

A High-Accuracy Method for Solving the Differential-Algebraic Equations Arising in Mechanical Systems

Research Article

Faezeh Kalantari¹, Mohammad Ali Mehrpouya² , Nabi Chegini³

DOI: [10.22067/jacsm.2023.82824.1186](https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.82824.1186)

1- Introduction

While the kinematic and dynamic modeling of mechanical systems is well developed, the numerical solution of the governing equations of many of these models is still a large field under investigation. In any constrained mechanical system, the connections of the connected bodies restrict their relative movement. Therefore, the governing equations of the model usually form a system of differential-algebraic equations that includes both differential and algebraic equations. It should be noted that, unlike the analytical and numerical solutions of differential equations, the analytical and numerical behavior of differential-algebraic equations is more complex and completely different from differential equations. In this paper, a high-accuracy method for solving the system of differential-algebraic equations arising in mechanical systems is presented. The presented method is based on the use of a pseudospectral method that will transform the solution of the system of differential-algebraic equations into the solution of a system of algebraic equations. Next, an optimization technique is utilized to facilitate solving the obtained system of algebraic equations. In the end, some numerical experiments are performed on several benchmark problems to show the accuracy and applicability of the method.

2- Problem Statement

In this paper, differential-algebraic equations are investigated in the most common form of its representation, which is the following form

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{cases} \quad t \in [t_0, T],$$

And is called a nonlinear semi-explicit form. Here, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_p(t)]^T$ and $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), \dots, z_q(t)]^T$ are differential and algebraic functions, respectively, and $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ and $\mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ are continuously

differentiable functions. Furthermore, the initial and boundary conditions should be placed next to the system of nonlinear semi-explicit differential-algebraic equations.

3- Proposed Method

To implement the proposed method for solving the system of nonlinear semi-explicit differential equations, first, suppose that

$\hat{\theta}_i = (T - t_0)\theta_i + (T + t_0) / 2$, $i = 1, \dots, n$ for a given positive integer n , are the shifted Legendre-Gauss-Radau (LGR) points to the interval $[t_0, T]$. By adding the point $\hat{\theta}_{n+1} = T$, a set of $n + 1$ points

$$\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{n+1} = T\},$$

is constituted which are used for approximating $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ and $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$. For this purpose, we approximate the k -th component of $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ and $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ as

$$\begin{aligned} y_k(t) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} c_{k,i} \hat{\phi}_i(t), \quad k = 1, \dots, p, \\ z_k(t) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} d_{k,i} \hat{\phi}_i(t), \quad k = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

in which

$$\hat{\phi}_i(t) = \phi_i\left(\frac{2}{T - t_0}t - \frac{T + t_0}{T - t_0}\right),$$

are the Lagrange polynomials based on the shifted LGR points to the interval $[t_0, T]$. In general, we can write

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t), \\ \mathbf{Z}(t) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t), \end{aligned}$$

in which

*Manuscript received: June 7, 2023. Revised, October 14, 2023, Accepted, November 12, 2023.

¹ M.Sc., Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran

² Corresponding Author: Associate Professor, Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran.

Email: mehrpouya@tafreshu.ac.ir.

³ Associate Professor, Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{y}(\hat{\theta}_i) = [y_1(\hat{\theta}_i), \dots, y_{N_y}(\hat{\theta}_i)]^T,$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{z}(\hat{\theta}_i) = [z_1(\hat{\theta}_i), \dots, z_{N_z}(\hat{\theta}_i)]^T,$$

are unknown parameters. Now, we can approximate \mathbf{y}' as

$$\mathbf{y}'(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(t).$$

By substituting these approximations into the system of nonlinear semi-explicit differential equations, and then collocating them in just $\hat{\theta}_j$, $j = 1, \dots, n$, we have

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(\hat{\theta}_j) \simeq \mathbf{f}(\hat{\theta}_j, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j)), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$0 \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_j, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j)), \quad j = 1, \dots, n.$$

In addition, by discretizing the initial and boundary conditions of the problem, we have

$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_1 = t_0) \simeq \mathbf{y}_0,$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_1 = t_0, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1 = t_0), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1 = t_0)),$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_{n+1} = T, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1} = T), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1} = T)).$$

It is worth noting that although $\hat{\theta}_{n+1} = T$ is used beside the shifted LGR points to approximate $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ and $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$, we do not use this point for the collocation process. Now, with the Kronecker property, we have

$$\frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{ij} \simeq \mathbf{f}(\hat{\theta}_j, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_j, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

in which

$$d_{ij} = \hat{\phi}_i'(\hat{\theta}_j), \quad i = 1, \dots, n + 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

is the (i, j) -th component of the $n \times 1$ by $n \times 1$ matrix \mathbf{D} , which is called the differentiation matrix. Furthermore, using the Kronecker property, we also have

$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_1 = t_0) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1) = \mathbf{c}_1,$$

$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_{n+1} = T) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1}) = \mathbf{c}_{n+1},$$

$$\mathbf{z}(\hat{\theta}_{n+1} = T) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1}) = \mathbf{d}_{n+1},$$

and therefore,

$$\mathbf{c}_1 \simeq \mathbf{y}_0,$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_1 = t_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1),$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_{n+1} = T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}).$$

Finally, the system of nonlinear semi-explicit differential equations beside its initial and boundary conditions is discretized to the following system of nonlinear algebraic equations

$$\mathcal{F} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n+1} \\ \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{i1} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{in} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{c}_1 - \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{g}(T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

in which, to make it easier to solve, we transform it into the following optimization problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Min} \quad J = (\mathbf{c}_1 - \mathbf{y}_0)^2 + (\mathbf{g}(T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}))^2 \\ \text{S.t.} \\ \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{i1} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) = \mathbf{0}. \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

After solving the optimization problem, the unknown parameters $\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i, i = 1, \dots, n + 1$, are obtained, and solving the target system of nonlinear semi-explicit differential equations will be completed.

4- Conclusion

In this paper, a Radau pseudospectral method based on using the Legendre-Gauss-Radau points was applied, along with optimization techniques, for solving the system of differential-algebraic equations appearing in mechanical systems. Four illustrative benchmark examples were given to demonstrate the validity and applicability of the proposed method. Compared to the existing methods for solving this class of problems, it can be said that the proposed method has very good accuracy, and it can satisfy the algebraic equations appearing in the problem without the occurrence of the drift-off effects. Furthermore, using the optimization technique to solve the system of algebraic equations, resulting from the implementation of the method, makes it possible to implement the proposed method without any distress of finding a good initial guess for the unknown parameters.



ارائه یک روش عددی از مرتبه دقت بالا برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی*

مقاله پژوهشی

فائزه کلانتری^(۱) محمدعلی مهرپویا^(۲) نبی چگینی^(۳)

DOI: 10.22067/jacsm.2023.82824.1186

چکیده در حالی که مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی سیستم‌های مکانیکی به خوبی توسعه یافته، لکن حل عددی معادلات حاکم بر بسیاری از این مدل‌ها هنوز یک زمینه بزرگ در حال بررسی است. از آنجایی که در هر سیستم مکانیکی محدود، اتصالات اجسام متصل، حرکت نسبی خود را محدود می‌نمایند، لذا معادلات حاکم بر مدل، معمولاً دستگاهی از معادلات دیفرانسیل-جبری را تشکیل می‌دهند که هم معادلات دیفرانسیلی و هم معادلات جبری را شامل می‌شود. لازم به ذکر است که برخلاف حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیلی، رفتار تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل-جبری پیچیده‌تر و کاملاً متفاوت از معادلات دیفرانسیلی است. در این مقاله، یک روش عددی از مرتبه دقت بالا جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی ارائه می‌گردد. روش ارائه شده مبتنی بر استفاده از یک روش شبه‌طیفی است به طوری که حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری حاکم بر مدل را به حل یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل خواهد نمود و برای حل دستگاه جبری به دست آمده، از تکنیک‌های بهینه‌سازی استفاده خواهد شد. در انتها برخی آزمایش‌های عددی روی چند مسئله معیارسنج انجام می‌گیرد تا دقت و کاربردی بودن روش نشان داده شود.

