بررسی تأثیر نقاط فوق هم‌گرای تنش برای بهبود حل و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری*

احمد گنجعلی(۱) بهروز حسنی(۲)

چکیده یکی از روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح، بر پایهٔ استفاده از خاصیت نقاط فوق هم‌گرا گوسی بوده است. در این مقاله به توسعهٔ این روش در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل با تقارن محوری و بررسی تأثیر استفاده از این نقاط فوق هم‌گرا برای بهبود حل و برآورد خطای آن پرداخته شده است. نتایج به‌دست آمده از این پژوهش کارایی مناسب این نقاط بهینه تنش را در بهبود حل و برآورد خطای تحلیل مسائل متقارن محوری به روش ایزوژئومتریک نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی تحلیل ایزوژئومتریک، مسائل متقارن محوری، برآورد خطا، بازیافت تنش.

Effect of Superconvergent Stress Points for Solution Improvement and Error Estimation of Isogeometric Analysis of Axisymmetric Problems

A. Ganjali B. Hassani

Abstract *A method for error estimation of isogeometric analysis of plane stress problems which is the based on stress recovery and using the super convergent properties of the Gauss points, has been already introduced. This paper is devoted to the development of the method and study of the effects of these supercovergent points on the solution improvement and error estimation of axisymmetric problems by the isogeometric analysis method. It is concluded that by using these optimal points for stress recovery and error estimation by isogeometric analysis a considerable improvement is attained.*

Key Words Isogeometric Analysis, Axisymmetric Problems, Error Estimation, Stress Recovery.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۲/۱۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۷/۱۷ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول، دانشجوی دکتری، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود. ahmad.ganjali@yahoo.com

(۲) استاد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

تحلیل سازه از اولین گام‌های شناخت و ارزیابی صحیح مسائل مهندسی به‌شمار می‌رود. این تحلیل در نهایت منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می‌شود که در حالت کلی دارای پیچیدگی بسیار زیادی است و تنها با استفاده از روش‌های عددی قابل حل می‌باشد. در دهه‌های اخیر روش‌های مختلف عددی توسعه یافته‌اند که از جمله مهمترین آن‌ها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود به‌عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و توسعه یافته است. این روش در دهۀ ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و امروزه با کاهش عیوب و ادغام آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی را مرتفع ساخته است. اما علی‌رغم این پیشرفت قابل ملاحظه، هنوز هم نمی‌توان روشی یافت که کامل و بدون نقص باشد. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائل دارای هندسۀ پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره نمود.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود و بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ و به‌دلیل توسعۀ رایانه‌ها، پیشرفت‌های چشمگیری در علم مدل‌سازی هندسه به‌کمک رایانه (Computer Aided Design) شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص خود نماید، اما به‌دلیل عدم هم‌زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش‌های طراحی به‌کمک رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به‌کمک رایانه به‌وجود نیامد.

برای اولین بار، ورود تکنیک‌های طراحی به‌کمک رایانه در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰٤ توسط کیگان و هولیگ و همکارانشان صورت پذیرفت [1-3]؛ که در آن به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایه اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز (بی- اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت (Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)) که از توسعه توابع اسپلاین به‌دست می‌آیند توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت [4]. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آن‌ها برای درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتریک در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی اشاره کرد از جمله امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل ملاحظه در اقناع شریط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظه اندازۀ دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرائب آن‌ها خود تابعی متغیر می‌باشند [5].

در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریک به سرعت در زمینه‌های مختلفی مانند دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. هم‌چنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعۀ بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [6].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به‌شمار

می‌رود و همواره باعث نگرانی پژوهشگران در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. در حالت کلی روش‌های برآورد خطا در دو دستهٔ روش‌های بازیافت تنش (گرادیان) و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند [7]. استفاده از روش بازیافت تنش در تحلیل ایزژئومتریک (Stress Recovery in Isogeometric analysis(SRI)) اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [5]. اساس روش SRI برگرفته از خاصیت فوق هم‌گرایی تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط فوق هم‌گرای گوسی برای هر مؤلفه تنش در حالت تنش و کرنش مسطح، یک سطح بهبود یافته تشکیل می‌شود که برای برآورد خطای ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد [5]. در تحقیق حاضر توسعهٔ این روش در بازیافت تنش و برآورد خطای مسائل متقارن محوری دنبال می‌شود. هم‌چنین بررسی میزان تأثیر نقاط فوق هم‌گرای گوسی در تشکیل سطح تنش بهبود یافتهٔ مسائل متقارن محوری از دیگر اهداف این پژوهش به‌شمار می‌رود. بدین منظور به مدل‌سازی و تحلیل دو مثال نمونه با شرایط تقارن محوری و دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. لولهٔ بلند جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی و صفحهٔ دایره‌ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز، دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی و بهبود دقت مؤلفه‌های تنش بازیافتی نسبت به حل ایزوژئومتریک برای دو مثال حل شده در این پژوهش، می‌توان بیان نمود که نقاط گوسی در تحلیل مسائل متقارن محوری نیز از خاصیت فوق هم‌گرایی مناسبی برخوردار می‌باشند و می‌توان از آن‌ها برای بهبود نتایج تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری و برآورد خطای آن استفاده نمود.

بی- اسپلاین و نربز

در این بخش به‌طور خلاصه و در حد نیاز به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی- اسپلاین و نربز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [8, 9] پیشنهاد می‌شود.

نربزها از بی- اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی- اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه) (Patch) تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنهٔ مدل‌سازی شده را به چندین زیردامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی (Knot Vector) در فضای پارامتری یک‌بعدی از یک سری مختصات به‌صورت زیر تشکیل می‌شود [9].

$$\Xi=\left\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n+p+1}\right\}, \quad \xi_{i+1}\geq\xi_i \quad i=1,2,\dots,n+p+1 \qquad (۱)$$

که در آن ξ_i iامین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل‌دهندهٔ بی- اسپلاین به‌شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره‌ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره‌ای به‌نام بردارهای گره‌ای نامتناوب (Nonperiodic knot vector) (یا باز) (Open) استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi=\left\{\underbrace{a,\dots,a}_{p+1},\xi_{p+1},\dots,\xi_{m-p-1},\underbrace{b,\dots,b}_{p+1}\right\} \qquad (۲)$$

در این صورت iامین تابع پایه‌ای بی- اسپلاین از درجهٔ p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود [9]:

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if } \xi_i\leq\xi<\xi_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۳)$$

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی- اسپلاین از درجهٔ p به‌صورت زیر تعریف می‌شود [9]:

$$C(\xi)=\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) P_i \qquad a\le\xi\le b \tag{٤}$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای (Piecewise polynomial curve) است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به‌صورت رابطهٔ (٢) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آن‌گاه می‌توان رابطهٔ $m=n+p+1$ را برای آن‌ها نوشت.

