# تخمین مبتنی بر تلفیق داده برای جبران خطاهای حسگر جهت کنترل ماهواره


**چکیده**

در این مقاله، الگوریتمی نوین برای تخمین و کنترل وضعیت ماهواره مدار پایین، تحت تأثیر اغتشاشات و عدم‌قطعیت‌های دینامیکی مدل و خطاهای حسگر ارائه می‌گردد. الگوریتم تخمین با افزودن جملات جبرانی محاسبه‌شده از روی سرعت‌های زاویه‌ای ژیروسکوپ، مدل ماهواره را به دینامیک واقعی نزدیک می‌سازد و با بهره‌گیری از تلفیق داده‌های ژیروسکوپ با داده‌های سیستم ناوبری جهانی، خطاهای اندازه‌گیری ژیروسکوپ را کاهش می‌دهد. ضرایب تخمین‌گر به صورت تطبیقی تنظیم شده و تخمین وضعیت دقیق با فرکانس بالا انجام می‌شود. تخمین‌های حاصل در ساختار کنترل‌کننده وضعیت ماهواره به کار گرفته می‌شوند. کنترل‌کننده پیشنهادی با بهره‌مندی از جملات جبرانی، اغتشاشات و عدم‌قطعیت‌های مدل را خنثی می‌کند. این کنترل‌کننده به شکلی بهینه و غیرخطی طراحی‌شده و حل تحلیلی بسته‌ای بر مبنای پیش‌بینی پاسخ‌های سیستم ارائه می‌دهد. پایداری کنترل‌کننده در معنای میانگین و واریانس خطای تنظیم وضعیت ماهواره در حضور خطای تخمین، تحلیل و تضمین می‌گردد. کارآیی الگوریتم تخمین و کنترل‌کننده از طریق شبیه‌سازی‌های نرم‌افزاری ارزیابی شده و نتایج حاکی از بهبود چشمگیر دقت تخمین وضعیت، عملکرد جبران اغتشاشات و همگرایی وضعیت ماهواره است.



**کلمات کلیدی**

**کنترل وضعیت ماهواره، تخمین  عدم قطعیت، الگوریتم تلفیق داده ها، جبران خطای حسگر**


# Data Fusion-Based Estimation for Compensating Sensor Errors for Spacecraft Control


**KEYWORDS**

Spacecraft attitude control, Uncertainty estimation, Data fusion algorithm, Sensor error compensation

## ۱- مقدمه

در فضاپیماها معمولا از دو دسته حسگر استفاده می‌شود: حسگرهای اینرسی شامل شتاب‌سنج‌ها، ژیروسکوپ‌ها و مغناطیس‌سنج‌ها برای اندازه‌گیری حرکت و وضعیت، و حسگرهای مرجع به‌عنوان معیارهای پایدار برای کالیبراسیون و اعتبارسنجی، مانند ردیاب‌های ستاره‌ای، حسگرهای خورشیدی و گیرنده‌های سامانه‌ی ماهواره‌ای ناوبری جهانی (GNSS) [۱]. ژیروسکوپ‌ها سرعت زاویه‌ای را اندازه‌گیری می‌کنند، اما بایاس‌های ناشی از نقص‌های ساخت و شرایط محیطی می‌توانند باعث بروز خطا شده و قابلیت اطمینان را تحت تأثیر قرار دهند. تلفیق داده‌ها یکی از روش‌های مهم در کاربردهای ماهواره‌ای برای مقابله با انحرافات ژیروسکوپ است که از طریق تلفیق داده‌های منابع مختلف، دقت را افزایش داده و منجر به نتایج دقیق‌تر و قابل‌اعتمادتر با فرکانس بالا نسبت به استفاده از یک منبع منفرد می‌شود [۲]. با تلفیق اندازه‌گیری‌های ردیاب ستاره، این تکنیک امکان جبران انحرافات اندازه‌گیری‌های ژیروسکوپ را در ماهواره فراهم می‌آورد. این جبران از طریق مقایسه موقعیت اندازه‌گیری‌شده ماهواره نسبت به ستاره‌ها با موقعیت پیش‌بینی‌شده بر اساس اندازه‌گیری‌های ژیروسکوپ انجام می‌شود که امکان تخمین و اصلاح دقیق‌تر انحرافات ژیروسکوپ را فراهم می‌آورد و دقت و قابلیت اطمینان آن‌ها را بهبود می‌بخشد [۳]. برای ماهواره‌های مدار پایین زمین (LEO)، استفاده از چندین آنتن GNSS نصب‌شده در موقعیت‌های مختلف روی ماهواره، امکان تعیین دقیق وضعیت آن را فراهم می‌کند. فرکانس GNSS بر اساس نیازهای مأموریت و با در نظر گرفتن سرعت فضاپیما، شرایط محیطی و توانایی‌های تأمین توان، قابل تنظیم است. فرکانس‌های بالاتر برای GNSS ممکن است به توان و منابع محاسباتی بیشتری نیاز داشته باشند. تلفیق داده‌های فرکانس پایین GNSS با ژیروسکوپ‌های سه‌محوری کم‌هزینه در ماهواره‌های LEO می‌تواند بعنوان روشی مقرون به صرفه و عملیاتی، ضمن تولید داده‌های فرکانس بالا، خطاهای اندازه‌گیری را در شرایط عادی جبران کند [۴].

روش‌های مختلفی برای تلفیق داده‌ها استفاده شده است، از جمله فیلتر کالمن [۵]، فیلتر ذرات [۶-۷] و تخمین بیزی [۸]. فیلترهای ذرات به‌ویژه هنگامی که با تعداد زیادی ذره یا مدل‌های پیچیده سروکار دارند، از نظر محاسباتی سنگین هستند و در کاربردهای بلادرنگ چالش‌هایی ایجاد می‌کنند. این فیلترها مستعد کاهش تنوع و فقر نمونه هستند که منجر به تخمین‌های نادرست و ردیابی ضعیف می‌شود. فیلترهای ذرات به فرضیات خاص و انتخاب توزیع پیشنهادی وابسته‌اند که می‌تواند بر کیفیت نمونه‌های ذره تأثیر بگذارد [۵]. چالش تخمین بیزی در تلفیق داده‌ها، وابستگی آن به احتمال‌های دقیق قبلی و شرطی است که در شرایط پیچیده دنیای واقعی با فرضیات متعدد، به‌دست‌آوردن آن‌ها دشوار است. اطمینان از این‌که این فرضیات به‌طور متقابل مستقل باشند، اغلب غیرعملی است و توصیف عدم قطعیت تصمیم در چارچوب بیزی پیچیده است [۵]. بنابراین، روش‌های جایگزین برای تلفیق داده‌های ماهواره‌ای موردنیاز است که به شدت به احتمال‌های دقیق وابسته نباشند.

فیلتر کالمن به‌عنوان ابزاری اساسی برای تخمین تلفیق حسگرها شناخته می‌شود [۸-۹]، اما نسخه کلاسیک آن با محدودیت‌هایی مواجه است، به‌ویژه زمانی که با مسائل تخمین غیرخطی سروکار دارد، زیرا به مدل‌های سیستم خطی متکی است [۱۰-۱۱]. برای حل این چالش، فیلتر کالمن گسترش‌یافته به‌عنوان یکی از کارآمدترین استراتژی‌های فیلترینگ غیرخطی برای سیستم‌های ضعیف غیرخطی شناخته شده است [۱۱]. بااین‌حال، فیلتر کالمن گسترش‌یافته ممکن است در مواجهه با دینامیک‌های با اثرات غیرخطی شدید یا مدل‌های اندازه‌گیری و همچنین عدم دقت در تخمین‌های اولیه وضعیت با مشکلاتی روبه‌رو شود. به همین دلیل، روش‌های فیلترکردن غیرخطی مبتنی بر نمونه‌برداری نقاط، از جمله فیلتر کالمن غیرخطی [۱۲-۱۳]، فیلتر کالمن مکعبی [۱۴] و فیلتر گاوسی-هرمیتی [۱۵] به‌وجود آمده‌اند. مطالعه ارائه‌شده در [۱۶]، مقایسه‌ای بین سه تخمین‌گر غیرخطی یعنی فیلتر کالمن مکعبی، فیلتر کالمن گسترش‌یافته و فیلتر کالمن غیرخطی در سناریوهای واقعی ارائه می‌دهد. داده‌های واقعی از ماهواره سنجش از دور CBERS-2 برای ارزیابی عملکرد این تخمین‌گرها در وظایف تخمین وضعیت استفاده شده است. لازم به ذکر است که فیلتر کالمن گسترش‌یافته فقط در سیستم‌های حسگری خطی قابل‌استفاده است، زیرا به ساختار خطی فیلتر کالمن متکی است [۱۷]. فیلتر کالمن فدرال یکی دیگر از روش‌هایی است که در تلفیق داده‌ها به کار می‌رود. برای سیستم‌های غیرخطی، فیلتر کالمن فدرال نیاز به خطی‌سازی دارد که این فرآیند می‌تواند خطاهای بالقوه‌ای را وارد کند [۱۸].

اگرچه روش‌های مبتنی بر فیلتر کالمن نقش حیاتی در تخمین پارامترهای سیستم‌های دینامیکی مختلف ایفا می‌کنند، اما پایه و اساس این روش‌ها بر یک فرض اولیه از مدل دینامیکی استوار است که معمولا به‌صورت یک مدل گام تصادفی در نظر گرفته می‌شود. بااین‌حال، اثربخشی رویکردهای مبتنی بر فیلتر کالمن به‌شدت به در دسترس بودن دانش قبلی دقیق از سیستم و ویژگی‌های آماری

صحیح عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری وابسته است. در عمل، این فرضیات همیشه برقرار نیستند و این موضوع می‌تواند باعث ایجاد محدودیت‌هایی در عملکرد تخمین شود. یکی از چالش‌های کلیدی، نحوه‌ی در نظر گرفتن خطاهای مدل است که در روش‌های سنتی فیلتر کالمن معمولا به‌عنوان نویز گاوسی با میانگین صفر در نظر گرفته می‌شوند. اما این رویکرد ساده‌سازی‌شده ممکن است ماهیت واقعی انحراف‌های مدل را در شرایط پیچیده دنیای واقعی به‌درستی منعکس نکند.

علاوه بر روش‌های گفته شده که مبتنی بر مدل هستند، یک سری روش‌ها نیز که اخیرا بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند، روش‌های داده‌محور هستند [۱۹-۲۰]. این روش‌ها به جای تکیه بر مدل‌های فیزیکی سیستم، از داده‌های جمع‌آوری‌شده برای یادگیری الگوهای رفتاری حسگرها و تشخیص عیوب آن‌ها استفاده می‌کنند. برخی از متداول‌ترین تکنیک‌های داده‌محور شامل شبکه‌های عصبی مصنوعی، فیلترهای کالمن یادگیرنده و مدل‌های بیزین هستند که هرکدام بسته به نوع داده و نیاز سیستم، به‌کار گرفته می‌شوند [۲۱-۲۴]. یکی از مزیت‌های اصلی این روش‌ها انعطاف‌پذیری بالا و توانایی یادگیری از داده‌های واقعی است، با این حال، روش‌های داده‌محور چالش‌هایی از جمله نیاز به حجم بالای داده‌های آموزشی، پیچیدگی محاسباتی بالا و تفسیرپذیری پایین مدل‌ها دارند.

