

تشابه ساختاری پیاپی برای صفحات کامپوزیتی در کماتش پس از ضربه*

محمود مهرداد شکریه^(۱) عباس عسکری^(۲)

چکیده با ایجاد شرایط تشابه بین دو ساختار، می‌توان با صرف وقت و هزینه‌ی کم‌تر، رفتار ساختارهای بزرگتر را از روی رفتار ساختارهای مشابه کوچکتر پیش بینی نمود. در ایجاد تشابه دو روش اصلی، آنالیز ابعادی و استفاده‌ی مستقیم از روابط حاکمه وجود دارد، این روش‌ها غالباً در نواحی الاستیک به کار می‌روند. در این تحقیق از هر دو روش فوق و در نواحی غیر الاستیک استفاده شده است. اعتبار این روش‌ها در طی بررسی تشابه در کماتش پس از ضربه‌ی صفحات کامپوزیتی نشان داده شده است. برای دستیابی به این هدف از روش المان محدود به صورت مدل‌سازی تخریب پیش رونده کمک گرفته شده است. برای ایجاد تشابه در پدیده‌ی کماتش پس از ضربه، ابتدا شرایط تشابه در فرایند ضربه اعمال شده است تا در پی آن، صفحات پس از ضربه، رفتار مشابه‌ای در کماتش داشته باشند؛ لذا تشابه در دو مرحله و به صورت پیاپی اعمال شده است. ایجاد تشابه در یک پدیده به عنوان پیش زمینه‌ای برای ایجاد تشابه در پدیده‌ی دیگر، اولین باری است که انجام می‌گیرد. این شیوه‌ی شبیه‌سازی، تشابه پیاپی نامیده شده است. در این تحقیق، هدف بررسی امکان و میزان دقت این شیوه است. نتایج، گویای امکان ایجاد چنین تشابه‌ی با میزان کمی خطا می‌باشد.

واژه‌های کلیدی تشابه ساختاری، تشابه پیاپی، کماتش، ضربه، مدل‌سازی تخریب پیش رونده تحلیل اجزاء محدود

Sequential Similitude for Buckling Response of Impacted Composite Plates

M. M. Shokrieh

A. Askari

Abstract In establishing of similarity conditions, dimensional analysis and direct use of governing equations are two existing major methods. These methods are frequently used in elastic domains. In this study, both methods are applied in inelastic domains. Their applicability is illustrated through the study of buckling response of impacted composite plates by using the progressive damage modeling technique. In order to establish the similarity conditions between impacted plates under buckling loading, similitude theory is applied in two following stages. First similarity condition is established for impacted plates. Then the similarity condition between impacted plates under buckling loading is established. For development of similarity conditions in impact loading, dimensional analysis is used while in buckling loading governing equations are applied directly. This method is called "Sequential Similitude". In the next stage, progressive damage modeling was conducted on scaled down models to verify the accuracy of predicted results from similitude equations. Results show the validity of this procedure for simulation with acceptable errors in predicted results.

Key Words Similitude Theory, Buckling, Impact, Progressive Damage Modeling, Composite Plates, Sequential Similitude.

* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۱۳۸۸/۷/۱ و نسخه‌ی نهایی آماده چاپ آن در تاریخ ۱۳۸۹/۷/۱۰ می‌باشد.

(۱) عهده‌دار مکاتبات: استاد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

(۲) دانش آموخته کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مقدمه

تعیین اندازه و ابعاد بهینه برای یک سیستم در پاسخ به یک نیاز مشخص، هنر علم مهندسی است. طراحی سبک و بهینه، نیازمند بررسی‌های دقیقی از جمله بررسی‌های آزمایشی است. انجام آزمایش در مورد بسیاری از سازه‌های بزرگ غیر ممکن بوده و یا در صورت امکان انجام چنین آزمایشاتی، مشکل، گران و وقت‌گیر خواهند بود؛ لذا اگر بتوان نمونه‌ی اصلی (Prototype) را با یک مدل مقیاس شده (Scaled Model) جایگزین نمود، بهتراست در ایجاد تشابه دو روش اصلی، تحلیل ابعادی و استفاده‌ی مستقیم از روابط حاکمه وجود دارد.

استفاده‌ی علمی از مدل بر مبنای تحلیل‌های ابعادی برای اولین بار در مقاله‌ای توسط رایللی (Rayleigh) بررسی شد. استفاده از تحلیل‌های ابعادی در بررسی رفتار سیستم‌های ساختاری برای اولین بار توسط گودیر (Goodier) و تامسون (Thomson) بیان گردید [1,2].

از آن‌جا که قطعات کامپوزیتی نیاز به بررسی‌های آزمایشی زیادی دارند، لذا علاقه زیادی در راستای آزمایش نمونه‌های کوچکتر وجود دارد. محققان بسیاری تاکنون به این موضوع پرداخته‌اند. مورتن (Morton) [3]، با استفاده از تحلیل ابعادی به بررسی تأثیر اندازه بر روی رفتار تیرهای کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای پرداخت. برای تیرهای ایزوترپیک بدون در نظر گرفتن خرابی، می‌توان با استفاده از سیزده پارامتر، رفتار سیستم را به طور کامل بیان داشت. با استفاده از این پارامترها می‌توان ده عبارت بدون بعد تشکیل داد. به کمک این عبارت‌های بدون بعد می‌توان رفتار سیستم‌های مشابه را پیش‌بینی نمود. نتایج حاصله بیانگر وجود تأثیر اندازه در هنگامی است که خرابی در قطعه روی می‌دهد. نتلس (Nettles) و هم‌کاران [4] با استفاده از این روش به مطالعه‌ی پدیده‌ی نفوذ (Indentation) شبه استاتیک و ضربه در صفحات کامپوزیت تک‌جهته پرداختند. نتایج آزمایشگاهی با مقادیر به دست آمده از قوانین تشابه مقایسه گردیدند که تفاوت‌های قابل ملاحظه‌ای

مشاهده شد.

جکسون (Jackson) و هم‌کاران [5-7] با استفاده از تحلیل ابعادی و به کمک نتایج آزمایشگاهی به بررسی تأثیر اندازه بر پاسخ، استحکام و حالت (mode) خرابی صفحات کامپوزیت کربن/اپوکسی تحت بارگذاری کششی و خمشی پرداختند. آزمایش‌ها نشان دادند رفتار الاستیک نمونه‌ها مستقل از اندازه است؛ در حالی که اندازه‌ی تأثیر قابل ملاحظه‌ای در میزان استحکام و حالت‌های خرابی نمونه‌ها دارد.

کیان و سوانسون (Qian & Swanson) [8,9] به مطالعات آزمایشی بر روی ضربه صفحات کامپوزیتی با ضرایب اندازه $1/3$ و 5 پرداختند. شرایط تشابه با استفاده‌ی مستقیم از روابط، ایجاد گردیده است. مقادیر جابه‌جایی و نیروی ضربه به‌دست آمده از دقت لازم برخوردار می‌باشد.

آنگباکورن (Ungbhakorn) و هم‌کارش [10] با استفاده‌ی مستقیم از روابط حاکم بر مسأله به بررسی رفتار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار محوری پرداختند. بررسی مشابهی توسط چواچاوی (Chouchaoui) [11]، برای بارگذاری‌های مختلف صورت گرفت. ویسنام (Wisnom) [12]، در مقاله‌ای جامع، مروری دقیق بر کارهای صورت گرفته در مبحث تأثیر اندازه بر نتایج آزمایش کامپوزیت‌ها انجام داده است. وی در پایان، به تأثیر اندازه در استحکام اشاره می‌کند؛ به گونه‌ای که با افزایش اندازه، استحکام میل به کاهش دارد.