به‌طرز مشابهی سطوح بی- اسپلاین به‌صورت زیر تعریف می‌شود [9]:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \tag{٥}$$

که در آن:

$$\Xi=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},\xi_{p+1},\ldots,\xi_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\right\} \; ; \qquad \mathscr{H}=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},\eta_{q+1},\ldots,\eta_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\right\} \tag{٦}$$

به‌طوری که بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و $\mathscr{H}$ دارای $s+1$ گره می‌باشد.

یک منحنی نربز از درجهٔ p به‌صورت زیر تعریف می‌شود [9]:

$$C(\xi)=\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i} \qquad a\le\xi\le b \tag{٧}$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین از درجهٔ p هستند که بر روی بردار گره‌ای به‌صورت رابطهٔ (٢) تعریف شده‌اند.

و در نهایت، یک سطح نربز که در جهت ξ از درجهٔ p، و در جهت η از درجهٔ q باشد، به‌صورت زیر تعریف می‌شود [9]:

$$S(\xi,\eta)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}, \quad 0\le\xi,\eta\le 1 \tag{٨}$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکهٔ نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. هم‌چنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای به‌صورت رابطهٔ (٦) تعریف شده‌اند. در رابطهٔ (٨) اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \tag{٩}$$

خواهیم داشت:

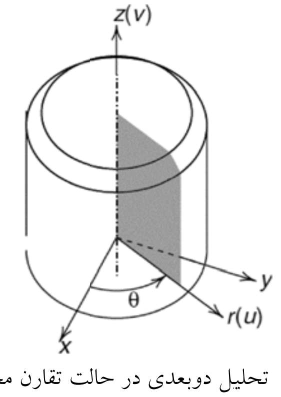
$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta) P_{i,j} \tag{١٠}$$

در شکل (١) شبکهٔ نقاط کنترلی و سطح نربز به‌دست آمده از آن با توابع پایهٔ درجهٔ دو مشاهده می‌شود.

شکل ١ شبکهٔ نقاط کنترلی و سطح نربز مربوط به آن با توابع پایهٔ درجه دو

سازه‌های دارای تقارن محوری

تحلیل اجسامی که تقارن محوری دارند و بار اعمالی به آن‌ها نیز متقارن محوری است در بسیاری از پروژه‌های مهندسی مورد نیاز است. از کاربردهای این نوع تحلیل می‌توان بررسی تنش و کرنش‌های اعمالی به یک مخزن بزرگ تحت فشار، تحلیل جریان سیال در لوله‌ها، دیسک‌های توربین‌ها و پی‌های استوانه‌ای قرار گرفته بر روی بستر خاکی را نام برد. سازه‌های متقارن محوری سازه‌هایی هستند که از نظر هندسه، خواص ماده، شرایط مرزی و بارگذاری در دستگاه مختصات استوانه‌ای نسبت به θ مستقل هستند (شکل ۲). وجود تقارن محوری تضمین می‌کند که هیچ نوع حرکت و تغییرمکانی در امتداد زاویهٔ θ وجود ندارد. بنابراین مسألهٔ سه‌بعدی در مختصات (r,θ,z) به مسألهٔ دوبعدی در صفحهٔ rz کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۲ تحلیل دوبعدی در حالت تقارن محوری

فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل متقارن محوری

در روش ایزوژئومتریک، مقدار مجهول مسأله در حالت دوبعدی، (به‌طور مثال مؤلفهٔ تغییرمکان جهت r) به‌عنوان یک سطح نربز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان کنندهٔ مقدار مجهول مسأله در آن مکان باشد. در مسائل متقارن محوری، اگر نقاط کنترلی را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که مؤلفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط، (P_r, P_z)، بتوانند هندسهٔ مسأله را در صفحهٔ rz برآورد کنند، در این صورت مؤلفهٔ سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درون‌یابی بین این نقاط به‌وسیلهٔ توابع پایه‌ای نربز نشان‌دهندهٔ تغییرمکان آن نقطه باشد. در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحهٔ rz نشان‌دهندهٔ هندسهٔ مسأله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحهٔ rz نشان‌دهندهٔ تغییرمکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییرشکل‌های شعاعی (در جهت r) و محوری (در جهت z) هر نقطه را به‌ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییرمکان هر نقطه داخل زیردامنه نربز ناحیه را به‌صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون‌یابی کرد.

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u\left(r,z\right) \\ v\left(r,z\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}\left(\xi,\eta\right)\mathbf{P}_{u\ i,j} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}\left(\xi,\eta\right)\mathbf{P}_{v\ i,j} \end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

در رابطهٔ بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ها نمایشگر بردار مؤلفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ای نربز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت‌های r و z می‌باشند.

با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع نربز که بیان می‌کند برای هر η و ξ فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند [9]، می‌توان برای کم‌کردن هزینهٔ محاسبات، معادلهٔ (۱۱) را به‌صورت زیر تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم η و ξ به‌ترتیب در دهانه‌های گره‌ای i اُم و j اُم قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1})$)، و درجهٔ توابع پایه‌ای در جهت بردار گره‌ای Ξ، p و در جهت بردار گره‌ای $\mathscr{H}$، q باشند، آن‌گاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت می‌توان معادلهٔ (۱۱) را به معادلهٔ

(۱۲) کاهش داد.

