

حل تحلیلی خمش ورق‌های چندلایه کامپوزیتی متعامد نوع لوی با لایه‌های پیزوالکتریک*

(یادداشت پژوهشی)

علی محمد ناصریان نیک^(۱)مسعود طهانی^(۲)

چکیده در مقاله حاضر رفتار استاتیکی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی متعامد که تمام یا بخشی از لایه‌های آن دارای خاصیت پیزوالکتریسیته است، با استفاده از گسترش روش لوی، بررسی می‌شود. به کمک روش ارایه شده می‌توان تغییر شکل چندلایه‌های ترکیبی متعامد مستطیلی شکل را که دو لبه موازی آن‌ها مقید به تکیه‌گاه ساده و دو لبه دیگر آن‌ها دارای شرایط مرزی دلخواه است، به صورت تحلیلی، مطالعه نمود. معادلات حاکم بر تعادل در قالب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق‌ها، استخراج و بر حسب نوع کلاس کریستالوگرافی لایه‌های پیزوالکتریک دسته‌بندی می‌شوند. در نهایت، معادلات حاکم بر تعادل با به‌کارگیری رهیافت دقیق فضای حالت حل می‌شوند. نتایج عددی برای چند مسأله مختلف با بارگذاری‌های الکترومکانیکی ارایه و در صورت امکان با نتایج حاصل از روش ناویر و نیز نتایج ثبت شده در سایر مقالات مقایسه می‌شود. علاوه بر این، توانایی روش لوی در تحلیل استاتیکی چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد با لایه‌های پیزوالکتریک مورد بحث قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در روش حل لوی امکان منظور کردن همزمان همه نیروها و ممان‌های پیزوالکتریک میسر نیست. همچنین صحت‌گذاری نتایج نشان از دقت عالی نتایج عددی دارد.

واژه‌های کلیدی ورق‌های چندلایه متعامد، پیزوالکتریک، حل لوی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

Analytical Solution for Levy-type Bending of Cross-ply Piezoelectric Composite Laminates

A. M. Naserian-Nik

M. Tahani

Abstract In this paper, the Levy-type solution is developed to study the static behavior of the cross-ply piezoelectric laminated composite plates whose all or some of their laminae possess the piezoelectric properties. By the use of the proposed method the behavior of the rectangular cross-ply piezoelectric laminates with at least two simply supported opposite edges can be analytically examined. The governing equations of equilibrium are derived in the framework of the first-order shear deformation plate theory and classified according to the crystallography type of piezoelectric layers. Moreover, limitations of the method for the analysis of this kind of the structures are discussed. Finally, the governing equations of equilibrium are solved analytically with the aid of the state-space approach. The numerical results are compared with those obtained by the Navier method and those obtained by other investigators. It is found that the present results have very good agreements with those obtained by other methods.

Key Words Cross-ply laminated plates, Piezoelectric, Levy-type solution, First-order shear deformation theory

*نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۷/۴/۲۲ نسخه پذیرش آن در تاریخ ۸۷/۲/۱۲ و نسخه آماده چاپ آن در تاریخ ۹۰/۵/۱۲ به دفتر نشریه رسیده‌است.

(۱) دانشجوی دکتری مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) نویسنده‌ی مسئول: دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

مواد کامپوزیتی به واسطه داشتن خواص منحصر به فردی مانند نسبت مقاومت مکانیکی به وزن بالا در عین قابلیت انعطاف و شکل پذیری عالی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، عمر خستگی بالا، عایق بودن حرارتی و صوتی و غیره، طی سال های اخیر به طور گسترده ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار گرفته است [1,2]. از طرفی قابلیت تبدیل انرژی های مکانیکی و الکتریکی به هم (کوپلینگ الکترومکانیکی)، واکنش سریع، دقت بالا و پیوسته، پهنای باند وسیع، مصرف توان کم مواد پیزوالکتریک، پتانسیل عظیمی را در طراحی سازه های هوشمند از سازه های بزرگ فضایی [3,4] گرفته تا سیستم های مینیاتوری پزشکی [5,6] موجب شده است. وقتی لایه های مواد پیزوالکتریک به سطح بالایی و یا پایینی سازه های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف متصل می شوند و یا داخل آنها قرار می گیرند، کارایی شان می تواند به طور مؤثری افزایش یابد. علاوه بر این، ترکیب لایه های پیزوالکتریک با سازه های کامپوزیتی امکان تغییر و یا تصحیح، پاسخ سازه را از طریق حس گری و عمل گری لایه های مذکور فراهم می آورد.

روش لوی (Levy) توسط محققین مختلفی برای تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق های چندلایه کامپوزیتی مورد استفاده قرار گرفته است [7-29]. خدیر و همکاران [7] با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول خمش چندلایه های متعامد (Cross-ply) متقارن با دو لبه موازی مقید به تکیه گاه ساده را تحلیل نمودند. ردی و خدیر [8] کمانش و ارتعاشات آزاد چندلایه های متعامد را به کمک حل لوی و نیز روش اجزاء محدود، در قالب تئوری های کلاسیک، تغییر شکل برشی مرتبه اول و تغییر شکل برشی مرتبه

سوم بررسی کردند. خدیر [9] با استفاده از روش لوی و تئوری کلاسیک، خمش، ارتعاشات آزاد و کمانش چند لایه های مستطیلی زاویه دار پادمقارن را تحلیل کرد. بز و ردی [10,11] رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد چندلایه های کامپوزیتی متعامد را بر اساس روش های تحلیلی ناویر (Navier) و لوی و هم چنین مدل اجزاء محدود، با به کارگیری تئوری های کلاسیک، تغییر شکل برشی مرتبه اول و تغییر شکل برشی مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند. خدیر و ردی [12] فرکانس های طبیعی چندلایه های متعامد و زاویه دار پادمقارن را به کمک روش لوی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه دوم استخراج کردند. پالاردی و پالازوتو [13] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مسأله مقدار ویژه چندلایه های متعامد را حل نمودند. آنها حل خود را برای فرکانس های پایه و بارهای کمانش ورق های گرافیت/اپوکسی (graphite/epoxy) با چیدمان متقارن ارائه کردند. خدیر [14] ارتعاشات اجباری چند لایه های مستطیلی زاویه دار پادمقارن را با استفاده از روش لوی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه دوم، مورد مطالعه قرار داد [15]. خدیر و همکارانش [16-23] و Reddy و Nosier [24] به کمک روش لوی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد چندلایه های کامپوزیتی متعامد را بررسی کردند. کاپوریا و همکارانش [25] خمش چندلایه های متعامد با لایه های عملگر پیزوالکتریک که حداقل دارای دو لبه موازی مقید به تکیه گاه ساده بودند را با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش لوی تحلیل کردند. آنها برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر تعادل از الگوریتم عددی QR استفاده کردند. هم چنین اخیراً روابط حاکم برای تحلیل خمش چندلایه های زاویه دار پادمقارن با

میدان جابجایی و شرایط مرزی مکانیکی. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی مکانیکی را به شکل زیر می توان نوشت [29]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

که u ، v و w به ترتیب مؤلفه های جابجایی در جهت x ، y و z هستند. هم چنین u_0 ، v_0 ، w_0 ، ψ و ϕ جابجایی های عمومیت یافته نامیده شده و توابع مجهولی هستند که باید به دست آیند.

