دو عامل (افزایش دور و دما) در پره به طور همزمان وجود داشته باشد عموماً فرکانس طبیعی کاهش می یابد. اثرات این دو بار همراه یکدیگر را در شرایط تست مودال تجربی نمی توان لحاظ نمود [15]. اثر سختی ناشی از بار گریز از مرکز در دوران ایجاد می شود و با افزایش سرعت دوران پره، سختی آن نیز بیشتر می شود [25]. همچنین اثر افزایش دما در پره، تغییر در خواص مکانیکی آن است [26].

دیاگرام کمپل گرافی است که نمایانگر سرعت توربین در محور افقی (بر حسب دور در دقیقه) بر حسب فرکانس در محور عمودی (بر حسب هرتز) می باشد. فرکانسهای طبیعی پره و فرکانس تحریک در این دیاگرام رسم می شوند. این دیاگرام نقاطی که فرکانسهای طبیعی پره با فرکانسهای تحریک آن

می‌باشند، لذا استفاده از تکنیک المان محدود مناسب‌ترین روش جهت تحلیل مودال پره توربین می‌باشد. از نظر المان بندی با توجه به پیچیدگی هندسی پره، المان های هرمی ۴ وجهی به خوبی قادرند مساله را پوشش دهند. از طرف دیگر، پیچیدگی باعث می‌شود که تعداد المان های مورد استفاده زیاد شوند. نیروی مجازی گریز از مرکز، نسبت به دیگر نیروهای وارد بر پره توربین، بزرگترین مقدار را دارد. پره دو نوع تغییر شکل خمشی و پیچشی را متحمل می‌گردد.

برای به دست آوردن توزیع دما در طول پره، تابعی که در نظر گرفته شد یک معادله درجه ۲ برای طول پره بوده که نموداری به شکل سهمی برای توزیع دما به دست می‌دهد. با داشتن تمایل دمایی در ریشه، وسط و سر پره و اعمال آن در سطوح ایرفویل، توزیع دما در پره به دست آمد. همان‌طور که مشاهده گردید بیشترین دما در نزدیکی وسط طول پره می‌باشد. تحلیل مودال پره توربین در سه حالت آزاد، استاتیکی و دینامیکی انجام گردید. با توجه به

بحث‌های به عمل آمده و نتایج حاصل از تحلیل‌های مختلف می‌توان به این نتیجه رسید که مطالعات به عمل آمده در نهایت منجر به یک مدل المان محدود برای پره شد که تطابق مناسبی با نتایج تجربی داشت. با بررسی دیاگرام کمپل به دست آمده ملاحظه گردید که اثر دما و دور بر نتایج فرکانسی کاملاً تاثیر گذار است. به طوری که افزایش دور باعث افزایش سختی گردیده که موجب افزایش فرکانس می‌گردد، ضمن اینکه افزایش دما نیز باعث افزایش طول پره و کاهش فرکانس خواهد گردید.

با توجه به نمودار کمپل به دست آمده به این نتیجه می‌رسیم که در محدوده کاری توربین، تداخل فرکانسی بین فرکانس‌های تحریک و فرکانس‌های طبیعی به وجود نیامده و بنابراین هیچ گونه مشکل رزونانسی برای پره در دور کاری ایجاد نمی‌گردد. ضمن اینکه نتایج به دست آمده بیانگر این مطلب است که پره در حاشیه ایمنی مطلوبی قرار دارد.