هم‌چنین می‌توان معادلهٔ (۱۲) را به شکل ماتریسی معادلهٔ (۱۳) نوشت.

$$u \approx \bar{u} = \begin{Bmatrix} u(r,z) \\ v(r,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(\xi,\eta)P_{u\,k,l} \\ \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(\xi,\eta)P_{v\,k,l} \end{Bmatrix} \qquad (۱۲)$$

$$\bar{u} = \bar{R}.\bar{P} \qquad (۱۳)$$

که در آن $\bar{u}$ ماتریس ستونی تغییرمکان‌ها به شکل زیر است:

$$\bar{u}^{i,j} = \begin{bmatrix} u_{i,j} & v_{i,j} \end{bmatrix}^T \qquad (۱٤)$$

هم‌چنین $\bar{R}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\bar{P}$ ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی به شکل زیر هستند:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) \\ \vdots & \vdots \\ R_{i-p,j}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j}(\xi,\eta) \\ \vdots & \vdots \\ R_{i,j}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i,j}(\xi,\eta) \end{bmatrix}^T \qquad (۱۵)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{u\,i-p,j-q} \\ P_{v\,i-p,j-q} \\ \vdots \\ P_{u\,i-p,j} \\ P_{v\,i-p,j} \\ \vdots \\ P_{u\,i,j} \\ P_{v\,i,j} \end{bmatrix} \qquad (۱٦)$$

در مسائل دارای تقارن محوری بردار کرنش‌ها دارای چهار مؤلفهٔ مستقل از هم می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \qquad (۱۷)$$

با معلوم بودن تغییرمکان در نقاط داخل هر زیردامنه، می‌توان کرنش‌ها را در هر نقطهٔ دل‌خواه به‌دست آورد. در این‌صورت مطابق رابطهٔ (۱۸) خواهیم داشت:

$$\varepsilon = Lu = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

u بردار تغییرمکان‌ها، **ε** کرنش، و **L** یک عملگر دیفرانسیلی است که برای مسائل متقارن محوری به‌صورت رابطهٔ (۱۹) تعریف می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۳) در (۱۸) می‌توان کرنش‌ها را به‌صورت زیر تقریب زد:

$$\varepsilon = B\bar{P} \qquad (۲۰)$$

که با توجه به ماتریس دیفرانسیل‌گیری L ماتریس B برای مسائل تقارن محوری به‌صورت رابطهٔ (۲۱) خواهد بود. هم‌چنین در مسائل متقارن محوری می‌توان چهار مؤلفهٔ تنش را به‌صورت رابطهٔ (۲۲) برای بردار تنش‌ها در نظر گرفت.

$$B = L\bar{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial r} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial z} & \dots \\ \frac{R(\xi,\eta)}{r} & 0 & \dots \\ \frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial z} & \frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial r} & \dots \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (۲۲)$$

با فرض وجود رفتار خطّی کشسان، رابطهٔ بین تنش‌ها و کرنش‌ها خطی و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma = D\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) + \sigma_0 \quad (۲۳)$$

$\boldsymbol{\sigma_0}$ و $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ تنش‌ها و کرنش‌های اولیه و D ماتریس خواص مصالح می‌باشد که برای مصالح همسانگرد از رابطهٔ (۲٤) محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (۲٤)$$

یکی از روش‌هایی که در تحلیل‌های عددی برای هم‌ارزسازی استاتیکی نیروهای گره‌ای با تنش‌های مرزی و بارهای گسترده و نهایتاً محاسبهٔ ماتریس سختی استفاده می‌شود، به‌کار بردن روش تغییرمکان مجازی می‌باشد. به این ترتیب که ابتدا یک تغییرمکان گره‌ای فرضی (مجازی) را اعمال می‌کنیم و کارهای داخلی و خارجی را که نیروهای مختلف در اثنای این تغییرمکان انجام می‌دهند، مساوی قرار می‌دهیم [7].

از همین طریق می‌توان برای محاسبهٔ ماتریس ضرایب در روش ایزوژئومتریک نیز استفاده کرد؛ به‌طوری که اگر در یک زیردامنه به حجم V که دارای مرزهای Γ می‌باشد، نیروهای کالبدی b (Body forces) و نیروهای سطحی t (Traction forces) وجود داشته باشند، می‌توان نوشت:

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma\, dV - \int_V \delta u^T b\, dV - \int_\Gamma \delta u^T t\, d\Gamma = 0 \quad (۲۵)$$

هم‌چنین با استفاده از معادلات (۲۰ و ۱۳) می‌توان نوشت:

$$\delta u = \bar{R}\,\delta\bar{P} \quad (۲۶)$$

$$\delta\varepsilon = B\,\delta\bar{P} \quad (۲۷)$$

حال با جای‌گذاری روابط فوق در معادلهٔ (۲۵) داریم:

$$\int_V \delta\bar{P}^T B^T \sigma\, dV - \int_V \delta\bar{P}^T \bar{R}^T b\, dV - \int_\Gamma \delta\bar{P}^T \bar{R}^T t\, d\Gamma = 0 \quad (۲۸)$$

حال با حذف $\delta\bar{\mathbf{P}}$ و استفاده از رابطهٔ (۲۳) خواهیم داشت:

$$\int_V B^T D \varepsilon\, dV - \int_V B^T D \varepsilon_0\, dV + \int_V B^T \sigma_0\, dV - \int_V \bar{R}^T b\, dV - \int_\Gamma \bar{R}^T t\, d\Gamma = 0\,. \quad (۲۹)$$

از طرفی با جای‌گذاری ε از معادلهٔ (۲۰) خواهیم داشت:

$$\int_V B^T D B \bar{P}\, dV - \int_V B^T D \varepsilon_0\, dV + \int_V B^T \sigma_0 dV \int_V B^T \sigma_0 dV - \int_V \bar{R}^T b\, dV - \int_\Gamma \bar{R}^T t\, d\Gamma = 0\,. \quad (۳۰)$$

در نهایت می‌توان رابطهٔ (۳۰) را با فرض عدم وجود تنش‌ها و کرنش‌های اولیه به‌صورت رابطهٔ (۳۱) نوشت.

