

ارتعاشات آزاد تیر I شکل همسانگرد با جان موجدار سینوسی

چکیده

در این پژوهش با استفاده از یک مدل نظری، ارتعاشات آزاد تیر I شکل همسانگرد با جان موجدار سینوسی بررسی شده است. میدان تغییر مکانها برای تیر جداره نازک با مقطع متغیر درون یابی و انرژی پتانسیل کل برای این گونه تیر برآورد شده است. بر پایه روش ماتریس جابجایی، ماتریسهای سفتی و جرمی استخراج و با استفاده از اصل همیلتون، بسامدهای طبیعی ارتعاشات آزاد تیر محاسبه شده است. به منظور کسب بیشینه دقت در نتایج و پرهیز از هر گونه معادل سازی، روابط جدیدی برای محاسبه ویژگیهای مقطعی تیر ارائه و به صورت تابعی از هندسه جان در محاسبات اعمال شده است. به منظور اعتبار سنجی، بسامدهای طبیعی ارتعاشات آزاد تیر در شرایط مرزی مختلف محاسبه و با نتایج به دست آمده از مدل سازی المان محدود در نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. مقایسه نتایج، دقت بالای فرمول بندی پیشنهادی را نشان داد. به منظور مطالعه پارامتری، اثر مولفه های هندسی موج جان بر پاسخ ارتعاشی تیر بررسی شده است. نتایج این پژوهش نشان دهنده قابلیت کاربرد روش پیشنهادی در تحلیل سازه های مشابه است.

کلیدواژه ها: ارتعاشات آزاد، تیر I شکل، جان موجدار سینوسی، ماتریس سفتی، ماتریس جرمی

Free Vibration of Isotropic I-section Beams with Sinusoidal Corrugated Web

Abstract

This paper investigates free vibrations of isotropic I-section beams with sinusoidal corrugated web using a theoretical model. The displacement field of the thin-walled beam with variable cross-section is interpolated, and the total potential energy is derived. Using the matrix displacement method, stiffness and mass matrices are derived, and Hamilton's principle is applied to calculate the natural frequencies of free vibrations. To ensure maximum accuracy and avoid any approximations, distinct formulas for the sectional properties are proposed and utilized as functions of the web geometry in the calculations. To validate the formulation, the natural frequencies of free vibrations of the beam in different boundary conditions are obtained and compared with the finite element modeling in ABAQUS. The comparison confirms the high accuracy of the proposed formulation. A parametric study was carried out, addressing the effects of the sine wave components on the vibration response of the beam. The findings demonstrate the applicability of the proposed method for analyzing similar structures.

Keywords: Free vibration, I-section beam, sinusoidal corrugated web, stiffness matrix, mass matrix

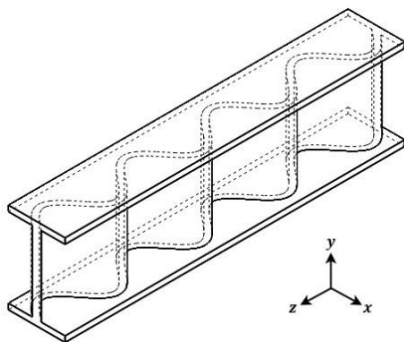
۱ مقدمه

به کارگیری جان موجدار در تیرهای I شکل به عنوان راهکاری برای بهبود عملکرد سازه ای، در سال های اخیر مورد توجه گسترده قرار گرفته است. صفحات موجدار به دلیل پایداری هندسی مناسب در جهات درون صفحه ای و برون صفحه ای، امکان کاهش وزن سازه و افزایش ظرفیت باربری را فراهم می کنند [۵-۱]. استفاده از جان موجدار در تیرهای I شکل منجر به افزایش پایداری و مقاومت در برابر کمانش نسبت به تیرهای با جان صاف می شود [۶].

در تیرهای I شکل با جان موجدار، به دلیل تغییرات هندسی مقطع در امتداد طول تیر، مرکز هندسی و مرکز برش ثابت نبوده و این موضوع منجر به جفت شدگی پاسخ های خمشی و پیچشی می شود. تحلیل ارتعاشات جفت شده در تیرهای جداره نازک با مقاطع نامتقارن پیش تر توسط پژوهشگران مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. کیم و همکاران [۷، ۸] ارتعاشات تیرهای جداره نازک همسانگرد نامتقارن را با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی تحلیل کردند. در ادامه، کیم و همکاران [۹] با استفاده از مساله مقدار ویژه

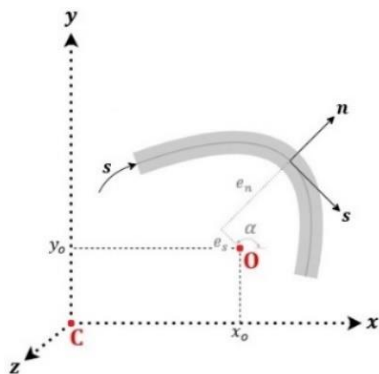
خطی و کیم و همکاران [۱۰] با استفاده از روش سری های توانی، ماتریس سفتی تیر جداره نازک همسانگرد نامتقارن را ارائه کردند. عسگریان و همکاران [۱۱] و سلطانی و همکاران [۱۲] بر پایه روش انرژی پتانسیل به بررسی کمانش و ارتعاشات جفت شده تیرهای جداره نازک پرداختند. همچنین پژوهش هایی به مطالعه رفتار ارتعاشی تیرهای جداره نازک کامپوزیتی و هدفمند پرداخته اند. جهانگیری و همکاران [۱۳] با در نظر گرفتن ناهمگنی، تخلخل و اعوجاج مقطع، معادلات حاکم بر کمانش جانبی تیرهای هدفمند I شکل و ناودانی را استخراج و با روش اجزای محدود حل نمودند. ابراهیمی و همکاران [۱۴] با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی، ارتعاشات تیرهای هدفمند باریک شونده را بررسی کردند. لی و کیم بر پایه نظریه تیر دارای قابلیت تغییر شکل برشی، ارتعاشات جفت شده تیر C شکل [۱۵] و I شکل [۱۶] کامپوزیتی را بررسی کردند که مدل آن ها توسط پژوهشگران دیگر توسعه یافت [۱۷-۲۱].

با وجود مزایای قابل توجه جان موجدار، پژوهش های انجام شده در زمینه تحلیل دینامیکی تیرهای I شکل با جان موجدار محدود است



شکل ۱- تیر I شکل با جان موج دار سینوسی

سیستم‌های مختصات در شکل ۲ نشان داده شده است. برای بررسی تغییر شکل‌های تیر از یک سیستم مختصات کارتزین مرجع (x, y, z) با مبدا مرکز هندسی مقطع و یک سیستم مختصات محلی (s, n, z) استفاده شده است. s مولفه مماس بر کانتور مقطع و n مولفه عمود بر آن است. z نیز محور طولی تیر را نشان می‌دهد و در هر دو سیستم مختصات مشترک است.



شکل ۲- محورهای مختصات برای تیر جداره نازک

زاویه‌ی بین دو سیستم مختصات با α نشان داده شده است. فاصله عمودی کانتور مقطع تا مرکز برش با e_s و e_n نشان داده شده است. مرکز هندسی با C و مرکز برش با O نشان داده شده است. همچنین فاصله مرکز برش نسبت به مرکز هندسی با x_o و y_o مشخص شده است. با توجه به شکل روابط زیر برقرار است [۱۶]:

$$dx = ds \cos \alpha \quad dy = ds \sin \alpha \quad (1)$$

$$e_s = (x - x_o) \cos \alpha + (y - y_o) \sin \alpha \quad (2)$$

$$e_n = (x - x_o) \sin \alpha - (y - y_o) \cos \alpha$$

شکل ۳ نیز مقطع یک تیر I شکل با جان موج دار سینوسی و بال‌های متقارن را در یک نقطه‌ی دلخواه از محور طولی تیر نشان می‌دهد. محل تلاقی مرکز بال‌ها و خط تقارن مقطع با R مشخص شده است. بدیهی است که در یک تیر I شکل دارای یک محور تقارن، مرکز هندسی و مرکز برش در راستای تقارن قرار می‌گیرند.

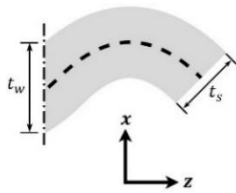
و اغلب بر پایه معادل‌سازی هندسی جان موج‌دار با یک جان صاف انجام شده‌اند. برای نمونه، مون و همکاران [۲۲] و نین و همکاران [۲۴، ۲۳] ماتریس‌های سفتی و هندسی کمانش پیچشی-جانبی، و وو و همکاران [۲۵] ماتریس‌های سفتی و جرمی را برای ارتعاشات آزاد تیرهای I شکل با جان دوزنقه‌ای، از طریق روش‌های میانگین‌گیری و معادل‌سازی استخراج کردند. این رویکرد، اگرچه تحلیل را ساده می‌کند، اما اثر واقعی هندسه جان بر ویژگی‌های مقطعی و رفتار دینامیکی تیر را به‌طور کامل منعکس نمی‌کند. افزون بر این، مطالعات موجود عمدتاً بر جان‌های دوزنقه‌ای متمرکز بوده‌اند، در حالی که جان سینوسی به دلیل توزیع یکنواخت‌تر تنش و عملکرد مناسب‌تر در برابر خستگی، کاربرد گسترده‌تری در صنایع مختلف نظیر پل‌ها و سازه‌های هوافضا دارد [۲۶، ۲۷].