واژه‌های کلیدی سیستم‌های مکانیکی، معادلات دیفرانسیل-جبری، روش‌های عددی، روش شبه‌طیفی.

A High Accuracy Method for Solving the Differential-Algebraic Equations Arising in Mechanical Systems

Faezeh Kalantari Mohammad Ali Mehrpouya Nabi Chegini

Abstract While the kinematic and dynamic modeling of mechanical systems is well developed, the numerical solution of the governing equations of many of these models is still a large field under investigation. Since in any constrained mechanical system, the connections of the connected bodies restrict their relative movement, therefore the governing equations of the model usually form a system of differential-algebraic equations that includes both differential and algebraic equations. It should be noted that, unlike the analytical and numerical solution of differential equations, the analytical and numerical behavior of differential-algebraic equations is more complex and completely different from differential equations. In this paper, a high accuracy method for solving the system of differential-algebraic equations arising in mechanical systems is presented. The presented method is based on the use of a pseudospectral method that will transform the solution of the system of differential-algebraic equations into the solution of a system of algebraic equations. Then, an optimization technique is utilized to facilitate solving the obtained system of algebraic equations. At the end, some numerical experiments are performed on several benchmark problems to show the accuracy and applicability of the method.

Key Words Mechanical Systems, Differential-Algebraic Equations, Numerical Methods, Pseudospectral Method

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۲/۳/۱۷ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۲/۸/۲۱ می‌باشد.

(۱) کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش.

(۲) نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش.

(۳) دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل یکی از ابزارهای مهم در مدل‌سازی ریاضی می‌باشند که بسیاری از قوانین طبیعت مانند قوانین موجود در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی، طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیلی می‌یابند. معادلات دیفرانسیل در هندسه و مکانیک نیز کاربرد زیادی دارند. به عنوان نمونه، حرکت جسم به وسیله سرعت و مکان آن در زمان‌های مختلف با استفاده از معادلات دیفرانسیلی توصیف می‌شود. معادلات دیفرانسیل-جبری نیز که در واقع مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری می‌باشند، کاربردهای زیادی در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی [1,2]، سیستم‌های مکانیکی [3]، سیستم‌های قدرت [4]، شبیه‌سازی فرایندهای شیمیایی [5] و مسایل کنترل بهینه [6] دارند. علاوه بر این، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش خطوط (Method of Lines) و گسسته‌سازی مشتقات مکانی مثلًا با استفاده از روش‌های اجزا (Finite Element Method) یا تفاضلات متناهی (Finite Difference Method)، می‌تواند به معادلات دیفرانسیل-جبری منجر شود [3-7]. چنانچه اشاره گردید، یکی از کاربردهای وسیع معادلات دیفرانسیل-جبری در سیستم‌های مکانیکی است. امروزه سیستم‌های مکانیکی در بسیاری از کاربردها مانند دینامیک خودرو، هوانوردی، بیومکانیک و رباتیک مورد استفاده قرار می‌گیرند. به لحاظ دینامیکی، یک سیستم مکانیکی به سیستمی اطلاق می‌گردد که در آن تعدادی از نقاط جرمی و بدنه‌های صلب یا الاستیکی با محدودیت‌هایی از انواع مختلف مانند اتصالات، فنرها، دمپرها و محرک‌ها به یکدیگر متصل شده باشند. در این گونه از سیستم‌ها، معادلات حرکت معمولاً دستگاهی از معادلات دیفرانسیل-جبری غیرخطی را تشکیل می‌دهند. علاقه‌مندان به نحوه مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل-جبری، می‌توانند به فصل چهارم از مرجع [3] مراجعه نمایند.

لازم به ذکر است که یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل-جبری به کمک مفهومی تحت عنوان اندیس یا شاخص (Index) تعیین و شناخته می‌شود و این مفهوم نقش مهمی را در

تجزیه و تحلیل و طبقه‌بندی این مسایل به عهده دارد. در نحوه شکل‌گیری چنین مفهومی، دیده شده است که کلاس‌های معینی از معادلات دیفرانسیل-جبری در حل، مشکلات جزئی ایجاد می‌نمایند، در حالی که فائق آمدن بر مشکلات حل کلاس‌هایی دیگر از این معادلات، دشوارتر است. لذا طبقه‌بندی و کلاس‌بندی این معادلات با توجه به مشکلات ناشی از حل تحلیلی یا عددی آن‌ها امری ضروری بوده است. این طبقه‌بندی با معرفی تعاریف مختلف و متفاوتی از مفهومی تحت عنوان اندیس یا شاخص در کتب و مقالات به ثبت رسیده که در حقیقت معیاری از دشواری در حل معادلات دیفرانسیل-جبری را نشان می‌دهند. از مهم‌ترین نمونه‌های اندیس می‌توان به اندیس مشتق (Differentiation Index) [8]، اندیس آشفتگی (Perturbation Index) [9]، اندیس غریبگی (Strangeness Index) [10] و اندیس قابلیت کشش (Tractability Index) [11] اشاره کرد [12] که در این میان به کارگیری اندیس مشتق برای معادلات دیفرانسیل-جبری رایج‌تر می‌باشد. در این مقاله، ما نیز اندیس مشتق را در مسایل به کار گرفته‌ایم. تعداد دفعاتی که از یک معادله دیفرانسیل-جبری مشتق گرفته می‌شود تا به یک معادله دیفرانسیلی تبدیل گردد را، اندیس مشتق آن معادله دیفرانسیل-جبری می‌نامند. به طور معمول معادلات دیفرانسیل-جبری دارای اندیس‌های ۱، ۲، ۳ و بالاتر می‌باشند. در مرجع [13] اشاره شده است که حل معادلات دیفرانسیل-جبری دارای اندیس‌های بالاتر از یک، می‌تواند بسیار دشوار باشد. به دلیل پیچیدگی که عمدتاً به دلیل وجود معادلات جبری در حل معادلات دیفرانسیل-جبری به وجود می‌آید، همواره حل آن‌ها مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است. از طرفی همانند معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری، حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل-جبری نیز به جز در موارد خاص امکان‌پذیر نیست. لذا نیاز به روش‌های عددی مناسب برای حل این گونه معادلات همواره احساس می‌شود. لازم به ذکر است که بیشتر روش‌های عددی موجود در حل معادلات دیفرانسیل-جبری مبتنی بر استفاده از روش‌هایی کلاسیک همچون روش اولر پسرو (Backward Euler Method) [13]، روش مشتق‌گیری پسرو (Backward Differentiation Method)

(Radau Pseudospectral Method)، مبتنی بر استفاده از نقاط لژاندر-گائوس-رادائو (Legendre-Gauss-Radau) در فرایند هم‌مکانی، که در واقع به نوعی یک روش هم‌مکانی متعامد (Orthogonal Collocation Method) نیز محسوب می‌شود، جهت حل عددی این دسته از معادلات استفاده کنیم و برای حل دستگاه جبری نهایی به دست آمده از پیاده‌سازی این روش، از تجربیات به کارگیری تکنیک‌های بهینه‌سازی که در مرجع [24] به کار رفته است، بهره بگیریم.

این مقاله در چند بخش طراحی شده است: بخش ۲، به معرفی معادلات دیفرانسیل-جبری در کلی‌ترین و رایج‌ترین فرم خواهد پرداخت. در بخش ۳، به معرفی روش شبه‌طیفی رادائویی و نحوه عملکرد آن در گسسته‌سازی و در نهایت حل یک معادله دیفرانسیل-جبری می‌پردازیم. بخش ۴، اختصاص به پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی چند مسئله معیارسنج ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی و بیان مزایای روش پیشنهادی خواهد داشت.