رضایی پزند و سیمیتزس (Simitzes) [13,14] با استفاده‌ی مستقیم از روابط حاکم، به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای پرداختند. آن‌ها با استفاده از روابط حاکم بر یک مدل کوچک، رفتار نمونه‌ی بزرگتر را پیش‌بینی نموده، سپس این رفتار را با رفتار به دست آمده از روابط حاکم بر نمونه‌ی بزرگتر، مقایسه نموده‌اند. در مواردی نیز به بررسی رفتار پیش‌بینی شده در هنگامی که تشابه کامل وجود ندارد پرداخته‌اند. آن‌ها به همین شیوه به بررسی تشابه در پایداری صفحات کامپوزیتی پرداختند [15].

صفحات دارای نواحی خرابی ناشی از ضربه. در ایجاد تشابه در پدیده‌ی ضربه، روش آنالیز ابعادی به کار گرفته شده و به دنبال آن برای پدیده‌ی کماتش از معادلات حاکمه به صورت مستقیم استفاده شده است. برای بررسی صحت نتایج، از تحلیل‌های المان محدود به صورت مدل‌سازی تخریب پیش‌رونده (Progressive Damage Modeling) کمک گرفته شده است. صفحات از کامپوزیت کربن / اپوکسی ساخته شده اند.

تشابه در برخورد

در این قسمت، قوانین تشابه ابعادی برای صفحه‌ای با دو تکیه‌گاه ساده تحت برخورد با پرتابه‌ی صلب با سر کروی در مرکز صفحه به‌دست آورده شده است. در این بررسی، تشابه در بین چهار صفحه اعمال شده است.

پارامترهای مهم در فرایند برخورد نیم کره صلب با صفحه‌ی کامپوزیتی، عبارتند از پارامترهای هندسی صفحه، طول (a)، عرض (b) و ضخامت (h) و پارامترهای خواص مکانیکی صفحه شامل مدول‌های یانگ (E) و ضرایب پواسون (ν). مشخصات برخورد کننده از جمله شعاع (R_i)، جرم (m_i) و سرعت برخورد کننده (V_i)، جابه‌جایی مرکز صفحه (w) و زمان (t). در این تحلیل، برخورد کننده به عنوان یک جسم صلب مدل شده است؛ لذا مدول یانگ و ضریب پواسون مربوط به برخورد کننده در نظر گرفته نشده است.

با استفاده از تئوری π ، ترم‌های بدون بعد زیر را می‌توان به دست آورد. از آن‌جا که جنس تمامی صفحات یکسان است، لذا عبارتهای π که تنها شامل جمله‌های مربوط به جنس صفحه می‌باشند، در نظر گرفته نشده است:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{W}{h} & \pi_2 &= \frac{a}{h} & \pi_3 &= \frac{b}{h} \\ \pi_4 &= \frac{R_i}{h} & \pi_5 &= \frac{m_i \times V_i^2}{R_i^3 \times E} & \pi_6 &= \frac{t \times V}{h} \end{aligned} \quad (1)$$

سودرلند (Sutherland) و گودس (Guedes) [16]، با استفاده از آنالیز ابعادی و به روش مورتن [3] به بررسی پدیده ضربه بر روی چند لایه‌ها پرداختند؛ سپس صحت نتایج پیش‌بینی شده توسط روابط تشابه را با آزمایش بررسی نمودند. ویوت (Viot) و هم‌کاران [17] به بررسی تأثیر اندازه بر روی صفحات کربن اپوکسی تحت ضربه پرداختند. آن‌ها برای ایجاد تشابه از روش آنالیز ابعادی استفاده نمودند. سپس نتایج این تشابه را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند در نواحی که در قطعه خرابی رخ نداده است رفتار قطعه به خوبی پیش‌بینی شده ولی با ایجاد خرابی در قطعه، تأثیر اندازه مشخص است.

سیمیتز [18] با استفاده از روابط حاکم بر مسأله به بررسی رفتار خمشی، بار کماتش و پاسخ ارتعاشی صفحات کامپوزیت با ترکیب لایه‌های عمود بر هم پرداخت. نتایج پیش‌بینی شده را با تحلیل‌های تئوری و در حالت خمش با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کرد که رفتار پیش‌بینی شده از دقت خوبی برخوردار می‌باشد.

هدف کلی در این تحقیق، ایجاد و بررسی تشابه بین چند صفحه کامپوزیتی است که بارگذاری در آن‌ها از حد الاستیک فراتر رفته و باعث ایجاد نواحی خرابی در صفحات شده است. بدین منظور به بررسی رفتار کماتش چند صفحه‌ی کامپوزیتی دارای نواحی خرابی ناشی از ضربه پرداخته شده است. بدین دلیل مسأله به دو بخش تقسیم گردید؛ در بخش اول، شرایط تشابه در پدیده‌ی ضربه و در بخش دوم، شرایط تشابه در پدیده‌ی کماتش اعمال شده است. در ابتدا به عنوان یک پیش‌زمینه قبل از اعمال تشابه در پدیده‌ی کماتش صفحات دارای نواحی خرابی، شرایط تشابه در فرایند ضربه اعمال شده است، سپس بدون آن که نواحی خرابی در روابط تشابه اثر داده شوند، در پی آن تشابه برای کماتش صفحات پس از ضربه اعمال شده است؛ لذا تشابه در دو مرحله و به صورت پیاپی اعمال می‌شود؛ تشابه در ضربه جهت ایجاد تشابه در کماتش

فرض کرده و نسبت بین متغیر دیگر را از این شرط به دست آورد. با ثابت فرض کردن متغیر زمان بین مدل و نمونه‌ی اصلی رابطه‌ی زیر به دست آورده می‌شود:

$$V_{ip} = 2 \times V_{im} \quad (6)$$

از شرط $\pi_{5m} = \pi_{5p}$ برای جرم برخورد کننده نمونه اصلی به دست می‌آید:

$$\frac{m_{im} \times V_{im}^2}{R_{im}^3 \times E} = \frac{m_{ip} \times V_{ip}^2}{R_{ip}^3 \times E} \rightarrow m_{ip} = 2 \times m_{im} \quad (7)$$

در نهایت با در نظر گرفتن ضریب اندازه λ بین مدل و نمونه‌ی اصلی، انرژی برخورد با ضریب λ^3 و نیروی برخورد با ضریب λ^2 مقیاس می‌شود. در صفحات، جهت λ برابر کردن ضخامت، تعداد لایه‌ها در هر زیر لایه λ برابر شده است. ترتیب لایه چینی در تمام صفحات یکسان است. ابعاد هر چهار صفحه به همراه شرایط برخورد کننده در هر حالت در جدول (۱) ارائه شده است.

ایجاد تشابه در پدیده‌ی کمانش

برای یک صفحه‌ی کامپوزیتی متقارن سالم، تحت بار محوری بر واحد عرض N_x معادله‌ی دیفرانسیل ذیل برای کمانش صفحه وجود دارد [19]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$D_3 = D_{12} + 2D_{66} \quad (8)$$

برای صفحه‌ای با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، حل ناویر (Navier) ذیل پیشنهاد شده است:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

در عبارت π_5 در انتخاب تفاوتی وجود ندارد. می‌توان هر کدام از E ها یا G های مربوط به تک لایه و یا حتی E ها یا G های مربوط به صفحه‌ی کامپوزیتی چند لایه را انتخاب کرد. هدف تشابه در این بارگذاری پیش بینی جابه‌جایی مرکز صفحه است؛ لذا عبارت بالا به شکل زیر مرتب شده است:

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \quad (2)$$

حال دو صفحه را یکی به عنوان نمونه‌ی اصلی و دیگری را به عنوان مدل در نظر بگیرید. ابعاد نمونه‌ی اصلی λ برابر مدل است. λ ضریب اندازه است. برای برقراری تشابه کامل بایستی تمام عبارات داخل پرانتز در رابطه‌ی (۲) برای مدل با عبارات داخل پرانتز برای نمونه‌ی اصلی برابر باشند؛ در آن صورت $\pi_{1m} = \pi_{1p}$ خواهد بود.