بر این اساس، هدف پژوهش حاضر ارائه یک فرمول‌بندی اجزا محدود دقیق و بدون معادل‌سازی هندسی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر I شکل همسانگرد با جان موج‌دار سینوسی است. در این راستا، روابط صریح و جدیدی برای محاسبه ویژگی‌های هندسی مقطع به‌صورت تابعی از پارامترهای موج استخراج شده و مستقیماً در تشکیل ماتریس‌های سختی و جرمی به کار گرفته شده‌اند. مدل ارائه‌شده بر پایه یک المان خطی با هفت درجه آزادی در هر گره توسعه یافته و با استفاده از اصل همیلتون، معادله حرکت و بسامدهای طبیعی استخراج شده‌اند. به منظور اعتبار‌سنجی، نتایج با مدل اجزا محدود پوسته در نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شده و سپس طی یک مطالعه پارامتری، اثر مؤلفه‌های هندسی موج بر پاسخ دینامیکی تیر بررسی شده است.

۲ حرکت‌شناسی تیر

۲-۱ بیان هندسی

شکل ۱ یک تیر I شکل با جان سینوسی موج‌دار را نمایش می‌دهد. تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی دارای مقطعی غیر ثابت است. جان تیر، با توجه به هندسه موج‌دار، در نقاط مختلف محور طولی نسبت به بال‌ها موقعیت متغیری دارد. در نتیجه، ویژگی‌های مقطعی تیر، نظیر مرکز هندسی و مرکز برش در طول تیر ثابت نیستند.



شکل ۵- ضخامت مقطع جان

در ادامه با استفاده از تعاریفی که ارائه شد، روابطی برای محاسبه ویژگی‌های مقطعی تیر ارائه می‌شود.

۲-۱-۱ مرکز هندسی

مرکز هندسی، نقطه‌ای است که در آن گشتاورهای ناشی از نیروی محوری خارج از مرکز محاسبه می‌شوند. بر اساس این تعریف، می‌توان روابطی بین نیروی محوری و گشتاورهای خمشی ناشی از آن در نظر گرفت:

$$N_z x_c = M_y \quad N_z y_c = M_x \quad (5)$$

همچنین روابط زیر برای تیر همسانگرد برقرار است [۸]:

$$N_z = \int_A \sigma_z dA \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA \quad (6)$$

در رابطه بالا σ_z تنش عمود بر سطح مقطع تیر است. بنابراین مختصات مرکز هندسی مقطع به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad (7)$$

با در نظر گرفتن نقطه تلاقی مراکز بال‌های بالا و پایین و محور تقارن مقطع به‌عنوان مبدا و انجام محاسبات انتگرالی بالا، می‌توان مکان مرکز هندسی تیر I شکل با جان سینوسی و بال‌های متقارن را نسبت به مراکز بال‌های بالا و پایین به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$x_c = \frac{t_w(h_w - t_f)}{A} d \quad y_c = 0 \quad (8)$$

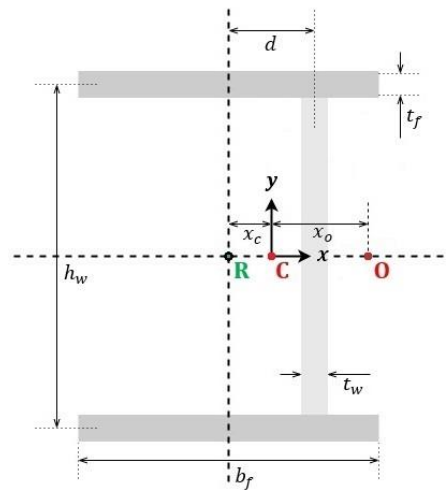
همانطور که مشاهده می‌شود، مقدار x_c تابعی از هندسه جان است و مرکز هندسی در راستای محور تقارن فاصله‌ای ندارد.

۲-۱-۲ تابع اعوجاج

در تیرهایی مانند تیرهای I شکل، که بین گشتاور لختی حول دو محور مقطع اختلاف زیادی وجود دارد، وارد شدن گشتاور پیچشی باعث خمش قسمت‌هایی از تیر و خارج شدن اجزای آن از صفحه اولیه خود می‌شود. به این پدیده اعوجاج گفته می‌شود. تابع اعوجاج به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

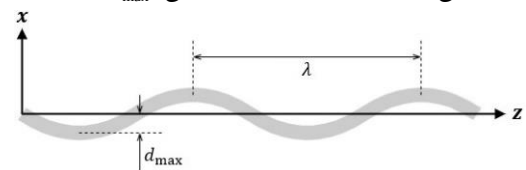
$$\omega = \int e_n ds \quad (9)$$

تابع اعوجاج بر روی مسیرهایی واقع بر صفحه میانی مقطع ارجاع داده می‌شود. صفحات میانی در وسط ضخامت مقطع در نظر گرفته می‌شوند. شکل ۶ مسیرهای اعوجاج برای یک مقطع I شکل را نشان می‌دهد که در آن، نقطه‌ی شروع i ، طی سه مسیر به نقطه پایانی f ختم می‌شود. مقطع تیر به صورت کم‌رنگ رسم شده است و خطوط پررنگ صفحات میانی را نشان می‌دهد.



شکل ۳- مقطع تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی و بال‌های متقارن ضخامت تیر با t_w و فاصله صفحه میانی بال بالایی تا بال پایینی با h_w نشان داده شده است. t_f و b_f به ترتیب ضخامت و عرض بال‌ها است. d فاصله بین مرکز جان تیر و مرکز بال‌های تیر در هر نقطه از طول تیر را نشان می‌دهد که در بازه صفر تا d_{max} متغیر است.

هندسه جان سینوسی در شکل ۴ نشان داده شده است. طول موج جان با λ نشان داده شده است که دامنه آن d_{max} است.



شکل ۴- هندسه جان تیر

همانطور که در شکل ۴ نشان داده شده، می‌توان دامنه تابع موج سینوسی را برابر با مقدار d در نظر گرفت و بر حسب مولفه‌های آن به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$d = d_{max} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \quad (3)$$

شکل ۵ برشی از جان تیر را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ضخامت جان نسبت به صفحات عمود بر تابع خودش مقداری ثابت است و با t_s نشان داده شده است؛ در حالی که ضخامت جان نسبت به صفحات عمود بر محور طولی تیر، تابعی از طول موج و دامنه جان است و مقدار آن در هر نقطه از محور طولی تیر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t_w = t_s \sqrt{1 + \left(d_{max} \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \right)^2} \quad (4)$$

به پیروی از ضخامت جان، سطح مقطع تیر نیز مقداری متغیر خواهد بود و در روابط با A نشان داده شده است.

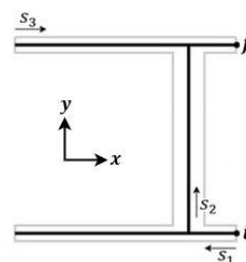
۳-۱-۲ مرکز برش

مرکز برش نقطه‌ای است که با اعمال نیروی برشی به آن، مقطع تنها دچار تغییر شکل برشی خواهد شد و پیچش ایجاد نخواهد شد. برای محاسبه موقعیت مرکز برش، از خاصیت صفر بودن گشتاور استاتیک قطاعی (S_{ω}) و محصولات قطاعی لختی ($S_{\omega x}$ و $S_{\omega y}$) حول مرکز برش استفاده می‌شود [۲۸]:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA \quad S_{\omega x} = \int_A \omega x dA \quad S_{\omega y} = \int_A \omega y dA \quad (11)$$

با جایگذاری تابع اعوجاج و حل سه معادله بالا حول مرکز برش، مختصات مرکز برش و مقدار اعوجاج مقطع در شروع مسیر به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} x_o &= \left(\frac{6b_f t_f}{6b_f t_f + h_w t_w} + 1 \right) d - x_c \\ y_o &= 0 \\ \omega_i &= -\frac{h_w}{4} \left(b_f - \frac{2h_w t_w}{6b_f t_f + h_w t_w} d \right) \end{aligned} \quad (12)$$

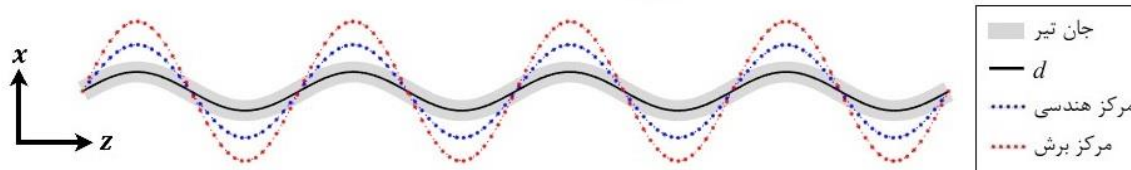


شکل ۶- مسیرهای اعوجاج بر روی مقطع

خیل مارتین و هرناندز مونتس [۲۸] پیشنهاد دادند مقداری به عنوان اعوجاج اولیه در شروع مسیر در نظر گرفته شود. در نتیجه می‌توان تابع اعوجاج برای تیر I شکل با بال‌های متقارن را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{cases} \omega^b = \omega_i + \frac{h_w}{2} s_1 \\ \omega^w = \omega_i + \frac{h_w}{2} \left(\frac{b_f}{2} - d \right) + ((x_o + x_c) - d) s_2 \\ \omega^t = \omega_i + \frac{h_w}{2} (s_3 + 2(x_o + x_c) - 4d) \end{cases} \quad (10)$$

بالانویس‌های b ، w و t به ترتیب نشان دهنده بال بالایی، جان و بال پایینی هستند. ω_i نیز مقدار اعوجاج مقطع در شروع مسیر است.