بیان مسئله، معادلات دیفرانسیل-جبری در کلی‌ترین و رایج‌ترین حالت

کلی‌ترین شکل نمایش یک معادله دیفرانسیل-جبری، فرمی به صورت:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

می‌باشد که به آن یک فرم تمام‌ضمنی غیرخطی اطلاق شده و در آن $\mathbf{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ و $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$ ماتریسی منفرد (Singular) می‌باشد [13]. در این مقاله قصد داریم تا به بررسی معادلات دیفرانسیل-جبری در رایج‌ترین فرم نمایش آن که فرمی به صورت:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \quad (2)$$

است و به آن یک فرم نیمه‌صریح غیرخطی اطلاق می‌گردد، بپردازیم. باید توجه داشت که در فرم نمایش (۲)

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_p(t)]^T$$

$$\mathbf{z}(t) = [z_1(t), \dots, z_q(t)]^T$$

$$\mathbf{g}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q \quad \text{و} \quad \mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$$

توابعی برداری و به طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند. در ضمن

[14]، روش‌های رونگه-کوتا (Runge-Kutta Methods) [9,15]، روش تقریب پده (Pade Approximation Method) [16] و روش تجزیه آدومیان (Adomian Decomposition Method) [17] بوده و این روش‌ها همواره در معرض مشکلاتی از قبیل پدیده کاهش مرتبه (Order Reduction Phenomena)، اثرات رهاشدگی (Drift-off Effects) و ناپایداری می‌باشند [13].

در این مقاله به دنبال ارائه یک روش عددی از مرتبه دقت بالا برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی هستیم. روش پیشنهادی ما یک روش شبه‌طیفی از خانواده روش‌های طیفی است که دارای سابقه‌ی بسیار خوبی در حل عددی معادلات دیفرانسیلی می‌باشد [18-20]. لازم به ذکر است که چنانچه یک معادله دیفرانسیلی که مسئله و جواب آن هموار باشد را بخواهیم با دقت بالا روی یک دامنه ساده حل کنیم، در این صورت روش‌های شبه‌طیفی بهترین انتخاب خواهند بود [21]. برای دقت‌های پایین‌تر، این روش‌ها در مقایسه با روش‌های اجزا و تفاضلات متناهی از زمان و حافظه کمتری برای اجرا، برخوردار هستند. روش‌های شبه‌طیفی در یک تقسیم بندی دیگر به خانواده‌ی روش‌های هم‌مکانی (Collocation Methods) نیز تعلق دارند که خانواده‌ای بزرگ از روش‌های حل عددی برای معادلات دیفرانسیلی، معادلات انتگرالی و سایر معادلات محسوب می‌گردند. متأسفانه دامنه ورود روش‌های شبه‌طیفی به حل عددی معادلات دیفرانسیل-جبری به گستردگی دامنه ورود این روش‌ها به حل عددی سایر معادلات نیست و می‌توان در این زمینه به پژوهش‌هایی اندک از محققانی همچون قنبری و قریشی [12]، حسینی [22] و بابلیان و حسینی [23] اشاره نمود که در همه این تحقیقات معادله دیفرانسیل-جبری به صورت خطی در نظر گرفته شده است. یک دلیل مهم برای این امر، دشواری حل دستگاه معادلات جبری نهایی حاصل از پیاده‌سازی روش‌های شبه‌طیفی در حل معادلات دیفرانسیل-جبری بوده که به دلیل وجود معادلات جبری ظاهر شده در معادلات دیفرانسیل-جبری ایجاد می‌گردد.

در این مقاله قصد داریم تا از یک روش شبه‌طیفی رادائویی

شرایط اولیه و مرزی به صورت:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(t_0, \mathbf{y}(t_0), \mathbf{z}(t_0)) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(T, \mathbf{y}(T), \mathbf{z}(T)) \end{aligned} \tag{۳}$$

برای این کار فرض کنیم شامل n نقطه‌ی لژاندر-گوس-رادائویی انتقال داده شده به بازه $[t_0, T]$ باشد (در واقع θ_i ها همان نقاط لژاندر-گوس-لوباتو در بازه $[-1, +1]$ و $\hat{\theta}_i$ ها نقاط انتقال داده شده به بازه $[t_0, T]$ هستند). با افزودن نقطه $\hat{\theta}_{n+1} = T$ به این مجموعه، به یک مجموعه شامل $n+1$ نقطه $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{n+1} = T\}$ می‌رسیم که از این مجموعه نقاط برای تقریب $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ استفاده خواهد شد. به این منظور و برای تقریب k -امین درایه‌ی $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_k(t) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} c_{k,i} \hat{\phi}_i(t), \quad k = 1, \dots, p \\ z_k(t) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} d_{k,i} \hat{\phi}_i(t), \quad k = 1, \dots, q \end{aligned}$$

که در آن:

$$\hat{\phi}_i(t) = \phi_i\left(\frac{2}{T-t_0}t - \frac{T+t_0}{T-t_0}\right)$$

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مبتنی بر این $n+1$ نقطه انتقال داده شده می‌باشند. لازم به ذکر است که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ گذرنده از $n+1$ نقطه $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{n+1} = T\}$ چند جمله‌ای‌هایی به صورت کلی:

$$\phi_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - \theta_j}{\theta_i - \theta_j}$$

بوده که دارای خاصیتی تحت عنوان خاصیت دلتای کرونکر (Kronecker Property) هستند. یعنی به عبارت دیگر:

$$\phi_i(\theta_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{۴}$$

پس در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\mathbf{y}(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t) \tag{۵}$$

$$\mathbf{z}(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \mathbf{y}(\hat{\theta}_i) = [y_1(\hat{\theta}_i), \dots, y_{N_Y}(\hat{\theta}_i)]^T \\ \mathbf{d}_i &= \mathbf{z}(\hat{\theta}_i) = [z_1(\hat{\theta}_i), \dots, z_{N_Z}(\hat{\theta}_i)]^T \end{aligned}$$

ضرایب مجهول می‌باشند. اکنون با تقریب \mathbf{y}' به صورت:

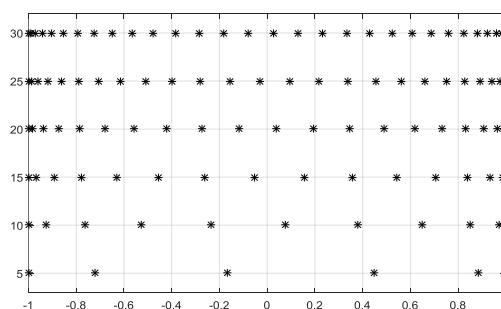
$$\mathbf{y}'(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}'_i(t)$$

در کنار دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری (۲) قرار خواهند گرفت. همچنین متغیرها یا به عبارتی توابع $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ به ترتیب توابع دیفرانسیلی و توابع جبری و معادلات $\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ و $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ به ترتیب معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری مسئله (۲) محسوب می‌شوند.