$$KU = F \tag{۳۱}$$

که در آن K ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)، U مجهولات مسأله (مختصهٔ سوم نقاط کنترلی) و F نیروهای خارجی وارد بر زیردامنه می‌باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K = \int_V B^T DB dv \tag{۳۲}$$

$$F = \int_V \bar{R}^T b\, dV + \int_\Gamma \bar{R}^T t\, d\Gamma \tag{۳۳}$$

محاسبهٔ انتگرال ماتریس سختی در مسائل متقارن محوری با استفاده از المان حجمی نربز امکان‌پذیر است که از دوران یک المان سطحی نربز حول محور تقارن ایجاد می‌شود و به‌صورت یک حلقه با سطح مقطع چهارضلعی می‌باشد. بنابراین می‌توان انتگرال ماتریس سختی را برای هر زیردامنهٔ نربز به‌صورت زیر نوشت:

$$K_{patch} = \int\int\int_V B^T DB\, r\, drdzd\theta \tag{۳۴}$$

بایستی توجه داشت که جزء حجم در مختصات استوانه‌ای به‌صورت $dv = r\, drdzd\theta$ می‌باشد. هم‌چنین با توجه با این نکته که مسائل متقارن محوری مستقل از θ می‌باشند، می‌توان این انتگرال را به‌صورت دوبعدی زیر تبدیل کرد:

$$K_{patch} = 2\pi \int\int_V B^T DB\, r\, drdz \tag{۳۵}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای محاسبهٔ ماتریس سختی احتیاج به محاسبهٔ ماتریس B هست که در آن نیاز به محاسبهٔ مشتق $\frac{\partial R}{\partial r}$ و $\frac{\partial R}{\partial z}$ می‌باشد. از آن‌جا که R، r و z هر سه توابعی از مختصات فضای پارامتری نربز یعنی ξ و η می‌باشند، برای محاسبهٔ این مشتقات ژاکوبین زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{۳۶}$$

با این تعریف داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{Bmatrix} = J_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{۳۷}$$

که در آن $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه‌ای نربز می‌باشند. هم‌چنین با توجه به این‌که همهٔ پارامترهای انتگرال ماتریس سختی در دستگاه مختصات فضای پارامتری نربز بیان شده است، ساده‌ترین راه برای محاسبهٔ انتگرال سختی استفاده از همین دستگاه مختصات می‌باشد. این عمل باعث ایجاد ژاکوبین $\det J_1$ در رابطهٔ انتگرال ماتریس سختی می‌شود.

$$\begin{aligned} & drdz = \det J_1 d\xi d\eta \\ & \Rightarrow K_{patch} = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 B^T(\xi,\eta) DB(\xi,\eta) \\ & \qquad r \det J_1 d\xi d\eta \end{aligned} \tag{۳۸}$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق می‌توان از روش گوس استفاده کرد [7]. نقاط گوس نقاطی از پیش تعیین‌شده هستند که برای المان‌های مختلف پایه محل و وزن آن‌ها محاسبه شده است. در المان‌های چهارضلعی این نقاط در دستگاه مختصات سرندیپیتی (Serendipity) مشخص شده است [7]. بنابراین برای این‌که بتوانیم از این نقاط ارائه‌شده بهره ببریم، بایستی از یک نگاشت

استفاده کنیم؛ به‌گونه‌ای که این نگاشت مختصات نقـاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی (r,s) المـان i اُم را بـه دستگاه مختصات ترمـال زیردامنـه نربـز (ξ,η) منتقـل می‌کند (رابطهٔ ۳۹).

$$\xi=\frac{1}{2}\left[\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right)r+\left(\xi_{i+1}+\xi_i\right)\right]$$
$$\eta=\frac{1}{2}\left[\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)s+\left(\eta_{i+1}+\eta_i\right)\right] \tag{۳۹}$$

در روابط فوق r,s مؤلفه‌های مختصات نقـاط در دستگاه سرندیپیتی المان و ξ,η مؤلفه‌هـای مختصـات در دستگاه نرمال زیردامنه نربز می‌باشد. این نگاشت در انتگرال‌گیـری باعـث ایجـاد ژاکـوبین بـه‌صـورت زیـر می‌شود:

$$J_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial r} & \frac{\partial\eta}{\partial r}\\ \frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial s}\end{bmatrix} \quad , \quad d\xi d\eta=\det J_2 drds \tag{۴۰}$$

که در آن

$$\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right) \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial r}=0$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial s}=0 \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right) \tag{۴۱}$$

بنابراین می‌توان رابطهٔ ماتریس سختی را به شکل نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندیپیتی المان‌ها نوشت:

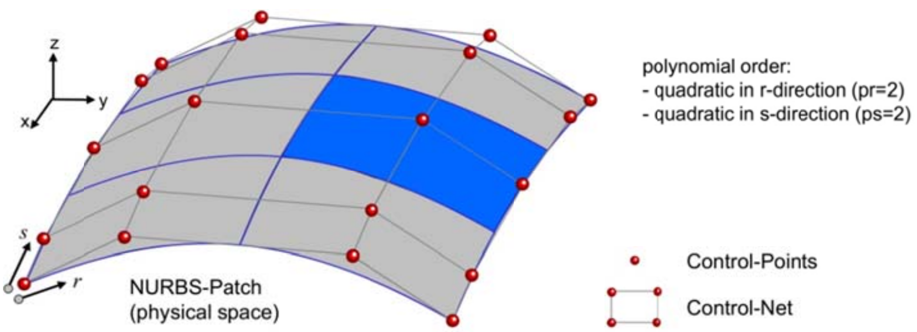
$$K_{patch}=2\pi\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}B^T(r,s)DB(r,s)\, r\det J_1\det J_2 drds \tag{۴۲}$$

و در نهایت انتگرال مـاتریس سـختی بـه روش گـوس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

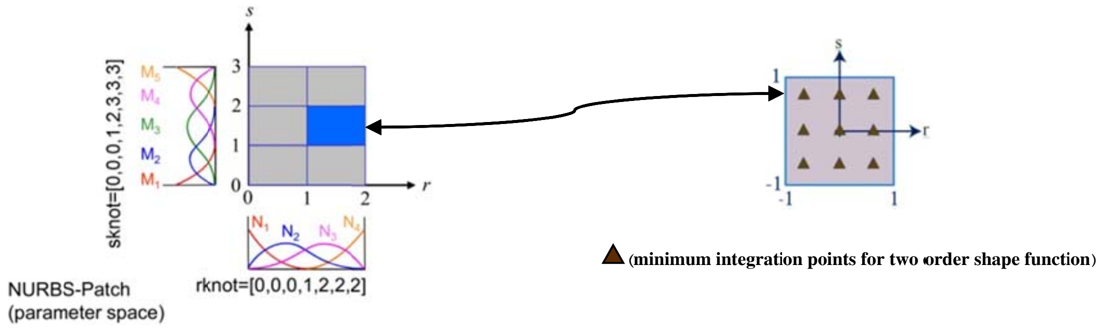
$$K_{patch}=2\pi\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}B^T(r,s)DB(r,s)\, r\det J_1\det J_2 w_i.w_j \tag{۴۳}$$

که در آن m و n تعداد نقاط گوس در جهـت r و s در هر المان و $w_i.w_j$ وزن نقاط گوس می‌باشد.