شکل ۷- موقعیت مرکز برش و مرکز هندسی نسبت به جان در تیر همسانگرد

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A x^2 dA = \frac{1}{6} b_f t_f (b_f^2 + 12x_c^2) \\ &\quad + \frac{1}{12} t_w (h_w - t_f) (t_w^2 + 12(d - x_c)^2) \end{aligned} \quad (14)$$

گشتاورهای استاتیک:

$$S_x = \int_A x dA = t_w (d - x_c) (h_w - t_f) - 2b_f t_f x_c \quad (15)$$

$$S_y = \int_A y dA = 0 \quad (16)$$

گشتاور لختی مختلط:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0 \quad (17)$$

گشتاور استاتیک قطاعی و محصولات قطاعی لختی:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA = 0 \quad (18)$$

$$S_{\omega x} = \int_A x \omega dA = 0 \quad (19)$$

$$S_{y\omega} = \int_A y \omega dA = x_o I_x \quad (20)$$

موقعیت مرکز هندسی و مرکز برش تیر I شکل با جان سینوسی و بال‌های متقارن، نسبت به جان، در شکل ۷ نمایش داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مکان مرکز هندسی و مرکز برش در امتداد طول تیر الگویی سینوسی ایجاد می‌کند که طول موجی یکسان و دامنه‌ای متفاوت نسبت به جان دارد.

۴-۱-۲ ویژگی‌های هندسی مقطع

ویژگی‌های مقطع یک تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی و بال‌های متقارن در طول تیر متغیر و تابعی از ضخامت و موقعیت جان هستند. این ویژگی‌ها حول مرکز هندسی مقطع به صورت زیر استخراج شدند:

گشتاور لختی حول محور قوی مقطع:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \frac{1}{6} b_f t_f (t_f^2 + 3h_w^2) + \frac{1}{12} t_w (h_w - t_f)^3 \quad (13)$$

گشتاور لختی حول محور ضعیف مقطع:

ثابت اعوجاج:

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \frac{1}{24} b_f t_f h_w^2 \left(b_f^2 + \frac{12 h_w t_w}{6 b_f t_f + h_w t_w} d^2 \right)$$

ثابت پیچش [۲۹]:

$$J = \int_A \left(\left((x - x_o) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left((y - y_o) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right) dA \quad (21)$$

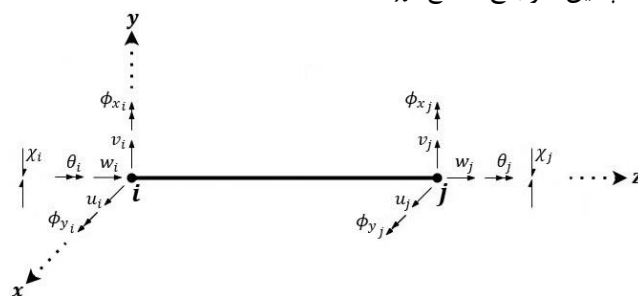
$$= \frac{1}{3} (2 b_f t_f^3 + (h_w - t_f) t_w^3)$$

لیندندر [۲۹] نشان داد موقعیت جان تاثیری بر ثابت پیچش تیرهای I شکل ندارد. همچنین روابط (۱۶) تا (۱۹) به علت وجود یک محور تقارن، حول مرکز هندسی برابر صفر خواهند بود. اکنون می‌توان با استفاده از روابط جدید به دست آمده برای محاسبه ویژگی‌های مقطعی تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی، به بررسی اجزا محدود تغییر شکل‌های تیر پرداخت.

۳ فرمول‌بندی اجزا محدود

۳-۱ المان و درجات آزادی

شکل ۸ المان و اجزای تغییر مکان را نشان می‌دهد. المان اجزا محدود به کاررفته یک المان خطی بر پایه تغییر مکان‌ها با هفت درجه آزادی برای هر گره است که برای تحلیل تغییر شکل‌های تیر، چه در حالت انحراف جانبی و چه در حالت پیچش، مناسب است. درجات آزادی، بر اساس تغییر مکان‌های مرکز برش، شامل سه جابه‌جایی خارج صفحه‌ای u ، v و w به ترتیب در راستای محوره‌های x ، y و z ، سه زاویه پیچش θ ، ϕ_x و ϕ_y به ترتیب حول محور طولی تیر، محور قوی مقطع و محور ضعیف مقطع، و همچنین اعوجاج مقطع χ است.



شکل ۸- المان و مولفه‌های تغییر مکان

با توجه به شکل، بردار تغییر مکان‌های گره‌ای Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^T = \{u_1 \phi_{y1} v_1 \phi_{x1} w_1 \theta_1 \chi_1 u_2 \phi_{y2} v_2 \phi_{x2} w_2 \theta_2 \chi_2\} \quad (22)$$

بالانویس «T» نشان‌دهنده ترانزاده ماتریس است. همچنین در این مدل اثر برش عرضی نادیده گرفته شده است. در نتیجه روابط زیر برقرار است [۱۶]:

$$\phi_y = -u' \quad \phi_x = -v' \quad \chi = -\theta' \quad (23)$$

بالانویس «'» نشان‌دهنده مشتق نسبت به محور طولی تیر است.

۳-۲ معادله حرکت

تغییر مکان‌های عرضی و جانبی هر نقطه دلخواه از کانتور مقطع $(\bar{u}, \bar{v})$ برای تیر جداره‌نازک همسانگرد به صورت زیر است [۳۰]:

$$\bar{u} = u - (y - y_o) \theta \quad (24)$$

$$\bar{v} = v + (x - x_o) \theta$$

این رابطه با فرض کوچک بودن کرنش‌ها و صلبیت مقطع نسبت به تغییر شکل‌های درون صفحه‌ای برقرار است.

برای بدست آوردن تغییر مکان‌های کانتور مقطع در راستای محور طولی تیر $(\bar{w})$ ، فرض می‌شود کرنش برشی در صفحه SZ بر روی کانتور مقطع به صفر برسد [۱۶]. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\bar{w} = w - (x)u' - (y)v' - (\omega)\theta' + (x_o'y - y_o'x)\theta \quad (25)$$

۳-۳ میدان تنش‌ها و کرنش‌ها

با در نظر گرفتن فرض کرنش-صفحه‌ای، کرنش‌های غیر صفر تیر همسانگرد از رابطه زیر حاصل می‌شوند [۱۱]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

بنابراین مولفه‌های کرنش تیر جداره‌نازک همسانگرد با مقطع متغیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_z = w' - (x)u'' - (y)v'' - (\omega)\theta''$$

$$+ 2(x_o'y - y_o'x)\theta' + (x_o''y - y_o''x)\theta$$

$$\gamma_{xz} = -\left((y - y_o) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \theta' \quad (27)$$

$$\gamma_{yz} = \left((x - x_o) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \theta'$$

اکنون می‌توان با استفاده از روابط استخراج شده برای محاسبه کرنش‌ها، انرژی پتانسیل کل برای تیر با مقطع متغیر را برآورد کرد.

۳-۴ انرژی پتانسیل کل

انرژی پتانسیل کل را می‌توان به شکل حاصل انرژی کرنشی U و انرژی جنبشی T بیان کرد [۱۰].

$$\Pi = U - T \quad (28)$$

انرژی کرنشی و انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۰]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (29)$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u}' \\ \dot{v}' \\ \dot{\theta}' \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A & 0 & e_{2,4}^T & 0 & 0 & 0 \\ & & A & 0 & -S_x & 0 & 0 \\ & & & e_{4,4}^T & 0 & e_{4,6}^T & e_{4,7}^T \\ & & & & I_y & 0 & 0 \\ & & & & & I_x & I_{y\omega} \\ & & & & & & I_\omega \end{bmatrix} \text{sym.}$$

درایه‌های کوتاه‌شده در ماتریس $\mathbf{e}^T$ به شکل زیر هستند:

$$e_{2,4}^T = S_x - x_o A \quad e_{4,4}^T = I_o + (x_o')^2 I_x + x_o'^2 A - 2x_o S_x$$

$$e_{4,6}^T = -x_o' I_x \quad e_{4,7}^T = -x_o x_o' I_x$$

I_o گشتاور لختی قطبی نام دارد و به صورت مجموع گشتاورهای لختی حول محور قوی و ضعیف مقطع تعریف می‌شود.