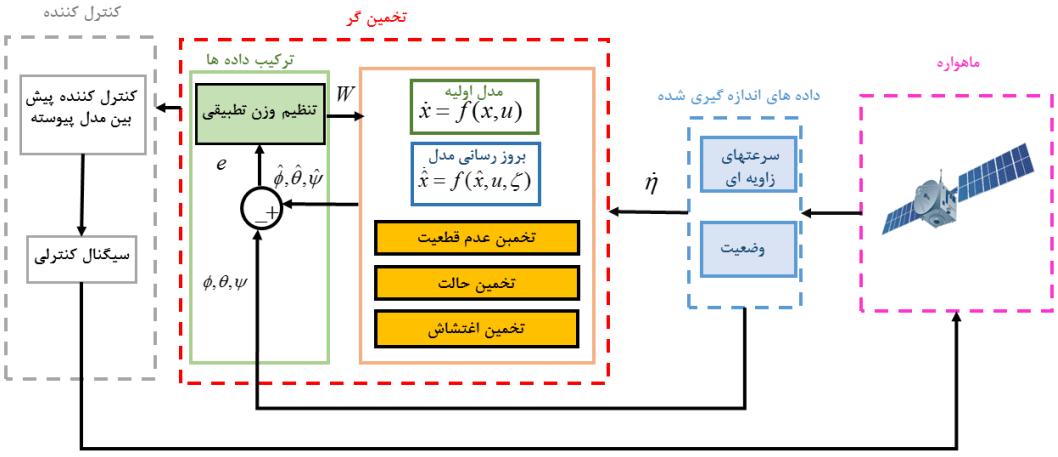
این پژوهش یک روش نوین و کارآمد را برای تخمین مدل دینامیکی ماهواره معرفی می‌کند که امکان تخمین دقیق وضعیت را فراهم می‌سازد. برای دستیابی به مدلی که بتواند به‌طور مداوم با داده‌های اندازه‌گیری‌شده در زمان واقعی به‌روزرسانی شود، یک الگوریتم جدید مبتنی بر پیش‌بین توسعه داده شده است. الگوریتم از داده‌های اندازه‌گیری‌شده توسط یک ژیروسکوپ سه‌محوری کم‌هزینه استفاده می‌کند. برای جبران خطاهای اندازه‌گیری، از جمله بایاس حسگر و نویز، تلفیق داده‌های این ژیروسکوپ کم‌هزینه با داده‌های وضعیت اندازه‌گیری‌شده توسط یک سامانه‌ی کمکی با فرکانس پایین پیشنهاد می‌گردد. شایان ذکر است که در این تحقیق با در درنظرگرفتن ماهواره مدار پایین زمین، از مشخصات یک سامانه GNSS با فرکانس پایین به‌عنوان سامانه کمکی برای اندازه‌گیری وضعیت استفاده می‌شود. روش تخمین ارائه‌شده در دوگان با روش کنترلی نویسندگان در مقالات قبلی طراحی شده است که از رویکرد پیش‌بین برای طراحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی مبتنی بر مدل نامی سیستم استفاده می‌کند [۲۵-۲۷]. با تکیه بر موفقیت‌ها و مزایای این روش کنترلی در طراحی سیستم کنترل ماهواره [۲۸-۲۹]، در مقاله حاضرالگوریتم تخمین در دوگان با روش کنترلی توسعه یافته است تا مشکل عدم اطمینان به مدل طراحی را در حضور خطای حسگر برطرف کند. برای افزایش قابلیت اطمینان مدل طراحی، یک رویکرد پیش‌بین در محیط تصادفی به کار گرفته شده است. در الگوریتم تخمین پیشنهادی، خطاهای تخمین خروجی در زمان حاضر از طریق یک ترکیب وزنی به حداقل می‌رسند و عبارت جبران‌ساز محاسبه شده و در مدل اولیه سیستم ادغام می‌شود تا عدم قطعیت‌های موجود در سیستم را با وجود خطاهای اندازه‌گیری حسگر ژیروسکوپ در ماهواره جبران کنند. کارایی تخمین‌گر طراحی‌شده از طریق تحلیل‌های ریاضی و شبیه‌سازی‌های نرم‌افزاری تأیید می‌شود که شامل شبیه‌سازی‌هایی با نویز اندازه‌گیری، بایاس متغیر و سایر عدم قطعیت‌ها است. علاوه بر این، تحلیل تصادفی ارائه‌شده، اطلاعات مفیدی برای تنظیم پارامترهایی مانند ضرایب وزنی فراهم می‌کند. تخمین‌های دقیق و مدل دینامیکی حاصل از این رویکرد تطبیقی، در ساختار یک کنترل‌کننده بهینه غیرخطی وضعیت به کار گرفته می‌شوند تا همگرایی سریع و پایدار ماهواره را در حضور اغتشاشات، عدم‌قطعیت‌ها و خطای حسگر تضمین نمایند.

در جمع بندی کلی، نوآوری اصلی کار حاضر صرفا جایگزینی یک فیلتر با فیلتری دیگر نیست، بلکه ارائه یک چارچوب یکپارچه تخمین است که هم‌زمان به چالش‌های عدم‌قطعیت‌های دینامیکی و بایاس حسگر، پاسخ می‌دهد. عدم نیاز به در نظر گرفتن مدل برای اغتشاشات سیستم، عدم نیاز به تنظیم ماتریس‌های کوواریانس فرآیند و اندازه‌گیری، و در نظر گرفتن صریح بایاس حسگر از مزایای روش تخمین پیشنهادی است. به عبارتی روش پیشنهادی نیازی به ارضای شروط ساختاری دقیق ماتریس‌های ورودی ناشناخته نداشته و بایاس و نویز را هم‌زمان مدیریت می‌کند و از همه مهمتر بهره‌ها بصورت تطبیقی از شروط تحلیلی پایداری تعیین می‌گردند. در ادامه اطلاعات حاصل از تخمین‌گر در اختیار کنترل‌کننده وضعیت قرار می‌گیرد. نکته قابل توجه در این مقاله از منظر عملی این است که بردار جبرانی‌ای که به کنترل‌کننده وضعیت افزوده می‌شود، به دلیل نویزی بودن اندازه‌گیری‌ها، درواقع یک جمله‌ی تصادفی به شمار می‌رود. ازاین‌رو، برای اثبات پایداری، ویژگی‌های آماری پاسخ‌های سیستم حلقه‌بسته در برابر خطاهای تخمین، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

ساختار مقاله به این ترتیب است: در بخش ۲ ساختار کلی الگوریتم پیشنهادی آورده می‌شود. در بخش ۳، معادلات سینماتیکی و دینامیکی ماهواره ارائه می‌شود. بخش ۴ به طراحی تخمین‌گر اختصاص دارد. بخش ۵ به طراحی سیستم کنترلی می‌پردازد. در بخش ۶، نتایج شبیه‌سازی بیان شده و در نهایت بخش ۷ به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

## ۲- ساختار کلی الگوریتم پیشنهادی

شکل ۱ نمای کلی الگوریتم تخمین پیشنهادی را نشان می‌دهد. در این الگوریتم از یک ژیروسکوپ ۳ محوره برای اندازه‌گیری سرعت‌های زاویه‌ای استفاده می‌شود. اندازه‌گیری دقیق وضعت و مشتقات آن در ماهواره‌های مدار پایین زمین از GNSS با فرکانس ۱ هرتز دریافت می‌شوند. الگوریتم تخمین پیشنهادی برای رفع تفاوت‌های بین مدل اصلی ماهواره و مدل واقعی به کار می‌رود. این الگوریتم از داده‌های وضعیت برای اصلاح خطاهای اندازه‌گیری ژیروسکوپ استفاده می‌کند و یک راه‌حل تطبیقی برای تنظیم ضرایب تخمین‌گر دارد. این رویکرد، تلفیق داده‌ها را از منابع مختلف با تحلیل تصادفی تسهیل می‌کند. خروجی تخمین‌گر به یک کنترل‌کننده وضعیت غیرخطی با ساختار بهینه تغذیه می‌شود تا با استفاده از جملات جبرانی، اغتشاشات را در حضور خطای حسگر خنثی کند. جزئیات بیشتر در مورد روش و نتایج الگوریتم در بخش‌های بعدی مقاله توضیح داده خواهد شد.




**شکل ۱: ساختار کلی الگوریتم تخمین پیشنهادی.**

## ۳- معادلات حرکت ماهواره

معادلات سینماتیکی سیستم ماهواره را می‌توان با استفاده از معادلات اویلر بصورت زیر توصیف کرد [۳۱-۳۰]:

$$\dot{\eta} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T = R\omega \tag{۱}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{۲}$$

در این روابط، $\eta = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \in R^3$ زوایای اویلر می‌باشد. همچنین $\omega \in R^3$ بیانگر سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره می‌باشد. معادله دینامیکی سیستم ماهواره طبق رابطه‌ی زیر استخراج می‌شود:

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + \tau + \tau_d \tag{۳}$$

که در آن $\tau \in R^3$ بردارگشتاور کنترلی، $\tau_d \in R^3$ بردار اغتشاش، $J \in R^{3\times3}$ ماتریس ممان اینرسی می‌باشد. با تعریف متغیرهای حالت به صورت $x = [\eta \quad \omega]^T \in R^6$، می‌توان معادلات سیستم را بصورت زیر به فرم فضای حالت نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_1(x) \\ \dot{\omega} &= f_2(x) + G\tau + G\tau_d, \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن

$$f_1(x) = R\omega \qquad (۵)$$
$$f_2(x) = J^{-1}\big(-\omega \times (J\omega)\big),$$
$$G = J^{-1}.$$

**فرض ۱:** فرض می‌شود اغتشاشات خارجی نامعلوم اما محدود است و یک ثابت $d_{max}$ وجود دارد به طوری که $\| \tau_d \| \leq d_{max}$ باشد [۳۰].