اندیس‌های m و p ، به ترتیب مربوط به نمونه‌ی اصلی و مدل می‌باشد. از آن‌جا که ابعاد نمونه اصلی λ برابر ابعاد مدل است، لذا:

$$\pi_{im} = \pi_{ip}, \quad i = 2, 3 \quad (3)$$

از شرط برابری $\pi_{4m} = \pi_{4p}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{R_{im}}{h_m} = \frac{R_{ip}}{h_p} \rightarrow R_{ip} = 2 \times R_{im} \quad (4)$$

بنابراین، شعاع برخورد کننده‌ی نمونه‌ی اصلی بایستی دو برابر برخورد کننده‌ی مدل باشد. از برابری $\pi_{6m} = \pi_{6p}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{t_m \times V_{im}}{h_m} = \frac{t_p \times V_{ip}}{h_p} \quad (5)$$

برای برقراری این برابری می‌توان یک نسبت معین بین یکی از متغیرهای t یا V مدل و نمونه اصلی

مناسب حالت کماتش مربوطه می‌باشند. با فرض آن‌که شکل حالت کماتش برای مدل و نمونه‌ی اصلی تقریباً یکسان باشد، هر دو مدل و نمونه‌ی اصلی را می‌توان با تعداد جمله‌های یکسانی از سری جواب بیان داشت [15]. بنابراین:

$$\lambda_m = \lambda_n = 1 \quad (13)$$

اکنون از رابطه‌ی (۱۲) می‌توان شرایط تشابه را به صورت زیر بیان داشت:

$$\begin{aligned} \lambda_{Nx} &= \frac{\lambda_{D1}}{\lambda_a^2} \\ \lambda_{Nx} &= \frac{\lambda_{D3}}{\lambda_b^2} \\ \lambda_{Nx} &= \lambda_{D2} \frac{\lambda_a^2}{\lambda_b^4} \end{aligned} \quad (14)$$

معادلات فوق، شرایط لازم و کافی برای تشابه کامل بین مدل و نمونه‌ی اصلی است. در صورت وجود ضریب اندازه λ بین ابعاد صفحات، برابری ذیل برقرار خواهد بود:

$$\lambda_a = \lambda_b = \lambda \quad (15)$$

با فرض یکسان بودن ترتیب لایه چینی در تمام صفحات نسبت ترم‌های D_i بین نمونه‌ی اصلی و مدل برابر با λ^3 خواهد بود؛ چرا که مقادیر D_i در هر صفحه متناسب با h^3 می‌باشد. بنابراین:

$$\lambda_{D_{11}} = \lambda_{D_{22}} = \lambda_{D_3} = \lambda^3 \quad (16)$$

با جاگذاری مقادیر فوق در معادلات (۱۴):

با جاگذاری معادله‌ی (۹) در معادله‌ی (۸)، بار بحرانی صفحه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N_{xcr} = \pi^2 \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2D_3 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \left(\frac{a}{m} \right)^2 \right] \quad (10)$$

در این رابطه؛ D_{11}, D_{22}, D_3 ، سفتی‌های خمشی a, b طول و عرض صفحه هستند. با تعریف ضریب اندازه‌ی λ متغیرهای نمونه‌ی اصلی را می‌توان به شکل $X_{ip} = \lambda_{xi} \cdot X_{im}$ بر حسب متغیرهای مدل نوشت. شرایط تشابه بین مدل و نمونه‌ی اصلی با جایگزینی $\lambda_{xi} \cdot X_{im}$ در معادله‌ی دیفرانسیل نمونه‌ی اصلی (۱۰) و سعی در ایجاد معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مدل به دست می‌آید. در صورت به دست آوردن معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مدل از این معادله، شرایط تشابه کامل بین دو صفحه‌ی سالم به وجود خواهد آمد. با جاگذاری در رابطه‌ی (۱۰) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \lambda_{Nx} \cdot N_{xcr} &= \pi^2 \left[\frac{\lambda_{D11} \cdot \lambda_m^2}{\lambda_a^2} \cdot D_{1m} \left(\frac{m_m}{a_m} \right)^2 + \right. \\ &\left. 2 \frac{\lambda_{D3} \cdot \lambda_n^2}{\lambda_b^2} \cdot D_{3m} \left(\frac{n_m}{b_m} \right)^2 + \lambda_{D22} \frac{\lambda_n^4 \cdot \lambda_a^2}{\lambda_b^4 \cdot \lambda_m^2} D_{2m} \left(\frac{n_m}{b_m} \right)^4 \left(\frac{a_m}{m_m} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

با ساده کردن عبارات شامل λ از دو طرف معادله (۱۱)، معادلات (۱۰) و (۱۱) یکسان خواهند شد. بنابراین:

$$\lambda_{Nx} = \frac{\lambda_{D1} \cdot \lambda_m^2}{\lambda_a^2} = \frac{\lambda_{D3} \cdot \lambda_n^2}{\lambda_b^2} = \lambda_{D2} \frac{\lambda_n^4 \cdot \lambda_a^2}{\lambda_b^4 \cdot \lambda_m^2} \quad (12)$$

m, n عددهای طبیعی هستند که در پاسخ جابه‌جایی صفحه، وارد شده‌اند. این اعداد نشان دهنده‌ی تعداد ترم‌های مورد نیاز در پاسخ جهت بیان شکل

صورت مدل‌های تخریب پیش رونده استفاده شده است. مدل‌سازی تخریب پیش رونده، شامل سه بخش اصلی: تحلیل تنش، بررسی خرابی و کاهش خواص است. ابتدا تحلیل تنش بر روی قطعه صورت می‌گیرد، سپس با بررسی خرابی در صورت رخ دادن آن، خواص ماده تغییر خواهد یافت. بدین صورت می‌توان فرایند تخریب در قطعه را دنبال نمود. در بررسی خرابی از معیار خرابی هشین (Hashin Failure Criterion) [20] و در کاهش خواص ماده از روش چنگ-چنگ (Chang-Chang) [21]، استفاده شده است. این معیار به همراه قوانین کاهش خواص مواد در جدول‌های (۲) و (۳) ارائه شده است.

در جدول (۲)، X_t ، X_c ؛ به ترتیب بیانگر استحکام کششی و فشاری در راستای الیاف، Y_t ، Y_c ؛ استحکام کششی و فشاری در راستای ماتریس، Z_t و Z_c ؛ استحکام کششی و فشاری در راستای عمود بر صفحه، S_{12} و S_{13} ؛ استحکام برشی داخل صفحه و استحکام برشی خارج از صفحه و S_{23} ؛ استحکام کششی در صفحه (۲-۳) برای یک تک لایه می‌باشند.

$$\lambda_{N_x} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda$$

$$\lambda_{N_x} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda$$

$$\lambda_{N_x} = \lambda^3 \frac{\lambda^2}{\lambda^4} = \lambda \quad (17)$$

همان گونه که مشخص است، هر سه معادله برقرار خواهند بود. بنابراین، بین مدل و نمونه‌ی اصلی تشابه کامل برقرار شده است. معادلات بالا بار کماتش در حالت‌های (modes) کماتش یکسان را به صورت $\lambda_{N_x} = \frac{N_{xp}}{N_{x...}} = \lambda$ بین مدل و نمونه‌ی اصلی پیش‌بینی می‌کند. N_x ؛ نیرو بر واحد طول است، بنابراین ضریب اندازه برای نیروی کماتش λ^2 خواهد بود.