همانطور که نشان داده شد، انرژی کرنشی و انرژی جنبشی، هر یک به شکل حاصل‌ضربی از یک بردار درجات آزادی در یک ماتریس ویژگی‌های مقطعی مرتبط با این دو انرژی محاسبه شدند؛ اما برای محاسبه انرژی پتانسیل کل، نیاز است تا روابط انرژی کرنشی و جنبشی در یک قالب یکسان بیان شود. این امر به کمک توابع شکل امکان‌پذیر است.

۳-۵ توابع شکل

تغییرمکان‌های عرضی و پیچشی با استفاده از توابع شکل هرمیتی مکعبی N^H درون‌یابی می‌شوند. علاوه بر این، توابع شکل لاگرانژ دو نقطه‌ای N^L برای درون‌یابی تغییرمکان محوری دقت مناسبی ارائه می‌دهند. این توابع به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$N^H = \begin{Bmatrix} 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ -l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \\ -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ -l(\xi^3 - \xi^2) \end{Bmatrix} \quad N^L = \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (36)$$

$\xi = \frac{z}{l}$ و l بیانگر طول المان است. درجات آزادی را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$u = N_1^H u_1 + N_2^H \phi_{y_1} + N_3^H u_2 + N_4^H \phi_{y_2}$$

$$v = N_1^H v_1 + N_2^H \phi_{x_1} + N_3^H v_2 + N_4^H \phi_{x_2} \quad (37)$$

$$\theta = N_1^H \theta_1 + N_2^H \chi_1 + N_3^H \theta_2 + N_4^H \chi_2$$

$$w = N_1^L w_1 + N_2^L w_2$$

اکنون می‌توان بردارهای درجات آزادی مرتبط با انرژی کرنشی و جنبشی را از طریق ماتریس‌های انتقال، که از توابع شکل تشکیل شده‌اند، به بردار تغییرمکان‌های گره‌ای تبدیل کرد:

$$\mathbf{b}_{6 \times 1}^U = \mathbf{t}_{6 \times 14}^U \mathbf{A}_{14 \times 1} \quad (38)$$

$$\mathbf{b}_{7 \times 1}^T = \mathbf{t}_{7 \times 14}^T \mathbf{A}_{14 \times 1} \quad (39)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{D}}_i dV \quad (30)$$

در روابط بالا، σ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب تانسور تنش و کرنش، ρ چگالی و $\mathbf{D}_i$ بردار تغییرمکان‌ها است. V بیانگر حجم و δ نماد تغییرات است. همچنین نماد نقطه بیانگر مشتق زمانی است. با گسترش معادله (۲۹) داریم:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dV \quad (31)$$

که با جایگزین کردن تنش‌ها با کرنش‌های متناظر، معادله بالا به شکل زیر گسترش می‌یابد:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_z E \varepsilon_z + \gamma_{zx} G \gamma_{zx} + \gamma_{yz} G \gamma_{yz}) dV \quad (32)$$

با جایگزین کردن مقادیر کرنش‌ها در معادله بالا، انرژی کرنشی تیر همسانگرد به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_l \mathbf{b}^{U^T} \mathbf{e}^U \mathbf{b}^U dz \quad (33)$$

در رابطه بالا $\mathbf{b}^U$ یک بردار ۶ در ۱ از درجات آزادی مرتبط با انرژی کرنشی و $\mathbf{e}^U$ یک ماتریس ۶ در ۶ است که معرف ویژگی‌های هندسی و مواد سازنده مقطع تیر مرتبط با انرژی کرنشی تیر همسانگرد است. این دو ماتریس به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{b}^U = \begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \\ w' \\ \theta' \\ \theta'' \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e}^U = \begin{bmatrix} EI_y & 0 & -ES_x & 0 & 0 & 0 \\ & EI_x & 0 & e_{2,4}^U & e_{2,5}^U & e_{2,6}^U \\ & & EA & 0 & 0 & 0 \\ & & & e_{4,4}^U & e_{4,5}^U & e_{4,6}^U \\ & & & & e_{5,5}^U & e_{5,6}^U \\ & & & & & EI_\omega \end{bmatrix} \text{sym.}$$

درایه‌های کوتاه‌شده در ماتریس $\mathbf{e}^U$ به شکل زیر هستند:

$$e_{2,4}^U = -x_o'' e_{2,2}^U \quad e_{2,5}^U = -2x_o' e_{2,2}^U \quad e_{2,6}^U = x_o e_{2,2}^U$$

$$e_{4,4}^U = (x_o'')^2 e_{2,2}^U \quad e_{4,5}^U = 2x_o' x_o'' e_{2,2}^U \quad e_{4,6}^U = -x_o x_o'' e_{2,2}^U$$

$$e_{5,5}^U = GJ + (2x_o')^2 e_{2,2}^U \quad e_{5,6}^U = -2x_o x_o' e_{2,2}^U$$

همچنین با گسترش معادله (۳۰) داریم:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (34)$$

که با جایگذاری تغییرمکان‌ها، انرژی جنبشی به صورت زیر گسترش می‌یابد:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_l \mathbf{b}^{T^T} \mathbf{e}^T \mathbf{b}^T dz \quad (35)$$

در رابطه بالا $\mathbf{b}^T$ بردار درجات آزادی مرتبط با انرژی جنبشی و $\mathbf{e}^T$ ماتریس ویژگی‌های مقطع مرتبط با انرژی جنبشی تیر همسانگرد است. این ماتریس‌ها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$\mathbf{t}^u$ و $\mathbf{t}^T$ به ترتیب ماتریس انتقال انرژی کرنشی و ماتریس انتقال انرژی جنبشی هستند و به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{t}^{u^T} = \begin{bmatrix} N_1^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_2^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{L'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1^H & N_1^{H'} & N_1^{H''} \\ 0 & 0 & 0 & N_2^H & N_2^{H'} & N_2^{H''} \\ N_3^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_4^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_4^{H''} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2^{L'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3^H & N_3^{H'} & N_3^{H''} \\ 0 & 0 & 0 & N_4^H & N_4^{H'} & N_4^{H''} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}^{T^T} = \begin{bmatrix} N_1^H & 0 & 0 & 0 & N_1^{H'} & 0 & 0 \\ N_2^H & 0 & 0 & 0 & N_2^{H'} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^H & 0 & 0 & 0 & N_1^{H'} & 0 \\ 0 & N_2^H & 0 & 0 & 0 & N_2^{H'} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1^H & 0 & 0 & N_1^{H'} \\ 0 & 0 & 0 & N_2^H & 0 & 0 & N_2^{H'} \\ N_3^H & 0 & 0 & 0 & N_3^{H'} & 0 & 0 \\ N_4^H & 0 & 0 & 0 & N_4^{H'} & 0 & 0 \\ 0 & N_3^H & 0 & 0 & 0 & N_3^{H'} & 0 \\ 0 & N_4^H & 0 & 0 & 0 & N_4^{H'} & 0 \\ 0 & 0 & N_2^L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_3^H & 0 & 0 & N_3^{H'} \\ 0 & 0 & 0 & N_4^H & 0 & 0 & N_4^{H'} \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توان با استفاده از ماتریس‌های انتقال، انرژی کرنشی و انرژی جنبشی را بر حسب تغییر مکان‌های گره‌ای بازنویسی و ماتریس‌های سفتی و جرمی المان تیر را با استفاده از روش ماتریس جابجایی استخراج کرد. بسامدهای طبیعی ارتعاشات تیر نیز با استفاده از اصل همپلتون محاسبه می‌شوند.

۳-۶ اصل همپلتون

با جایگذاری رابطه (۳۸) در رابطه (۳۳)، انرژی کرنشی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \Delta^T \left(\int_I \mathbf{t}^{u^T} \mathbf{e}^u \mathbf{t}^u dz \right) \Delta \quad (40)$$

و با جایگذاری رابطه (۳۹) در رابطه (۳۵) و انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء، انرژی جنبشی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \Delta^T \left(\rho \int_I \mathbf{t}^{T^T} \mathbf{e}^T \mathbf{t}^T dz \right) \Delta \quad (41)$$

ماتریس‌های سفتی و جرمی المان را می‌توان با استفاده از روش ماتریس جابجایی از روابط بدست آمده برای انرژی کرنشی و جنبشی به شکل زیر استخراج کرد:

$$\mathbf{K}_e = \int_I \mathbf{t}^{u^T} \mathbf{e}^u \mathbf{t}^u dz \quad (42)$$

$$\mathbf{M}_e = \rho \int_I \mathbf{t}^{T^T} \mathbf{e}^T \mathbf{t}^T dz \quad (43)$$

به منظور محاسبه بسامدهای ارتعاشی از اصل همپلتون استفاده شده است. طبق اصل همپلتون، تغییرات انرژی پتانسیل کل برابر صفر خواهد بود:

$$\delta \Pi = \delta (\mathcal{U} - \mathcal{T}) = 0 \quad (44)$$

با جایگذاری روابط (۴۰) تا (۴۳) در رابطه (۴۴)، معادله ارتعاشات آزاد تیر به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\delta \Delta^T \mathbf{K} \Delta - \delta \Delta^T \mathbf{M} \ddot{\Delta} = 0 \quad (45)$$

$\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ به ترتیب ماتریس سفتی و جرمی مجتمع هستند. معادله بالا را می‌توان به شکل یک مساله مقدار ویژه حل کرد:

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0 \quad (46)$$

که در آن Ω مقدار ویژه بسامدها و $\mathbf{X}$ بردارهای ویژه است.