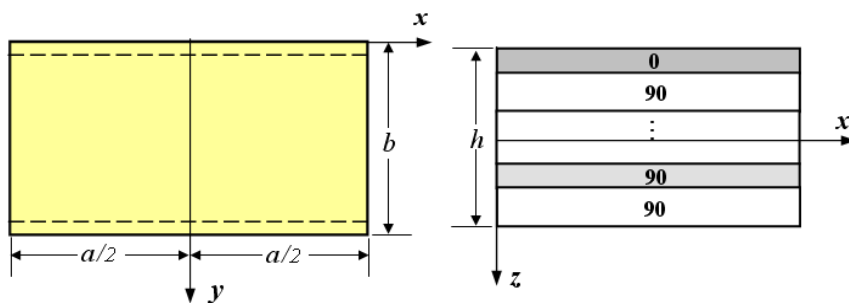
برای ارضای شرایط مرزی ساده $u_0 = w_0 = \psi = N_y = M_y = 0$ در $y=0$ و $y=b$ ، جابجایی های عمومیت یافته را می توان به صورت حاصل ضرب توابع نامعین و توابع مثلثاتی معلوم بسط داد:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x) \sin \beta_m y, & v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x) \cos \beta_m y \\ w_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) \sin \beta_m y, & \psi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) \sin \beta_m y \\ \phi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(x) \cos \beta_m y, & \beta_m &= \frac{m\pi}{b} \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

لایه های عملگر پیزوالکتریک برشی در قالب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط آلدرایهم و خدیر [26] استخراج شده است. آن ها معادلات حاصله را به کمک روش لوی و رهیافت فضای حالت، حل کردند. با بررسی مقالات منتشر شده می توان گفت، تا کنون کار جامعی که دربرگیرنده فرمول بندی کامل و جنبه های مختلف تحلیل چندلایه های ترکیبی پیزوالکتریک با چیدمان متعامد باشد، منتشر نشده است. در تحقیق حاضر ضمن بسط روش حل لوی برای چندلایه های ترکیبی متعامد پیزوالکتریک، محدودیت های روش مذکور در تحلیل این دسته از سازه ها مورد بررسی قرار می گیرد. علاوه بر این، نتایج عددی به دست آمده از این روش با نتایج حاصل از روش حل ناویر و روش بنا شده بر تئوری الاستیسیته سه بعدی مقایسه می شود.

استخراج روابط

در این بخش، معادلات حاکم بر تعادل برای یک ورق چندلایه متعامد کامپوزیتی که برخی (یا تمام) لایه های آن دارای خواص پیزوالکتریک است استخراج و مورد بحث قرار می گیرد. هندسه و دستگاه مختصات در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل ۱ هندسه چند لایه مورد بررسی و سیستم محورهای مختصات

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_y, Q_x) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \end{aligned} \quad (6)$$

منتجه های تنش را می توان به شکل زیر به دست

آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ \text{sym.} & & & D_{22} & D_{26} & \\ & & & & D_{66} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x + \partial u_0 / \partial y \\ \partial \psi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial x + \partial \psi / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^P \\ N_y^P \\ N_{xy}^P \\ M_x^P \\ M_y^P \\ M_{xy}^P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k^2 \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial w / \partial y + \phi \\ \partial w / \partial x + \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_y^P \\ Q_x^P \end{Bmatrix} \quad (7)$$

در روابط فوق $k^2 (=5/6)$ ضریب تصحیح نیروی

برشی است و A_{ij} سفتی های کششی، D_{ij} سفتی های

خمشی و B_{ij} سفتی های اتصال خمش - کشش هستند

که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (8)$$

هم چنین، $\{N^P\}$ و $\{Q^P\}$ متجه های نیروی

پیزوالکتریک و $\{M^P\}$ متجه های ممان پیزوالکتریک

نامیده و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\{N^P\}^T = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}_{31}^k, \bar{e}_{32}^k, \bar{e}_{36}^k] E_z^k dz$$

روابط ساختاری و متجه های تنش. روابط ساختاری

چند لایه های ترکیبی پیزوالکتریک را با فرض حالت

تنش صفحه ای، برای لایه k ام به صورت زیر می توان

نوشت [29]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \\ &- \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k \end{aligned} \quad (3)$$

$$\{E\} = -[\partial \Phi / \partial x \quad \partial \Phi / \partial y \quad \partial \Phi / \partial z]^T \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{14} & \bar{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e}_{24} & \bar{e}_{25} & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad (5)$$

$$- \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k$$

که در آن ها \bar{Q}_{ij}^k سفتی انتقال یافته، \bar{e}_{ij}^k ثابت تنش

پیزوالکتریک انتقال یافته، E_i^k میدان الکتریکی در هر

لایه، Φ تابع پتانسیل الکتریکی و $\epsilon_x^k, \epsilon_y^k, \epsilon_{xy}^k$ و ϵ_z^k

ثوابت دی الکتریک انتقال یافته مربوط به هر لایه

می باشند. با قرار دادن روابط کرنش - جابجایی خطی

[29] در روابط فوق و قرار دادن نتیجه در تعریف

منتجه های تنش، یعنی:

تعداد را به دسته معادلات دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می کند:

$$\sum_{m=1}^{\infty} [A_{11}U_m'' - A_{12}\beta_m V_m' + B_{11}X_m'' - B_{12}\beta_m Y_m' - A_{66}(\beta_m^2 U_m + \beta_m V_m') - B_{66}(\beta_m^2 X_m + \beta_m Y_m')] \sin \beta_m y = \frac{\partial N_x^P}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^P}{\partial y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [A_{66}(\beta_m U_m' + V_m'') + B_{66}(\beta_m X_m' + Y_m'') + A_{12}\beta_m U_m' - A_{22}\beta_m^2 V_m + B_{12}\beta_m X_m' - B_{22}\beta_m^2 Y_m] \cos \beta_m y = \frac{\partial N_{xy}^P}{\partial x} + \frac{\partial N_y^P}{\partial y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [k^2 A_{55}(W_m'' + X_m') - k^2 A_{44}(\beta_m^2 W_m + \beta_m Y_m)] \sin \beta_m y = \frac{\partial Q_x^P}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^P}{\partial y} - q(x, y)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [B_{11}U_m'' - B_{12}\beta_m V_m' + D_{11}X_m'' - D_{12}\beta_m Y_m' - B_{66}(\beta_m^2 U_m + \beta_m V_m') - D_{66}(\beta_m^2 X_m + \beta_m Y_m') - k^2 A_{55}(W_m' + X_m)] \sin \beta_m y = \frac{\partial M_x^P}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^P}{\partial y} - Q_x^P$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [B_{66}(\beta_m U_m' + V_m'') + D_{66}(\beta_m X_m' + Y_m'') + B_{12}\beta_m U_m' - B_{22}\beta_m^2 V_m + D_{12}\beta_m X_m' - D_{22}\beta_m^2 Y_m - k^2 A_{44}(\beta_m W_m + Y_m)] \cos \beta_m y = \frac{\partial M_{xy}^P}{\partial x} + \frac{\partial M_y^P}{\partial y} - Q_y^P$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [B_{66}(\beta_m U_m' + V_m'') + D_{66}(\beta_m X_m' + Y_m'') + B_{12}\beta_m U_m' - B_{22}\beta_m^2 V_m + D_{12}\beta_m X_m' - D_{22}\beta_m^2 Y_m - k^2 A_{44}(\beta_m W_m + Y_m)] \cos \beta_m y = \frac{\partial M_{xy}^P}{\partial x} + \frac{\partial M_y^P}{\partial y} - Q_y^P \quad (12)$$

بررسی معادلات فوق نشان می دهد که نیروی مکانیکی q و نیروها و ممان های الکتریکی، همانند

$$\{N^P\}^T = \sum_{k=1}^{N_a} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}_{31}^k, \bar{e}_{32}^k, \bar{e}_{36}^k] E_z^k dz$$

$$\{M^P\}^T = \sum_{k=1}^{N_a} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}_{31}^k, \bar{e}_{32}^k, \bar{e}_{36}^k] E_z^k z dz \quad (9)$$

$$\{Q^P\} = \sum_{k=1}^{N_a} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \end{bmatrix} \{E\}^k dz$$

لازم به ذکر است در روابط فوق N تعداد کل لایه ها و N_a تعداد لایه های فعال (Active) در چندلایه است.