لازم به ذکر اسـت کـه در تحلیـل ایزوژئومتریـک حداقل تعداد نقاط مورد نیاز برای انتگرال‌گیری عـددی به روش گوس با توجه به مرتبه توابـع شـکل از مـورد مشابه آن در اجزای محدود بیشتر است [10]. در شکل (۳) فضای فیزیکی و فضای پارامتری مربـوط بـه آن و هم‌چنین فضای انتگرال‌گیری عـددی یـک المـان نربـز ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود حداقل تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوس برای توابع شکل مرتبـه دو در هر جهت سه نقطه می‌باشـد کـه ایـن تعـداد در روش اجزای محدود دو نقطه در هر جهت است.



الف) فضای فیزیکی که از یک ناحیه (patch) تشکیل شده است



ب) فضای پارامتری		ج) المان مادر(فضای انتگرال گیری گوس)

شکل ۳ نقاط انتگرال‌گیری گوس در روش ایزوژئومتریک

تشریح روش برآورد خطا در مسائل متقارن محوری

در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه به‌صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می‌شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابه‌جایی) استفاده شده‌اند، به‌دست می‌آید [5].

یک سطح نربز زمانی به‌دست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. در مسائل متقارن محوری با تعریف مختصات r و z هر نقطه کنترلی توسط کاربر، تنها مؤلفهٔ مجهول برای تعیین سطح بهبود یافتهٔ تنش، مؤلفهٔ سوم نقطه کنترلی می‌باشد. نحوه محاسبه مختصات سوم نقاط کنترلی به‌نحوی است که سطح تنش جدید به‌دست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریک به‌دست آمده است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می‌شود. اساس محاسبهٔ مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه به‌دست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آن‌ها تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط دقت بیشتری دارد. در این نقاط مرتبهٔ هم‌گرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق هم‌گرا گفته می‌شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است [11]. در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری این نقاط فوق هم‌گرا بر حداقل تعداد نقاط گوسی مورد نیاز المان چهار ضلعی منطبق هستند (شکل ۳). مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با مینیمم کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش به‌دست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقاط گوس المان‌های هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می‌شود.

در مسائل متقارن محوری، می‌توان سطح بهبود یافته هر یک از مؤلفه‌های تنش را با توجه به توابع شکل نربز به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\sigma^* = \begin{Bmatrix} \sigma^*_{rr} \\ \sigma^*_{zz} \\ \sigma^*_{\theta\theta} \\ \sigma^*_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^T P_{rr} \\ R^T P_{zz} \\ R^T P_{\theta\theta} \\ R^T P_{rz} \end{Bmatrix} \qquad (٤٤)$$

که در آن **P** و **R** مطابق روابط (١٦ و ١٥) تعریف می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنها پارامتر مجهول برای تعیین سطح هر مؤلفه تنش، مختصات سوم نقاط کنترلی (بردار **P**) می‌باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور تابع F(P) را برای هر مؤلفهٔ تنش به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(P_{rr}) = \sum_{l=1}^{K} (R_l^T P_{rr} - \bar{\sigma}_{rr})^2 \qquad (٤٥)$$

$$F(P_{zz}) = \sum_{l=1}^{K} (R_l^T P_{zz} - \bar{\sigma}_{zz})^2 \quad (۴۶)$$

$$F(P_{\theta\theta}) = \sum_{l=1}^{K} (R_l^T P_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 \quad (۴۷)$$

$$F(P_{rz}) = \sum_{l=1}^{K} (R_l^T P_{rz} - \bar{\sigma}_{rz})^2 \quad (۴۸)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ مؤلفهٔ تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می‌باشد. در نهایت با مشتق‌گیری از تابع F(P) نسبت به مؤلفه‌های مجهول بردار **P** و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحهٔ تنش بهبود یافته هر یک از مؤلفه‌ها به‌دست می‌آید. به‌طور مثال برای مؤلفهٔ تنش بهبود یافته $\boldsymbol{\sigma}^*_{rr}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F(P_{rr})}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow AP_{rr} = B_{rr} \Rightarrow P_{rr} = A^{-1}B_{rr} \quad (۴۹)$$

که در آن:

$$A = \sum_{i=1}^{K} R_i R_i^T \qquad ; \qquad B_{rr} = \sum_{i=1}^{K} R_i . \bar{\sigma}_{rr}$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی هر یک از مؤلفه‌های تنش، سطح مربوط به آن نیز به‌دست می‌آید. همان‌گونه که در ادامه خواهیم دید، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش به‌دست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق‌تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به‌عنوان یک تخمین‌زنندهٔ بالقوهٔ خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به‌کار رود. روش کار این تخمین‌زنندهٔ خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، به‌صورت تقریبی به یک معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

نرم خطای انرژی

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به‌صورت زیر بیان می‌شود [7]:

$$\| e \| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \bar{\sigma}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۵۰)$$

در این رابطه **σ** مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به‌دست آمده از حل تقریبی، **D** ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به این‌که در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسأله در دسترس نمی‌باشد، لذا به‌جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافتهٔ آن برای محاسبهٔ نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این‌صورت نرم خطای انرژی تقریبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

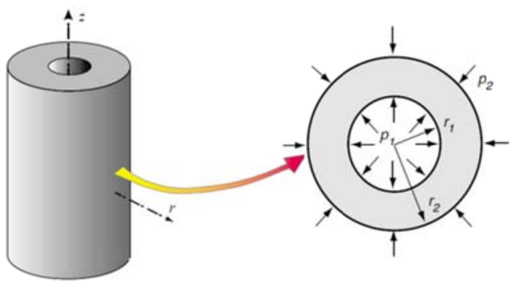
$$\| e \| \approx \| \bar{e} \| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۵۱)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

در ادامه برای بررسی کارایی این تخمین‌زنندهٔ خطا در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری به مدل‌سازی و مقایسهٔ نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق و نحوهٔ تغییرات مؤلفه‌های تنش برای دو مسأله نمونه الاستیسیته که دارای حل تحلیلی می‌باشند، پرداخته شده است.

لولهٔ بلند جدارضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

در این قسمت به بیان نتایج گرفته‌شده از مدل‌سازی یک لولهٔ بلند جدارضخیم تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت و در شرایط تقارن محوری، توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ٤).