۴ اعتبارسنجی

از آنجایی که تاکنون پژوهش معتبری به شکل عددی به تحلیل ارتعاشات تیر I شکل با جان موج‌دار نپرداخته است، اعتبارسنجی این پژوهش تنها از طریق مقایسه با مدل‌سازی اجزا محدود انجام می‌شود. به این منظور، ۵ بسامدهای طبیعی اول ارتعاشات آزاد یک تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی در سه شرایط مرزی یک‌سرگیردار، ساده و ساده-گیردار در نرم‌افزار آباکوس شبیه‌سازی و با نتایج حاصل از حل حاضر مقایسه شد. نمونه معرفی شده در این بخش به عنوان نمونه مرجع در تحلیل‌های رفتاری و مطالعه پارامتری بخش بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد و مشخصات آن در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- مشخصات هندسی و مکانیکی نمونه مرجع

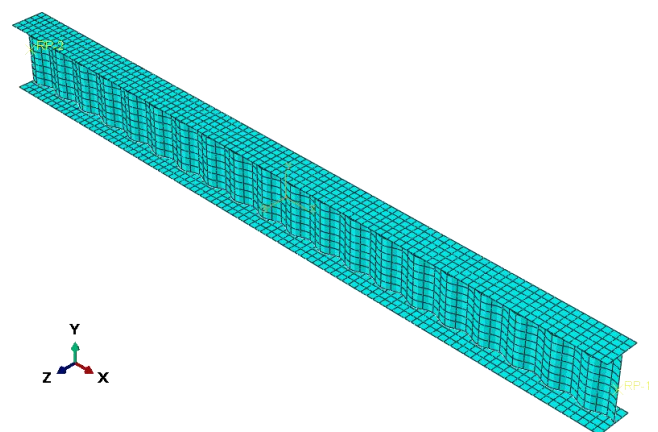
ویژگی	مقدار	یکا
طول تیر	۱۰۰۰	میلی‌متر
ارتفاع جان	۹۲	میلی‌متر
ضخامت جان	۶	میلی‌متر
عرض بال	۵۰	میلی‌متر
ضخامت بال	۴	میلی‌متر
مولفه‌های موج	طول موج جان	۵۰ میلی‌متر

جان	دامنه جان	۴	میلی متر
مدول یانگ	۲۱۰	گیگاپاسکال	
چگالی	۷۸۵۰	کیلوگرم بر متر مکعب	
ضریب پواسون	۰/۳	-	

به منظور انجام مقایسه عددی، مدل اجزا محدود مطابق توضیحات زیر در نرم افزار ABAQUS ایجاد گردید. مدل شامل دو Part مجزا برای جان و بال ها به صورت پوسته سه بعدی تغییر شکل پذیر (3D Deformable Shell) بود که پس از مونتاژ، به کمک قید Tie به یکدیگر متصل شدند. در این اتصال، پیوستگی کامل بین اجزا فرض شده و هیچ گونه لغزش یا جدایش در محل اتصال در نظر گرفته نشد.

به منظور اعمال شرایط مرزی به صورت یکنواخت و جلوگیری از تمرکز تنش موضعی، از قید Coupling از نوع Continuum Distributing استفاده شد. بدین ترتیب، تمامی گره های سطح مقطع انتهایی به یک نقطه مرجع واقع در مرکز سطح مقطع کوپل گردیدند و شرایط مرزی بر روی این نقطه اعمال شد. تحلیل ارتعاشات آزاد با استفاده از گام Frequency در حالت Linear perturbation و استخراج مقادیر ویژه به روش Lanczos انجام گرفت. اثرات غیرخطی هندسی در تحلیل لحاظ نشد. (NLGEOM=OFF)

شبکه بندی با استفاده از المان های پوسته مرتبه دوم S8R و به صورت Quad-dominated با تکنیک Structured انجام شد. در مدل نهایی، تعداد ۴۳۲۰ المان برای جان و ۲۰۰۰ المان برای هر بال در نظر گرفته شد. به منظور اطمینان از استقلال نتایج نسبت به اندازه مش، آزمون حساسیت به شبکه انجام شد و اندازه مش به گونه ای انتخاب گردید که تغییر در بسامد طبیعی اول کمتر از ۱ درصد باشد. شکل ۹ شبکه بندی مدل اجزا محدود را نشان می دهد. به منظور وضوح بیشتر تصویر، این شکل با اندازه المان درشت تر نمایش داده شده است و بیانگر تعداد واقعی المان های به کار رفته در تحلیل نیست.



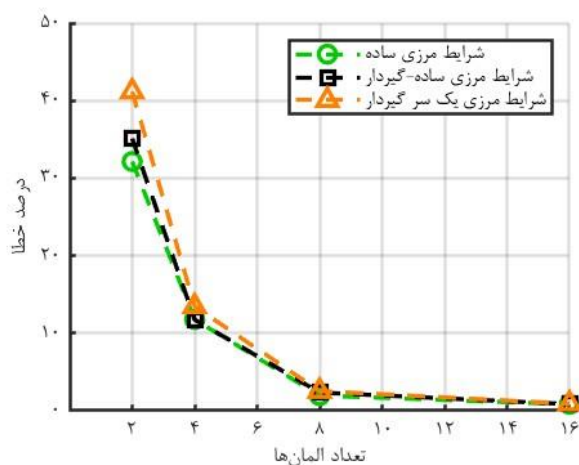
شکل ۹- شبکه بندی مدل اجزا محدود

نتایج حاصل از مدل اجزا محدود و حل تحلیلی حاضر در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲- بسامدهای ارتعاشات آزاد نمونه اعتبارسنجی

شرایط مرزی	مود	بسامد طبیعی (Hz)		اختلاف (%)
		حل حاضر	آباکوس	
یک سر گیردار	اول	۲۶/۶۸	۲۶/۸۶	۰/۶۷
	دوم	۸۳/۹۰	۸۴/۲۴	۰/۴۰
	سوم	۹۲/۹۰	۹۲/۱۴	۰/۸۲
	چهارم	۱۶۵/۱۴	۱۶۶/۶۲	۰/۸۹
	پنجم	۳۰۷/۷۵	۳۰۵/۱۷	۰/۸۵
ساده-گیردار	اول	۱۱۶/۰۵	۱۱۶/۷۳	۰/۵۸
	دوم	۱۹۷/۰۸	۱۹۹/۹۸	۱/۴۵
	سوم	۳۶۷/۴۸	۳۶۴/۹۷	۰/۶۹
	چهارم	۳۶۸/۶۶	۳۷۰/۲۸	۰/۴۴
	پنجم	۵۳۳/۳۰	۵۳۶/۸۶	۰/۶۶
ساده	اول	۷۵/۳۳	۷۵/۰۳	۰/۴۰
	دوم	۱۵۷/۳۴	۱۵۷/۹۵	۰/۳۹
	سوم	۲۴۶/۸۱	۲۴۷/۲۱	۰/۱۶
	چهارم	۲۹۴/۰۳	۲۹۴/۶۲	۰/۲۰
	پنجم	۴۴۹/۰۹	۴۵۱/۰۹	۰/۴۴

همان گونه که مشاهده می شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج دو روش وجود دارد و اختلاف نتایج در تمامی شرایط مرزی ناچیز است. شکل ۱۰ روند همگرایی حل تحلیلی و مدل اجزا محدود را نشان می دهد.



شکل ۱۰- همگرایی حل المان محدود

۵ نتایج عددی

به منظور ارائه تحلیلی منظم و هدفمند از نتایج به دست آمده و همچنین به دلیل محدود بودن مطالعات تحلیلی موجود در زمینه رفتار ارتعاشی تیرهای I شکل با جان موج دار سینوسی، این بخش در دو قسمت تنظیم شده است. در گام نخست، ویژگی های پاسخ سازه های تیر I شکل با جان موج دار سینوسی مورد بررسی قرار می گیرد تا رفتار کلی دینامیکی و استاتیکی این نوع تیر بررسی

شود. در گام دوم مطالعاتی پارامتری به منظور بررسی اثر مولفه‌های هندسی موج سینوسی بر پاسخ دینامیکی و استاتیکی سازه انجام می‌شود.