معرفی روش شبه‌طیفی رادائویی

برای طرح روش پیشنهادی، اولین گام معرفی مجموعه‌ای از نقاط، تحت عنوان نقاط لژاندر-گوس-رادائویی است که نقشی اساسی در شکل‌گیری روش را داشته و برای درک بهتر از آن‌ها، در شکل (۱) نحوه توزیعشان به ازای M های مختلف به تصویر کشیده شده است. این نقاط در واقع صفرها یا همان ریشه‌های توابع لژاندر $\{P_{M-1}(t) + P_M(t)\}$ بوده و همان گونه که در شکل پیداست، توزیعشان در بازه $[-1, +1]$ می‌باشد. در روش شبه‌طیفی رادائویی از این نقاط هم در گسسته‌سازی مسئله و هم در فرایند هم‌مکانی استفاده خواهیم کرد. لازم به ذکر است که توابع یا همان چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌هایی متعامد با انبوهی از خواص و کاربردهای مختلف در ریاضیات و علوم مهندسی می‌باشند که به کمک روابط بازگشتی $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ و

$$P_{M+1}(x) = \frac{2M+1}{M+1} x P_M(x) - \frac{M}{M+1} P_{M-1}(x), \quad M = 1, 2, \dots$$



شکل ۱ نمایش توزیع نقاط لژاندر-گوس-رادائویی

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\hat{\theta}_1 = t_0) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1) = \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{y}(\hat{\theta}_{n+1} = T) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1}) = \mathbf{c}_{n+1} \\ \mathbf{z}(\hat{\theta}_{n+1} = T) &\simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1}) = \mathbf{d}_{n+1} \end{aligned}$$

و لذا شرایط اولیه و مرزی (۳) تبدیل به شرایط زیر خواهند شد:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &\simeq \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} &\simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_1 = t_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \mathbf{0} &\simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_{n+1} = T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}) \end{aligned}$$

و در نهایت، مسئله (۲) به همراه شرایط اولیه و مرزی (۳) به یک دستگاه از معادلات جبری غیر خطی به صورت زیر گسسته خواهد گردید:

$$\mathcal{F} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n+1} \\ \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{T-t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{i1} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ \frac{2}{T-t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{in} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{c}_1 - \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{g}(T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (7)$$

که پس از حل آن، مجهولات $\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i, i = 1, \dots, n+1$ به دست آمده و یک تقریب برای جواب مسئله (۲) به دست خواهد آمد. متأسفانه، حل عددی دستگاه معادلات جبری (۷) بدون داشتن مقادیر اولیه (حدس اولیه (Initial Guess)) دقیق برای پارامترهای مجهول، امکان‌پذیر نخواهد بود، یا در صورت امکان، هم‌گرایی به سختی حاصل خواهد شد. لذا، برای به دست آوردن یک حدس اولیه مناسب جهت هم‌گرایی روش حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده، باید از تکنیک دیگری استفاده گردد که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت.

و سپس جای‌گذاری روابط به دست آمده در مسئله (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(t) \simeq \mathbf{f}(t, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t)), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ 0 \simeq \mathbf{g}(t, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t)), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (6)$$

تنها کاری که باقی مانده، گسسته‌سازی دستگاه معادلات (۶) می‌باشد که این کار به کمک فرایند هم‌مکان کردن طرفین معادلات در نقاط لژاندر-گائوس-رادائویی انجام خواهد گرفت. بدین منظور و در نهایت با پیاده‌سازی فرایند هم‌مکانی، آن هم فقط در نقاط لژاندر-گائوس-رادائویی $\hat{\theta}_j, j = 1, \dots, n$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(\hat{\theta}_j) &\simeq \mathbf{f}(\hat{\theta}_j, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j)), \quad j = 1, \dots, n \\ 0 &\simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_j, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j)), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

همچنین برای شرایط اولیه و مرزی (۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\hat{\theta}_1 = t_0) &\simeq \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} &\simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_1 = t_0, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1 = t_0), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1 = t_0)) \\ \mathbf{0} &\simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_{n+1} = T, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1} = T), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1} = T)) \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که در روش پیشنهادی، علی‌رغم استفاده از نقطه $\hat{\theta}_{n+1} = T$ در کنار سایر نقاط لژاندر-گائوس-رادائویی به منظور تقریب $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ ، از این نقطه در فرایند هم‌مکانی استفاده نمی‌شود و این نکته به کار رفته در روش پیشنهادی ما می‌باشد. اکنون به کمک خاصیت دلتای کرونگر (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T-t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{ij} &\simeq \mathbf{f}(\hat{\theta}_j, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \\ \mathbf{0} &\simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_j, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

که در آن

$$d_{ij} = \hat{\phi}_i'(\hat{\theta}_j), \quad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, n$$

$\mathbf{D}, (i, j)$ -امین درایه از ماتریس $(n+1) \times (n+1)$ می‌باشد که به عنوان ماتریس مشتق (Differentiation Matrix) شناخته می‌شود. همچنین مجدداً با استفاده از خاصیت دلتای کرونگر (۴) خواهیم داشت:

انتخاب حدس اولیه مناسب به کمک تکنیک‌های بهینه‌سازی

توجه شود که تمام پیاده‌سازی‌های انجام شده در این مقاله در محیط نرم‌افزاری Matlab و به کمک یک لب‌تاپ پنج هسته‌ای با 2.53 GHz CPU و یک سیستم 64-bit می‌باشد. در ضمن برای حل عددی دستگاه معادلات جبری (۷) به دست آمده از پیاده‌سازی روش شبه‌طیفی پیشنهادی از تابع fsolve در نرم‌افزار Matlab استفاده شده است و به منظور تأمین دقت مطلوب در این تابع، دو پارامتر تنظیمی آن یعنی TolFun و TolX روی 10^{-14} قرار داده شده. همچنین برای تأمین حدس اولیه مناسب برای این تابع، از حل مسئله بهینه‌سازی (۸)، به کمک تابع fmincon و با بهره‌گیری از الگوریتم نقطه درونی (Interior-Point Algorithm) آن استفاده نموده و پارامترهای تنظیمی این تابع یعنی TolFun، TolCon و TolX را نیز روی 10^{-14} تنظیم می‌نماییم.

مثال‌های عددی

در این بخش چهار مثال عددی ارائه خواهد گردید. این مثال‌ها در حقیقت دستگاه‌هایی از معادلات دیفرانسیل-جبری با اندیس‌های ۱، ۲، ۳ و بالاتر از ۳ می‌باشند که جهت نشان دادن دقت و کاربردی بودن روش پیشنهادی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

مثال ۱: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۱. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= t \cos(t) - y_1(t) + (1+t)y_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y_2(t) - \sin(t) &= 0 \end{aligned}$$

و شرایط اولیه نیز به صورت $\mathbf{y}(0) = [y_1(0), y_2(0)]^T = [1, 0]^T$ باشد [28]. واضح است که شرط مرزی به صورت $y_2(1) = \sin(1)$ نیز در کنار شرایط اولیه این مسئله قرار خواهد گرفت. این مسئله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + t \sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

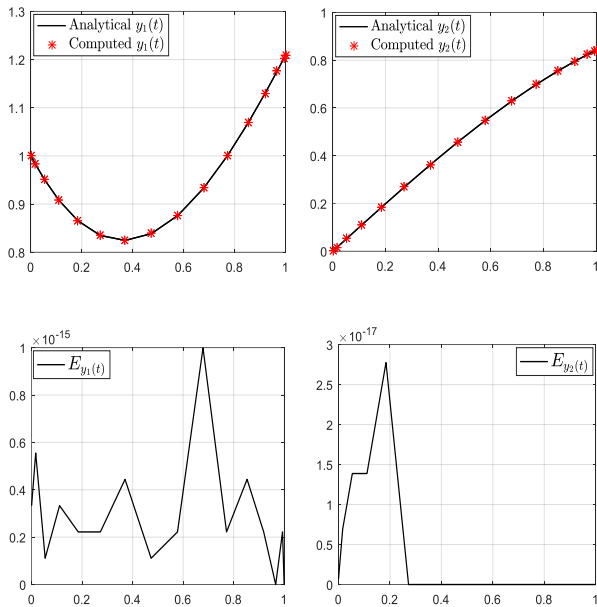
اکنون به کمک روش پیشنهادی برای حل تقریبی این مسئله دست به کار می‌شویم. جواب‌های تقریبی، تحلیلی و تابع خطا

مجدداً به دستگاه معادلات جبری به دست آمده از پیاده‌سازی روش شبه‌طیفی رادائویی بازمی‌گردیم. لازم به ذکر است که، هم‌گرا شدن در روش‌های ریشه‌یابی مانند روش‌های شبه‌نیوتن (Quasi-Newton Methods) یا نیوتنی در حل عددی دستگاه معادلات جبری (۷)، بدون داشتن مقدار اولیه خیلی دقیق برای پارامترهای مجهول، یا امکان‌پذیر نیست یا با کندی بسیار توأم خواهد بود. لذا برای رفع این مشکل، از یک تکنیک مبتنی بر بهینه‌سازی استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است که امروزه استفاده از الگوریتم‌های پیشرفته بهینه‌سازی در حل بسیاری از مدل‌های حاکم بر سیستم‌های مکانیکی رواج پیدا کرده است [25-27].