شکل ٤ لولهٔ جدارضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

در این مسأله علاوه بر داشتن شرایط تقارن محوری، کرنش در جهت محور z نیز به‌دلیل بلند بودن طول لوله صفر در نظر گرفته می‌شود.

پارامترهای به‌کار برده شده در تحلیل این مسأله به‌صورت زیر می‌باشند:

$$r_1 = 4,\ r_2 = 6,\ P_1 = 20,\ P_2 = 10,\ E = 2\times10^5,\ \nu = 0.3$$

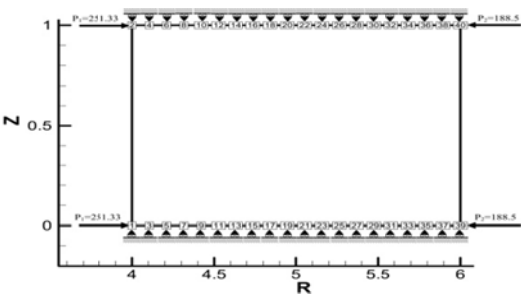
تنش‌های دقیق این مسأله با توجه به حل تحلیلی آن به‌صورت روابط (٥٤-٥٢) ارائه شده است [12].

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2}\frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad (٥٢)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2}\frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad (٥٣)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu\frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2},\ \sigma_{zr} = 0 \qquad (٥٤)$$

برای مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و ٤٠ نقطه کنترلی استفاده شده است. در شکل (٥) مختصات نقاط کنترلی و ترتیب نامگذاری آن‌ها به‌همراه شرایط مرزی اعمال شده به نقاط کنترلی مربوط نشان داده شده است.



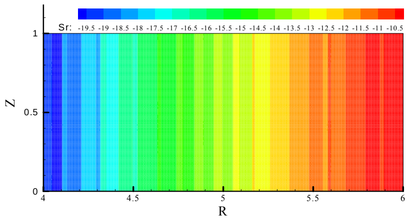
شکل ٥ نقاط کنترلی و شرایط مرزی لولهٔ جدارضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

برای نمایش بهتری از کارایی تخمین‌زنندهٔ خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [13] از توابع شکل نربز مرتبهٔ دو استفاده شده است. هم‌چنین با توجه با مرتبهٔ تابع شکل از نه نقطهٔ گوسی برای انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینهٔ تنش استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات η و ξ به‌صورت زیر می‌باشند.

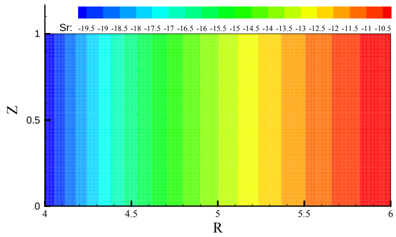
$$\eta = \{0,0,1,1\}$$

$$\xi = \left\{\begin{matrix} 0,0,0.053,0.105,0.158,0.210,0.263,0.316, \\ 0.368,0.421,0.4746,0.526,0.579,0.632, \\ 0.684,0.737,0.789,0.842,0.895,0.947,1,1 \end{matrix}\right\}$$

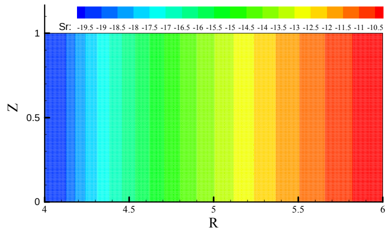
در شکل (٦)، به‌عنوان نمونه، کانتور تنش مؤلفهٔ σ_r برای حل دقیق، ایزوژئومتریک و حل بهبود یافته نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بهبود یافته تشابه بیشتری با حل دقیق نسبت به حل ایزوژئومتریک دارد.



الف) حل ایزوژئومتریک

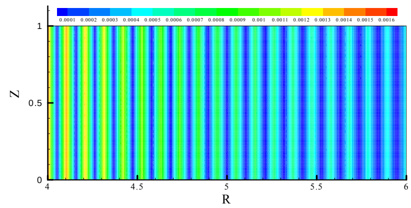


ب) حل دقیق

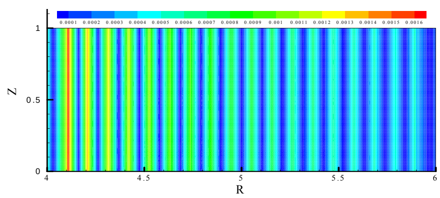


ج) حل بهبود یافته

شکل ٦ کانتور تنش مؤلفهٔ σ_r لولهٔ جدارضخیم



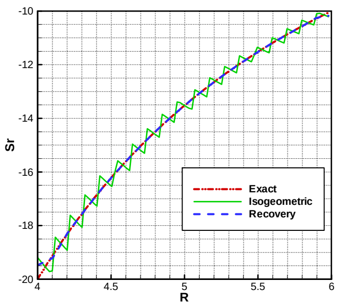
الف) نرم خطای دقیق



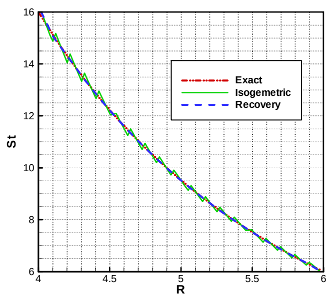
ب) نرم خطای تقریبی

شکل ۷ توزیع نرم خطای انرژی لولهٔ جدارضخیم

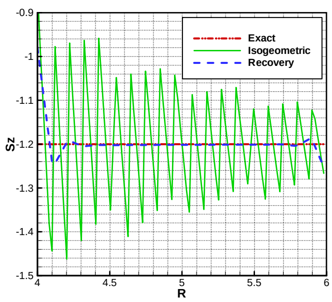
در شکل (۷) نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تشابه در نحوهٔ توزیع نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق در این مثال، نشانهٔ کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای مسائل متقارن محوری می‌باشد. به‌منظور مقایسهٔ دیگری از نحوهٔ تغییرات تنش دقیق با حل ایزوژئومتریک و بهبود یافته، به ترسیم نمودار تغییرات تنش در مسیر افقی به مختصات‌های (r,0.5) پرداخته شده است که در شکل (۸) مشاهده می‌شود.