۵-۱ پاسخ سازه‌ای تیر

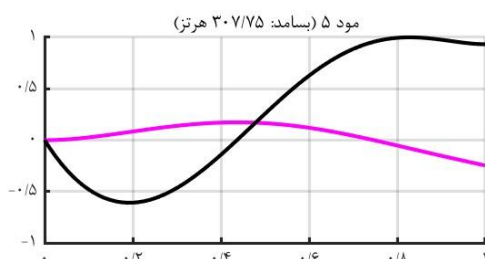
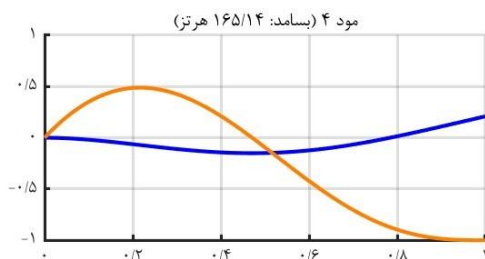
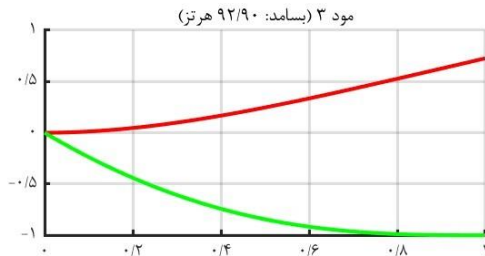
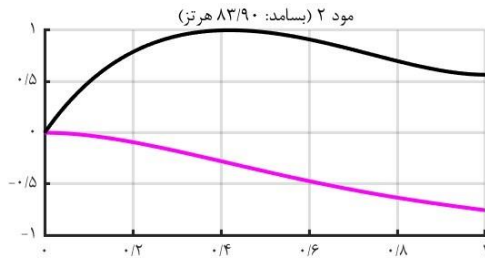
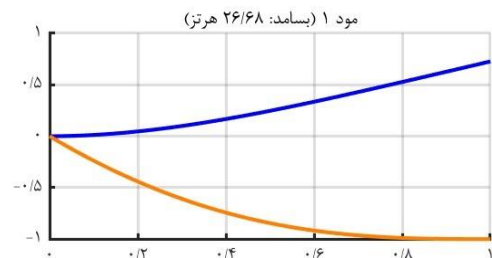
به منظور بررسی رفتار ذاتی تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی، در این بخش پاسخ دینامیکی و استاتیکی یک نمونه تیر مورد تحلیل قرار می‌گیرد. تمرکز این بخش بر شناخت ماهیت مودهای ارتعاشی، نحوه جفت‌شدگی پاسخ خمشی و پیچشی، و همچنین بررسی توزیع سفتی استاتیکی در طول تیر است. نمونه مورد بررسی در این بخش، همان نمونه مرجع معرفی‌شده در بخش ۴ است که مشخصات هندسی آن در جدول ۱ ارائه شده است.

۵-۱-۱ شکل مودهای ارتعاشی

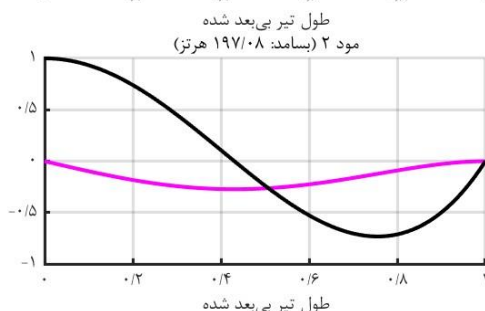
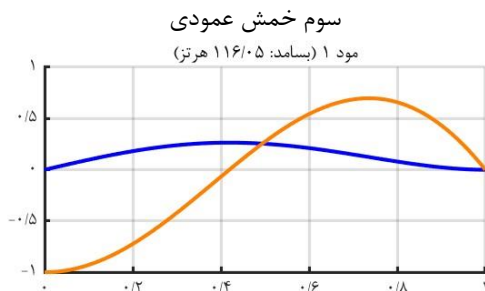
مود اول تا پنجم نمونه مرجع در شرایط مرزی یک‌سرگیردار، ساده-گیردار و ساده به ترتیب در شکل ۱۱، شکل ۱۲ و شکل ۱۳ رسم شد.

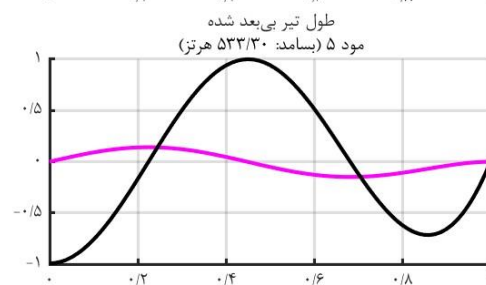
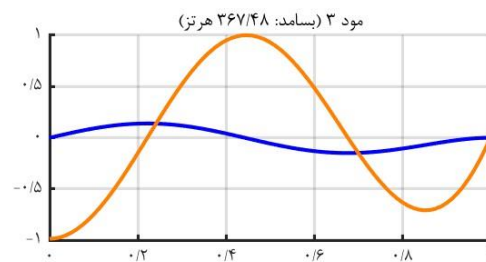
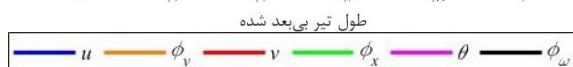
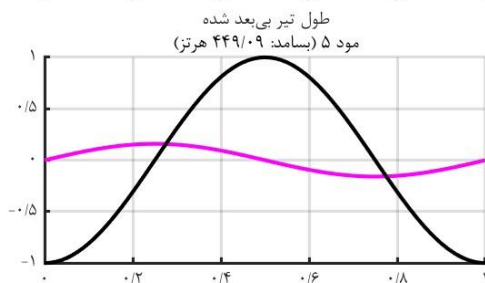
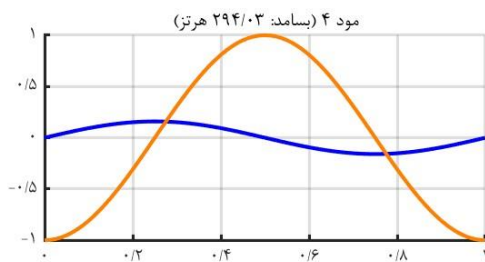
نتایج تحلیل مودال نشان می‌دهد که در هر سه شرایط مرزی، مود اول بیانگر خمش جانبی است. در شرایط مرزی یک‌سرگیردار، سفتی خمشی حول محور ضعیف نقش تعیین‌کننده‌ای در پاسخ مود اول دارد، در حالی که در شرایط ساده و ساده-گیردار، تکیه‌گاه‌های انتهایی موجب تغییر در توزیع تغییر مکان‌ها و سهم مودهای خمشی در پاسخ کلی سازه می‌شود.

مودهای دوم و پنجم در تمامی شرایط مرزی دارای ماهیت پیچشی هستند. ظهور مود پیچشی در مرتبه دوم نشان‌دهنده آن است که سفتی پیچشی موثر تیر در مقایسه با سفتی خمشی حول محور ضعیف، در محدوده‌ای قرار دارد که امکان رقابت دینامیکی بین مودهای خمشی و پیچشی را فراهم می‌کند. همچنین در مود پنجم، شکل مود بیانگر رفتار پیچشی مرتبه بالاتر با تعداد گره‌های بیشتر در طول تیر است که ناشی از توزیع غیر یکنواخت سفتی پیچشی موثر در امتداد طول سازه است. تمرکز نسبی دوران در نواحی با انحنای بیشتر جان سینوسی نشان می‌دهد که هندسه موج‌دار جان بر توزیع انرژی پیچشی در سازه تاثیر مستقیم دارد.



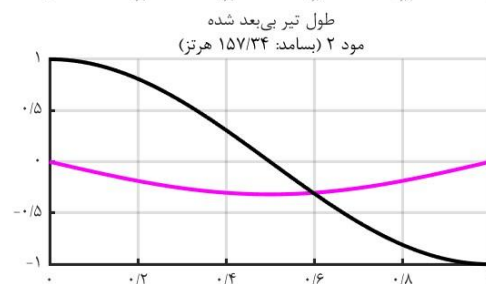
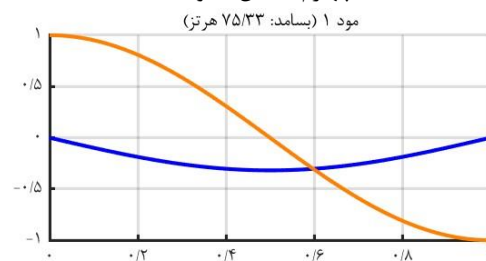
شکل ۱۱- مودهای ارتعاشی نمونه مرجع در شرایط مرزی یک‌سرگیردار؛ مود اول و چهارم خمش جانبی، مود دوم و پنجم مود چرخشی و مود سوم خمش عمودی





شکل ۱۲- مودهای ارتعاشی نمونه مرجع در شرایط مرزی ساده-گیردار؛ مود اول و سوم خمشی جانبی، مود دوم و پنجم مود چرخشی و مود

چهارم خمشی عمودی



طول تیر بی بعد شده

شکل ۱۳- مودهای ارتعاشی نمونه مرجع در شرایط مرزی ساده؛ مود اول و چهارم خمشی جانبی، مود دوم و پنجم مود چرخشی و مود سوم خمشی عمودی

بررسی شکل مودها نشان می‌دهد که در شرایط مرزی یک‌سرگیردار و ساده، مود سوم ماهیت خمشی عمودی و مود چهارم ماهیت خمشی جانبی دارد، در حالی که در شرایط مرزی ساده-گیردار، ترتیب این دو مود جابه‌جا شده است. این جابه‌جایی ناشی از اثر هم‌زمان سفتی خمشی مقطع، نزدیکی مقادیر بسامد این دو مود و نحوه اعمال تکیه‌گاه‌ها بر توزیع انرژی کرنشی سیستم است.