لذا ما نیز در اینجا با در نظر گرفتن مجموع مربعات معادلات شرایط اولیه و مرزی گسسته شده در فرایند پیاده‌سازی روش پیشنهادی به عنوان تابع هدف و همچنین معادلات هم‌مکانی به دست آمده از پیاده‌سازی روش به عنوان قیود مسئله بهینه‌سازی، دستگاه معادلات جبری (۷) را به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی و به صورت:

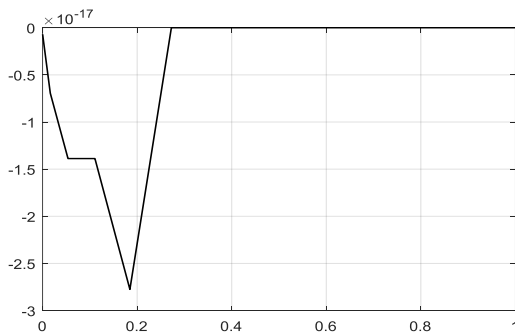
$$\begin{cases} \text{Min} & J = (\mathbf{c}_1 - \mathbf{y}_0)^2 + (\mathbf{g}(T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}))^2 \\ \text{S.t.} & \\ & \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{i1} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) = 0 \\ & \vdots \\ & \mathbf{g}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

در نظر می‌گیریم. به بیان دیگر، حل دستگاه معادلات جبری (۷) را به حل مسئله بهینه‌سازی (۸) تبدیل می‌نماییم. از آنجایی که، حل مسئله بهینه‌سازی (۸) که توسط الگوریتم‌های پیشرفته بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد، به حدس اولیه حساسیت کمتری دارد، لذا حل آن به مراتب از حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به کمک روش‌های ریشه‌یابی حساس به حدس اولیه ساده‌تر خواهد بود. لذا در نهایت، از حل مسئله بهینه‌سازی (۸) یک حدس اولیه مناسب برای پارامترهای مجهول پیدا شده و لذا حل دستگاه معادلات جبری (۷) امکان‌پذیر خواهد شد.



شکل ۲ نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای بدست آمده از روش

پیشنهادی در مثال ۱

شکل ۳ نمودار تقریبی تابع $y_2(t) - \sin(t)$ به کار رفته در سمت چپ

معادله جبری مسئله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۱

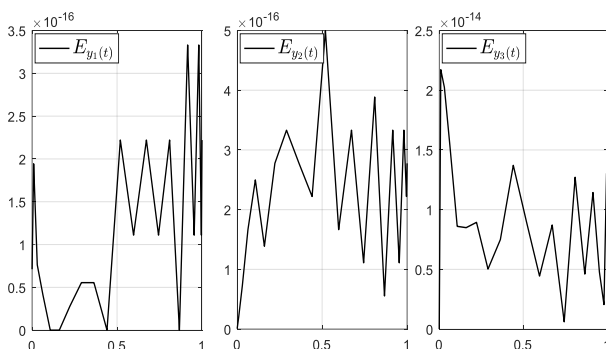
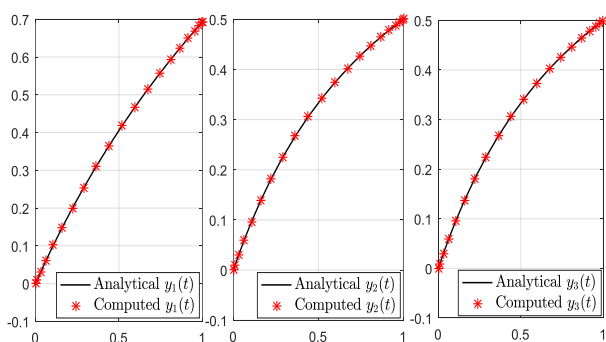
جدول ۱ مقایسه مقادیر به دست آمده برای $y_1(t)$ از روش پیشنهادی با $n=15$ نقطه گسسته‌سازی با دو روش مشتق‌گیری پرسرو و تقریب پده به کار رفته در

[28] در معادله دیفرانسیل - جبری با اندیس ۱ در مثال ۱

t	جواب تحلیلی	روش تقریب پده	خطا	روش مشتق‌گیری پرسرو	خطا	روش پیشنهادی	خطا
0	1.0000	1.0000	0	1.0000	0	1.0000	$3.3e - 16$
0.1	0.9148	0.9148	$2.7e - 06$	0.9148	$2.2e - 07$	0.9148	$5.3e - 16$
0.2	0.8585	0.8585	$2.0e - 05$	0.8585	$3.9e - 07$	0.8585	$4.9e - 17$
0.3	0.8295	0.8295	$6.7e - 05$	0.8295	$5.3e - 07$	0.8295	$2.9e - 16$
0.4	0.8261	0.8262	$1.6e - 04$	0.8261	$6.3e - 07$	0.8261	$3.3e - 16$
0.5	0.8462	0.8466	$3.2e - 04$	0.8462	$6.9e - 07$	0.8462	$2.2e - 16$
0.6	0.8876	0.8882	$5.8e - 04$	0.8876	$1.3e - 05$	0.8876	$3.9e - 16$
0.7	0.9475	0.9485	$1.0e - 03$	0.9475	$8.5e - 05$	0.9475	$8.9e - 16$
0.8	1.0232	1.0249	$1.7e - 03$	1.0232	$2.3e - 05$	1.0232	$1.1e - 16$
0.9	1.1116	1.1143	$2.7e - 03$	1.1121	$5.8e - 04$	1.1116	$3.3e - 16$
1	1.2094	1.2094	$4.2e - 03$	1.2117	$2.3e - 03$	1.2094	0

جدول ۲ مقایسه مقادیر به دست آمده برای $y_2(t)$ از روش پیشنهادی با $n=15$ نقطه گسسته‌سازی با دو روش مشتق‌گیری پسرو و تقریب پده به کار رفته در [28] در معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۱ در مثال ۱

t	جواب تحلیلی	روش تقریب پده	خطا	روش مشتق‌گیری پسرو	خطا	روش پیشنهادی	خطا
0	0	0	0	0	0	0	2.2e-16
0.1	0.0998	0.0998	2.0e-11	0.0998	3.5e-09	0.0998	4.2e-17
0.2	0.1987	0.1987	2.5e-09	0.1987	6.9e-09	0.1987	1.1e-16
0.3	0.2955	0.2955	4.3e-08	0.2955	1.0e-08	0.2955	0
0.4	0.3894	0.3894	3.2e-07	0.3894	1.4e-08	0.3894	0
0.5	0.4794	0.4794	1.5e-06	0.4794	1.7e-08	0.4794	5.6e-17
0.6	0.5646	0.5646	5.5e-06	0.5646	3.9e-05	0.5646	0
0.7	0.6442	0.6442	1.6e-05	0.6440	2.0e-04	0.6442	1.1e-16
0.8	0.7174	0.7174	4.1e-05	0.7177	3.0e-04	0.7174	1.1e-16
0.9	0.7833	0.7834	9.4e-05	0.7855	2.2e-03	0.7833	1.1e-16
1	0.8415	0.8417	2.0e-04	0.8467	5.2e-03	0.8415	0