## ۴- طراحی الگوریتم تخمین تطبیقی

یک کنترل‌کننده مبتنی بر مدل قابل اعتماد به اطلاعات دقیق در مورد مدل سیستم نیاز دارد. وجود عدم قطعیت‌ها و اختلالات نشان‌دهنده تفاوت بین مدل اسمی که ابتدا برای ماهواره انتخاب شده و مدل واقعی آن در طول ماموریت است. به منظور جبران عدم دقت مدل ماهواره با پارامترهای اسمی در شرایط واقعی، یک الگوریتم جدید به‌روزرسانی مدل توسعه داده شده است تا تأثیرات عدم قطعیت‌ها و اختلالات را تخمین بزند. در این الگوریتم، مدل به‌روزرسانی‌شده با افزودن بردار جبرانساز به معادله (۴) تخمین زده می‌شود. بنابراین، معادلات مدل به‌روزرسانی‌شده به‌صورت زیر توصیف می‌شوند.

$$\dot{\hat{\eta}} = \widehat{f_1}(\hat{x}), \qquad (۶)$$
$$\dot{\hat{\omega}} = \widehat{f_2}(\hat{x}) + G\tau + \zeta,$$
$$\hat{y} = \widehat{R}\hat{\omega}$$

علامت $\widehat{\ }$ بر روی متغیرهای تخمینی و توابع محاسبه شده بر حسب آنها گذاشته شده است. بعنوان مثال $\hat{x}$ بردار حالت تخمینی و $\hat{y}$ خروجی تخمین زده شده در زمان حاضر است. بردار جبرانساز $\zeta$ بر اساس بهینه‌سازی با استفاده از اطلاعات اندازه‌گیری‌شده از خروجی سیستم محاسبه می‌شود. بر اساس این رویکرد، تفاوت بین خروجی تخمین زده شده به‌دست‌آمده از مدل به‌روزرسانی‌شده و خروجی اندازه‌گیری‌شده در زمان حاضر حداقل می‌شود. بنابراین، شاخص عملکرد به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$I_1 = \frac{1}{2}[y - \hat{y}]^T[y - \hat{y}] + \frac{1}{2}\zeta^T W \zeta \qquad (۷)$$

$y$ خروجی واقعی است که در زمان حاضر توسط حسگر اندازه‌گیری می‌شود و $W$ ماتریس وزن‌دهی است که از طریق یک فرایند تطبیقی به‌دست می‌آید و این امکان را می‌دهد که تأثیر بایاس و نویز در تخمین را به‌طور مؤثری کاهش دهد. با تطبیق مقادیر آن، $W$ نقش مهمی در کاهش تأثیر بایاس و نویز ایفا می‌کند و به این ترتیب دقت و قابلیت اعتماد نتایج تخمین را افزایش می‌دهد. از یک استراتژی یک‌گام‌به‌عقب برای تخمین $\hat{y}$ در زمان حاضر استفاده می‌شود. در این استراتژی، خروجی تخمین‌زده شده $\hat{y}$ از خروجی قبلی با استفاده از گسترش سری تیلور به‌دست می‌آید،

$$\hat{y} = \hat{y}^- + h\dot{\hat{y}}^- + \frac{h^2}{2!}\ddot{\hat{y}}^- + \cdots + \frac{h^k}{k!}\hat{y}^{-(k)} \qquad (۸)$$

که در آن $h$ زمان نمونه‌برداری را نشان می‌دهد. علامت منفی نشان‌دهنده مقدار خروجی در زمان قبلی، $\hat{y}^- = \hat{y}(t-h)$ است. مرتبه بسط سری تیلور، یعنی $k$، به‌صورت زیر تعیین شود:

$$k = \alpha + \beta \qquad (۹)$$

که در آن $\alpha$ درجه خروجی تخمین‌زده‌شده نسبت به بردار جبرانساز را نشان می‌دهد و $\beta$ مرتبه تخمین است.

**تعریف ۱.** کمترین مرتبه مشتق از $\hat{y}$ که در آن مولفه جبرانساز برای اولین بار ظاهر می‌شود، درجه نسبی خروجی تخمین‌زده‌شده است [۲۸-۲۹].

**تعریف ۲.** $\beta$ مرتبه تخمین است اگر

$$\zeta^{[s]}(t+h) = 0, \quad s > \beta, \qquad (۱۰)$$
$$\zeta^{[s]}(t+h) \neq 0, \quad s \leq \beta$$

که در آن $\zeta^{[s]}(t+h)$ مشتق مرتبه $s$ -ام نسبت به $\zeta(t+h)$ است.

**نکته ۱.** برای سیستم‌هایی که درجات نسبی کمتری دارند، مرتبه تخمین $\beta$ بهتر است به صفر محدود شود تا تخمینی سریع با پیچیدگی کم در فرایند طراحی حاصل شود. در این حالت، فرض بر این است که عبارت جبرانساز در طول دوره پیش‌بینی ثابت باقی می‌ماند $(\zeta = \zeta^{-})$. از آنجا که عبارت جبرانساز در مرتبه اول مشتق $\hat{y}$ ظاهر می‌شود، خروجی تخمین‌زده‌شده به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\hat{y} = \hat{y}^{-} + h\dot{\hat{y}}^{-} \quad (۱۱)$$

با در نظر گرفتن $\hat{y} = \hat{R}\hat{\omega}$ و با استفاده از معادله (۶)، خروجی تخمین‌زده‌شده به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\hat{y} = \hat{y}^{-} + h\hat{R}^{-}\hat{f}_2^{-} + h\hat{R}^{-}G\tau^{-} + h\dot{\hat{R}}^{-}\hat{\omega}^{-} + h\hat{R}^{-}\zeta \quad (۱۲)$$

با جایگذاری $y - \hat{y}$ از معادله (۱۲) در معادله (۷)، شاخص عملکرد برحسب عبارت‌های جبرانساز و متغیرهای حالت تخمین‌زده‌شده در زمان قبلی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_1 = \frac{1}{2}[h\hat{R}^{-}\hat{f}_2^{-} + h\hat{R}^{-}G\tau^{-} + h\dot{\hat{R}}^{-}\hat{\omega}^{-} + h\hat{R}^{-}\zeta]^{T}[h\hat{R}^{-}\hat{f}_2^{-} + h\hat{R}^{-}G\tau^{-} + h\dot{\hat{R}}^{-}\hat{\omega}^{-} + h\hat{R}^{-}\zeta] + \frac{1}{2}\zeta^{T}W\zeta \quad (۱۳)$$

شرط لازم برای کمینه‌سازی $I_1$ ایجاب می‌کند

$$\frac{\partial I_1}{\partial \zeta} = 0 \quad (۱۴)$$

که منجر به بردار جبرانساز بهینه به صورت زیر می‌شود:

$$\zeta = \left(h^2(\hat{R}^{-})^2 + W\right)^{-1}h\hat{R}^{-}\left(y - \hat{y}^{-} - h\hat{R}^{-}\hat{f}_2^{-} - h\hat{R}^{-}G\tau^{-} - h\dot{\hat{R}}^{-}\hat{\omega}^{-}\right) \quad (۱۵)$$

زمانی که ماتریس وزن‌دهی W در معادله (۱۵) برابر با صفر در نظر گرفته شود، بردار جبرانساز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\zeta = \left(\hat{R}^{-}\right)^{-1}\left[\frac{1}{h}(y - \hat{y}^{-}) - \dot{\hat{R}}^{-}\hat{\omega}^{-}\right] - \hat{f}_2^{-} - G\tau^{-} \quad (۱۶)$$

در این حالت، خروجی تخمین‌زده‌شده به‌سادگی با جایگذاری معادله (۱۶) در معادله (۱۲) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y = \hat{y} \quad (۱۷)$$

معادله (۱۷) نشان می‌دهد که مدل به‌روزرسانی‌شده، مدل واقعی سیستم را با دقت دنبال می‌کند و خطای تخمین به صفر می‌رسد. در این حالت، خطای اندازه‌گیری که عمدتا مربوط به بایاس ژیروسکوپ است، به خروجی تخمین‌زده‌شده منتقل می‌شود. تنظیم مناسب ماتریس W از طریق تلفیق داده‌های GNSS و ژیروسکوپ می‌تواند اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری ژیروسکوپ بر دقت مدل به‌روزرسانی‌شده را کاهش دهد. روش تنظیم $W$ در قضیه ۱ پیشنهاد می‌گردد.

**تعریف ۳.** (پایداری در میانگین). پاسخ معادله دیفرانسیل تصادفی، $X(t)$، پایدار در میانگین است اگر $\lim_{t\to\infty} E|X(t)| < C$، که در آن $C$، یک مقدار محدود می‌باشد. این تعریف نشان می‌دهد که هر ورودی محدودی، خروجی محدودی را نتیجه خواهد داد [۳۲].

**تعریف ۴.** (پایداری مجانبی در میانگین). پاسخ معادله دیفرانسیل تصادفی، $X(t)$، پایدار مجانبی در میانگین است اگر $\lim_{t\to\infty} E|X(t)| = C$ [۳۲].

**قضیه ۱.** فرض کنید با استفاده از اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای توسط ژیروسکوپ، خروجی $y = R(\omega + b + \upsilon)$ در دسترس است که در آن $\upsilon$ نویز گاوسی سفید با میانگین صفر، $\omega$ سرعت زاویه‌ای بدون نویز، و $b$ بایاس ژیروسکوپ را نشان می‌دهد. با تعریف

$$\hat{\Lambda}^{-} = \hat{y}^{-} + h\hat{R}^{-}\hat{f}_2^{-} + \hat{R}^{-}G\tau^{-} + h\dot{\hat{R}}^{-}\hat{\omega}^{-} \quad (۱۸)$$
$$W = \hat{R}^{-}\Omega\hat{R}^{-}$$

که $\Omega$ ماتریس قطری‌ای است که قطر اصلی آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega_{ii} = k_i h^2 \mathrm{sgn}(\hat{\Lambda}_i^{-})e_{\eta_i}, \quad k_i > 0 \quad (۱۹)$$

خطای تخمین وضعیت $e_\eta = \hat{\eta} - \eta$ به یک نویز گاوسی سفید نزدیک می‌شود به شرطی که $W_{ij}$ بسیار کوچکتر از $h^2\hat{R}_{ij}^{-}$ در نظر گرفته شود، یعنی $W_{ij} \ll h^2\hat{R}_{ij}^{-}$. توجه داشته باشید که $\eta$ همان وضعیت اندازه‌گیری‌شده است.

**اثبات:** با جایگذاری معادله (۱۵) در معادله (۱۲) و در نظر گرفتن معادله (۱۸)، تخمین خروجی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{y} = \left[I - h\hat{R}^{-}\left(h^2\hat{R}^{-2} + W\right)^{-1}h\hat{R}^{-}\right]\hat{\Lambda}^{-} + h\hat{R}^{-}\left(h^2\hat{R}^{-2} + W\right)^{-1}h\hat{R}^{-}y \quad (۲۰)$$

با فرض $W_{ij} \ll h^2\hat{R}_{ij}^{-}$ ، معادله (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{y} \approx \frac{1}{h^2}\hat{R}^{-^{-1}}W\hat{R}^{-^{-1}}\hat{\Lambda}^{-} + R(\omega + b + v) \quad (۲۱)$$

معادله فوق با استفاده از $\dot{e}_\eta = \hat{y} - R\omega$ بازنویسی می‌شود تا دینامیک خطای تخمین را به‌صورت زیر استخراج کند:

$$\dot{e}_\eta \approx \frac{1}{h^2}\hat{R}^{-^{-1}}W\hat{R}^{-^{-1}}\hat{\Lambda}^{-} + \bar{b} + \bar{v} \quad (۲۲)$$

که در آن $\bar{b} = Rb$ و $\bar{v} = Rv$ می‌باشد. با در نظر گرفتن معادلات (۱۸) و (۱۹)، می‌توان نوشت:

$$\dot{e}_{\eta i} \approx \gamma_i e_{\eta_i} + \bar{b}_i + \bar{v}_i \quad (۲۳)$$

که در آن $\gamma_i = k_i sgn(\hat{\Lambda}_i^{-})\hat{\Lambda}_i^{-}$ می‌باشد. شکل معادله دیفرانسیل تصادفی برای معادله (۲۳) به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$de_\eta \approx \gamma_i e_{\eta_i}dt + \bar{b}_i dt + \sigma(\bar{v}_i)d\varpi \quad (۲۴)$$