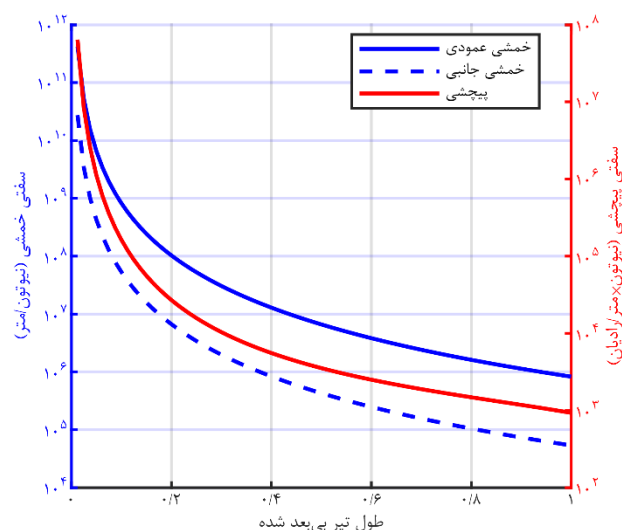
۲-۱-۵ سفتی استاتیکی

سفتی استاتیکی معیاری برای مقاومت سازه در برابر تغییرشکل تحت بارگذاری استاتیکی است و بسته به نوع بارگذاری می‌توان آن را به سه مولفه سفتی خمشی عمودی، سفتی خمشی جانبی و سفتی پیچشی تقسیم کرد. به منظور ارزیابی کمی این ویژگی، دو شاخص "سفتی موثر" و "توزیع سفتی" معرفی می‌شود.

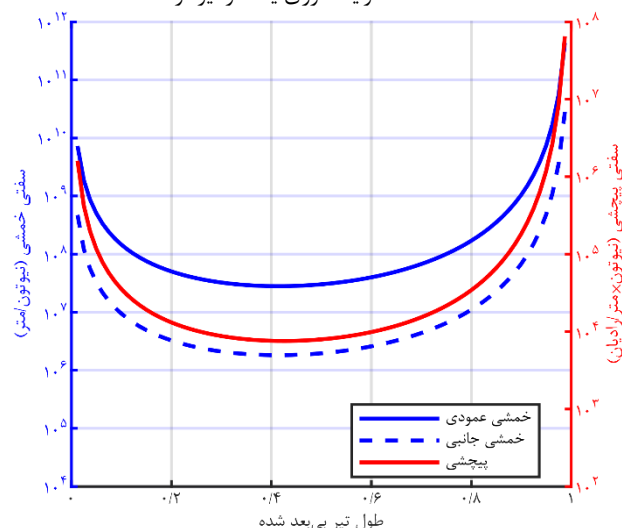
سفتی موثر به صورت نسبت بار واحد اعمال شده به بیشینه تغییرمکان ایجادشده در طول تیر تعریف می‌شود. توزیع سفتی نیز از طریق اعمال بار واحد در هر گره و استخراج پاسخ همان درجه آزادی در طول تیر محاسبه می‌شود. مقادیر سفتی موثر نمونه مرجع برای شرایط مرزی مختلف در جدول ۳ ارائه شده است. نمودار توزیع سفتی نیز در شکل ۱۴ نمایش داده شده است.

جدول ۳- سفتی موثر نمونه مرجع

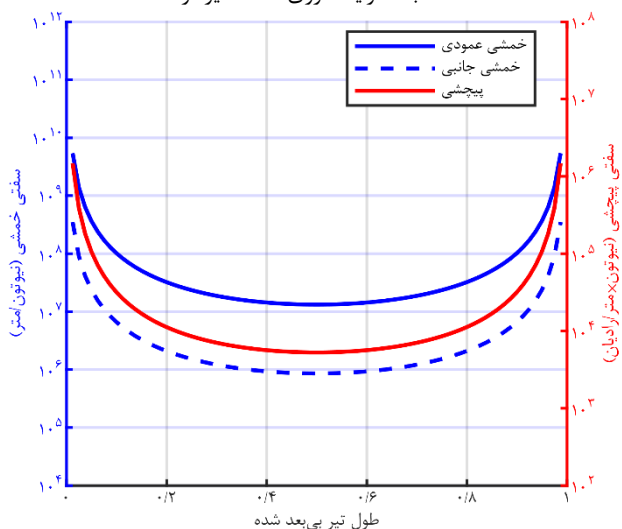
شرایط مرزی	سفتی خمشی عمودی (KN/mm)	سفتی خمشی جانبی (KN/mm)	سفتی پیچشی (KN.m/rad)
یک‌سرگیردار	۰/۸۲۶	۰/۰۵۳	۰/۹۲۹
ساده-گیردار	۲۸/۰۷	۱/۸۱۹	۷/۵۵۸



الف - شرایط مرزی یک سرگیردار



ب - شرایط مرزی ساده-گیردار



پ - شرایط مرزی ساده

شکل ۱۴ - توزیع سفتی استاتیکی در طول تیر در شرایط مرزی یک سرگیردار (الف)، ساده-گیردار (ب) و ساده (پ)

لازم به ذکر است که به دلیل تفاوت ماهیت بارگذاری، مقادیر سفتی خمشی و پیچشی دارای واحدهای متفاوت بوده و مقایسه مستقیم عددی بین آن‌ها مدنظر نبوده است.

مطابق جدول ۳، مقدار سفتی موثر به طور معناداری تابع شرایط مرزی است؛ بیشترین مقدار مربوط به حالت ساده-گیردار و کمترین مقدار مربوط به تیر یک سرگیردار است که با رفتار کلاسیک تیرها سازگار است. از نظر مقایسه بین مولفه‌ها، سفتی خمشی عمودی بیشترین و سفتی پیچشی کمترین مقدار را دارد که بیانگر مقاومت کمتر مقطع I شکل در برابر پیچش نسبت به خمش است.

همان‌طور که شکل ۱۴ مشخص شده است، در شرایط مرزی یک سرگیردار، سفتی از ناحیه گیردار به سمت انتهای آزاد کاهش می‌یابد، در حالی که در شرایط مرزی ساده توزیع سفتی متقارن بوده و کمینه آن در میانه دهانه رخ می‌دهد. در حالت ساده-گیردار، توزیع نامتقارن بوده و بیشینه سفتی در نزدیکی تکیه‌گاه گیردار مشاهده می‌شود.

همخوانی الگوی توزیع سفتی با رفتار مودال بخش قبل نشان می‌دهد که در هر ۳ شرایط مرزی، مولفه خمشی با سفتی کمتر، در مراتب پایین‌تر مودال ظاهر می‌شود. بدین ترتیب، تحلیل استاتیکی مبنای فیزیکی روشنی برای تفسیر پاسخ دینامیکی تیر فراهم می‌آورد.