الف) مؤلفهٔ تنش σ_r



ب) مؤلفهٔ تنش σ_θ

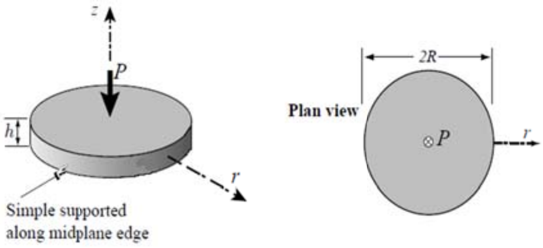


ج) مؤلفهٔ تنش σ_z

شکل ۸ نمودار تغییرات مؤلفه‌های تنش لولهٔ جدارضخیم در مسیر Z=0.5

صفحهٔ دایره‌ای‌شکل تحت بار متمرکز

مسألهٔ نمونهٔ دیگری که در این قسمت به آن پرداخته می‌شود، مدل‌سازی یک صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز P در مرکز و تکیه‌گاه‌های مفصلی در لبه‌های آن، تحت شرایط تقارن محوری می‌باشد (شکل ۹).



شکل ۹ صفحهٔ دایره‌ای‌شکل تحت بار متمرکز در مرکز

با توجه به شکل (۹)، پارامترهای به‌کار برده شده در تحلیل این مسأله به‌صورت زیر می‌باشند:

$$R = 10, \quad h = 1, \quad P = 10, \quad E = 1000, \quad \nu = 0.3$$

تنش‌های دقیق این مسأله با فرض مدل صفحه کیرشهف (Kirchhoff plate model) به‌صورت روابط (٥٤-٥٦) ارائه شده است [14].

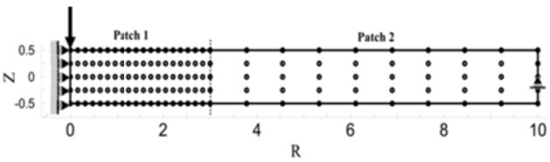
$$\sigma_r = \frac{12 M_r Z}{h^3}\ ,\ M_r = \frac{P}{4\pi}(1+\upsilon)\log\frac{R}{r} \qquad (٥٤)$$

$$\sigma_\theta = \frac{12 M_\theta Z}{h^3}, \quad M_\theta = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\upsilon)\log\frac{R}{r} + 1 - \upsilon\right] \qquad (٥٥)$$

$$\sigma_z = 0\ ,\ \sigma_{zr} = 0 \qquad (٥٦)$$

همان‌طور که در معادلات (٥٤ و ٥٥) مشاهده می‌شود، پاسخ تحلیلی این مسأله در r=0 دارای نقطهٔ تکین می‌باشد. لازم به ذکر است که معمولاً مسائل با نقطهٔ تکین، به‌علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی برای بررسی کارایی تخمین‌زننده‌های خطا به‌شمار نمی‌روند؛ اما هدف از ارائهٔ این مثال، بررسی رفتار تخمین‌زنندهٔ خطا می‌باشد. با توجه به این نکته که در نقاط تکین r=0 خطای زیادی نسبت به سایر نقاط وجود دارد، لذا یک تخمین‌زنندهٔ خطای مناسب باید به طور نسبی قادر به نمایش این توزیع خطا باشد. در صورتی که بهبود شبکه با توجه به نتایج به‌دست آمده از تخمین‌زنندهٔ خطا مورد نظر باشد، تخمین‌زنندهٔ خطایی که دارای آرایشی مناسب باشد می‌تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در اطراف نوک ترک راهنمایی کند.

برای مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به روش ایزوژئومتریک از دو ناحیه و ١٤٥ نقطهٔ کنترلی استفاده شده است. در شکل (۱۰) مختصات نقاط کنترلی در هر ناحیه و شرایط مرزی اعمال شده به آن‌ها نشان داده شده است.



شکل ۱۰ نقاط کنترلی و شرایط مرزی صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز در مرکز

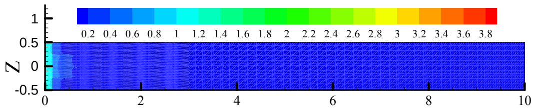
مشابه مثال قبل، در این مسأله نیز از توابع شکل نربز مرتبهٔ دو و نه نقطهٔ گوسی برای انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینهٔ تنش در هر ناحیه استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات η و ξ به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\eta = \{0,0,0.25, 0.5,0.75,1,1\}$$

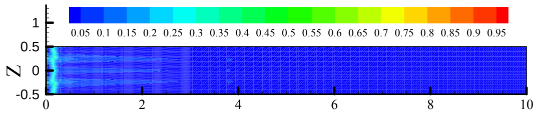
$$\xi = \begin{Bmatrix} 0,0,0.05,0.11,0.16,0.21,0.26,0.32, \\ 0.37,0.42,0.47,0.53,0.58,0.63,0.68, \\ 0.74,0.79,0.84,0.89,0.95,1,1 \end{Bmatrix}$$

در شکل (۱۱) نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی

دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در توزیع نرم خطای تقریبی نیز میزان خطا در r=0 نسبت به سایر نقاط بیشتر نشان داده شده است که نشان‌دهندهٔ رفتار مناسب تخمین‌زنندهٔ خطا می‌باشد.