برای λ برابر کردن ضخامت صفحات، تعداد لایه‌ها در هر زیر لایه λ برابر شده است. ترتیب لایه چینی در تمام صفحات یکسان است. ابعاد هر چهار صفحه در جدول (۱) ارائه شده است.

مدل‌سازی عددی

در این تحقیق از تحلیل‌های المان محدود سه بعدی به

جدول ۱ شرایط صفحات مدل شده

	صفحه‌ی اول	صفحه‌ی دوم	صفحه‌ی سوم	صفحه‌ی چهارم
اندازه صفحه (mm)	۱۰۰ × ۵۰ × ۱	۲۰۰ × ۱۰۰ × ۲	۳۰۰ × ۱۵۰ × ۳	۴۰۰ × ۲۰۰ × ۴
لایه چینی	$[0/90/\pm 45]_s$	$[0_2/90_2/\pm 45_2]_s$	$[0_3/90_3/\pm 45_3]_s$	$[0_4/90_4/\pm 45_4]_s$
شعاع برخورد کننده (mm)	۵	۱۰	۱۵	۲۰
جرم برخورد کننده (kg)	۱	۲	۳	۴
سرعت برخورد کننده (m/s)	۲	۴	۶	۸

جدول ۲ روابط حاکم بر حالت های مختلف خرابی یک لایه ی تک جهته برحسب معیار هشین

رابطه	حالت شکست
$\left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 = e_F^2$	کشش الیاف $\sigma_1 \geq 0$
$\left(\frac{\sigma_1}{X_c}\right)^2 = e_F^2$	فشار الیاف $\sigma_1 < 0$
$\left(\frac{\sigma_1}{X_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 = e_{FM}^2$	برش بین الیاف و ماتریس $\sigma_1 < 0$
$\left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 = e_M^2$	کشش در راستای ماتریس $\sigma_2 \geq 0$
$\left(\frac{\sigma_2}{Y_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 = e_M^2$	فشار در راستای ماتریس $\sigma_2 < 0$
$\left(\frac{\sigma_3}{Z_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{23}}\right)^2 = e_N^2$	کشش عمود بر صفحه $\sigma_3 \geq 0$
$\left(\frac{\sigma_3}{Z_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{23}}\right)^2 = e_N^2$	فشار عمود بر صفحه $\sigma_3 < 0$

جدول ۳ قوانین کاهش خواص به روش چنگ- چنگ

رابطه	مود خرابی
$E_{11} = E_{22} = E_{33} = G_{12} = G_{13} = G_{23} = \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0$	کشش و فشار الیاف
$G_{12} = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$	برش بین الیاف و ماتریس
$E_{22} = \nu_{23} = \nu_{21} = 0$	کشش و فشار در راستای ماتریس
$E_{33} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0$	کشش و فشار عمود بر صفحه

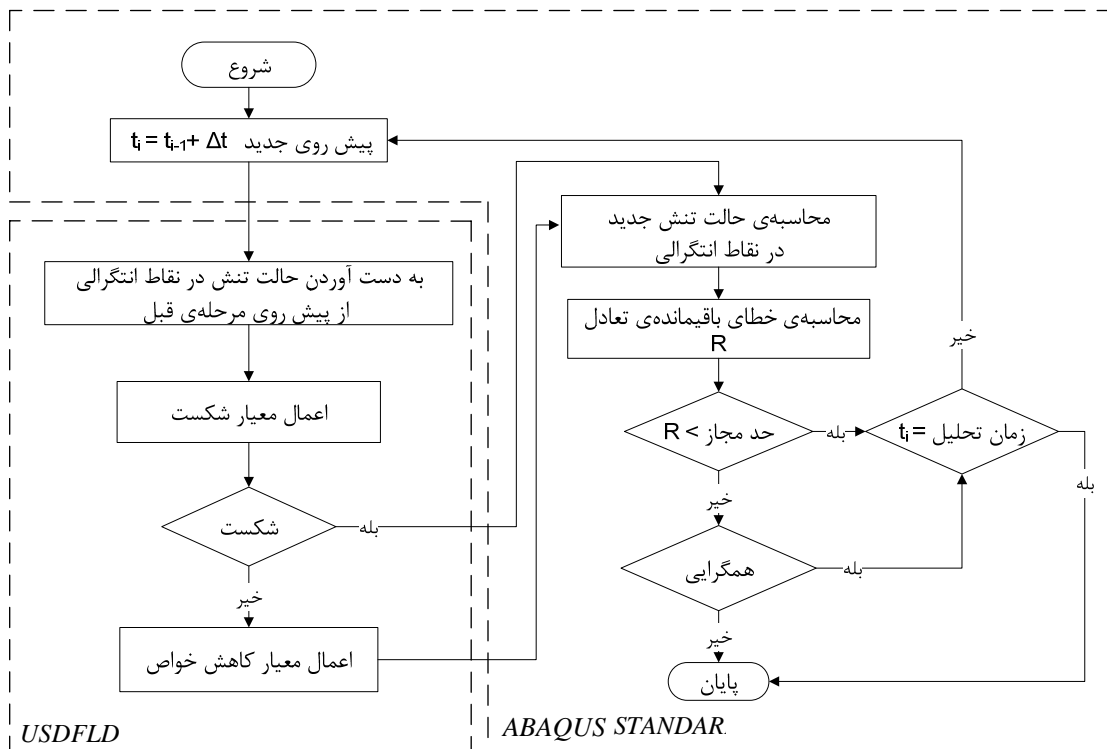
باعث بروز ناپایداری عددی خواهد شد؛ لذا مقادیر مربوطه در هر حالت خرابی به جای صفر به ۰/۰۰۰۱ مقدار اولیه کاهش خواهد یافت.

صفحات در این بررسی از کامپوزیت کربن/ اپوکسی ساخته شده اند. خواص این ماده در جدول (۴) [23] بیان شده است. بر اساس تئوری ایزوتروپ عرضی

مدل سازی در محیط STANDARD نرم افزار المان محدود [22] ABAQUS، صورت گرفته است. جهت اعمال بخش های بررسی خرابی و کاهش خواص از زیر برنامه ی USDFLD بهره گرفته شده است. نمودار جریانی کلی این فرایند در شکل (۱) ترسیم شده است. در تحلیل المان محدود کاهش خواص به صفر

خرابی تغییر خواهد یافت. چگونگی تغییر این خواص بر طبق قوانین ارائه شده در جدول (۳) می باشد.