شکل ۴ نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۲

همچنین برای مشاهده این موضوع که روش تا چه اندازه موفق به برقراری معادله جبری موجود در مسئله شده است، تقریبی از تابع $(y_1(t) + ty_2(t) - \ln(1+t) - \frac{t^2}{1+t})$ را نیز روی بازه $[0, 1]$ رسم می‌کنیم. نتیجه در شکل (۵) به تصویر کشیده شده است که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی می‌باشد.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۲. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت:

$$y_1'(t) = ty_2^2(t) + y_3(t) + \frac{1-t^2-t^3}{(1+t)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y_2'(t) = te^{y_1(t)} + ty_3(t) + \frac{1-t-4t^2-4t^3-t^4}{(1+t)^2}$$

$$y_1(t) + ty_2(t) - \ln(1+t) - \frac{t^2}{1+t} = 0$$

شرایط اولیه نیز به صورت:

$$y(0) = [y_1(0), y_2(0), y_3(0)]^T = [0, 0, 0]^T$$

باشد [29]. واضح است که شرط مرزی به صورت $y_1(1) + y_2(1) = \ln(2) + \frac{1}{2}$ قرار خواهد گرفت. این مسئله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \\ y_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(1+t) \\ t \\ \frac{t}{1+t} \end{bmatrix}$$

اکنون به کمک روش پیشنهادی برای حل عددی این مسئله اقدام می‌نماییم. جواب‌های تقریبی، تحلیلی و تابع خطا به ازای $n=20$ نقطه گسسته‌سازی شده، در شکل (۴) نشان داده شده‌اند.

مثال ۳: معادله دیفرانسیل - جبری با اندیس ۳. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ \dot{y}_2(t) &= y_3(t) \\ y_1(t) - e^{-t} &= 0 \end{aligned}$$

و شرایط اولیه نیز به صورت:

$$\mathbf{y}(0) = [y_1(0), y_2(0), y_3(0)]^T = [1, -1, 1]^T$$

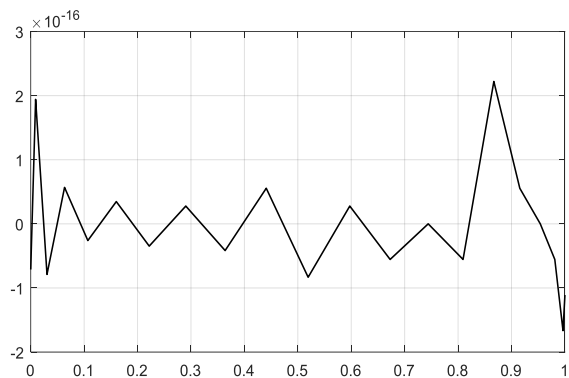
باشد [30]. واضح است که شرط مرزی به صورت $y_1(1) - e^{-1} = 0$ نیز در کنار شرایط اولیه این مسئله قرار خواهد گرفت. این مسئله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \\ y_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

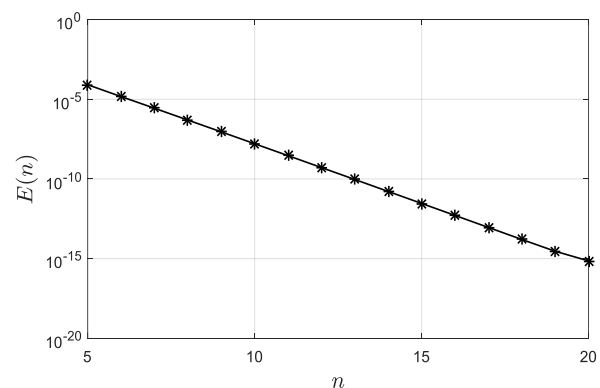
اکنون به کمک روش پیشنهادی برای حل عددی این مسئله اقدام می‌نماییم. جواب‌های تقریبی، تحلیلی و تابع خطا به ازای $n=15$ نقطه گسسته‌سازی شده، در شکل (۷) نشان داده شده‌اند. همچنین برای مشاهده این موضوع که روش تا چه اندازه موفق به برقراری معادله جبری موجود در مسئله شده است، تقریبی از تابع $y_1(t) - e^{-t}$ را نیز روی بازه $[0, 1]$ رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۸) به تصویر کشیده شده است که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی می‌باشد. به علاوه اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل - جبری می‌باشد، در روش پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادله جبری همان گونه که در شکل (۸) پیداست، به نحو بسیار مطلوبی برقرار خواهد گشت.

همچنین برای آگاهی یافتن از نرخ هم‌گرایی روش، مقدار خطای ایجاد شده در روش را به ازای n های مختلف رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۹) آمده است. همان گونه که از این شکل پیداست، با افزایش n ، میزان خطا با شیب زیادی کاهش می‌یابد و این بدان معناست که نرخ هم‌گرایی روش شبه‌طیفی رادائویی برای حل معادلات دیفرانسیل - جبری بالاست.

به علاوه اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل - جبری می‌باشد، در روش پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادله جبری همان گونه که در شکل (۵) پیداست، به نحو بسیار مطلوبی برقرار خواهد گشت. همچنین برای آگاهی یافتن از نرخ هم‌گرایی روش، مقدار خطای ایجاد شده در روش را به ازای n های مختلف رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۶) آمده است. همان گونه که از این شکل پیداست، با افزایش n ، میزان خطا با شیب مطلوبی کاهش خواهد یافت و البته چنین انتظاری را با توجه به این که روش پیشنهادی روشی متعلق به خانواده روش‌های طیفی است، از قبل متصور بودیم.



شکل ۵: نمودار تقریبی تابع $(y_1(t) + ty_2(t) - \ln(1+t) - \frac{t^2}{1+t})$ به کار رفته در سمت چپ معادله جبری مسئله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۲



شکل ۶: نمودار مقدار خطای تابع y_1 به ازای n های مختلف در روش پیشنهادی مربوط به معادله دیفرانسیل - جبری با اندیس ۲ در مثال ۲

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_4(t), & 0 \leq t \leq 1.5 \\ \dot{y}_2(t) &= y_5(t) \\ \dot{y}_3(t) &= y_6(t) \\ \dot{y}_4(t) &= -2y_2(t) + ty_{12}(t) - \frac{y_{12}(t)y_{10}(t)}{y_3(t)} - y_{12}(t)y_9(t) \\ \dot{y}_5(t) &= 2y_4(t) + y_2(t) + y_{11}(t) - 2y_2(t)y_{13}(t) \\ \dot{y}_6(t) &= y_7(t) + y_8(t)y_3(t) + \frac{y_{12}(t)y_9(t)y_{10}(t)}{y_3(t)} \\ &\quad + y_{12}(t)y_9(t) - 2y_3(t)y_{13}(t) \\ \dot{y}_7(t) &= 2y_2(t) \\ \dot{y}_8(t) &= -2y_9(t) - 2 \\ y_{11}(t) + 2y_3(t) &= 0 \\ y_9(t)y_3(t) - y_1(t) &= 0 \\ y_1(t) - y_{10}(t) - y_3(t) &= 0 \\ y_9(t)y_{10}(t) - ty_1(t) &= 0 \\ y_2^2(t) + y_3^2(t) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