که در آن $\sigma(\bar{v}_i)$ انحراف معیار نویز را نشان می‌دهد و $d\varpi$ نشان‌دهنده حرکت براونی استاندارد است. معادله دیفرانسیل تصادفی مرتبه اول (SDE) برای معادله (۲۴) به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$e_{\eta_i}(t) = e^{-\gamma_i t}\Pi + \frac{\bar{b}_i}{\gamma_i} + \sigma(\bar{v}_i)\int_0^t e^{-\gamma_i(t-s)}d\varpi_s\,, \quad t \geq 0 \quad (۲۵)$$

که در آن $\Pi = e_0 - \frac{\bar{b}_i}{\gamma_i}$ می‌باشد. محاسبه مقدار میانگین معادله (۲۵) و استفاده از خواص انتگرالی Itô [۳۳] نشان می‌دهد که

$$E\left[e_{\eta_i}(t)\right] = e^{-\gamma_i t}E[\Pi] + \frac{\bar{b}_i}{\gamma_i} \quad (۲۶)$$

به ازای مقدار مثبت $\gamma_i$ داریم

$$\lim_{t\to\infty} E\left[e_{\eta_i}(t)\right] = \begin{cases} 0, & \text{if } \bar{b}_i = 0 \\ \dfrac{\bar{b}_i}{\gamma_i} & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (۲۷)$$

هنگامی‌که اندازه‌گیری ژیروسکوپ فاقد بایاس باشد، از معادله (۲۷) نتیجه می‌شود که مقدار امیدریاضی خطای تخمین خروجی به صفر همگرا خواهد شد؛ بنابراین، روش تخمین پیشنهادی از نظر میانگین به‌صورت مجانبی پایدار است [۳۲]. با این حال، در حضور بایاس ثابت، مقدار امیدریاضی خطای تخمین کراندار باقی می‌ماند و تخمین‌گر پیشنهادی از نظر میانگین پایدار خواهد بود [۳۲]. همچنین براساس معادله (۲۷) با افزایش بهره $k_i$ که در مخرج کسر قرار دارد، امید ریاضی خطای تخمین خروجی کاهش می‌یابد. با استفاده از معادلات (۲۶) و (۲۷) در فرمول واریانس، $\sigma^2(e_{\eta_i}) = E[e_{\eta_i}^2] - E^2[e_{\eta_i}]$ از طریق خواص انتگرالی Itô به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma^2(e_{\eta_i}) = e^{-2\gamma_i t}\sigma^2(\Pi) + \frac{\sigma^2(\bar{v}_i)}{2\gamma_i}(1 - e^{-2\gamma_i t}) \quad (۲۸)$$

به دلیل مقادیر مثبت $\gamma_i$، واریانس خطای تخمین به‌صورت زیر کران‌دار خواهد بود:

$$\lim_{t\to\infty}\sigma^2\left(e_{\eta_i}\right) = \frac{\sigma^2(\bar{v}_i)}{2\gamma_i} \quad (۲۹)$$

طبق معادله (۲۹)، بهره $k_i$ داخل $\gamma_i$ که در مخرج کسر قرار دارد، به‌عنوان یک پارامتر آزاد در نظر گرفته می‌شود که بر واریانس خطای تخمین تأثیر می‌گذارد. بنابراین، از آنجا که شرط $W_{ij} \ll h^2\hat{R}_{ij}^{-}$ یعنی $h^2\hat{R}_{ij}^{-}$ برقرار است، افزایش $k_i$ تا یک محدوده قابل قبول می‌تواند مقدار امید ریاضی و واریانس خطای تخمین را کاهش دهد. علاوه بر این، توزیع خطای تخمین به یک نویز گاوسی سفید همگرا می‌شود که مقدار امید ریاضی آن وقتی $t \to \infty$، $\frac{\bar{b}_i}{\gamma_i}$ و واریانس آن $\frac{\sigma^2(\bar{v}_i)}{2\gamma_i}$ است.

لازم به ذکر است که هدف تحلیل ارائه‌شده در بالا، اثبات همگرایی تقریبا حتمی مسیرهای نمونه‌ای خطا نیست؛ بلکه پایداری تخمین‌زن در معنای میانگین و واریانس خطا است.

## ۵- طراحی سیستم کنترلی

ایده اصلی روش کنترلی، یافتن ورودی کنترلی جاری با کمینه‌سازی خطای ردیابی در گام بعدی است. برای تنظیم وضعیت فضاپیما به سمت صفر، یک تابع هزینه که خطای بعدی را جریمه می‌کند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{I}_2\big(\tau(\mathrm{t})\big) = \frac{1}{2}\hat{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}+\rho)\hat{\eta}(\mathrm{t}+\rho). \qquad (۳۰)$$

در این رابطه $\rho$ زمان داده‌برداری است. وضعیت‌های گام بعدی و پاسخ‌های مطلوب باید بوسیله سری تیلور بسط داده شوند. مرتبه بسط به درجه نسبی متغیر کنترلی نسبت به ورودی کنترلی محدود می‌شود. مطابق رابطه زیر، ورودی کنترلی اولین بار به صورت صریح در مشتق دوم وضعیت‌ها ظاهر می‌شود:

$$\ddot{\hat{\eta}} = \hat{\mathrm{R}}\dot{\hat{\omega}} + \dot{\hat{R}}\hat{\omega}. \qquad (۳۱)$$

بنابراین درجه نسبی سیستم نسبت به ورودی کنترلی برابر با دو بدست می‌آید.

**نکته:** الگوریتم کنترلی که با رویکرد پیش‌بین یک گام به جلو توسعه یافته است، با الگوریتم تخمینی که از استراتژی پیش‌بین یک گام به عقب استفاده می‌کند، دوگان است. بنابراین برای مسئله کنترلی، ورودی کنترلی در فاصله پیش‌بینی بین $\mathrm{t}$ و $\mathrm{t}+\rho$ با محدود کردن مرتبه بسط برابر با درجه نسبی متغیرهای کنترلی، ثابت در نظر گرفته می‌شود. این بدان معناست که مرتبه صفر کنترلی برای متغیرهای کنترلی با درجه نسبی پایین کافی است [۲۵-۲۷].

در ادامه، از سری تیلور با بسط مرتبه دوم برای پیش‌بینی وضعیت‌ها استفاده می‌شود:

$$\hat{\eta}(\mathrm{t}+\rho) = \hat{\eta}(\mathrm{t}) + \rho\dot{\hat{\eta}}(\mathrm{t}) + \frac{\rho^2}{2!}\ddot{\hat{\eta}}(\mathrm{t}). \qquad (۳۲)$$

با استفاده از رابطه (۳۱)، وضعیت گام بعدی در رابطه (۳۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{\eta}(\mathrm{t}+\rho) = \hat{\eta}(\mathrm{t}) + \rho\hat{\mathrm{f}}_1 + \frac{\rho^2}{2!}\Big[\hat{\mathrm{R}}\big(\hat{\mathrm{f}}_2 + \mathrm{G}\tau + \bar{\mathrm{d}}\big) + \dot{\hat{\mathrm{R}}}\hat{\omega}\Big]. \qquad (۳۳)$$

با جایگزینی رابطه (۳۳) در (۳۰)، تابع هزینه بر حسب حالت‌های جاری بازنویسی می‌شود:

$$\mathrm{I}_2\big(\tau(\mathrm{t})\big) = \frac{1}{2}\left[\hat{\eta}(\mathrm{t}) + \rho\hat{\mathrm{f}}_1 + \frac{\rho^2}{2}\Big(\hat{\mathrm{R}}\big(\hat{\mathrm{f}}_2 + \mathrm{G}\tau + \bar{\mathrm{d}}\big) + \dot{\hat{\mathrm{R}}}\hat{\omega}\Big)\right]^{\mathrm{T}}\left[\hat{\eta}(\mathrm{t}) + \rho\hat{\mathrm{f}}_1 + \frac{\rho^2}{2}\Big(\hat{\mathrm{R}}\big(\hat{\mathrm{f}}_2 + \mathrm{G}\tau + \bar{\mathrm{d}}\big) + \dot{\hat{\mathrm{R}}}\hat{\omega}\Big)\right] \qquad (۳۴)$$

سپس شرط بهینگی لازم برای تابع هزینه (۳۴) اعمال می‌شود تا ورودی کنترلی فعلی بدست آید،

$$\frac{\partial \mathrm{J}_2}{\partial \tau} = 0. \qquad (۳۵)$$

بردار جبرانساز $\zeta$ در تابع هزینه جایگزین $\bar{\mathrm{d}}$ شده و قانون کنترل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau = -\frac{2}{\rho^2}\mathrm{G}^{-1}\hat{\mathrm{R}}^{-1}\left[\hat{\eta} + \rho\hat{\mathrm{f}}_1 + \frac{\rho^2}{2}\Big(\hat{\mathrm{R}}\hat{\omega} + \dot{\hat{\mathrm{R}}}\hat{\mathrm{f}}_2 + \hat{\mathrm{R}}\zeta\Big)\right] \qquad (۳۶)$$

**قضیه ۲:** خطای وضعیت ماهواره تحت کنترل‌کننده مقید (۳۶) به طور میانگین پایدار است. همچنین، میانگین خطای وضعیت با انتخاب زمان پیش‌بینی بزرگتر از یک حد، به یک مجموعه محدود همگرا می‌شود.

**اثبات:** دینامیک حلقه بسته با اعمال کنترل‌کننده (۳۶) در معادله سیستم (۴) بدست می‌آید:

$$\ddot{\hat{\eta}} + \frac{2}{\rho}\dot{\hat{\eta}} + \frac{2}{\rho^2}\hat{\eta} = \hat{\mathrm{R}}\Gamma \qquad (۳۷)$$

که در آن $\Gamma = \bar{\mathrm{d}} - \zeta$ خطای تخمین اختلالات است. با نشان دادن $\gamma_{\mathrm{i}=1,2,3}$ برای $\mathrm{i}$ امین مؤلفه بردار $\hat{\mathrm{R}}\Gamma$ در معادله (۳۷)، دینامیک سیستم حلقه بسته به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{\hat{\eta}}_i + \frac{2}{\rho}\dot{\hat{\eta}}_i + \frac{2}{\rho^2}\hat{\eta}_{\mathrm{i}} = \gamma_{\mathrm{i}}. \quad \mathrm{i} = 1,2,3. \qquad (۳۸)$$

عبارت سمت راست دینامیک خطا (۳۸) به عنوان یک عبارت تصادفی ناشی از خطای تخمین اختلالات سیستم در نظر گرفته می‌شود. این عبارت، با توجه به کراندار بودن اغتشاشات، کراندار است.