(Transversely-Isotropic) مقدار Z_c برابر با مقدار Y_c در نظر گرفته شده است. پس از تشخیص رخداد خرابی در هر نقطه از ماده، خواص ماده در آن نقطه بسته به مود



شکل ۱ فلوچارت اجرای تحلیل در ABAQUS [22]

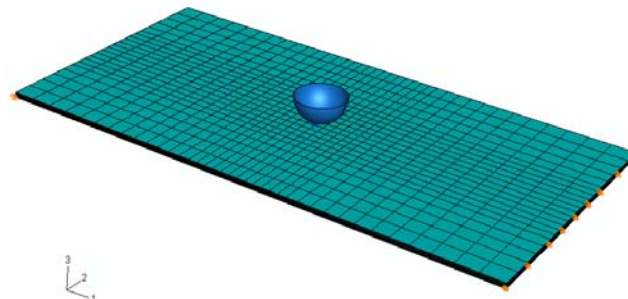
جدول ۴ خواص مکانیکی کربن اپوکسی [23]

خواص الاستیک		مقادیر استحکام	
127 GPa	E_{11}	1400 MPa	X_t
10 GPa	$E_{22} = E_{33}$	930 MPa	X_c
5.4 GPa	$G_{12} = G_{13}$	47 MPa	Y_t
3.05 GPa	G_{23}	130 MPa	Y_c
0.34	$\nu_{12} = \nu_{13}$	62.3 MPa	Z_t
0.306	ν_{23}	53 MPa	$S_{12} = S_{13}$
		89 MPa	S_{23}

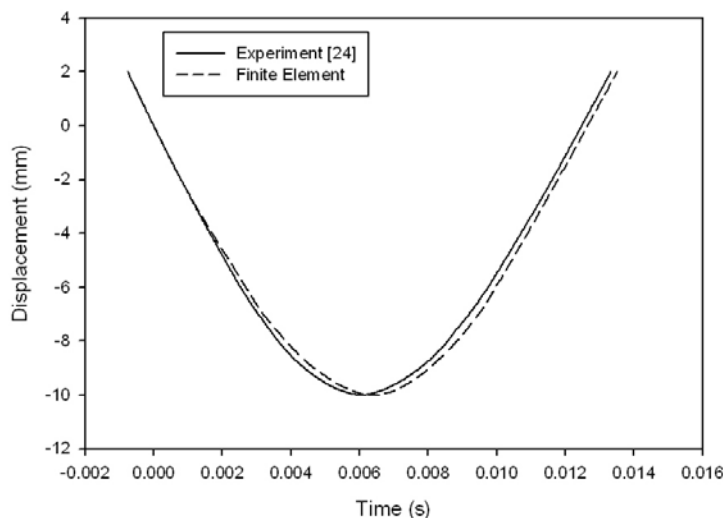
مدل‌سازی، نتایج یک تحقیق آزمایشگاهی [24] مدل‌سازی شده است. در آن تحقیق صفحه‌ای از جنس کربن اپوکسی به ابعاد $1 \times 50 \times 100$ mm با لایه چینی $[0_2/90_3/0]_s$ تحت ضربه قرار گرفته است. دو ضلع کوچک صفحه بر روی دو تکیه‌گاه ساده قرار گرفته است. برخورد کننده‌ای با سری کروی به شعاع 5 mm با جرم 1/075 kg با سرعت 2/2 m/s به مرکز صفحه برخورد می‌کند. این صفحه از 12 لایه تشکیل شده به همین دلیل در مدل‌سازی آن در راستای ضخامت از 12 المان استفاده شده است. نمودار جابه‌جایی بر خورد کننده بر حسب زمان ثبت شده از این آزمایش به همراه نمودار به دست آمده از نتایج تحلیل عددی برخورد در شکل (۳) ترسیم شده است. همان‌گونه که مشخص است، نتایج تحلیل المان محدود دارای مطابقت بالایی با نتایج آزمایشگاهی است.

در المان بندی تمام صفحات، هر صفحه در راستای ضخامت به هشت زیر لایه تقسیم شده است؛ بنابراین ضخامت هر صفحه با هشت المان، المان بندی شده است. هر سری از المان‌ها معرف یک تک لایه از صفحه‌ی کامپوزیت می‌باشند. اندازه‌ی المان‌ها در صفحه‌ی هر زیر لایه در مرکز صفحه، ریزتر شده و با دور شدن از مرکز صفحه اندازه‌ی المان‌ها بزرگتر می‌شود (شکل (۲)).

المان انتخاب شده، المان سه بعدی مکعبی هشت نقطه‌ای C3D8 می‌باشد. جسم برخورد کننده به صورت یک سطح صلب مدل شده است. بین سطح بیرونی این جسم صلب و یک سطح مربعی شکل در مرکز صفحه‌ی کامپوزیتی تماس (Contact) تعریف شده است. در راستای بررسی، میزان دقت این نحوه‌ی



شکل ۲ مدل المان محدود

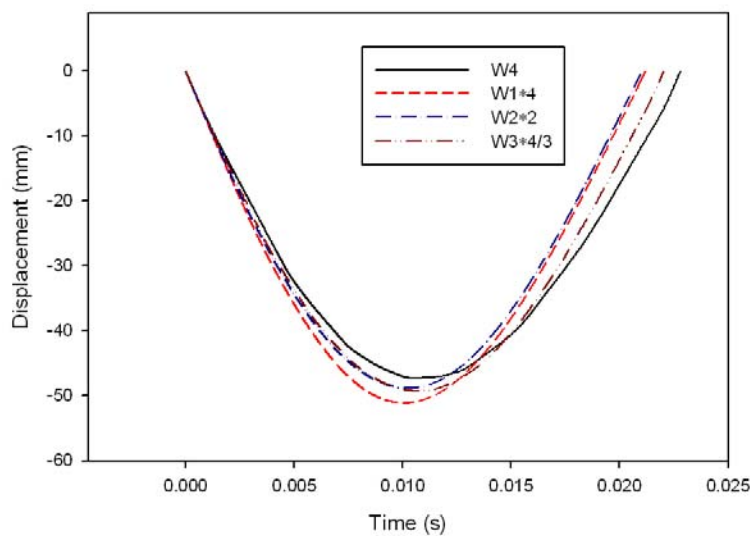


شکل ۳ جابه‌جایی آزمایشی و المان محدود برخورد کننده بر حسب زمان

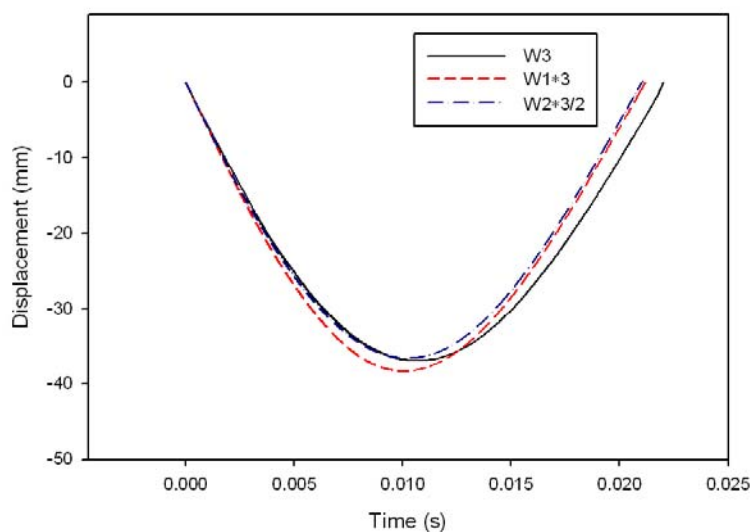
نتایج تشابه در برخورد

شده است. در هر مورد ضرایب اندازه ضرب شده در جابجایی صفحات کوچکتر در بالای شکل نشان داده شده است. W_i بیانگر جابجایی مرکز صفحه i ام است. زمان برای هر چهار صفحه ثابت است. آن گونه که نتایج نشان می دهند، تشابه ابعادی بکارگرفته شده توانایی پیش بینی رفتار صفحات را دارا می باشد. دقت این پیش بینی خیلی بالا نمی باشد ولی با کمی تقریب قابل استفاده است.