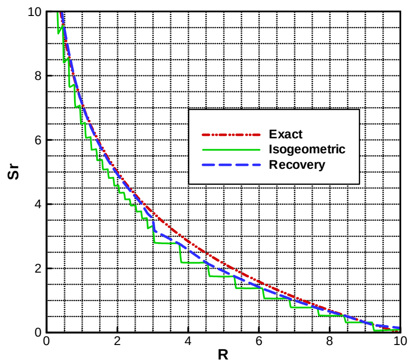


الف) نرم خطای دقیق

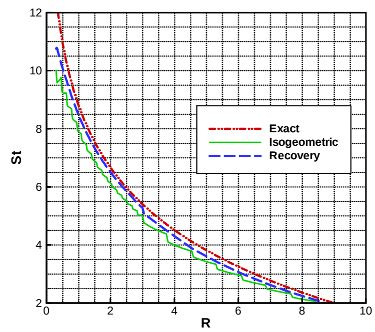


ب) نرم خطای تقریبی

شکل ۱۱ توزیع نرم خطای انرژی صفحهٔ دایره‌ای

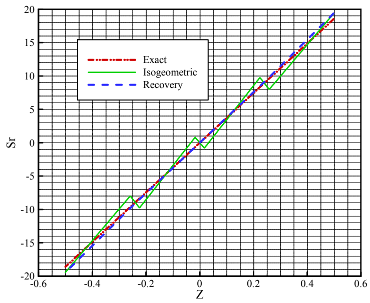


الف) مؤلفهٔ تنش σ_r

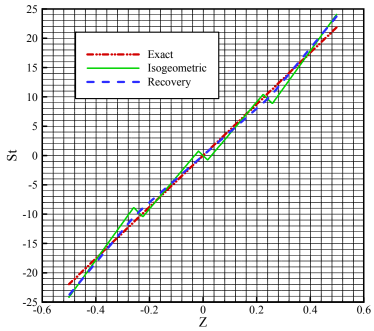


ب) مؤلفهٔ تنش σ_θ

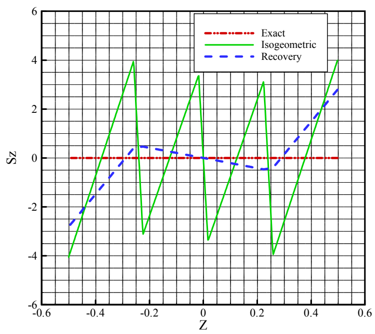
شکل ۱۲ نمودار تغییرات مؤلفه‌های تنش صفحهٔ دایره‌ای در مسیر Z=0.25



الف) مؤلفهٔ تنش σ_r



ب) مؤلفهٔ تنش σ_θ



ج) مؤلفهٔ تنش σ_z

شکل ۱۳ نمودار تغییرات مؤلفه‌های تنش صفحهٔ دایره‌ای در مسیر R=0.5

در شکل‌های (۱۳ و ۱۲) به‌منظور مقایسهٔ نحوهٔ تغییرات تنش دقیق با حل ایزوژئومتریک و بهبود یافته، به ترسیم نمودار تغییرات تنش در مسیر افقی به مختصات‌های (r,0.25) و عمودی (0.5,z) پرداخته شده است. لازم به ذکر است که به علت تغییرات زیاد حل تحلیلی در نزدیکی r=0 نمودارها از r=0.3 به بعد ترسیم شده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به توسعهٔ روش SRI در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری و تأثیر نقاط فوق هم‌گرا در تشکیل سطح تنش بهبود یافته پرداخته شد. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در مسائل حل شده در این پژوهش و هم‌چنین نزدیکی نمودارهای مؤلفه‌های تنش بهبود یافته به حل دقیق، نسبت به مؤلفه‌های تنش ایزوژئومتریک در این مسائل، می‌توان بیان نمود که نقاط فوق هم‌گرای تنش در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری نیز از کارایی مناسبی برخوردار می‌باشند و می‌توان از آنها به‌عنوان راه حلی ساده و مهندسی برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل مسائل متقارن محوری به روش ایزوژئومتریک نام برد.

فهرست علائم

بردار گرهی در فضای پارامتری ξ	Ξ
بردار گرهی در فضای پارامتری η	$\mathcal{H}$
iامین تابع پایه‌ای بی-اسپلاین از درجه صفر	$N_{i,0}(\xi)$
iامین تابع پایه‌ای بی-اسپلاین از درجه P	$N_{i,p}(\xi)$
منحنی مربوط به توابع پایهٔ بی- اسپلاین و یا نربز	$C(\xi)$
سطح تعریف شده توسط توابع پایهٔ بی- اسپلاین و یا نربز	$S(\xi,\eta)$
توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای نربز	$R_{i,j}(\xi,\eta)$
بردار تغییرمکان هر نقطه داخل زیر دامنهٔ نربز	$\hat{u}$
ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز	$\bar{R}$
ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی سطح نربز	$\bar{P}$
بردار کرنش در مسائل متقارن محوری	ε
عملگر دیفرانسیل در مسائل متقارن محوری	L
ماتریس کرنش واحد در مسائل متقارن محوری	B
بردار تنش در مسائل متقارن محوری	σ
ماتریس خواص ارتجاعی مصالح در مسائل متقارن محوری	D
بردار تغییرمکان مجازی	δu
بردار کرنش مجازی	$\delta\varepsilon$
ماتریس ضرایب (سختی) مربوط به کل دامنهٔ مسأله	K
نیروهای خارجی وارد بر زیردامنه	F
ماتریس ضرایب (سختی) مربوط به هر زیردامنهٔ نربز	K_{patch}
ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات از r و z (فضای فیزیکی مسأله) به ξ و η (فضای پارامتری نربز)	J_1
ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات از ξ و η (فضای پارامتری نربز) به r و s (فضای پارامتری انتگرال‌گیری)	J_2
بردار تنش بهبود یافته در مسائل متقارن محوری	$\boldsymbol{\sigma}^*$
نرم خطای انرژی دقیق	$\lVert e \rVert$
نرم خطای انرژی تقریبی	$\lVert \bar{e} \rVert$
بردار مؤلفهٔ مجهول نقاط کنترلی نربز تنش α	P_α

مراجع

1. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis", *Int. J. numer. Methods Engrg*., Vol. 41, pp. 435-458, (1998).
2. Hollig, K., Reif, U. and Wipper, J., "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 39, 2, pp. 442-462, (2001).
3. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element", *Int. J. numer. Methods Engrg.*, Vol. 57, pp. 1145-1175, (2003).

4. Hughes, T.G.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Comput. Method Appl. Mech. Engrg*, Vol. 194, pp. 4135–4195, (2005).
5. Hassani, B., Ganjali, A. and Tavakkoli, M., "*An* isogeometrical approach to error estimation and stress recovery", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 31, pp. 101-109, (2011).
6. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA", Wiley, (2009).
7. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z., "*The Finite Element Method*", 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).
8. Rogers D.F., "*An Introduction to NURBS*", Morgan Kaufmann Publishers, (2001).
9. Piegl, L. and Tiller, W., "The NURBS Book", 2nd ed., Springer-Verlag, New York, (1997).
10. Hughes, T.J.R., Reali, A. and Sangalli, G., "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 199, pp. 5-8: 301-313, (2010).
11. Barlow, J., "Optimal stress locations in finite element models", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 243–251, (1976).
12. Sadd, M.H., "ELASTICITY:Theory, Applications, and Numerics", Elsevier Butterworth–Heinemann, (2005).
13. Gratsch, T. and Bathe, KJ, "A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis", *Computers and Structures*, Vol. 83, pp. 235–265, (2005).
14. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., "*Theory of Plates and Shells*", 2nd ed., McGraw-Hill, (1959).