معادلات حاکم بر تعادل. با قرار دادن روابط (۷) در معادلات تعادل حاصل از به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

می توان معادلات تعادل را بر حسب جابجایی های عمومیت یافته و متجه های نیرو و ممان پیزوالکتریک بازنویسی نمود. با جایگزینی روابط (۲) در معادلات حاصله می توان نشان داد که برای چندلایه مورد بحث، در صورتی حل تحلیلی وجود دارد که روابط زیر برقرار باشد [29]:

$$A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad (11)$$

و در نتیجه چندلایه مورد بررسی باید دارای چیدمانی از نوع متعامد باشد. به علاوه، این جایگزینی، دسته معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر

ترم های طرف چپ تساوی، باید به صورت سری های مثلثاتی زیر بسط داده شوند:

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin \beta_m y \\
 N_x^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{P1}(x) \sin \beta_m y \\
 N_{xy}^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{P6}(x) \cos \beta_m y \\
 N_y^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{P2}(x) \sin \beta_m y \\
 M_x^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} M_m^{P1}(x) \sin \beta_m y \\
 M_y^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} M_m^{P2}(x) \sin \beta_m y \\
 M_{xy}^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} M_m^{P6}(x) \cos \beta_m y \\
 Q_x^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{P1}(x) \sin \beta_m y \\
 Q_y^P(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{P2}(x) \cos \beta_m y
 \end{aligned} \tag{13}$$

که

$$\begin{aligned}
 Q_m(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b q \sin \beta_m y \, dy \\
 N_m^{P1}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b N_x^P \sin \beta_m y \, dy \\
 N_m^{P2}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b N_y^P \sin \beta_m y \, dy \\
 N_m^{P6}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b N_{xy}^P \cos \beta_m y \, dy \\
 M_m^{P1}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b M_x^P \sin \beta_m y \, dy \\
 M_m^{P2}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b M_y^P \sin \beta_m y \, dy \\
 M_m^{P6}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b M_{xy}^P \cos \beta_m y \, dy \\
 Q_m^{P1}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b Q_x^P \sin \beta_m y \, dy \\
 Q_m^{P2}(x) &= \frac{2}{b} \int_0^b Q_y^P \cos \beta_m y \, dy
 \end{aligned} \tag{14}$$

اینک با قرار دادن روابط (۱۳) در معادلات (۱۲)، معادلات حاکم بر تعادل برای چندلایه های ترکیبی متعامد، در حالت کلی، به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 A_{11}U_m'' - A_{66}\beta_m^2 U_m - \beta_m(A_{12} + A_{66})V_m' + B_{11}X_m'' - \\
 B_{66}\beta_m^2 X_m - \beta_m(B_{12} + B_{66})Y_m' = (N_m^{P1})' - \beta_m N_m^{P6} \\
 \beta_m(A_{12} + A_{66})U_m' + A_{66}V_m'' - A_{22}\beta_m^2 V_m + \beta_m(B_{12} + \\
 B_{66})X_m' + B_{66}Y_m' - B_{22}\beta_m^2 Y_m = (N_m^{P6})' + \beta_m N_m^{P2} \\
 k^2(A_{55}W'' - A_{44}\beta_m^2 W_{mm} + A_{55}X_m' - A_{44}\beta_m Y_m) = \\
 (Q_m^{P1})' - \beta_m Q_m^{P2} - Q_m \\
 B_{11}U_m'' - B_{66}\beta_m^2 U_m - \beta_m(B_{12} + B_{66})V_m' - k^2 A_{55}W_m' + \\
 D_{11}X_m'' - (k^2 A_{55} + D_{66}\beta_m^2)X_m - \beta_m(D_{12} + D_{66})Y_m' = \\
 (M_m^{P1})' - \beta_m M_m^{P6} - Q_m^{P1} \\
 \beta_m(B_{12} + B_{66})U_m' + B_{66}V_m'' - B_{22}\beta_m^2 V_m - \\
 k^2 A_{44}\beta_m W_m + \beta_m(D_{12} + D_{66})X_m' + D_{66}Y_m' - \\
 (k^2 A_{44} + D_{22}\beta_m^2)Y_m = (M_m^{P6})' + \beta_m M_m^{P2} - Q_m^{P2}
 \end{aligned} \tag{15}$$

از آن جا که متجه های نیرو و ممان پیزوالکتریک را می توان بر حسب پارامتر یکسان پتانسیل الکتریکی Φ تعریف نمود (روابط (۴) و (۹) را ببینید)، انتظار می رود که همه این نیروها و ممان ها در حل لوی شرکت نکنند و برای وجود حل تحلیلی، بعضی از آن ها با توجه به شکل بسط شان باید صفر در نظر گرفته شوند (این موضوع خود یکی از محدودیت های روش حل لوی است). به عنوان مثال، اگر در چندلایه متعامد، لایه های پیزو از کلاس ۲۲۲ [30] وجود داشته باشد و قصد در نظر گرفتن نیروها و ممان برشی N_{xy}^P ، Q_x^P ، Q_y^P و M_{xy}^P را داشته باشیم، تابع پتانسیل الکتریکی باید به صورت سری های دوگانه کسینوسی بسط داده شود؛ در این صورت

فضای حالت، دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۵) با ضرایب ثابت را می توان به فرم یک معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول نوشت:

$$\{Z'\} = [T]\{Z\} + \{F\} \quad (16)$$

که در آن $\{Z(x)\}$ بردار حالت است و متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} Z_1 &= U_m(x), & Z_2 &= U'_m(x), & Z_3 &= V_m(x) \\ Z_4 &= V'_m(x), & Z_5 &= W_m(x), & Z_6 &= W'_m(x) \\ Z_7 &= X_m(x), & Z_8 &= X'_m(x), & Z_9 &= Y_m(x) \\ Z_{10} &= Y'_m(x) \end{aligned} \quad (17)$$

و

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} & a_{17} & 0 & 0 & a_{110} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{28} & a_{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} & 0 & 0 & a_{38} & a_{39} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & a_{46} & a_{47} & 0 & 0 & a_{410} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} & 0 & 0 & a_{58} & a_{59} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

و

$$\{F\} = \{0, c_1, 0, c_2, 0, c_3, 0, c_4, 0, c_5\}^T \quad (19)$$

که عناصر غیرصفر ماتریس ضرایب $[T]$ و بردار ثوابت $\{F\}$ در بخش پیوست معرفی شده اند.

صورت حل تحلیلی مسأله امکان پذیر نخواهد بود. برای چندلایه مورد بحث، چنان چه توزیع پتانسیل الکتریکی به صورت سری های دوگانه سینوسی در نظر گرفته شود، در این صورت پارامترهای M_{mn}^{P6} و Q_{mn}^{P2} باید صفر باشند. البته در چندلایه های متعامد با لایه های پیزوالکتریک از کلاس 2 mm [30]، نظر به این که $\bar{e}_{36} = 0$ ، نیرو و ممان برشی N_{xy}^P و M_{xy}^P خود به خود صفر می شود. سعی شده تا بحث های مربوط به این موضوع در جدول (۱) خلاصه گردد.

حل معادلات

چنان چه مشاهده شد، به کمک روش ارایه شده معادلات حاکم بر تعادل که ذاتاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دو است، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دو با ضرایب ثابت تبدیل گردید که می توان آن را به صورت تحلیلی حل نمود. برای حل دستگاه معادلات (۱۵) از روش تحلیلی فضای حالت [31] کمک گرفته شده است. رهیافت فضای حالت شامل نوشتن یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه بالاتر به فرم یک معادله ماتریسی مرتبه اول می شود که حل آن با به کارگیری روش های ماتریسی بر حسب مقادیر ویژه اپراتور ماتریسی، به دست می آید. با این توصیف از رهیافت

جدول ۱ متجه های نیرو و ممان پیزوالکتریک که در حل لوی چندلایه های ترکیبی متعامد حذف می شوند

بسط پتانسیل در راستای y	کلاس کریستالوگرافی لایه های پیزوالکتریک	ثوابت پیزوالکتریکی که به واسطه تعامد صفرند	متجه های که باید صفر باشند
کسینوسی	222	$\bar{e}_{24}, \bar{e}_{15}$	$N_m^{P1}, N_m^{P2}, M_m^{P1}, M_m^{P2}$
سینوسی	222	$\bar{e}_{24}, \bar{e}_{15}$	$N_m^{P6}, Q_m^{P1}, Q_m^{P2}, M_m^{P6}$
سینوسی	mm2	$\bar{e}_{36}, \bar{e}_{14}, \bar{e}_{25}$	-

تحلیل چندلایه‌های با چهار لایه مقید به شرایط تکیه‌گاهی ساده را دارد. نتایج عددی مشتمل بر تغییرات بی بعد شده جابجایی‌های مکانیکی و الکتریکی و تنش‌های داخل صفحه‌ای و بین صفحه‌ای می‌شود.