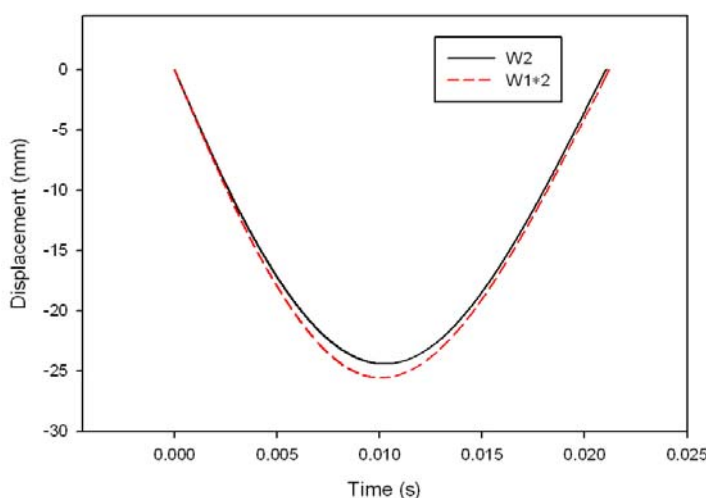
نمودارهای جابجایی مرکز صفحه بر حسب زمان به عنوان معیاری جهت بررسی میزان تشابه صفحات به کار برده شده است. در ادامه هر کدام از صفحات چهارم، سوم و دوم هر بار به عنوان نمونه اصلی در نظر گرفته شده، رفتار آنها به وسیله قوانین تشابه از روی رفتار صفحات کوچکتر پیش بینی شده است. نتایج حاصل به ترتیب در شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) ترسیم



شکل ۴ جابه جایی مرکز صفحه‌ی چهارم و نمودارهای پیش بینی شده از صفحات سوم، دوم و اول



شکل ۵ جابه جایی مرکز صفحه‌ی سوم و نمودارهای پیش بینی شده از صفحات دوم و اول



شکل ۶ جابه‌جایی مرکز صفحه‌ی دوم و نمودار پیش‌بینی شده از صفحه‌ی اول

این نیروها معیار مقایسه‌ی میزان تشابه رفتار صفحات قرار گرفته است. نتایج حاصل برای چهار حالت (mode) اول کمانش صفحات در جدول (۶) ارائه شده است. N_i بیانگر بار کمانش صفحه i ام است.

در ادامه هر کدام از صفحات چهارم، سوم و دوم هر بار به عنوان نمونه‌ی اصلی در نظر گرفته شده، رفتار آنها به وسیله‌ی قوانین تشابه از روی رفتار صفحات کوچکتر پیش‌بینی شده است. نتایج حاصل به ترتیب در جدول‌های (۷)، (۸) و (۹) بیان شده است. در هر مورد ضرایب اندازه ضرب شده در بار کمانش صفحات کوچکتر در ستون اول جدول بیان شده است. میزان خطا در پیش‌بینی بار کمانش نیز در هر مورد داخل پرانتز بیان شده است.

روش تشابه‌ی پیاپی، نیروی کمانش صفحات را در حالت کمانش صفحات با ناحیه‌ی خرابی اولیه با کمی تقریب و نه به صورتی دقیق، پیش‌بینی می‌کند. میزان خطای پیش‌بینی در حالت‌های (mode) مختلف متفاوت است. این میزان خطا به دلیل وجود نواحی خرابی اولیه است. در صورت عدم وجود این نواحی، تئوری تشابه با دقت بسیار بالایی رفتار صفحات را پیش‌بینی می‌کند [18].

نتایج تشابه در کمانش

در این مرحله، صفحات پس از ضربه تحت بار کمانش قرار گرفته‌اند. المان بندی تمام صفحات در این مرحله از همان المان بندی صفحات در مدل‌سازی برخورد است و تنها شرایط مرزی صفحات تغییر کرده است. هر چهار طرف صفحات بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار داده شده است و بار کمانش در راستای طولی صفحات وارد می‌شود. صفحات در اثر بارگذاری برخورد دارای نواحی خرابی اولیه می‌باشند. روش حل، روش مقادیر ویژه (Eigen value) است.

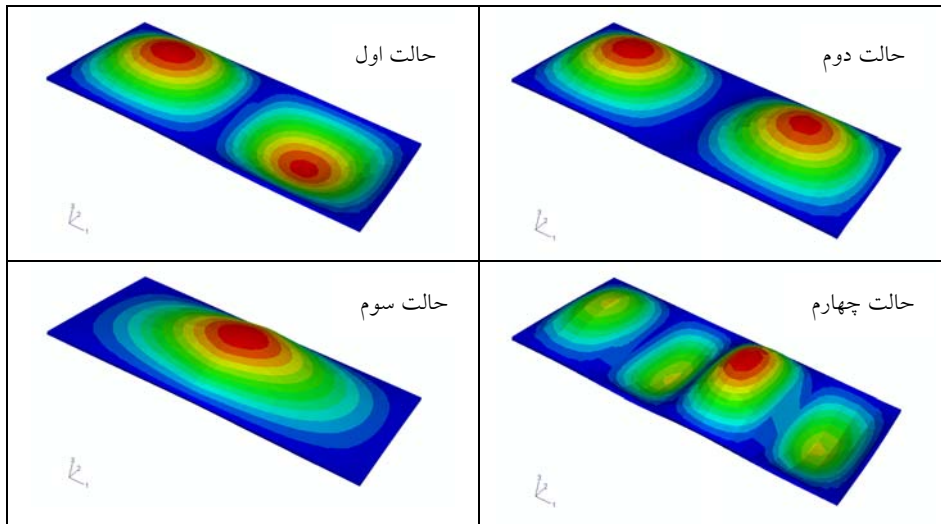
جهت بررسی میزان دقت مدل‌سازی، نتایج المان محدود به دست آمده برای بار کمانش در حالت (mode) اول تمام صفحات بدون ناحیه‌ی خرابی اولیه با مقدار تئوری مقایسه شده است. نتایج به دست آمده در جدول (۵) ارائه شده است.

همان‌گونه که مشخص است مقادیر تئوری، بسیار نزدیک به مقادیر پیش‌بینی شده توسط روش المان محدود می‌باشد. بنابراین، نحوه‌ی مدل‌سازی از دقت لازم برخوردار می‌باشد.

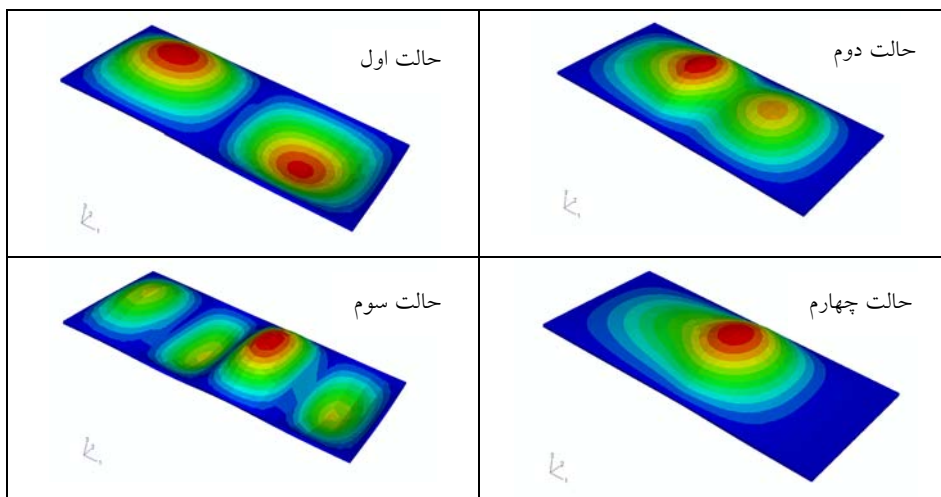
برای هر کدام از صفحات بار کمانش پس از ضربه در چهار حالت (mode) اول به همراه شکل کمانش مربوطه (شکل ۷-۱۰) به دست آمده است. مقدار