## مراجع

1. Stodola, A., "Steam and Gas Turbines", Vols. 1 and 2, McGraw-Hill, New York, (1927).
2. Lamb, H., and Southwell, R. V., "The Vibration of a Spinning Disc", *Proc. Roy. Soc.*, London, Vol. 99, 272, (1922).
3. Kroon, R., "Turbine Blade Vibration due to Partial Admission ", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, pp. 161-165, (1940).
4. Shannon, D., "Royal Aircraft Establishment ", Farnborough, UK, H.M.S.O.R&M Publication, (1945).
5. Myklestad, N. O., "New Method for calculating Natural Modes of Coupled Bending Torsion Vibrations of Beams ", *Jnl. Aero. Sciences*, Vol. 11, pp.153-162, (1944).
6. Jarrett, G., and Warner, P. C., "The Vibration of Rotating Tapered Twisted Beams ", *Trans. ASME Jnl. Appl. Mech.*, Vol. 20, pp.381-389, (1953).
7. Rigger, F., McCallion. H., "The Natural Frequencies of portal Frames ", Parts 1 and 2, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol7, pp. 253-261 and 263-276, (1965).
8. Thomas, J., Documaci, E. and Carnegie, W., "Matrix Displacement Analysis of Coupled Bending-Bending Vibration of Pre-twisted Blading ", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 9, No.

- 4, (1967).
9. Anderson, R. G., Ahmed, S., and Zienkiewicz, E. C., "Vibration of Thich, Curved Shells with Particular Reference to Turbine Blades ", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 5, (1970).
  10. Dimitriadis, E. K., "The Vibration of Packeted-Bladed Discs Alloys ", MSc. Thesis. Imperial college, (1979).
  11. Salama. A. M., Petyt, M., Motat Soares, C. A., "Dynamic Response of Packets of Blades by the Finite Element Method", *ASME. Journal of Mechanical Design*, Vol. 100, pp. 660-666, (1978).
  12. Judge, C. Pierre., and O. Mehmed., "Experimental investigation of mode localization and forced response amplitude magnification for a mistuned bladed disc ", *Journal of engineering for gas turines and power*, Vol. 123, No. 4, pp. 940-950, (2001).
  13. Gordon, R. W. J., Hollkamp J., "An experimental investigation of non-uniform damping in bladed disc assemblies ", *The 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibition*, AIAA-98-3747, (1998).
  14. Pereira, J. C., "A Low Cycle Fatigue Analysis on a Steam Turbine Bladed Disk-Case Study", *12th IFTMMWorld Congress*, pp. 18-21, (2007).
  15. Hou, J. and Wicks, B., "Root Flexibility and Untwist Effect on Vibration Characteristics of a Gas Turbine Blade ", Air Vehicle Division, Platform Sciences Laboratory, (1999).
  16. Roemer, M. J., "Examination of Successful Modal Analysis Techniques Used For Bladed-Disc Assemblies", Impact Technologies, LLC, New York, (1994).
  17. Roemer, M. J., "On-site Modal Testing of Low Pressure Turbine Blade Rows ", *journal of Sound and Vibration*, (1994).
  18. Pierre, C. and Jiang, D., "Finite-Element-Based Modal Reduction of a Rotating Blade with Large-Amplitude-Motion Using Nonlinear Normal Modes", (1997).
  19. Jason, J. Kielb., and Reza S. Abhari., "Experimental Study of Aerodynamic and Structural Damping in a Full-Scale Rotating Turbin", *ASME TURBO EXPO*, New Orleans, (2001).
  20. Zhimin, L., Mavris, D. N. and Vitali, V. Volovoi., " Creep life prediction of gas turbine components under varying operating conditions ", *ASME Joint Power Generation Conference*, New Orleans, Louisiana, USA, (2001).
  21. Stuart Moffatt., " Blade Forced Response Prediction For Industrial Gas Turbines ", *International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*, Atlanta, Georgia, USA (2003).
  22. Treagerber, I. E., "Aircraft Gas Turbine Engine Technology", New York, McGraw-Hill, (1979).
  23. Kostyuk, A., and Frolov, V., "Steam and Gas Turbines", Mir Publishers, Moscow, (1988).
  24. Poursaeidi, E., Aieneravaie, M. and Mohammadi, M. R., "Failure analysis of a second stage blade in a gas turbine engine", *Engineering Failure Analysis Journal*, (2007).

25. Rao, J.S., "Natural Frequencies of Turbine Blading-A Survey ", *Shock and Vibration . Dig.*, 5(10), (1973).
26. Ewins, D.J. and Henry, R., "Structural Dynamic Characteristics of Individual Blades ", Lecture Series, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, (1992).