لازم به ذکر است، در مسأله نمونه اول تنش برشی عرضی از روابط ساختاری (۳) محاسبه شده و در مسأله دوم نتایج برای تنش‌های بین‌لایه‌ای از روابط سه بعدی الاستیسیته به دست آمده است. هم‌چنین با توجه به آن که سازه‌های مورد نظر از نوع ورق می‌باشند و با توجه به ضخامت کم لایه‌های پیزوالکتریک، در تمام مسائل فرض بر آن است که تغییرات ولتاژ در راستای ضخامت به صورت خطی است.

چندلایه ترکیبی $[p^0/0/90/0/p^0]$ اولین مثال به تحلیل پنج لایه مربعی شکل $[p^0/0/90/0/p^0]$ با لایه‌های پیزوالکتریک بسیار نازک و مقید به چهار تکیه‌گاه ساده اختصاص یافته است. این مسأله قبلاً توسط Ray و همکارانش [33] به صورت تحلیلی (بر اساس رهیافت حل دقیق سه بعدی [34] pagano) حل شده است. چندلایه تحت دو بارگذاری گسترده سینوسی مکانیکی و الکتریکی، به صورت زیر قرار دارد:

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (21)$$

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (22)$$

که q_0 و Φ_0 به ترتیب مقادیر بیشینه بار مکانیکی و پتانسیل الکتریکی (ولتاژ) اعمالی به سازه هستند. ولتاژ به الکتروود متصل به سطح بالایی لایه پیزوالکتریک فوقانی (لایه شماره ۱) اعمال شده و پتانسیل الکتریکی سطح پایینی این لایه صفر است (اتصال به زمین). نمایی از چیدمان لایه‌ها، جهت قطبی‌سازی (Polarization) و نحوه بارگذاری الکتریکی در شکل (۲) نمایش داده شده است

می‌توان نشان داد که پاسخ معادله دیفرانسیل ماتریسی (۱۶) از رابطه زیر به دست می‌آید [32]:

$$\{Z\} = [\Lambda][E]\{K\} + [\Lambda][E] \int_0^x [E]^{-1} [\Lambda]^{-1} \{F\} d\xi \quad (20)$$

در رابطه فوق $[\Lambda]$ ماتریس بردارهای ویژه ماتریس $[T]$ ، $[\Lambda]^{-1}$ معکوس آن و $\{K\}$ برداری ۱۰ عضوی از ثوابت انتگرال‌گیری است که به وسیله اعمال شرایط مرزی بر لایه‌های $x = \pm a/2$ تعیین می‌شود. هم‌چنین

$$[E] = \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_{10} x})$$

که در آن λ_j مقادیر ویژه مربوط به ماتریس $[T]$ هستند. ثوابت مربوط به حل معادلات فضای حالت برای شرایط مرزی مختلف روی لایه‌های $x = a/2$ و $x = -a/2$ در بخش پیوست، استخراج و دسته‌بندی شده است.

نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از رابطه سازی ارایه شده در بخش‌های گذشته به وسیله حل دو مسأله نمونه بررسی می‌شود. مسأله اول: شامل پنج لایه متقارن $[p^0/0/90/0/p^0]$ (دو لایه پیزوالکتریک از جنس PZT و هسته گرافیت/اپوکسی است) تحت شرایط مرزی ساده و بارگذاری گسترده سینوسی مکانیکی و الکتریکی است؛ و در مسأله دوم: چهار لایه پیزوالکتریک $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$ (لایه‌های فوقانی و تحتانی از جنس PZT-4 و دو لایه دیگر از PVDF هستند) تحت شرایط مرزی قابل قبول روش لوی و بارگذاری گسترده ثابت الکتریکی، تحلیل می‌شود. علاوه بر این یک کد رایانه‌ای برای تحلیل استاتیکی چندلایه‌های ترکیبی متعامد به روش ناویر تهیه شده است که نتایج به دست آمده از آن با نتایج حاصل از روش لوی هم از نظر دقت و هم از نظر سرعت همگرایی مقایسه می‌شود (روش ناویر فقط قابلیت

مقادیر بی بعد شده جابجایی عرضی \bar{w} و تنش‌های داخلی صفحه‌های $\bar{\sigma}_x$ ، $\bar{\sigma}_y$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ و بین صفحه‌های $\bar{\sigma}_{yz}$ برای حالت بارگذاری $q_0 = 1 \text{ Pa}$ و $\Phi_0 = 100 \text{ V}$ ، به کمک جدول (۲) با نتایج موجود در مرجع [33] و نیز نتایج حاصل از حل ناویر مقایسه شده است. مقادیر جابجایی عرضی \bar{w} در مرکز ورق، تنش‌های عمودی $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\sigma}_y$ در مرکز ورق و به ترتیب در فاصله ± 1.5 و ± 4.5 میلی‌متر از صفحه میانی، تنش برشی $\bar{\sigma}_{xy}$ در گوشه ورق و به فاصله ± 4.5 میلی‌متر از صفحه میانی و بالاخره تنش برشی بین صفحه‌های $\bar{\sigma}_{yz}$ در صفحه میانی و وسط لبه $y = 0$ محاسبه شده‌اند. لازم به یادآوری است که مقادیر تنش‌های $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ مربوط به لایه‌های گرافیت/اپوکسی می‌باشد. هم‌چنین تنش‌ها و خیز به صورت زیر بی بعد شده‌اند:

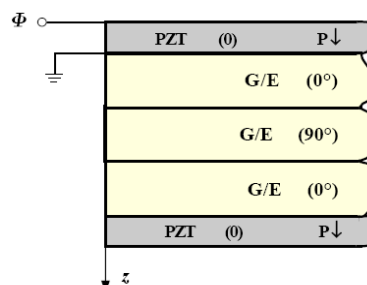
$$\bar{w} = w_0 \left(\frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} \right) \times 10^2$$

$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right), \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{h}{a q_0} \right)$$

که در آن E_2 مدول یانگ در راستای عمود بر جهت قرارگیری الیاف و h ضخامت مربوط به لایه‌های میانی (سه لایه غیر پیزو) است.

ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک، به دلیل محدودیت، اغراق‌آمیز نشان داده شده است).



شکل ۲ نحوه چیدمان لایه‌ها و بارگذاری الکتریکی مربوط به چندلایه $[p^0/0/90/0/p^0]$

سه لایه مرکزی سازه هر یک دارای ضخامت یکسان ۳ میلی‌متر بوده و از جنس گرافیت/اپوکسی در نظر گرفته شده‌اند. خواص مواد مورد استفاده برای این لایه‌ها در دستگاه مختصات ماده، عبارتند از:

$$E_1 = 25E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, \quad G_{23} = 0.2E_2$$

$$v_{12} = v_{23} = v_{13} = 0.25, \quad E_2 = 6.9 \text{ GPa}$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

هم‌چنین ضخامت هر یک از لایه‌های پیزوالکتریک ۴۰ میکرومتر منظور شده که خواص مواد تشکیل دهنده آن‌ها (PZT) به صورت زیر است:

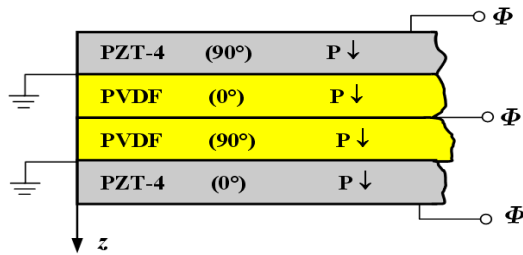
$$E_1 = E_2 = 2 \text{ GPa}, \quad v_{12} = v_{23} = v_{13} = 0.29$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0.1062 \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

$$e_{31} = e_{32} = 0.0046 \text{ C/m}^2, \quad e_{33} = e_{24} = e_{15} = 0$$

جدول ۲ مقایسه تنش‌های چندلایه $[p^0/0/90/0/p^0]$ حاصل از روش‌های مختلف

روش	$\bar{w}(0, a/2, 0)$	$\bar{\sigma}_x(-a/2, 0, \pm h/2)$	$\bar{\sigma}_y(0, a/2, \pm h/6)$	$\bar{\sigma}_z(0, a/2, \pm h/2)$	$\bar{\sigma}_{yz}(0, a/2, 0)$
لوی	۰.۴۱۱	۰.۰۱۹۸ / -۰.۰۲۰۶	۰.۱۸۴ / -۰.۱۵۸	۰.۵۱۸ / -۰.۵۰۴	۰.۰۸۲۹
ناویر	۰.۴۱۱	۰.۰۱۹۸ / -۰.۰۲۰۶	۰.۱۸۴ / -۰.۱۵۸	۰.۵۱۸ / -۰.۵۰۴	۰.۰۸۲۹
ری [33]	۰.۴۴۷	۰.۰۱۹ / -۰.۰۲۱	۰.۱۸۴ / -۰.۱۵۸	۰.۵۱۸ / -۰.۵۰۴	۰.۰۸۶