جدول ۵ نتایج تئوری و عددی برای بار کمانش صفحات بدون خرابی اولیه در حالت اول (mode)

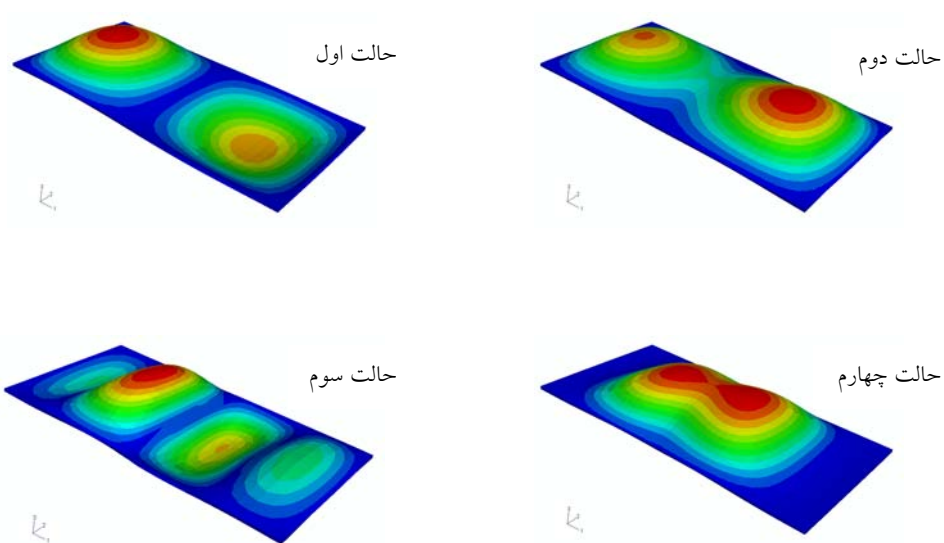
صفحه چهارم	صفحه سوم	صفحه دوم	صفحه اول	بار کمانش (kN)
۶۳/۰۱۹	۳۵/۴۴۸	۱۵/۷۵۴	۳/۹۳۸	مقدار تئوری
۵۹/۶۹۵	۳۳/۵۴۳	۱۴/۷۵۳	۳/۸۸۶	مقدار عددی



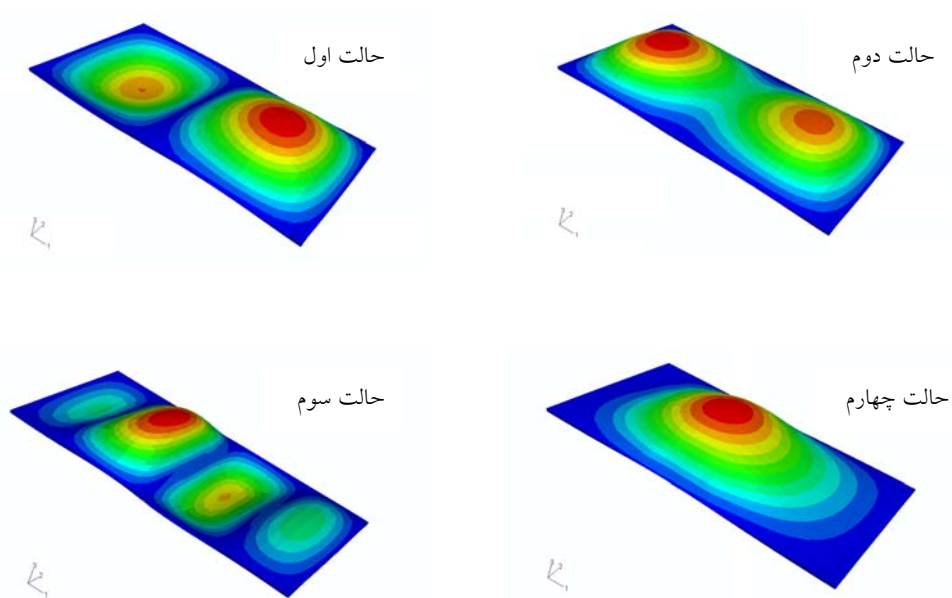
شکل ۷ شکل چهار حالت (mode) اول کمانش پس از ضربه‌ی صفحه‌ی اول



شکل ۸ شکل چهار حالت (mode) اول کمانش پس از ضربه‌ی صفحه‌ی دوم



شکل ۹ شکل چهار حالت (mode) اول کمانش پس از ضربه‌ی صفحه‌ی سوم



شکل ۱۰ شکل چهار حالت (mode) اول کمانش پس از ضربه‌ی صفحه‌ی چهارم

جدول ۷ نیروی کماتش پس از ضربه برای صفحه‌ی چهارم به همراه نیروهای پیش بینی شده از صفحات اول، دوم و سوم

بار کماتش (kN)	حالت (mode) اول	حالت (mode) دوم	حالت (mode) سوم	حالت (mode) چهارم
N_4	۵۱/۰۱۴	۵۶/۸۷۰	۸۷/۲۲۰	۱۱۵/۶۷۵
$N_1 \times 16$	۵۵/۳۹۰ (/۱/۵)	۶۰/۸۸۸ (/۷/۰)	۷۳/۴۲۵ (/۱۵/۸)	۱۲۴/۹۷۲ (/۸/۰)
$N_2 \times 4$	۵۳/۷۲۲ (/۵/۳)	۵۸/۲۹۶ (/۲/۵)	۷۵/۶۰۴ (/۱۳/۳)	۱۲۰/۲۲۵ (/۳/۹)
$N_3 \times \frac{16}{9}$	۵۳/۵۴۸ (/۴/۹)	۶۰/۶۱۹ (/۶/۶)	۹۲/۸۴۶ (/۶/۴)	۱۲۲/۵۱۰ (/۵/۹)

جدول ۸ نیروی کماتش پس از ضربه برای صفحه‌ی سوم به همراه نیروهای پیش بینی شده از صفحات اول و دوم

بار کماتش (kN)	حالت (mode) اول	حالت (mode) دوم	حالت (mode) سوم	حالت (mode) چهارم
N_3	۳۰/۱۲۱	۳۴/۰۹۸	۴۹/۵۲۶	۶۸/۹۱۲
$N_1 \times 9$	۳۱/۱۵۶ (/۳/۴)	۳۴/۲۴۹ (/۰/۴)	۴۱/۳۰۱ (/۲۰/۹)	۷۰/۲۹۷ (/۲/۰)
$N_2 \times \frac{9}{4}$	۳۰/۲۱۸ (/۰/۳۲)	۳۲/۷۹۱ (/۳/۸)	۴۲/۵۲۷۹ (/۱۸/۵)	۶۷/۶۲۶ (/۱/۸)

جدول ۹ نیروی کماتش پس از ضربه برای صفحه‌ی دوم به همراه نیروی پیش بینی شده از صفحه‌ی اول

بار کماتش (kN)	حالت (mode) اول	حالت (mode) دوم	حالت (mode) سوم	حالت (mode) چهارم
N_2	۱۳/۴۳۰	۱۴/۵۷۴	۱۸/۹۰۱	۳۰/۰۵۶
$N_1 \times 4$	۱۳/۸۴۷ (/۳/۱)	۱۵/۲۲۲ (/۴/۴)	۱۸/۳۵۶ (/۲/۸)	۳۱/۲۴۳ (/۳/۹)