$\gamma_i$ را می‌توان با یک فرآیند تصادفی به صورت $\gamma_i = \Omega_i + \phi_i$ مدل کرد، که در آن $\Omega_i$ میانگین $\gamma_i$ و $\phi_i$ نویز سفید گاوسی با میانگین صفر است. بدین ترتیب، معادله (۳۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{\eta}_i + \frac{2}{\rho}\dot{\eta}_i + \frac{2}{\rho^2}\eta_i = \Omega_i + \phi_i, \quad i = 1,2,3. \tag{۳۹}$$

شکل فضای حالت معادله (۳۹) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{Z} = AZ + B_1\Omega_i + B_2\phi_i, \tag{۴۰}$$

که در آن $Z = [\eta_i, \dot{\eta}_i]^T$ و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2} \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۴۱}$$

جواب معادله خطی (۴۰) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{\eta}_i = e^{-\frac{1}{\rho}t}\Pi_i + \frac{\rho^2\Omega_i}{2} + \sigma(\phi_i)\int_0^t \rho e^{-\frac{1}{\rho}(t-s)} \sin\left[\frac{1}{\rho}(t-s)\right] dB(s) \tag{۴۲}$$

$$\dot{\hat{\eta}}_i = e^{-\frac{1}{\rho}t}\Lambda_i - \sqrt{2}\sigma(\phi_i)\int_0^t e^{-\frac{1}{\rho}(t-s)} \sin\left[\frac{1}{\rho}(t-s) - \frac{\pi}{4}\right] dB(s)$$

که در آن $\sigma(\phi_i)$ انحراف معیار نویز و $dB(s)$ حرکت براونی استاندارد است. همچنین

$$\Pi_i = \sqrt{2}\hat{\eta}_i(0)\sin\left(\frac{1}{\rho}t + \frac{\pi}{4}\right) + \rho\dot{\hat{\eta}}_i(0)\sin\frac{1}{\rho}t - \frac{\rho^2\Omega_i}{2}\sin\left(\frac{1}{\rho}t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{۴۳}$$

$$\Lambda_i = -2\frac{\hat{\eta}_i(0)}{\rho}\sin\left(\frac{1}{\rho}t\right) - \sqrt{2}\dot{\hat{\eta}}_i(0)\sin\left(\frac{1}{\rho}t - \frac{\pi}{4}\right) + \rho\,\Omega_i\sin\frac{1}{\rho}t$$

مقادیر میانگین $\eta_i$ و $\dot{\eta}_i$ در معادلات (۴۲) با استفاده از خواص انتگرال Itô محاسبه می‌شوند،

$$E[\hat{\eta}_i(t)] = e^{-\frac{1}{\rho}t}E[\Pi_i] + \frac{\rho^2\Omega_i}{2},$$
$$E\left[\dot{\hat{\eta}}_i(t)\right] = e^{-\frac{1}{\rho}t}E[\Lambda_i] \tag{۴۴}$$

مقدار مثبت $\rho$ منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\lim_{t\to\infty} E[\hat{\eta}_i(t)] = \frac{\rho^2\Omega_i}{2},$$
$$\lim_{t\to\infty} E\left[\dot{\hat{\eta}}_i(t)\right] = 0. \tag{۴۵}$$

از (۴۴) و (۴۵) نتیجه می‌شود که امید ریاضی وضعیت و مشتق آن به ترتیب به $\frac{\rho^2\Omega_i}{2}$ و صفر در حضور قیود و خطای تخمین همگرا می‌شوند. زمان پیش‌بینی $\rho$ بر همگرایی خطا تأثیر می‌گذارد. این نشان‌دهنده پایداری به معنای میانگین روش تخمین پیشنهادی است. واریانس وضعیت و مشتق آن با استفاده از روابط $\sigma^2(\eta_i) = E[\hat{\eta}_i^2] - E^2[\hat{\eta}_i]$ و $\sigma^2(\dot{\eta}_i) = E[\dot{\hat{\eta}}_i^2] - E^2[\dot{\hat{\eta}}_i]$ ارزیابی می‌شوند. استفاده از خواص انتگرال Itô نتیجه می‌دهد:

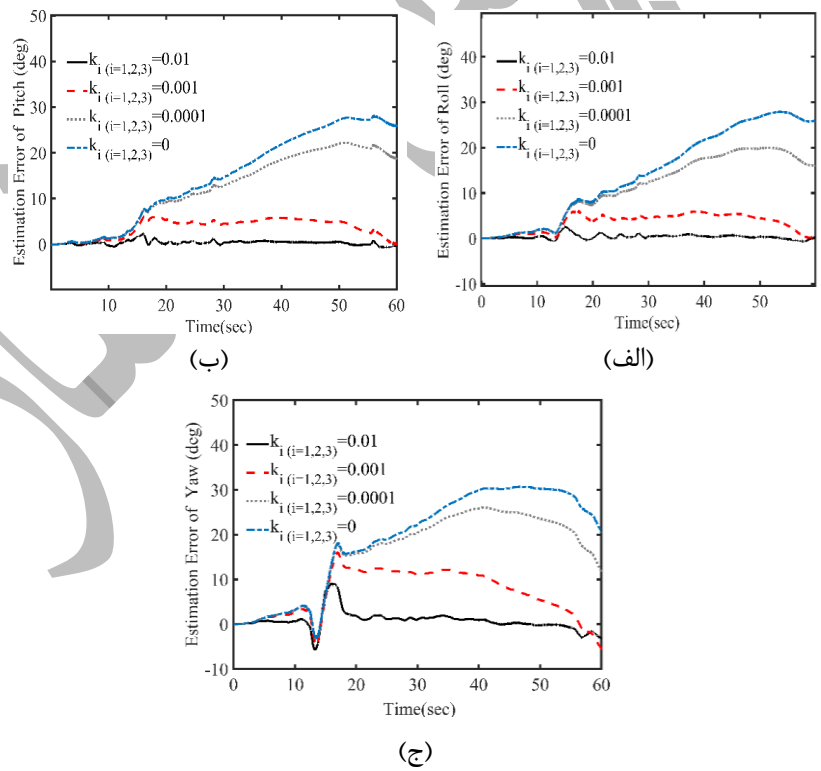
$$\lim_{t\to\infty} \sigma^2(\hat{\eta}_i) = \frac{\rho^3}{8}\sigma^2(\phi_i),$$
$$\lim_{t\to\infty} \sigma^2\left(\dot{\hat{\eta}}_i\right) = \frac{\rho}{4}\sigma^2(\phi_i). \tag{۴۶}$$

مشاهده می‌شود که پارامتر $\rho$ در مخرج $\sigma^2(\hat{\eta}_i)$ و $\sigma^2\left(\dot{\hat{\eta}}_i\right)$ بر واریانس وضعیت و مشتق آن در حضور خطای تخمین تأثیر می‌گذارد. افزایش این پارامتر مطابق روابط (۴۵) و (۴۶) باعث زیاد شدن مشخصات آماری خطا می گردد. از طرفی مطابق رابطه مربوط به خطای ردیابی (۳۸)، کاهش $\rho$ باعث دور شدن قطبهای حلقه بسته از محور موهومی می گردد که نتیجه آن افزایش سرعت سیستم و در عین حالت افزایش ورودی کنترلی سیستم می‌گردد. مقدار مناسب برای این پارامتر با مصالحه بین سرعت پاسخ دهی سیستم، خطا و میزان مصرف انرژی کنترلی انتخاب می‌گردد.

## ۶- نتایج شبیه سازی نرم افزاری

در این بخش ابتدا، الگوریتم تخمین پیشـــنهادی بر روی ماهواره‌ای با ماتریس اینرســـی $J = \begin{bmatrix} 1.814 & -0.1185 & 0.2749 \\ -0.1185 & 1.735 & 0.1697 \\ 0.2749 & 0.1697 & 3.432 \end{bmatrix}$ پیاده سازی می شود که واحد اعداد به $kgm^2$ ا ست. ماهواره با ا ستفاده از ورودی‌های و پارامترهای مختلف برر سی می شود تا عملکرد الگوریتم تخمین در شرایط گوناگون ارزیابی گردد. این شبیه‌سازی‌ها برای بررسی تأثیر پارامترهای مختلف در دقت تخمین و اثربخشی تلفیق داده‌ها طراحی شـده‌اند. در اولین شـبیه‌سـازی، شـرایط اولیه به صـورت $\eta = [1 \quad -1 \quad -43]^T$ درجه تنظیم گردید و ورودی سینو سی ترکیبی بصورت $\tau_d = \begin{bmatrix} 0.01sin(t) + 0.01sin(0.9t) + 0.01sin(0.5t) \\ 0.01sin(t) + 0.01sin(0.9t) + 0.01sin(0.5t) \\ 0.02sin(t) + 0.02sin(0.9t) + 0.01sin(0.5t) \end{bmatrix}$ به سیستم اعمال شد. این شبیه سازی به منظور تحلیل رفتار سیستم در شرایط ابتدایی و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف در نتایج تخمین طراحی شده است. نتایج این آزمایش در شکل‌های ۲ تا ۵ آورده شده است. در نتایج، *GNSS* با انحراف معیار نویز گاوسی $\sigma_\eta = 0.01^\circ$ در هر سه محور و فرکانس به‌روزرسانی $1\ Hz$ و ژیروســـکوپ ســـه‌محوره با نویز اندازه‌گیری گاوســـی ســـفید با انحراف معیار $\sigma_\omega = 0.005^\circ/s$ و بردار بایاس ثابت $b = [0.05, 0.03, 0.04]^T\ deg/s$ با نرخ نمونه‌برداری $100\ Hz$ در نظر گرفته شده اند.

شکل ۲ نتایج خطای تخمین را برای مقادیر مختلف $k_i$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، برای مقادیر پایین $k_i$، تخمین دچار خطای بیشتری می‌شود که به دلیل خطای اندازه‌گیری ژیروسکوپ است. اما با افزایش مقدار $k_i$، تأثیر ادغام داده‌ها با سیستم کمکی GNSS بیشتر شده و دقت تخمین بهبود می‌یابد. این نتایج، تأثیر پارامتر $k_i$ بر عملکرد الگوریتم را که در قضیه ۱ توضیح داده شده، تایید می‌کند. مطابق شکل ۲، خطای تخمین برای $k_i = 0.01$ بسیار کوچک است، بنابراین $k_i = 0.01$ به عنوان مقدار بهینه انتخاب شد. اما با افزایش بیشتر مقدار $k_i$ از 0.01، شرایط قضیه ۱ برآورده نمی‌شود و عملکرد تخمین کاهش می‌یابد.