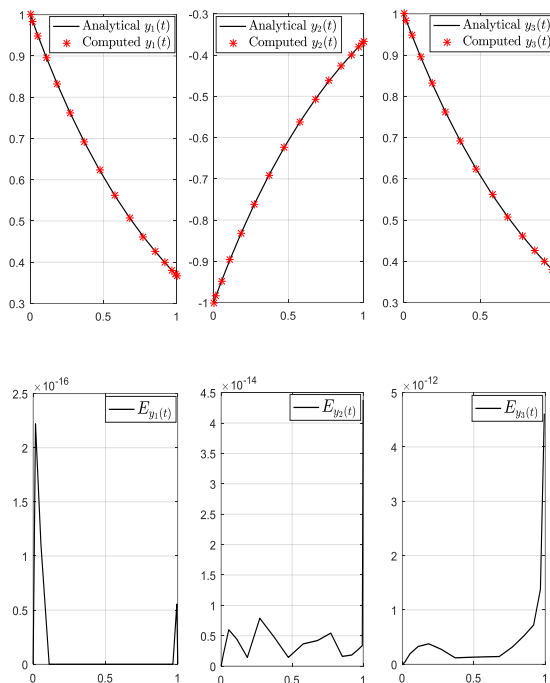
و شرایط اولیه نیز به صورت:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= [y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0), y_5(0), y_6(0), y_7(0), y_8(0)]^T \\ &= [1, 0, 1, 1, 1, 0, -2, 0]^T \end{aligned}$$

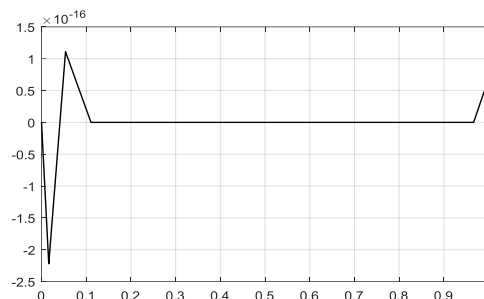
باشند [3]. این مسئله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} y_1^*(t) &= \cos(t)(1+t) \\ y_2^*(t) &= -y_6^*(t) = \sin(t) \\ y_3^*(t) &= y_5^*(t) = -\frac{1}{2}y_7^*(t) = -\frac{1}{2}y_{11}^*(t) = y_{12}^*(t) = \cos(t) \\ y_4^*(t) &= -\sin(t)(1+t) + \cos(t) \\ y_8^*(t) &= -4t - t^2 \\ y_9^*(t) &= 1+t \\ y_{10}^*(t) &= t \cos(t) \\ y_{13}^*(t) &= -t \end{aligned}$$

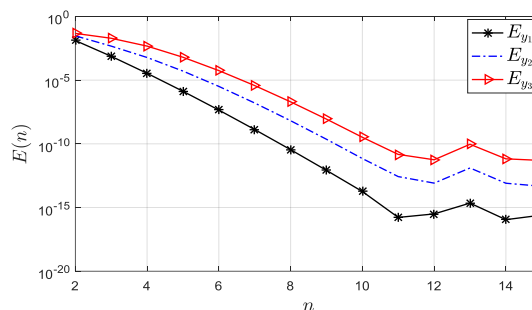
اکنون قصد داریم تا به کمک روش پیشنهادی به حل این مسئله بپردازیم. در شکل (۱۰)، جواب‌های تقریبی، تحلیلی و توابع خطا برای به طور مثال توابع $y_1(t)$, $y_4(t)$, $y_8(t)$ و $y_{10}(t)$ به ازای $n = 15$ روی بازه $[0, 1.5]$ نشان داده شده‌اند. همچنین برای مشاهده این موضوع که روش تا چه اندازه موفق به برقراری معادلات جبری موجود در مسئله شده است، طرف‌های چپ موجود در پنج معادله جبری ظاهر شده در این مسئله را نیز به صورت تقریبی روی بازه $[0, 1.5]$ رسم می‌نماییم. نتایج در شکل (۱۱) قابل مشاهده است، که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی می‌باشد. همچنین اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل-



شکل ۷ نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۳



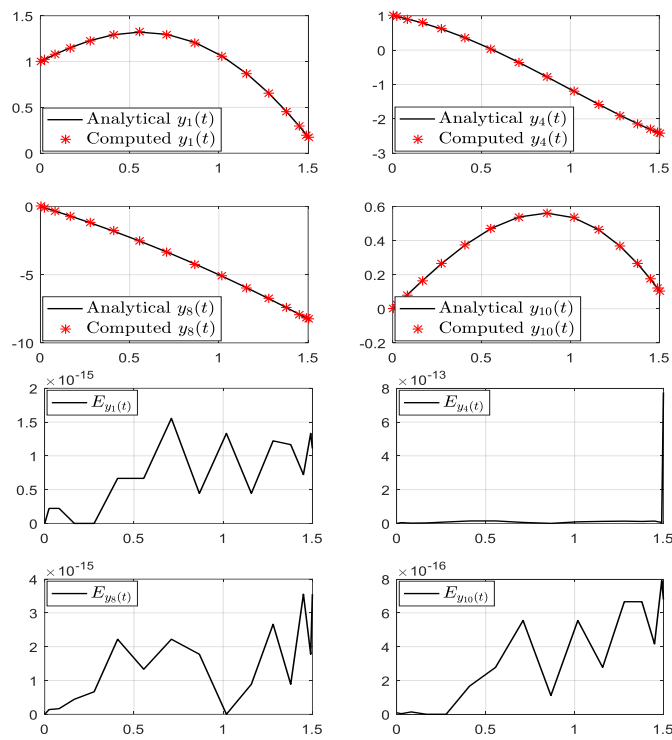
شکل ۸ نمودار تقریبی تابع $y_1(t) - e^{-t}$ به کار رفته در سمت چپ معادله جبری مسئله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۳



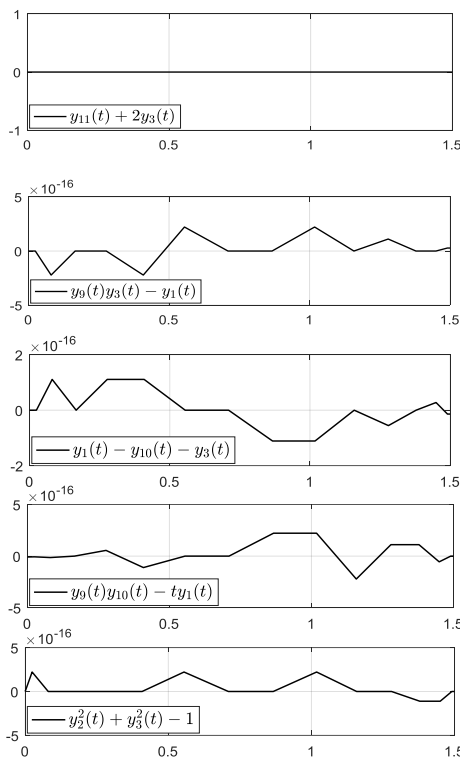
شکل ۹ نمودار مقدار خطای توابع جواب به ازای nهای مختلف در روش پیشنهادی مربوط به معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۳ در مثال ۳

مثال ۴: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس بالا. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت:

جبری می‌باشد، در روش پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادلات جبری همان گونه که در شکل (۱۱) پیداست، به نحو بسیار مطلوبی برقرار خواهند گشت.