جمع بندی

مشابهی در کماتش داشته باشند؛ لذا تشابه در دو مرحله و به صورت پیاپی اعمال شده است. با نگاهی به نمودارهای جابه‌جایی بر حسب زمان در شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) مشخص است که در حالت ضربه‌ی غیر الاستیک شیوه‌ی تشابه ابعادی رفتار صفحات را به صورت کلی با کمی تقریب پیش بینی می‌کند. میزان این پیش بینی از دقت بالایی برخوردار نمی‌باشد، ولی می‌توان با کمی خطا رفتار صفحات بزرگتر را از روی رفتار صفحات کوچکتر پیش بینی نمود. نمودارها در ابتدای شروع ضربه به یکدیگر

در این بررسی، امکان ایجاد شرایط تشابه در ساختارهایی در ناحیه‌ی غیر الاستیک بررسی شد. بدین منظور، تشابه در پدیده‌ی کماتش صفحات کامپوزیتی پس از ضربه، مورد بررسی قرار گرفت. جهت ایجاد تشابه در پدیده‌ی کماتش صفحات دارای نواحی خرابی ناشی از ضربه، در ابتدا به عنوان یک پیش زمینه قبل از اعمال تشابه در پدیده‌ی کماتش، شرایط تشابه در فرایند ضربه اعمال شده تا نواحی خرابی مشابهی در صفحات ایجاد شود و در پی آن صفحات پس از ضربه رفتار

حالت‌های مختلف متفاوت است، ولی به طور کلی میزان خطای این روش تشابه در پیش بینی نیروی کمانش سایر صفحات توسط صفحه‌ی اول بیشتر از خطای این روش در پیش بینی نیروی کمانش توسط سایر صفحات است. به عنوان یک نتیجه‌ی کلی می‌توان گفت که روش تشابه پیاپی نیروی کمانش صفحات دارای ناحیه‌ی خرابی اولیه را با کمی تقریب پیش بینی می‌کند. در صورت عدم وجود نواحی خرابی اولیه در صفحات، روش تشابه ساختاری با دقت بسیار زیادی، نیرو و حالت‌های کمانش صفحات مختلف را پیش بینی می‌کند.

نزدیک می‌باشند، ولی با ایجاد نواحی خرابی از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

با نگاهی به شکل حالت‌ها در اشکال (۱۰-۷) می‌توان گفت که روش تشابه پیاپی به‌جز صفحه‌ی اول، شکل سایر صفحات را به طور تقریبی به صورت مشابه پیش بینی می‌کند. شکل حالت‌های سوم و چهارم در صفحه‌ی اول به ترتیب مانند شکل حالت‌های چهارم و سوم سایر صفحات است. این مسأله را می‌توان مربوط به تأثیر شرایط مرزی در رفتار صفحه اول دانست؛ به طوری که حد پایینی برای کوچک کردن نمونه‌ی اصلی وجود دارد. میزان خطا در پیش بینی نیروی کمانش در

مراجع

1. Goodier, J. N., and Thomson, W. T., "Applicability of Similarity Principles to Structural Model", NACA Technical Note 933, (1944).
2. Goodier, J. N., "Dimensional Analysis, Handbook of Experimental Stress Analysis, Edited by Hetenyi, M.", Wiley & Sons Inc., New York, (1950).
3. Morton, J., "Scaling of impact-loaded carbon-fiber composites", *AIAA Journal*, 26(8), pp. 989-994, (1988).
4. Nettles, A. T., Douglas, M. J., Estes, E. E., "Scaling effects in carbon/epoxy laminates under transverse quasi-static loading", Technical Report 209103, NASA, March (1999).
5. Jackson, K. E., Kellas, S., Morton, J., "Scale Effect in the Response and Failure of Fiber Reinforced Composite Laminates Loaded in Tension and in Flexure", *Journal of Composite Materials*, 26(18), pp. 2674-2704, (1992).
6. Johnson, D. P., Morton, J., Kellas, S., Jackson, K., "Scaling effects in sub laminate-level scaled composite laminates", *AIAA Journal*, 36, pp. 441-447, (1998).
7. Kellas, S., Morton, J., Jackson, K. E., "Damage and failure mechanisms in scaled angle-ply laminates In: Fatigue and fracture of Composites", ASTM STP 1156, pp. 257-280, (1993).
8. Qian, Y., Swanson, S. R., "An experimental study of scaling rules for impact damage in fiber composites", *Journal of Composite Materials*, 24, pp. 559-570, May (1990).
9. Qian, Y., Swanson, S. R., "Experimental measurement of impact response in carbon/epoxy plates", *AIAA Journal*, 28(6), pp. 1069-1074, (1990).
10. Ungbhakorn, V., Singhatanadgid, P., "Scaling law and physical similitude for buckling and vibration

- of antisymmetric angle-ply laminated cylindrical shells", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 3(4), pp. 567-583, (2003).
11. Chouchaoui, C. S., Parks, P., Ochoa, O.O., "Similitude study for a laminated cylindrical tube under tensile torsion bending internal and external pressure part 2: scale models", *Composite Structures*, 44, pp. 231-236, (1999).
 12. Wisnom, M. R., "Size Effects in the Testing of Fiber-Composite Materials", *Composites Science and Technology*, 59, pp. 1937-1957, (1999).
 13. Rezaeepazhand, J., Simites G. J., "Design of Scaled Down Models for Predicting Shell Vibration Response", *Journal of Sound and Vibration*, 195(2), pp. 301-311, (1996).
 14. Rezaeepazhand, J., Simites G. J., "Structural Similitude for Vibration Response of Laminated Cylindrical Shells with Double Curvature", *Journal of Composites*, 28(B), pp. 195-200, (1997).
 15. Rezaeepazhand, J., Simites G. J., "Design of Scaled Down Models for Stability of Laminated Plates", *AIAA Journal*, 33(3), pp. 515-519, (1995).
 16. Sutherland, L. S., Guedes Soares, C., "Scaling of Impact on Low Fiber-Volume Glass-Polyester Laminates", *Journal of Composites*, 38(A), pp. 307-317, (2007).
 17. Viot, P., Balle`re L., Guillaumat, L., Lataillade, J. L., "Scale effects on the response of composite structures under impact loading", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 2725-2736, (2008).
 18. Simites, G. J., "Structural Similitude for Flat Laminated Surfaces", *Composite Structures*, 5, pp. 191-194, (2001).
 19. Vinson, J. R., Sierakowski, R. L., "The Behavior of Structures Composed of Composite Materials", 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, (2004).
 20. Hashin, Z., "Failure criteria for unidirectional fiber composites", *Journal of Applied Mechanics*, 47(2), pp. 329-334, (1980).
 21. Chang, F. K., Chang, K. Y., "Post-failure analysis of bolted composite joints in tension or shear-out mode failure", *Journal of Composite Materials*, 21(9), pp. 809-833, (1987).
 22. ABAQUS 6.6. User's Manual, Abaqus Inc., Providence, RI, USA, (2006).
 23. Tita, V., Carvalho, J. de., Vandepitte, D., "Failure analysis of low velocity impact on thin composite laminates: Experimental and numerical approaches", *Composite Structures*, 83, pp. 413-428, (2008).
 24. Viot, P., Balle`re, L., Guillaumat, L., Lataillade, J. L., "Scale effects on the response of composite structures under impact loading", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 2725-2736, (2008).