شکل ۳ نحوه چیدمان لایه ها و بارگذاری الکتریکی مربوط به چندلایه $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$

نتایج برای بارگذاری ثابت $\Phi = \Phi_0$ توسط شکل های (۴ تا ۱۵) نمایش داده شده است. در شکل های مذکور مقادیر تنش ها و جابجایی های مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر بدون بعد شده اند:

$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= (u, v, w) \left(\frac{E_2 e_{31}}{10 \Phi_0} \right) \\ (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}) &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \left(\frac{a}{100 \Phi_0 e_{31}} \right) \\ (\bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_z) &= (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z) \left(\frac{a}{\Phi_0 e_{31}} \right), \quad \bar{D}_z = D_z \left(\frac{10^4}{e_{31}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن D_z مؤلفه های بردار جابجایی الکتریکی در راستای Z بوده و نیز مقادیر E_2 و e_{31} به ترتیب مدول یانگ و ثابت تنش پیزوالکتریک مربوط به لایه های PZT-4 می باشند.

با توجه به وجود سه نوع شرط مرزی ساده، گیردار و آزاد، در مجموع، شش ترکیب متمایز از شرایط مرزی مذکور بر چهار لبه ورق می توان در نظر گرفت که شرایط حل لوی را برآورده نماید (SSSS، SSSS، FSFS، CSSS، CSFS و CSFS)؛ بنابراین نتایج فقط برای این شش ترکیب از شرایط مرزی ارائه شده است. شکل های (۴-الف) و (۴-ب) به ترتیب نحوه هم گرایی روش های ناویر و لوی را برای مسأله مورد بررسی نشان می دهند. در این شکل ها خیز بی بعد شده مرکز چندلایه تحت شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده بر حسب تعداد ترم مورد نیاز در

تطابق بسیار خوبی بین نتایج حل Ray و همکارانش و روش لوی دیده می شود. البته دلیل این تطابق عالی بین نتایج دو روشی که یکی بر اساس یک تئوری سه بعدی و دیگری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول شکل گرفته را می توان علاوه بر توانایی روش، نسبت ضخامت به عرض کم ورق نیز دانست. حتی در مورد تنش ها نیز هیچ گونه اختلافی بین نتایج حاصل از روش های ناویر و لوی، مشاهده نمی شود. لازم به یادآوری است که هم گرایی روش های ناویر و لوی با یک تکرار صورت گرفته است که این موضوع با توجه به شکل سینوسی بارهای مکانیکی و الکتریکی قابل پیش بینی بود.

چندلایه پیزوالکتریک $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$ چندلایه مورد بحث دارای نسبت طول به عرض ۱ و طول به ضخامت ۱۰ است و همه لایه های تشکیل دهنده آن ضخامت یکسان دارند ($h/4$). لایه های فوقانی و تحتانی از جنس PZT-4 و دو لایه دیگر از PVDF انتخاب شده اند. خواص این مواد که از مرجع [35] اقتباس شده به شرح زیر است:

PZT-4:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 139.00 \text{ GPa}, \quad C_{22} = 139.00 \text{ GPa}, \quad C_{44} = 25.60 \text{ GPa} \\ C_{55} &= 25.60 \text{ GPa}, \quad C_{66} = 30.60 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.329 \\ e_{31} &= e_{32} = -5.2 \text{ C/m}^2, \quad e_{33} = 15.08 \text{ C/m}^2, \quad e_{24} = e_{15} = 12.72 \text{ C/m}^2 \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = 1.306 \times 10^{-8} \text{ F/m}, \quad \epsilon_{33} = 1.151 \times 10^{-8} \text{ F/m} \end{aligned}$$

PVDF:

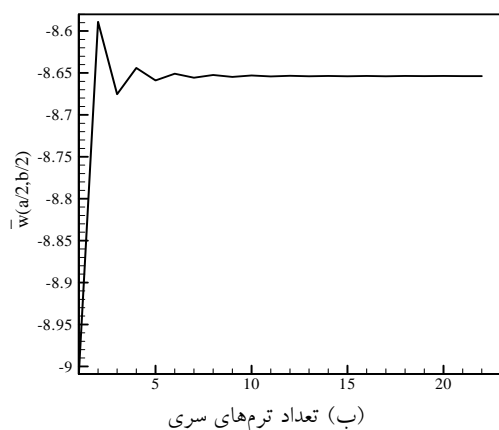
$$\begin{aligned} C_{11} &= 238.00 \text{ GPa}, \quad C_{22} = 23.60 \text{ GPa}, \quad C_{44} = 2.15 \text{ GPa} \\ C_{55} &= 4.40 \text{ GPa}, \quad C_{66} = 6.43 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.154 \\ e_{31} &= -0.13 \text{ C/m}^2, \quad e_{32} = -0.14 \text{ C/m}^2, \quad e_{33} = -0.276 \text{ C/m}^2 \\ e_{24} &= -0.009 \text{ C/m}^2, \quad e_{15} = -0.135 \text{ C/m}^2 \\ \epsilon_{11} &= 1.107 \times 10^{-10} \text{ F/m}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1.061 \times 10^{-10} \text{ F/m} \end{aligned}$$

نحوه اعمال ولتاژ به الکترودها در شکل (۳) نمایش داده شده است. همان گونه که مشاهده می شود، اتصال سیم ها به صورت موازی بوده و کلیه اتصالات در حالت مدار باز است.

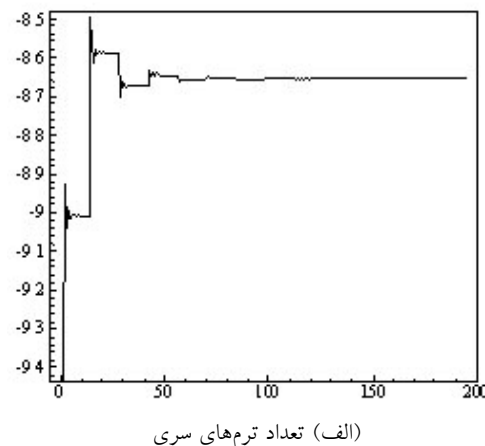
مقادیر زوج m و n ، در شرایط بارگذاری ثابت است).
 برای رسیدن به یک دقت سه رقم اعشاری برای $\bar{w}(0,0)$ ، تعداد جمله‌های سری مورد نیاز در دو روش، به این شرح است: روش لوی ۲۲ تکرار و روش ناویر: $14 \times 14 = 196$ ($m=n=28$).

منحنی‌های مقایسه‌ای تغییرات جابجایی‌های مکانیکی در راستای طول یا عرض و تنش‌ها و بردار جابجایی الکتریکی در راستای ضخامت برای شرایط مرزی مختلف، مربوط به حالت بارگذاری الکتریکی ثابت، در شکل‌های (۵ تا ۸) قابل مشاهده است. با بررسی این شکل‌ها می‌توان دریافت که نتایج عددی ارائه شده برای روش ناویر به نحو بسیار عالی بر نتایج حاصل از روش حل لوی منطبق هستند. هم‌چنین مشاهده می‌شود که توزیع مؤلفه D_z بردار جابجایی الکتریکی چندان تابع نوع شرایط مرزی نیست.