شکل ۱۰ نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطایی به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۴



شکل ۱۱ نمودار تقریبی از توابع به کار رفته در سمت چپ معادلات جبری مسئله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۴

		نتیجه گیری
Method of Lines	روش خطوط	در این مقاله از یک روش شبه‌طیفی رادائویی، مبتنی بر استفاده
Finite Element Method	روش اجزای متناهی	از نقاط لژاندر-گائوس-رادائو در فرایند هم‌مکانی، در کنار
Finite Difference Method	روش تفاضلات متناهی	تکنیک‌های بهینه‌سازی برای حل عددی مناسب دستگاه
Backward Euler Method	روش اویلر پسرو	معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی
Backward Differentiation Method	روش مشتق‌گیری پسرو	استفاده شد و نتایج کار روی چهار مسئله معیارسنج مشاهده
Runge-Kutta Methods	روش‌های رونگه-کوتا	گردید. در مقایسه با روش‌های موجود برای حل این دسته از
Pade Approximation Method	روش تقریب پده	مسائل می‌توان گفت که روش پیشنهادی دقت بسیار مناسبی
Adomian Decomposition Method	روش تجزیه آدومیان	داشته و به خوبی می‌تواند معادله یا معادلات جبری ظاهر شده
Order Reduction Phenomena	پدیده کاهش مرتبه	در مسئله را با دقت بالا و بدون رخ دادن اثرات رهاشدگی
Drift-off Effects	اثرات رهاشدگی	برآورده سازد. در ضمن استفاده از تکنیک بهینه‌سازی جهت حل
Differentiation Index	اندیس مشتق	دستگاه معادلات جبری حاصل از پیاده‌سازی روش، این امکان
Perturbation Index	اندیس آشفتگی	را فراهم می‌سازد که بتوان روش پیشنهادی را بدون نیاز به
Strangeness Index	اندیس غریبگی	حدس اولیه دقیق برای متغیرهای تصمیم، با آسودگی خاطر
Tractability Index	اندیس قابلیت کشش	بیشتر پیاده نمود.
Quasi-Newton Methods	روش‌های شبه-نیوتنی	
Interior-point Algorithm	الگوریتم نقطه درونی	
Machine Accuracy	دقت ماشین	
Benchmark Problem	مسئله معیارسنج	

واژه نامه

State variable	روش شبه‌طیفی
Orthogonal Collocation Method	روش هم‌مکانی متعامد
Lagrange Polynomial	چندجمله‌ای لاگرانژ
Legendre-Gauss-Radau Points	نقاط لژاندر-گائوس-رادائو
Kronecker Property	خاصیت دلتای کرونگر
Differentiation Matrix	ماتریس مشتق
Convergency	هم‌گرایی
Initial Guess	حدس اولیه

مراجع

- [1] R. Winkler, "Stochastic differential algebraic equations of index 1 and applications in circuit simulation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 163, no. 2, pp. 435-463, (2003).
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.017>
- [2] M. S. Soto and C. Tischendorf, "Numerical analysis of DAEs from coupled circuit and semiconductor simulation," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 53, no. 2-4, pp. 471-488, (2005).
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.08.009>
- [3] A. Steinbrecher, "Numerical solution of quasi-linear differential-algebraic equations and industrial simulation of multibody systems, PhD Thesis," Technische Universität Berlin, Berlin, (2006).

- [4] C. C. Pantelides, D. Gritsis, K. R. Morison, and R. W. H. Sargent, "The mathematical modelling of transient systems using differential-algebraic equations," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 12, no. 5, pp. 449-454, (1988). [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(88\)85062-2](https://doi.org/10.1016/0098-1354(88)85062-2)
- [5] R. Gani and I. T. Cameron, "Modelling for dynamic simulation of chemical processes: the index problem," *Chemical engineering science*, vol. 47, no. 5, pp. 1311-1315, (1992). [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(92\)80252-8](https://doi.org/10.1016/0009-2509(92)80252-8)
- [6] H. Peng, F. Li, J. Liu, and Z. Ju, "A symplectic instantaneous optimal control for robot trajectory tracking with differential-algebraic equation models," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 5, pp. 3819-3829, (2019). <https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2916390>
- [7] P. Kunkel and V. L. Mehrmann, "Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution," *European Mathematical Society*, (2006).
- [8] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold, "Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, (1996).
- [9] E. Hairer and G. Wanner, "Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems," *Springer Berlin, Heidelberg*, (1996).
- [10] P. Kunkel and V. Mehrmann, "Canonical forms for linear differential-algebraic equations with variable coefficients," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 56, no. 3, pp. 225-251, (1994). [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)90080-9)
- [11] R. Marz, "Numerical methods for differential algebraic equations," *Acta Numerica*, vol. 1, pp. 141-198, (1992). <https://doi.org/10.1017/S0962492900002269>
- [12] F. Ghanbari and F. Ghoreishi, "Convergence analysis of the pseudospectral method for linear DAEs of index-2," *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, no. 04, (2013). <https://doi.org/10.1142/S0219876213500199>
- [13] U. Archer and L. R. Petzold, "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations," Philadelphia: SIAM, (1998). <https://doi.org/10.1137/1.9781611971392>
- [14] C. W. Gear, "Differential-algebraic equations and index transformation," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 9, no. 1, pp. 39-47, (1988). <https://doi.org/10.1137/0909004>
- [15] E. Hairer, C. Lubich, and M. Roche, "The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods," *Berlin: Springer-Verlag*, (1989). <https://doi.org/10.1007/BFb0093947>
- [16] N. Guzel and M. Bayram, "On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 175, no. 2, pp. 1320-1331, (2006). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.08.025>
- [17] M. M. Hosseini, "Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 181, no. 2, pp. 1737-1744, (2006). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.03.027>
- [18] S. Ghasemi and M. M. Jafarian, "The Application of Adaptive Time Spectral Method for Analyzing Inviscid Compressible Flow around a Pitching Airfoil," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 1-18, (2023). <https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.78842.1138>
- [19] H. Hashemian and E. M. Hamedani, "The Effects of Winkler-Pasternak Foundation Coefficients on the Natural

- Frequency of Cylindrical Lattice Structures Using Galerkin Method," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 34, no. 3, pp. 19-34, (2022). <https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.73646.1069>.
- [20] A. Jafarian, S. M. Alavi Tabatabaei, and S. Shakhshi, "Calculating the Added Mass Matrix of an Airship Using Boundary Element Method," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 34, no. 2, pp. 15-28, (2022). <https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.71335.1040>
- [21] B. Fornberg, "A Practical Guide to Pseudospectral Methods," *Cambridge University Press*, 1998.
- [22] M. M. Hosseini, "Pseudospectral method for numerical solution of DAEs with an error estimation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 170, no. 1, pp. 115-124, (2005). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.10.068>
- [23] E. Babolian and M. M. Hosseini, "Reducing index, and pseudospectral methods for differential-algebraic equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 140, no. 1, pp. 77-90, (2003). [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00200-X](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00200-X)
- [24] M. A. Mehrpouya and R. Salehi, "A numerical scheme based on the collocation and optimization methods for accurate solution of sensitive boundary value problems," *The European Physical Journal Plus*, vol. 136, no. 909, pp. 1-23, (2021). <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01915-w>
- [25] H. Eskandari and S. Hashemi, "Numerical Comparison of Shell Side Thermo-Hydraulic Characteristics of Shell and Tube Heat Exchangers with Trefoil and Segmental Baffle by Genetic Algorithm," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 2, pp. 55-76, (2023). <https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.75777.1105>
- [26] F. Rabiei, M. Seidi, and Z. Seydi, "Prediction and Optimization of Hardness Value of Mold Steel in Wirecut Process based on Fuzzy Inference System," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 53-70, (2023). <https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.79508.1145>
- [27] P. Kazemiani-Najafabadi and E. Amiri Rad, "Thermoeconomic Optimization of a Superheated Kalina Cycle for Various Geothermal Source Temperatures in Iran," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 33, no. 1, pp. 1-16, (2022). <https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.67824.1002>
- [28] K. A. Samer Amin, "Numerical Methods for Solving Differential Algebraic Equations, MSc Thesis," *An-Najah National University*, Nablus, (2010).
- [29] F. Soltanian, M. Dehghan, and S. M. Karbassi, "Solution of the differential algebraic equations via homotopy perturbation method and their engineering applications," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87, no. 9, pp. 1950-1974, (2010). <https://doi.org/10.1080/00207160802545908>
- [30] P. G. Thomsen and C. Bendtsen, "Numerical Solution of Differential Algebraic Equations, Technical Report," *Technical University of Denmark*, (1999).