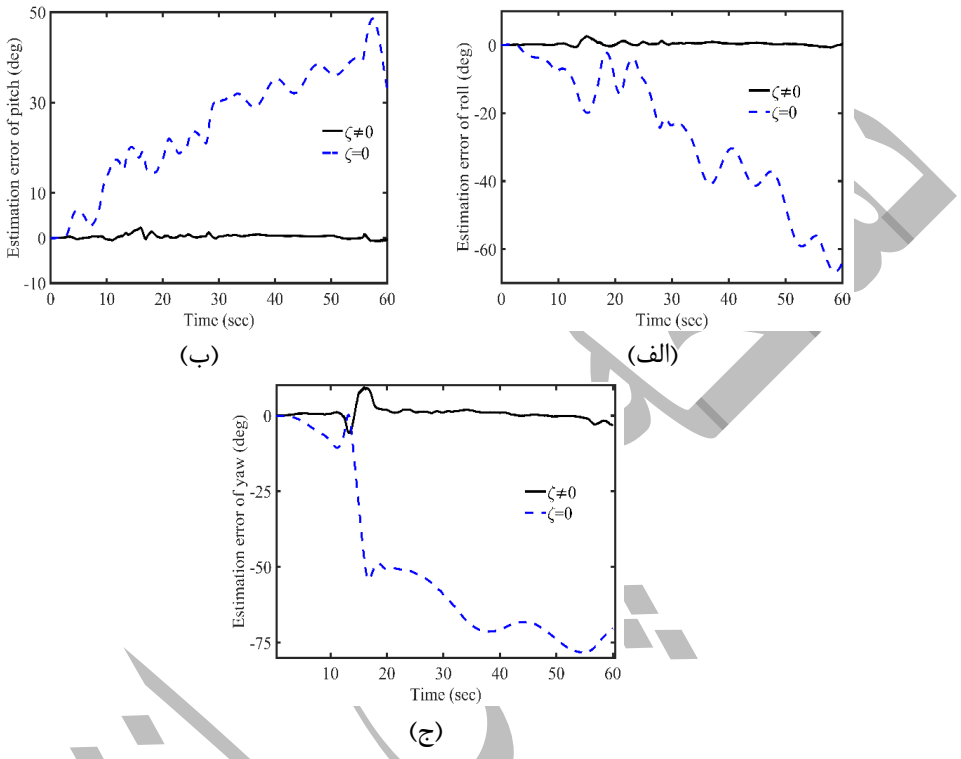



(ب) (الف)

(ج)

**شکل ۲: خطاهای تخمین وضعیت برای مقادیر مختلف $k_i$ : (الف) زاویه رول، (ب)زاویه پیچ، (ج) زاویه یاو**

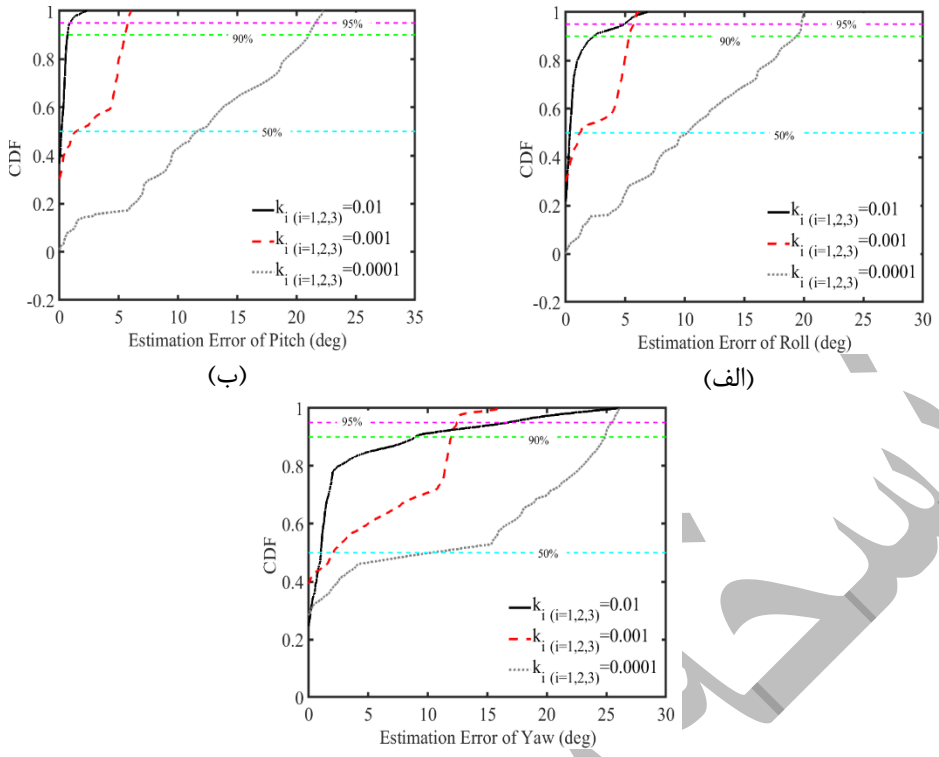
برای نمایش عملکرد بردار جبرانساز در تخمین عدم‌قطعیت‌های سیستم، نتایج خطای تخمین برای حالت‌های $\zeta = 0$ و $\zeta \neq 0$ در شکل ۳ ارائه شده است. این مقایسه به ما این امکان را می‌دهد که تأثیر گنجاندن یا عدم گنجاندن بردار جبرانساز را بر خطای تخمین بررسی کنیم. در صورتی که بردار جبرانساز در تخمین‌گر وجود نداشته باشد، عدم‌قطعیت‌های سیستم به شدت عملکرد تخمین‌گر را تحت تأثیر قرار می‌دهند و در نتیجه خطای تخمین افزایش می‌یابد. این نشان می‌دهد که بردار جبرانساز نقش حیاتی در کاهش اثرات عدم‌قطعیت‌ها و بهبود دقت تخمین ایفا می‌کند.




**شکل۳: خطاهای تخمین با و بدون تخمین اختلالات: (الف) زاویه رول ، (ب)زاویه پیچ ، (ج)زاویه یاو**

برای ارزیابی تأثیر روش پیشنهادی در کاهش خطای وضعیت، از تابع توزیع تجمعی (CDF) به عنوان یک روش آماری و شاخص ارزیابی استفاده شده است. در آمار، CDF احتمال وقوع یک متغیر تصادفی در یک بازه خاص را نشان می‌دهد. شکل ۴ نتایج CDF را نشان می‌دهد که تأثیر افزایش مقدار بهره را بر خطای وضعیت در سطوح مختلف اعتماد نشان می‌دهد. در این ارزیابی، سطوح اعتماد ۹۵٪، ۹۰٪ و ۵۰٪ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با توجه به نتایج CDF، مشاهده می‌شود که افزایش مقدار بهره باعث بهبود چشمگیر خطای وضعیت می‌شود. روش پیشنهادی عملکرد بهتری در سطوح اعتماد بالاتر (مثل ۹۵٪ و ۹۰٪) نسبت به سطوح اعتماد پایین‌تر (مثل ۵۰٪) دارد. این نشان می‌دهد که الگوریتم با افزایش سطح اعتماد، در کاهش خطای وضعیت مؤثرتر عمل می‌کند.

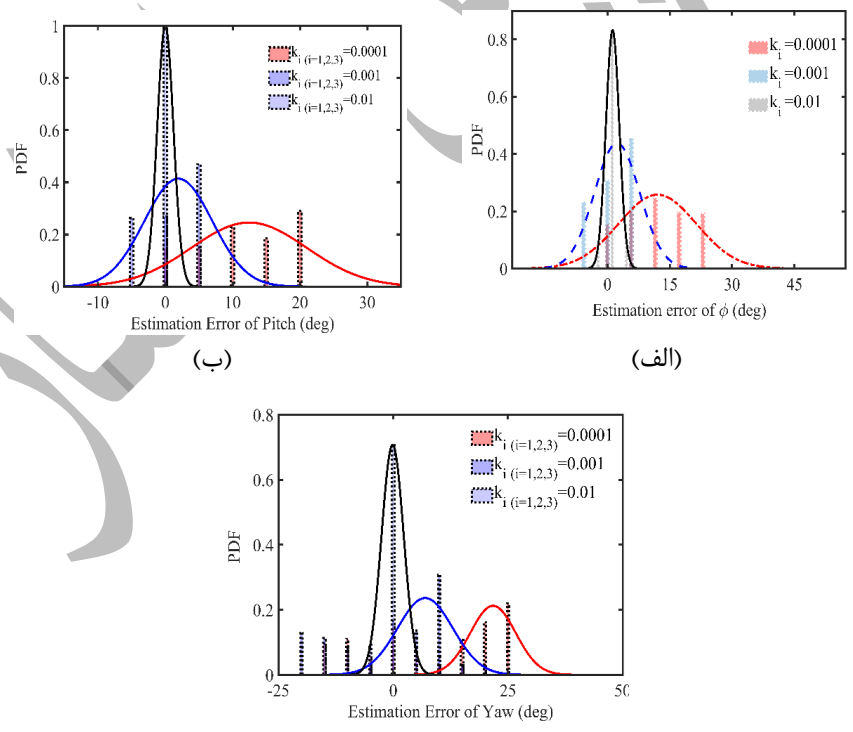
در شکل ۵ تابع چگالی احتمال تخمین وضعیت برای مقادیر مختلف بهره $k_i$ در آزمایش اول نشان داده شده است. نتایج حاکی از آن است که خطای تخمین از یک توزیع گوسی پیروی می‌کند. طبق قضیه ۱، افزایش بهره $k_i$ تا مقدار مناسب، به طور قابل توجهی میانگین و انحراف معیار خطاهای تخمین را کاهش می‌دهد. این نشان می‌دهد که با افزایش مقدار بهره، تخمین دقیق‌تر و پایدارتر می‌شود.




(ب) (الف)

(ج)

**شکل ۴: تابع توزیع تجمعی (CDF) خطاهای تخمین وضعیت: (الف) زاویه رول، (ب) زاویه پیچ، (ج) زاویه یاو**

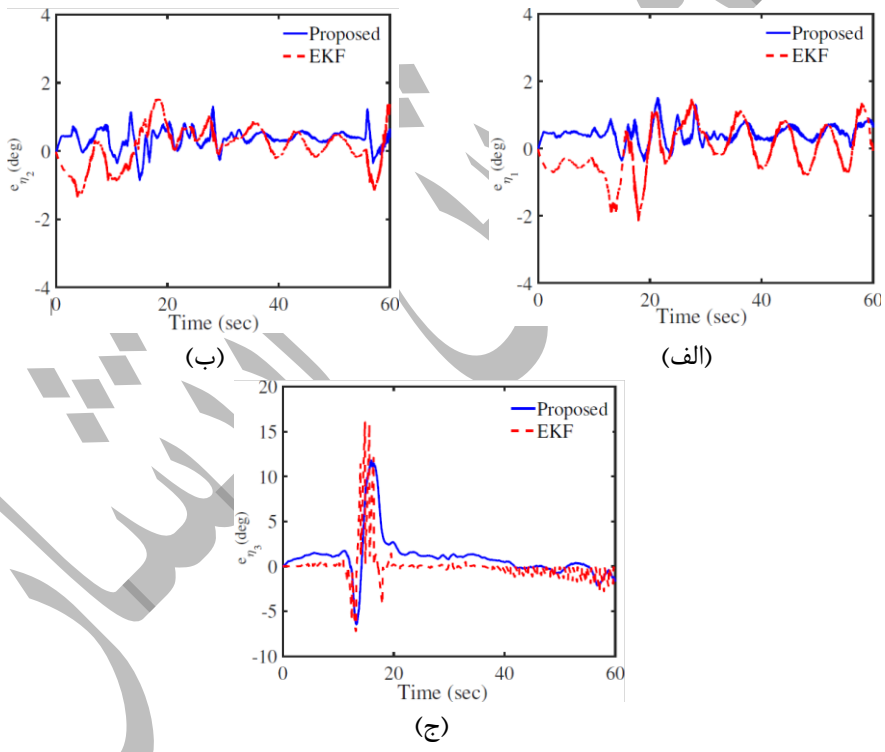



(ب) (الف)

(ج)