سری‌های مثلثاتی رسم شده است.
 در مورد شکل‌های مذکور، این توضیح باید داده شود که هر عدد بر روی محور افقی شکل (۴-ب)، در حقیقت، نماینده نصف تعداد جملات سری‌های مثلثاتی تعریف شده برای حل لوی می‌باشد؛ چرا که با توجه به صفر شدن توابع متوجه‌های نیرو و ممان الکتریکی به ازای مقادیر زوج m ، در شرایط بارگذاری ثابت، عملاً تعداد ترم‌های سری مورد نیاز در فرآیند حل معادلات حاکم برای یک m معین، نصف آن مقدار m خواهد بود. هم‌چنین در شکل (۴-الف) هر عدد بر روی محور افقی نماینده مقدار $\frac{m \times n}{4}$ است که m و n تعداد جملات سری‌های دوگانه مثلثاتی هستند (دلیل ضرب m در n ، آن است که روش حل دارای دو حلقه تکرار تو در تو است و دلیل تقسیم حاصل ضرب بر ۴، صفر شدن متوجه‌های نیرو و ممان الکتریکی به ازای

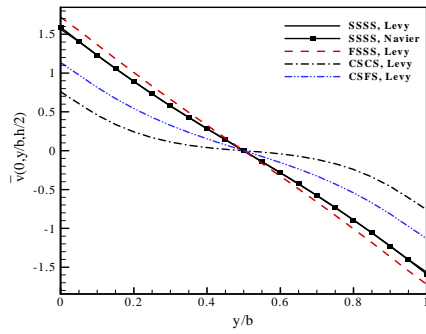


(ب) تعداد ترم‌های سری

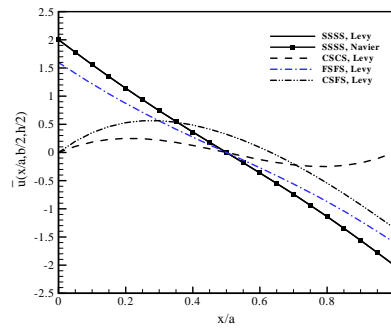


(الف) تعداد ترم‌های سری

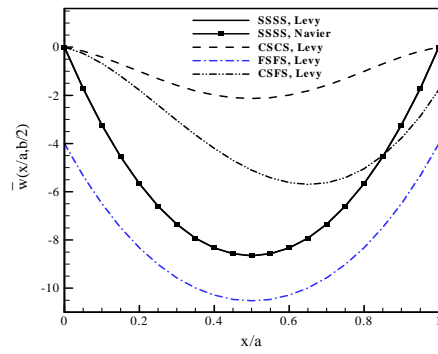
شکل ۴ خیز مرکز چندلایه $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$ تحت شرایط مرزی ساده بر حسب تعداد ترم‌های سری مثلثاتی؛ (الف) مربوط به روش ناویر و (ب) مربوط به روش لوی



(ب)

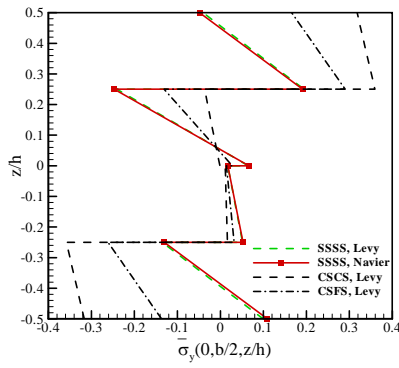


(الف)

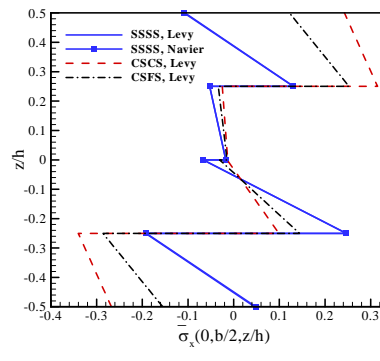


(ب)

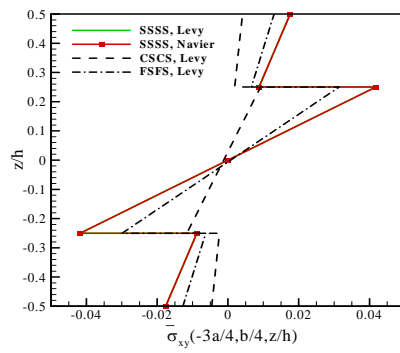
شکل ۵ تغییرات \bar{u} (الف) بر حسب x/a ، \bar{v} (ب) بر حسب y/a و \bar{w} (پ) بر حسب x/a برای چندلایه $[p^0/p^0/p^0/p^0]$



(ب)

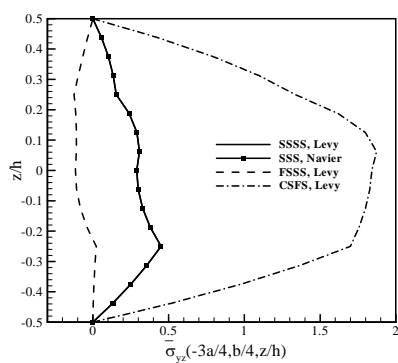


(الف)

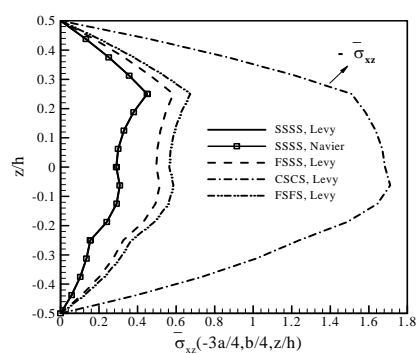


(ب)

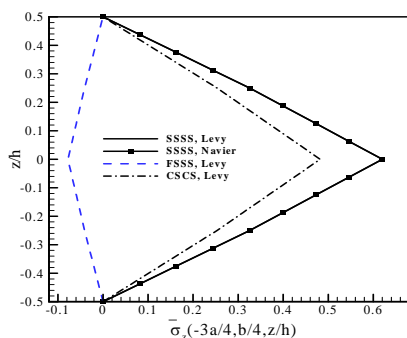
شکل ۶ توزیع تنش های داخل صفحه ای در راستای ضخامت چندلایه $[p^0/p^0/p^0/p^0]$: $\bar{\sigma}_x$ (الف)، $\bar{\sigma}_y$ (ب) و $\bar{\sigma}_{xy}$ (پ)



(ب)

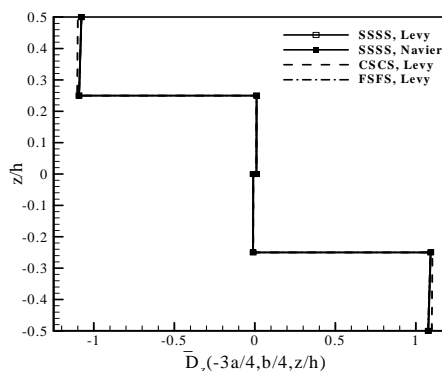


(ف)



(ب)

شکل ۷ توزیع تنش‌های داخل صفحه‌ای در راستای ضخامت چندلایه $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$: (الف) $\bar{\sigma}_{xz}$ ، (ب) $\bar{\sigma}_{yz}$ و (پ) $\bar{\sigma}_z$



شکل ۸ تغییرات \bar{D}_z در راستای ضخامت چندلایه $[p^{90}/p^0/p^{90}/p^0]$

نتیجه گیری

سازه‌ها مورد بحث قرار گرفت. هم‌چنین رهیافت فضای حالت، با موفقیت برای حل معادلات حاکم بر تعادل مسأله مورد بررسی، به‌کار گرفته شد و مشاهده گردید که به‌هنگام استفاده از روش‌های حل ناویر و لوی برای تحلیل استاتیکی چندلایه‌های متعامد ترکیبی پیزوالکتریک، امکان منظور کردن هم‌زمان سهم همه نیروها و ممان‌های الکتریکی میسر نیست. مقایسه نتایج

به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش حل لوی رفتار استاتیکی چندلایه‌های متعامد ترکیبی پیزوالکتریک با خواص ارتوتروپیک بررسی شد. معادلات حاکم بر تعادل بر حسب نوع کلاس کریستالوگرافی لایه‌های پیزوالکتریک دسته‌بندی شده و محدودیت روش لوی در تحلیل خمش این گروه از

عددی با نتایج حاصل از روش ناویر و حل دقیق داد.
سهبعدی صحت و دقت عالی نتایج ارائه شده را نشان

مراجع

1. Mouritza, A. P., Bannister, M. K., Falzon, P. J. and Leong K. H., "Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites", *Compos. Part A*, Vol. 30, pp. 1445-1461, (1999).
2. Fujihara, K., Teo K., Gopal, R., Loh, P. L., Ganesh, V. K., Ramakrishna, S., Foong, K. W. C. and Chew, C. L., "Fibrous composite materials in dentistry and orthopaedics: review and applications", *Compos. Sci. Tech.*, Vol. 64, pp. 775-788, (2004).
3. Loewy, R. G., "Recent developments in smart structures with aeronautical applications", *Smart Mat. Struct.*, Vol. 6, R11-R42, (1997).
4. Crawley, E. F., "Intelligent structures for aerospace - A technology overview and assessment", *AIAA J.*, Vol. 32, pp. 1689-1699, (1994).
5. Peters, D. J. and Blackford, B. L., "Bimorph-based translation device for two-dimensional, remote micropositioning", *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 60, pp. 138-140, (1989).
6. Chopra, I., "Review of state of art of smart structures and integrated systems", *AIAA J.*, Vol. 40, pp. 2145-87, (2002).
7. Khdeir, A. A., Reddy, J. N., and Librescu, L., "Levy type solutions for symmetrically laminated rectangular plates using First-order shear deformation theory", *J. App. Mech.*, Vol. 54, pp. 640-642, (1987).
8. Reddy, J. N. and Khdeir, A. A., "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories", *AIAA J.*, 27(12), pp. 1808-1817, (1989).
9. Khdeir, A. A., "Comparison between shear deformable and kirchhoff theories for bending, buckling, and vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates", *Compos. Struct.*, Vol. 13, pp. 159-172, (1989).
10. Bose, P. and Reddy, J. N., "Analysis of composite plates using various plate theories. Part 1: Formulation and analytical solutions", *Struct. Eng. Mech.*, 6(6), pp. 583-612, (1998).
11. Bose, P. and Reddy, J. N., "Analysis of composite plates using various plate theories. Part 2: Formulation and analytical solutions", *Struct. Eng. Mech.*, 6(7), pp. 727-746, (1998).
12. Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., "Free vibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory", *Comput. Struct.*, Vol. 71, pp. 617-626, (1999).
13. Palardy, R. F. and Palazotto, A. N., "Buckling and vibration of composite plates using the Levy

- method", *Compos. Struct.*, 14(1), pp. 61-86, (1990).
14. Khdeir, A. A., "Forced vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates with various boundary conditions", *J. Sound Vib.*, 188(2), pp. 257-267, (1995).
 15. Librescu, L. and Khdeir, A. A., "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory, Part I. Stress and displacement", *Compos. Struct.*, Vol. 9, pp. 189-213, (1988).
 16. Khdeir, A. A., Reddy, J. N., and Librescu, L., "Analytical solution of a refined shear deformation theory for rectangular composite plates", *Int. J. Solids Struct.*, 23(10), pp. 1447-1463, (1987).
 17. Khdeir, A. A. and Librescu, L., "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory, Part II. Buckling and free vibration", *Compo. Struct.*, Vol. 9, pp.259-277, (1988).
 18. Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., "Exact-solutions for the transient response of symmetric cross-ply laminates using a higher-order plate theory", *Compos. Sci. Tech.*, Vol. 34, pp. 205-224, (1989).
 19. Khdeir, A. A., "Free vibration and buckling of unsymmetric cross-ply laminated plates using a refined theory", *J. Sound Vib.*, 128(3), pp. 377-395, (1989).
 20. Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., "Thermal stresses and deflections of cross-ply laminated plates using refined plate theories", *J. Thermal Stresses*, 14(4), pp. 419-438, (1991).
 21. Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., "Analytical solutions of refined plate theories of cross-ply composite laminates", *J. Press. Vess. Tech.*, 113(4), pp. 570-578, (1991).
 22. Khdeir, A. A., "Free vibration and buckling of symmetric cross-ply laminated plates by an exact method", *J. Sound Vib.*, 126(3), pp. 447-461, (1988).
 23. Khdeir, A. A., "Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions", *J. Sound Vib.*, 122(2), pp. 377-388, (1988).
 24. Nosier, A. and Reddy, J. N., "On vibration and buckling of symmetric laminated plates according to shear deformation theories", *Acta Mechanica*, 94(3,4), pp. 123-170, (1992).
 25. Kapuria, S., Dube, G. P., Dumir, P. C. and Sengupta, S., "Levy-type piezothermoelastic solution for hybrid plate by using first-order shear deformation theory.", *Compos. Part B*, 28B, pp. 535-546, (1997).
 26. Aldraihem O. J. and Khdeir A. A., "Analytical solutions of antisymmetric angle-ply laminated plates with thickness-shear piezoelectric actuators", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 15, pp. 232-242, (2006).
 27. Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., "Analytical solutions of refined plate theories of cross-ply composite laminates", *J. Press. Vess. Tech.*, 113(4), pp. 570-578, (1991).
 28. Chen, W. C. and Liu, W. H., "Deflections and free vibrations of laminated plates—Levy-type solutions", *Int. J. Mech. Sci.*, 32(9), pp. 779-793, (1990).
 29. Reddy, J. N., "Mechanics of laminated composite plates and shells", 2nd edition, CRC Press, (2004).
 30. Rozen, C. Z., Hiremath, B. V. and Newnham, R., "*Piezoelectricity*", Springer, (1992).

31. Goldberg, J. L. and Schwartz, A. J., "*Systems of ordinary differential equations*", New York, Harper and Row, (1972).
32. Franklin, J. N., "*Matrix theory*", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, (1968).
33. Ray, M. C., Bhattacharya, R. and Samanta, B., "Exact solutions for static analysis of intelligent structures." *AIAA J.*, 31(9), pp. 1684-1691, (1993).
34. Pagano, N. J. and Hatfield, S. J., "Elastic behavior of multilayered bidirectional composites." *AIAA J.*, Vol. 10, pp. 931-933, (1972).
35. Qing, G., Qiu, J. and Liu, Y., "A semi-analytical solution for static and dynamic analysis of plates with piezoelectric patches." *Int. J. Solids Struct.*, 43(6), pp. 1388-1403, (2006).

پیوست

عناصر غیر صفر ماتریس ضرایب $[T]$

$$a_{11} = \beta_m^2 \frac{B_{11}B_{66} - D_{11}A_{66}}{B_{11}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$a_{14} = \beta_m \frac{B_{11}(B_{12} + B_{66}) - D_{11}(A_{12} + A_{66})}{B_{11}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$a_{16} = \frac{k^2 B_{11} A_{55}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}}, \quad a_{17} = \beta_m^2 \frac{B_{11} D_{66} - B_{66} D_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}}$$

$$a_{110} = \beta_m \frac{B_{11}(D_{12} + D_{66}) - D_{11}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}}$$

$$a_{22} = \beta_m \frac{D_{66}(A_{12} + A_{66}) - B_{66}(B_{12} + B_{66})}{B_{66}^2 - A_{66} D_{66}}$$

$$a_{23} = \beta_m^2 \frac{B_{22} B_{66} - A_{22} D_{66}}{B_{66}^2 - A_{66} D_{66}}, \quad a_{25} = \frac{k^2 \beta_m B_{66} A_{44}}{B_{66}^2 - A_{66} D_{66}}$$

$$a_{28} = \beta_m \frac{D_{66}(B_{12} + B_{66}) - B_{66}(D_{12} + D_{66})}{B_{66}^2 - A_{66} D_{66}}$$

$$a_{29} = \frac{\beta_m^2 (D_{22} B_{66} - B_{22} D_{66}) + k^2 B_{66} A_{44}}{B_{66}^2 - A_{66} D_{66}}$$

$$a_{35} = \frac{\beta_m^2 A_{44}}{A_{55}}, \quad a_{38} = -1, \quad a_{39} = \frac{\beta_m A_{44}}{A_{55}}$$

$$a_{41} = \beta_m^2 \frac{A_{11} B_{66} - B_{11} A_{66}}{A_{11} D_{11} - B_{11}^2}$$

$$a_{44} = \beta_m \frac{A_{11}(B_{12} + B_{66}) - B_{11}(A_{12} + A_{66})}{A_{11} D_{11} - B_{11}^2}$$

$$a_{46} = \frac{k^2 A_{11} A_{55}}{A_{11} D_{11} - B_{11}^2}$$

$$a_{47} = \frac{\beta_m^2 (A_{11} D_{66} - B_{11} B_{66}) + k^2 A_{11} A_{55}}{A_{11} D_{11} - B_{11}^2}$$

$$a_{410} = \beta_m \frac{A_{11}(D_{12} + D_{66}) - B_{11}(B_{12} + B_{66})}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}$$

$$a_{52} = \beta_m \frac{B_{66}(A_{12} + A_{66}) - A_{11}(B_{12} + B_{66})}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2}$$

$$a_{53} = \beta_m^2 \frac{B_{22}A_{66} - A_{22}B_{66}}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2}, \quad a_{55} = \frac{k^2 \beta_m A_{66} A_{44}}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2}$$

$$a_{58} = \beta_m \frac{B_{66}(B_{12} + B_{66}) - A_{66}(D_{12} + D_{66})}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2}$$

$$a_{59} = \frac{\beta_m^2 (A_{66}D_{22} - B_{22}B_{66}) + k^2 A_{66} A_{44}}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2} \quad (25)$$