**شکل ۵: تابع چگالی احتمال (PDF) خطای تخمین وضعیت: (الف) زاویه رول، (ب) زاویه پیچ، (ج) زاویه یاو**

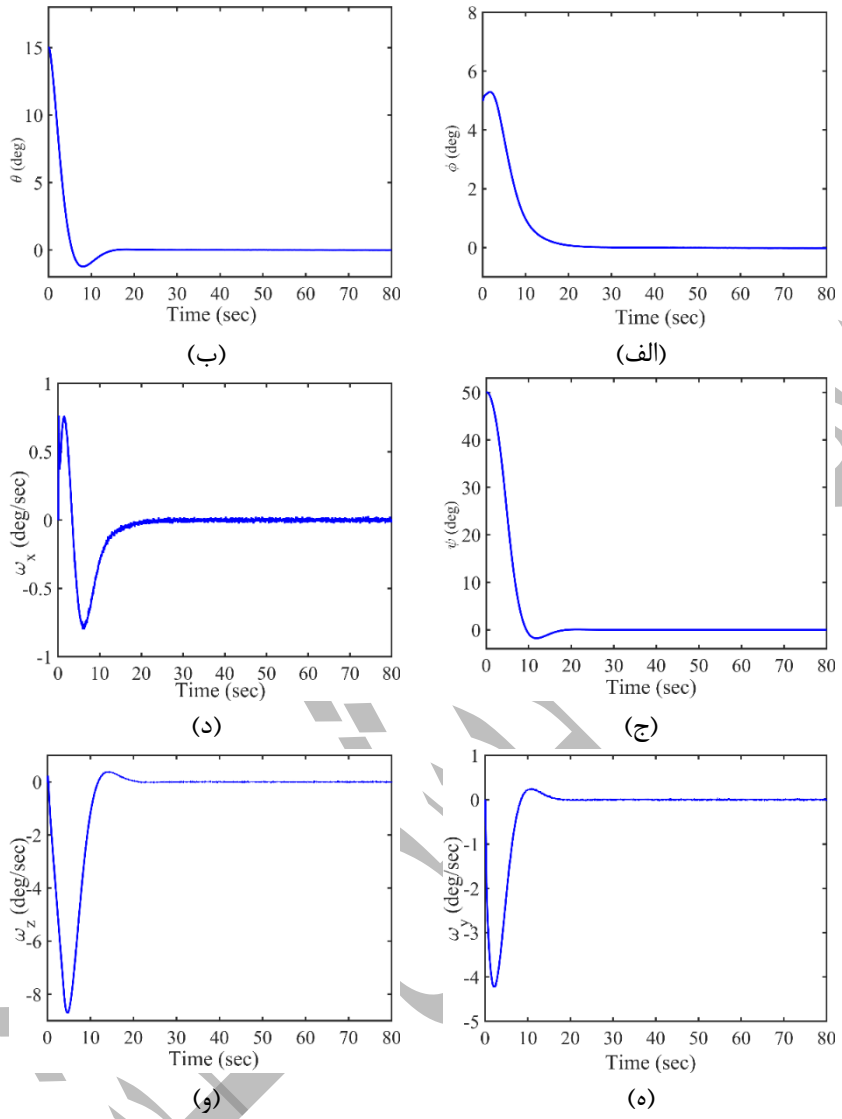
به‌منظور بررسی استقلال عملکرد تخمین‌گر از شرایط اولیه و مقایسه روش پیشنهادی با یک روش استاندارد، عملکرد آن با فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقایسه می‌شود. در این مقایسه، هر دو روش بر مبنای معادلات یکسان سیستم به‌کار گرفته شده‌اند و عدم‌قطعیت پارامتری به میزان ۱۰ درصد در ماتریس اینرسی ماهواره لحاظ شده است. شکل ۶ مقایسه‌ای تفصیلی از خطاهای تخمین وضعیت را برای هر دو روش ارائه می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند که اگرچه هر دو روش تخمین‌های دقیقی فراهم می‌کنند، روش پیشنهادی در اغلب موارد به‌طور پیوسته عملکرد بهتری نسبت به فیلتر کالمن توسعه‌یافته دارد. این برتری عملکرد ناشی از محدودیت‌های ساختاری ذاتی فیلتر کالمن توسعه‌یافته است. به‌طور مشخص، فیلتر کالمن توسعه‌یافته بر فرضیات محدودکننده‌ای، از جمله سفید و گاوسی بودن نویزهای فرایند، تکیه دارد. افزون بر این، این فیلتر مستلزم خطی‌سازی مدل غیرخطی سیستم است که خود می‌تواند موجب کاهش دقت شود. عملکرد این فیلتر همچنین به تنظیم اولیه ماتریس‌های کوواریانس آن بسیار حساس است. در شرایطی که نویز حسگرها و اغتشاشات اغلب از توزیع‌های ایده‌آل انحراف دارند، اهمیت این محدودیت‌ها افزایش می‌یابد. در مقابل، روش پیشنهادی فاقد چنین محدودیت‌هایی است. الگوریتم اصلی این روش، به‌جای اتکا به فرضیات آماری مشخص درباره نویز، از یک فرایند بهینه‌سازی برای محاسبه بردار مکمل بهره می‌گیرد. این بردار، با استفاده از خطای تخمین فعلی، عدم‌تطابق میان مدل اسمی و رفتار واقعی سیستم را به‌طور مستقیم جبران می‌کند. این رویکرد نه‌تنها وابستگی به فرضیات آماری محدودکننده را کاهش می‌دهد، بلکه استحکام تخمین‌گر را در برابر اغتشاشات و عدم‌قطعیت‌های واقعی افزایش می‌دهد. همچنین، مقادیر ریشه میانگین مربعات خطاهای تخمین برای هر دو روش در جدول ۱ ارائه شده‌اند که عملکرد مطلوب روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند.




شکل ۶: مقایسه خطاهای تخمین روش پیشنهادی با فیلتر کالمن توسعه‌یافته، **(الف) زاویه رول، (ب) زاویه پیچ، (ج) زاویه یاو**

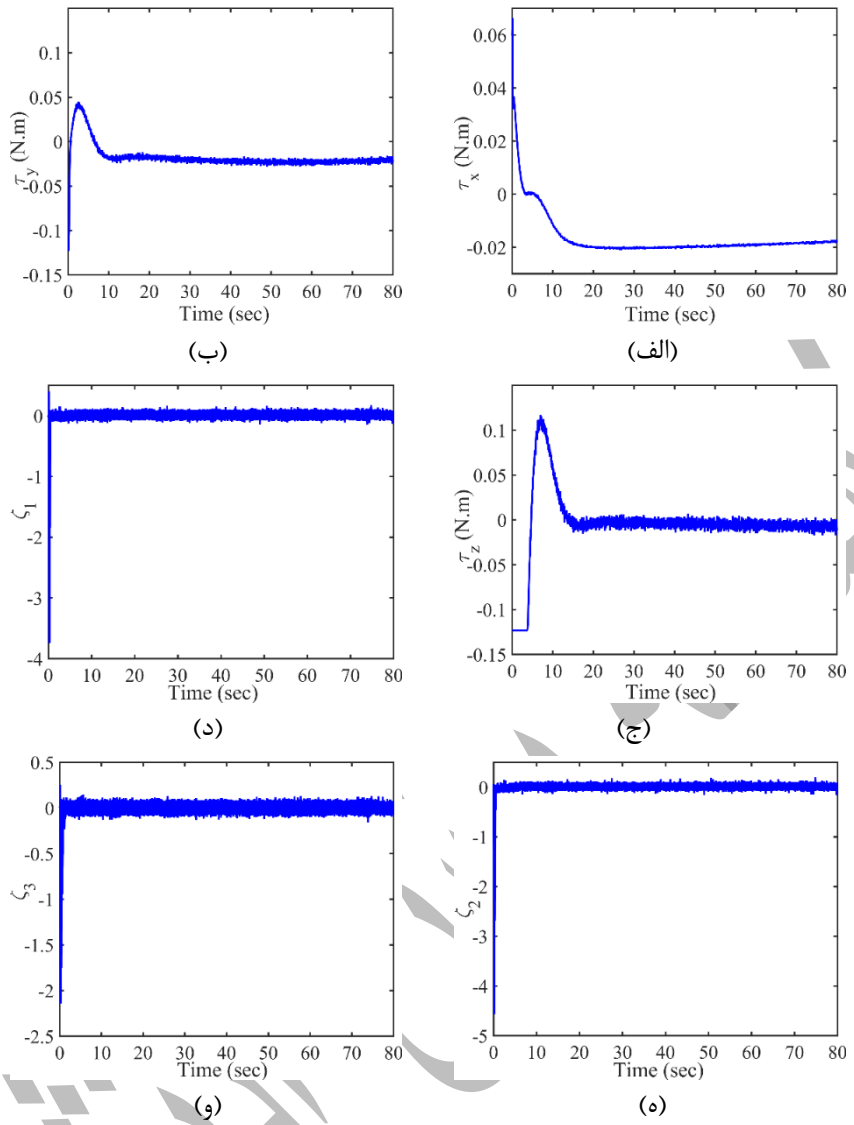
**جدول ۱: مقایسه مقدار ریشه مربعات میانگین خطای تخمین روش پیشنهادی با فیلتر کالمن**

| پارامتر | روش پیشنهادی | فیلتر کالمن توسعه‌یافته |
|---|---|---|
| خطای تخمین زاویه رول (درجه) | ۰/۵۲ | ۰/۷۱ |
| خطای تخمین زاویه پیچ (درجه) | ۰/۴۳ | ۰/۶ |
| خطای تخمین زاویه یاو (درجه) | ۲/۱ | ۲/۶ |




**شکل ۷: نتایج کنترل وضعیت و سرعت‌های زاویه ای**

هدف اصلی از تخمین و تلفیق داده‌ها، دستیابی به کنترل دقیق وضعیت ماهواره است. در این بخش از شبیه‌سازی، روش کنترلی ارائه شده در شرایط اولیه $\eta = [5 \quad 15 \quad 50]^T$ بر روی سیستم پیاده‌سازی شد و نتایج آن مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از این پیاده‌سازی شامل وضعیت و سرعت زاویه‌ای در شکل ۷، گشتاورهای کنترلی و بردار جبرانساز در شکل ۸ می‌باشد. این نتایج به وضوح نشان می‌دهند که استفاده از روش تخمین پیشنهادی موجب بهبود چشمگیر عملکرد سیستم کنترلی می‌شود. با به‌کارگیری این روش، دقت تخمین وضعیت به طور قابل توجهی افزایش یافته و در نتیجه کنترل دقیق‌تری بر وضعیت و سرعت‌های زاویه‌ای سیستم اعمال شده است. این بهبود در عملکرد کنترلی، تأثیر مستقیم الگوریتم تخمین دقیق بر بهینه‌سازی رفتار سیستم را تأیید می‌کند.