عناصر غیر صفر بردار ثوابت {F}

ثوابت c_i ، با توجه به جدول (۱)، به یکی از شکل های زیر خواهند بود:

$$c_1 = \frac{D_{11}\beta_m N_m^{P6} - B_{11}(\beta_m M_m^{P6} + Q_m^{P1})}{B_{11}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$c_2 = \frac{B_{66}[(M_m^{P6})' - Q_m^{P2}] - D_{66}(N_m^{P6})'}{B_{66}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$c_3 = \frac{(Q_m^{P1})' - \beta_m Q_m^{P2} - Q_m}{k^2 A_{55}}$$

$$c_4 = \frac{B_{11}\beta_m N_m^{P6} - A_{11}(\beta_m M_m^{P6} + Q_m^{P1})}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}$$

$$c_5 = \frac{A_{66}[(M_m^{P6})' - Q_m^{P2}] - B_{66}(N_m^{P6})'}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2} \quad (26- الف)$$

یا

$$c_1 = \frac{B_{11}(M_m^{P1})' - D_{11}(N_m^{P1})'}{B_{11}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$c_2 = \frac{B_{66}\beta_m M_m^{P2} - D_{66}\beta_m N_m^{P2}}{B_{66}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$c_3 = \frac{-Q_m}{k^2 A_{55}}, \quad c_4 = \frac{A_{11}(M_m^{P1})' - B_{11}(N_m^{P1})'}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}$$

$$c_5 = \frac{A_{66}\beta_m M_m^{P2} - B_{66}\beta_m N_m^{P2}}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2} \quad (۲۶-ب)$$

و یا

$$c_1 = \frac{B_{11}(M_m^{P1})' - D_{11}(N_m^{P1})'}{B_{11}^2 - A_{11}D_{11}}$$

$$c_2 = \frac{B_{66}(\beta_m M_m^{P2} - Q_m^{P2}) - D_{66}\beta_m N_m^{P2}}{B_{66}^2 - A_{66}D_{66}}$$

$$c_3 = \frac{(Q_m^{P1})' - \beta_m Q_m^{P2} - Q_m}{k^2 A_{55}}$$

$$c_4 = \frac{A_{11}[(M_m^{P1})' - Q_m^{P1}] - B_{11}(N_m^{P1})'}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}$$

$$c_5 = \frac{A_{66}(\beta_m M_m^{P2} - Q_m^{P2}) - B_{66}\beta_m N_m^{P2}}{A_{66}D_{66} - B_{66}^2} \quad (۲۶-پ)$$

اعمال شرایط مرزی برای محاسبه بردار ثوابت $\{K\}$: برای محاسبه بردار $\{K\}$ لازم است، شرایط مرزی مختلف در هر یک از لبه‌های $x = \pm a/2$ به صورت یک معادله ماتریسی به فرم زیر، بر حسب بردار حالت $\{Z\}$ ، نوشته شود:

$$[\hat{a}]\{Z\} = \{\hat{c}\} \quad (۲۷)$$

در ادامه، این معادله ماتریسی و یا به عبارتی ثوابت $[\hat{a}]$ و $\{\hat{c}\}$ برای شرایط مرزی مختلف ارایه خواهد شد.

الف) شرایط مرزی گیردار:

شرایط مرزی گیردار برای هر یک از لبه‌های $x = -a/2$ یا $x = a/2$ را می‌توان به صورت زیر، بر حسب بردار

حالت، بیان نمود:

$$\begin{aligned} u_0 = 0 : & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ v_0 = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ w_0 = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \psi = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \phi = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \{Z\} = \{0\} \quad (28)$$

(ب) شرایط مرزی آزاد:

$$\begin{aligned} N_x = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & A_{11} & -\beta_m A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 \\ \beta_m A_{66} & 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & \beta_m B_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \\ \beta_m B_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta_m D_{66} & 0 & 0 & D_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 A_{55} & k^2 A_{55} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ N_{xy} = 0 : & \begin{bmatrix} \beta_m A_{66} & 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & \beta_m B_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \\ \beta_m B_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta_m D_{66} & 0 & 0 & D_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 A_{55} & k^2 A_{55} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M_x = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & A_{11} & -\beta_m A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M_{xy} = 0 : & \begin{bmatrix} \beta_m A_{66} & 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & \beta_m B_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \\ \beta_m B_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta_m D_{66} & 0 & 0 & D_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 A_{55} & k^2 A_{55} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ Q_x = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \{Z\} = \begin{bmatrix} N_m^{PI}(x) \\ N_m^{P6}(x) \\ M_m^{PI}(x) \\ M_m^{P6}(x) \\ Q_m^{PI}(x) \end{bmatrix}_{x=\pm a/2} \quad (29)$$

(پ) شرایط مرزی ساده:

$$\begin{aligned} v_0 = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & A_{11} & -\beta_m A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \end{bmatrix} \\ w_0 = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & A_{11} & -\beta_m A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \end{bmatrix} \\ \phi = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & A_{11} & -\beta_m A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 \\ 0 & B_{11} & -\beta_m B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & -\beta_m D_{12} & 0 \end{bmatrix} \\ N_x = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M_x = 0 : & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \{Z\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_m^{PI}(x) \\ M_m^{PI}(x) \end{bmatrix}_{x=\pm a/2} \quad (30)$$

قدم بعدی در محاسبه بردار ثابت $\{K\}$ جای‌گزینی $\{Z\}$ از رابطه (۲۰) در معادله (۲۷) به منظور رسیدن به یک معادله ماتریسی بر حسب $\{K\}$ ، به فرم $[I]\{K\} = \{r\}$ است که در آن:

$$[I] = [\hat{a}][\Lambda][E]_{x=\pm a/2}$$

$$\{r\} = \left\{ \{\hat{c}\} - [\hat{a}][\Lambda][E] \int_0^y [E]^{-1} [\Lambda]^{-1} \{F\} d\zeta \right\}_{x=\pm a/2}$$

با جای‌گذاری $[\hat{a}]$ و $\{\hat{c}\}$ از معادلات (۲۸) تا (۳۰) (بسته به شرایط مرزی حاکم بر لبه‌های $x = \pm a/2$) در روابط فوق، دو معادله ماتریسی که در مجموع دارای ۱۰ معادله و ۱۰ مجهول هستند، به دست می‌آید. از ترکیب معادلات مذکور یک معادله ماتریسی به فرم $[L]\{K\} = \{R\}$ ، حاصل خواهد شد که در آن:

$$[L] = \begin{bmatrix} [I]_{x=-a/2} \\ [I]_{x=a/2} \end{bmatrix}, \quad \{R\} = \begin{bmatrix} \{r\}_{x=-a/2} \\ \{r\}_{x=a/2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

در نهایت از حل معادله اخیر برای $\{K\}$ ($\{K\} = [L]^{-1}\{R\}$) و قرار دادن نتیجه در رابطه (۲۰)، بردار حالت $\{Z\}$ و یا به عبارتی پارامترهای U_m, V_m, W_m, X_m, Y_m و مشتقات مرتبه اول آنها نسبت به x در دست خواهد بود.