**شکل ۸: نتایج گشتاورهای کنترلی و بردار جبرانساز**

## ۷- نتیجه‌گیری

این مطالعه الگوریتم جدیدی را معرفی می‌کند که به منظور بهبود دقت تخمین وضعیت ماهواره طراحی شده است. این الگوریتم با به‌روزرسانی مستمر دینامیک ماهواره در زمان واقعی، به‌طور مؤثری وضعیت ماهواره را تعیین کرده و تأثیر عدم‌قطعیت‌ها و خطاهای اندازه‌گیری را به خوبی کاهش می‌دهد. علاوه بر این، الگوریتم پیشنهادی به‌طور تطبیقی عدم‌قطعیت‌های اندازه‌گیری، از جمله انحراف ژیروسکوپ، را با ادغام داده‌ها از GNSS به عنوان سیستم کمکی برای ماهواره مدار پایین تخمین می‌زند. اثر بخشی این الگوریتم تخمین جدید از طریق نتایج شبیه‌سازی تأیید شده است. تخمین‌های دقیق حاصل از الگوریتم پیشنهادی در یک کنترل‌کننده بهینه غیرخطی وضعیت به کار گرفته می‌شوند که با استفاده از این تخمین‌ها، اغتشاشات، عدم‌قطعیت‌ها و عیوب حسگر را خنثی کرده و همگرایی وضعیت ماهواره را در زمان محدود تضمین می‌نماید. نتایج نشان می‌دهند که با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، کاهش قابل توجهی در میانگین و واریانس خطاهای تخمین وضعیت مشاهده می‌شود. علاوه بر این، نتایج به‌وضوح نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی عملکرد بهتری دارد و دقت و پایداری بیشتری را در حضور عدم‌قطعیت‌ها و نویز اندازه‌گیری ارائه می‌دهد.

استفاده از داده‌های میدانی در کنار اجرای مانورهای متنوع، بستری مناسب برای اعتبارسنجی عملیاتی الگوریتم تخمین‌گر و کنترل‌کننده‌ی ارائه‌شده فراهم می‌سازد. چنین رویکردی نه تنها کارایی روش را در مواجهه با عدم‌قطعیت‌ها و اغتشاشات واقعی می‌سنجد، بلکه قابلیت اطمینان آن را در کاربردهای صنعتی و عملی به‌وضوح نشان می‌دهد. یافته‌های این مرحله، مبنایی مستحکم برای توسعه‌ی الگوریتم در پژوهش‌های آینده خواهد بود.

## ۸- واژه‌نامه

| پیشنهادی نویسنده | واژه لاتین | پیشنهادی ویراستار |
|---|---|---|
| ترکیب اطلاعات | Data fusion | |
| حسگر | Sensor | |
| ژیرسکوپ | Gyroscope | |
| سامانه موقعیت‌یاب جهانی | Global navigation satellite system (GNSS) | |
| تخمین بیزی | Bayesian estimation | |
| فیلتر کالمن | Kalman filter | |
| عدم‌قطعیت | Perturbation | |
| مدار پایین زمین | Low earth orbit (LEO) | |
| تطبیقی | Adaptive | |
| بایاس | Bias | |
| نویز | Noise | |
| حرکت براونی | Brownian motion | |

## ۹- مراجع


[1] H. Yoon, K. Baeck, and J. Wi, "Star tracker geometric calibration through full-state estimation including attitude," *Int. J. Aeronaut. Space Sci.*, vol. 23, no. 1, pp. 180–191, 2022. https://doi.org/10.1007/s42405-021-00432-5.

[2] T. M. Habib, "A new optimal fusion algorithm for spacecraft attitude determination and estimation algorithms," *The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science*, vol. 21, no. 3, pp. 305–309, 2018. https://doi.org/10.1016/j.ejrs.2017.08.007.

[3] T. Sun, F. Xing, X. Wang, Z. You, and D. P. Chu, "An accuracy measurement method for star trackers based on direct astronomic observation," *Scientific Reports*, vol. 6, no. 1, Art. no. 22593, 2016. https://doi.org/10.1038/srep22593.

[4] O. Montenbruck, P. Swatschina, M. Markgraf, S. Santandrea, J. Naudet, and E. Tilmans, "Precision spacecraft navigation using a low-cost GPS receiver," *GPS Solutions*, vol. 16, pp. 519–529, 2012. https://doi.org/10.1007/s10291-011-0252-6

[5] R. Du, W. Liao, and X. Zhang, "Feasibility analysis of angles-only navigation algorithm with multisensor data fusion for spacecraft noncooperative rendezvous," *Astrodynamics*, vol. 7, no. 2, pp. 179–196, 2023. https://doi.org/10.1007/s42064-022-0148-y.

[6] H. Ma, L. Yan, Y. Xia, and M. Fu, *Kalman Filtering and Information Fusion*. Singapore: Springer, 2020.

[7] K. Dahia, N. M. Horri, C. Musso, and N. Merlinge, "Gyroless satellite attitude determination using a SVD-Laplace particle filter," *Acta Astronautica*, vol. 207, pp. 33–46, 2023. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.01.015.

[8] W. Wang and T. Lee, "Spacecraft attitude and gyro-bias estimation with a single magnetometer on $SO(3)\times\mathbb{R}^n$," *in Proc. AIAA SciTech Forum*, 2022, Paper 2022-0616. https://doi.org/10.2514/6.2022-0616.

[9] S.-H. Mok, S. Byeon, H. Bang, and Y. Choi, "Performance comparison of gyro-based and gyroless attitude estimation for CubeSats," *Int. J. Control, Autom. Syst.*, vol. 18, pp. 1150–1160, 2020. https://doi.org/10.1007/s12555-018-0878-z.

[10] K. Wang, T. Zhu, Y. Qin, C. Zhang, and Y. Li, "Integration of star and inertial sensors for spacecraft attitude determination," *The Journal of Navigation*, vol. 70, no. 6, pp. 1335–1348, 2017. https://doi.org/10.1017/S0373463317000339.

[11] X. Ning and J. Fang, "Spacecraft autonomous navigation using unscented particle filter-based celestial/Doppler information fusion," *Measurement Science and Technology*, vol. 19, no. 9, Art. no. 095203, 2008. https://doi.org/10.1088/0957-0233/19/9/095203.

[12] S. Mil and M. Piantanakulchai, "Modified Bayesian data fusion model for travel time estimation considering spurious data and traffic conditions," *Applied Soft Computing*, vol. 72, pp. 65–78, 2018. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.06.046.

[13] S. H. Pourtakdoust, M. F. Mehrjardi, and S. M. H. Hajkarim, "Attitude estimation and control based on modified unscented Kalman filter for gyro-less satellite with faulty sensors," *Acta Astronautica*, vol. 191, pp. 134–147, 2022. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.11.008.

[14] B. Gao, G. Hu, Y. Zhong, and X. Zhu, "Cubature Kalman filter with both adaptability and robustness for tightly-coupled GNSS/INS integration," *IEEE Sensors Journal*, vol. 21, no. 13, pp. 14997–15011, 2021. https://doi.org/10.1109/JSEN.2021.3073963.

[15] B. Jia, M. Xin, and Y. Cheng, "Sparse Gauss–Hermite quadrature filter with application to spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 34, no. 2, pp. 367–379, 2011. https://doi.org/10.1109/ACC.2010.5531487.

[16] R. V. Garcia, P. C. P. M. Pardal, H. K. Kuga, and M. C. Zanardi, "Nonlinear filtering for sequential spacecraft attitude estimation with real data: Cubature Kalman filter, unscented Kalman filter and extended Kalman filter," *Advances in Space Research*, vol. 63, no. 2, pp. 1038–1050, 2019. https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.10.003.

[17] Z. Xing and Y. Xia, "Distributed federated Kalman filter fusion over multi-sensor unreliable networked systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 63, no. 10, pp. 1714–1725, 2016. https://doi.org/10.1109/TCSI.2016.2587728.

[18] G. Hu, S. Gao, Y. Zhong, B. Gao, and A. Subic, "Matrix weighted multisensor data fusion for INS/GNSS/CNS integration," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 230, no. 6, pp. 1011–1026, 2016. https://doi.org/10.1177/0954410015602723.

[19] H. Pan, W. Sun, Q. Sun, and H. Gao, “Deep learning-based data fusion for sensor fault diagnosis and tolerance in autonomous vehicles,” *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, vol. 34, no. 1, Art. no. 72, 2021. https://doi.org/10.1186/s10033-021-00568-1.

[20] J. R. Mansell and D. A. Spencer, “Deep learning fault diagnosis for spacecraft attitude determination and control,” *Journal of Aerospace Information Systems*, vol. 18, no. 3, pp. 102–115, 2021, doi: 10.2514/1.I010881. https://doi.org/10.1186/10.2514/1.I010881.

[21] T. S. Abdel Aziz, G. I. Salama, M. S. Mohamed, and S. Hussein, “Efficient machine learning based techniques for fault detection and identification in spacecraft reaction wheel,” *Aerospace Systems*, vol. 7, no. 4, pp. 815–828, 2024. https://doi.org/10.1007/s42401-024-00322-0.

[22] B. Xiao and S. Yin, “A deep learning based data-driven thruster fault diagnosis approach for satellite attitude control system,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 68, no. 10, pp. 10162–10170, 2021. https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3026272.

[23] S. Ramachandran, M. Rosengarten, and C. K. Belardi, “Semi-supervised machine learning for spacecraft anomaly detection & diagnosis,” *in Proc. IEEE Aerospace Conf.*, Mar. 2020, pp. 1–10. https://doi.org/ 10.1109/AERO47225.2020.9172454.

[24] M. R. Napolitano, C. Neppach, V. Casdorph, S. Naylor, M. Innocenti, and G. Silvestri, “Neural-network-based scheme for sensor failure detection, identification, and accommodation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 6, pp. 1280–1286, 1995. https://doi.org/10.2514/3.21542.

[25] A. Tahouni, M. Mirzaei, and B. Najjari, “Applied nonlinear control of vehicle stability with control and state constraints,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, vol. 234, no. 1, pp. 191–211, 2020. https://doi.org/ 10.1177/0954407019848858.

[26] A. R. Ghiasi, G. Alizadeh, and M. Mirzaei, “Simultaneous design of optimal gait pattern and controller for a bipedal robot,” *Multibody System Dynamics*, vol. 23, no. 4, pp. 401–429, 2010. https://doi.org/10.1007/s11044-009-9185-z.

[27] M. Moradi Nerbin, R. Mojed Gharamaleki, and M. Mirzaei, “Novel optimal control of semi-active suspension considering a hysteresis model for MR damper,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 39, no. 5, pp. 698–705, 2017. https://doi.org/10.1177/0142331215618446.

[28] S. Jamshidi, M. Mirzaei, and M. Malekzadeh, “Applied nonlinear control of spacecraft simulator with constraints on torque and momentum of reaction wheels,” *ISA Transactions*, vol. 138, pp. 705–719, 2023. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2023.03.027.

[29] S. Jamshidi, M. Mirzaei, and M. Malekzadeh, “Applied optimal control of spacecraft simulator subject to failures of reaction wheels,” *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 42, no. 2, pp. 1697–1712, 2023. https://doi.org/10.1007/s13369-023-07960-0.

[30] S. Jamshidi, M. Mirzaei, M. Khodaverdian, and P. Castaldi, “Perturbation observer-based constrained fault tolerant control of flexible spacecraft using continuous predictive approach,” *Control Engineering Practice*, vol. 156, Art. no. 106210, 2025. https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2024.106210.

[31] S. Jamshidi, M. Mirzaei, M. Malekzadeh, and S. Rafatnia, “Design and experimental implementation of adaptive actuator failure compensator for spacecraft attitude control simulator,” *Aerospace Mechanics*, vol. 20, no. 1, pp. 27–43, 2024. https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1403.20.1.2.4.

[32] R. Khasminskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2011.

[33] X. Han and P. E. Kloeden, *Random Ordinary Differential Equations and Their Numerical Solution*. Singapore: Springer, 2017.

نسخه پیش انتشار