۲-۵ مطالعه پارامتری

به منظور بررسی اثر مولفه‌های موج سینوسی بر رفتار ارتعاشی تیر، از خاصیت هندسی موج سینوسی بهره گرفته شد که بر اساس آن طول حقیقی موج سینوسی تنها تابعی از نسبت دامنه به طول موج است، بنابراین موج‌هایی که دامنه و طول موج آن‌ها هر دو ضریب یکسانی گرفته باشند، طول حقیقی و در نتیجه حجم و وزن یکسانی خواهند داشت. این رویکرد امکان بررسی مستقیم اثر تغییرات هندسی جان بر پاسخ دینامیکی و استاتیکی تیر را بدون تأثیرپذیری از تغییر جرم فراهم می‌سازد. بر همین اساس، هشت نمونه جدید با دامنه و طول موج‌هایی از ۱،۵ تا ۵ برابر نمونه مرجع انتخاب شد. این نمونه‌ها از نظر هندسه مقطع و خواص مکانیکی با نمونه مرجع یکسان بوده و تنها در مولفه‌های موج جان تفاوت دارند. مشخصات هندسی موج سینوسی نمونه‌ها در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴ - مشخصات هندسی موج سینوسی نمونه‌ها

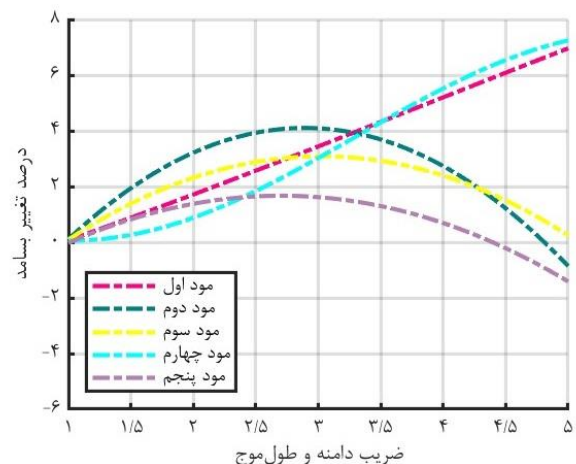
نمونه	دامنه (mm)	طول موج (mm)
مرجع	۴	۵۰
1.5X	۶	۷۵
2X	۸	۱۰۰

۱۲۵	۱۰	2.5X
۱۵۰	۱۲	3X
۱۷۵	۱۴	3.5X
۲۰۰	۱۶	4X
۲۲۵	۱۸	4.5X
۲۵۰	۲۰	5X

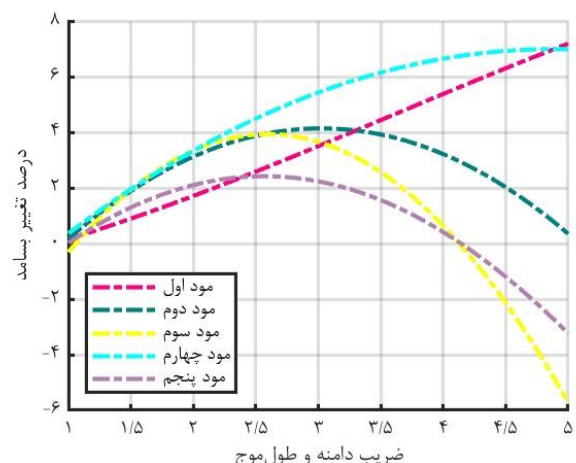
در ادامه، ابتدا تغییرات بسامدهای طبیعی بررسی می‌شود، سپس اثر پارامترهای موج بر سفتی استاتیکی موثر تحلیل می‌گردد و در نهایت، تغییرات ماهیت مودهای پیچشی و میزان اعوجاج مقطع در اثر تغییر هندسه جان مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۱-۲-۵ مقایسه بسامدهای طبیعی

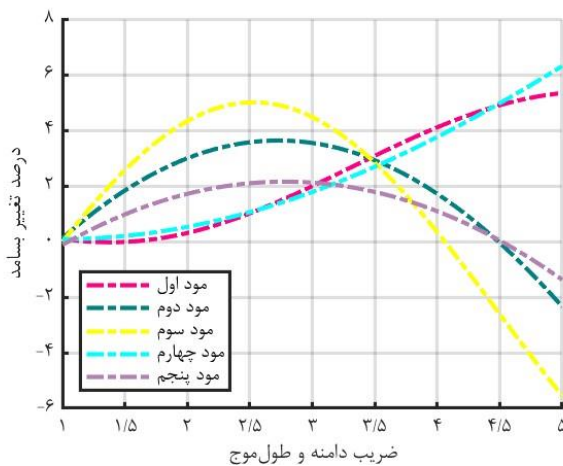
به منظور بررسی کمی اثر تغییر همزمان دامنه و طول موج جان سینوسی بر پاسخ دینامیکی تیر، درصد تغییر پنج مود اول نسبت به نمونه مرجع در شکل ۱۵ نمایش داده شده است. همچنین، مقادیر عددی بیشینه تغییرات هر مود در جدول ۵ ارائه شده است.



الف- شرایط مرزی یک سرگیردار



ب- شرایط مرزی ساده-گیردار



پ- شرایط مرزی ساده

شکل ۱۵- درصد تغییرات بسامدهای ارتعاشی با تغییر در دامنه و طول موج در شرایط مرزی یک سرگیردار (الف)، ساده-گیردار (ب) و ساده (پ) جدول ۵- بیشینه درصد تغییر بسامد مودها نسبت به نمونه مرجع

شرایط مرزی	مود	بیشینه تغییر (%)	ضریب متناظر	نوع مود
یک سرگیردار	اول	۶/۹۰	5X	خمشی جانبی
	دوم	۳/۷۳	3X	پیچشی
	سوم	۲/۷۶	3X	خمشی عمودی
	چهارم	۷/۲۰	5X	خمشی جانبی
	پنجم	۱/۴۹	3X	پیچشی
ساده-گیردار	اول	۷/۰۴	5X	خمشی جانبی
	دوم	۳/۷۳	3X	پیچشی
	سوم	-۶/۱۵	5X	خمشی جانبی
	چهارم	۷/۲۰	5X	خمشی عمودی
	پنجم	-۳/۲۳	5X	پیچشی
ساده	اول	۵/۲۶	5X	خمشی جانبی
	دوم	۳/۳۱	3X	پیچشی
	سوم	-۵/۵۴	5X	خمشی عمودی
	چهارم	۶/۲۵	5X	خمشی جانبی
	پنجم	۱/۸۲	3X	پیچشی

مطابق شکل ۱۵ و جدول ۵، حساسیت مودهای مختلف نسبت به تغییر پارامترهای موج یکنواخت نیست. در هر سه شرایط مرزی، بیشترین افزایش بسامد مربوط به مودهای اول و چهارم بوده است که ماهیت غالب خمشی جانبی دارند و پیک تغییر آنها در ضریب 5X رخ داده است. این موضوع نشان می‌دهد که افزایش همزمان دامنه و طول موج، در ضرایب بزرگتر تاثیر قابل توجهی بر سفتی خمشی موثر تیر دارد. در مقابل، مودهای دارای ماهیت پیچشی (مود دوم و پنجم) بیشینه تغییر خود را عمدتاً در ضریب 3X تجربه کرده‌اند که بیانگر حساسیت بیشتر سفتی پیچشی به تغییرات هندسی در ضرایب متوسط است. همچنین مشاهده می‌شود که در شرایط مرزی ساده-گیردار و ساده، مود سوم در ضریب 5X کاهش محسوسی در بسامد نشان می‌دهد (به ترتیب ۶/۱۵- و ۵/۵۴-

درصد). این رفتار نشان‌دهنده جابجایی نسبی سهم مودهای خمشی و پیچشی و تشدید رقابت دینامیکی میان آنها در ضرایب بزرگتر موج است.

در مجموع، نتایج این بخش به‌روشنی نشان می‌دهد که اثر پارامترهای موج نه تنها بر مقدار بسامدها بلکه بر شدت حساسیت مودهای مختلف نیز متفاوت بوده و بیشترین تغییرات در مودهایی رخ می‌دهد که سهم بیشتری از تغییرشکل‌های خمشی جانبی یا پیچشی را در خود دارند.

۲-۵ مقایسه سفتی استاتیک موثر

به منظور بررسی اثر پارامترهای موج بر سفتی موثر تیر، از رابطه بین بسامد طبیعی و سفتی استفاده شد. با توجه به ثابت بودن جرم در تمامی نمونه‌ها، نسبت سفتی موثر را می‌توان متناسب با مربع نسبت بسامد طبیعی در نظر گرفت.

$$f \propto \sqrt{K}$$

$$\frac{K}{K_{ref}} = \left(\frac{f}{f_{ref}} \right)^2$$

بر این اساس، نسبت سفتی خمشی جانبی از مود اول و نسبت سفتی پیچشی از مود دوم استخراج گردید. نتایج در جدول ۶ ارائه شده است.

جدول ۶- نسبت سفتی موثر خمشی و پیچشی به نمونه مرجع

شرایط مرزی	ضریب نمونه	نسبت سفتی خمشی به مرجع (K_s/K_{ref})	نسبت سفتی پیچشی به مرجع (K_p/K_{ref})
یک‌سرگیردار	2X	۱/۰۴۰	۱/۰۷۲
	3X	۱/۰۶۲	۱/۰۷۶
	4X	۱/۱۱۲	۱/۰۵۸
	5X	۱/۱۴۳	۰/۹۸۳
ساده-گیردار	2X	۱/۰۴۷	۱/۰۷۳
	3X	۱/۰۵۳	۱/۰۷۶
	4X	۱/۱۲۳	۱/۰۶۷
	5X	۱/۱۴۶	۱/۰۰۸
ساده	2X	۱/۰۱۳	۱/۰۶۷
	3X	۱/۰۳۲	۱/۰۶۷
	4X	۱/۰۹۰	۱/۰۳۵
	5X	۱/۱۰۸	۰/۹۵۴

به منظور جلوگیری از افزایش بیش از حد حجم جدول و تمرکز بر رفتار شاخص سازه، در جدول ۶ تنها ضرایب منتخب و دو مود اصلی بررسی شده‌اند؛ مود اول به عنوان نماینده رفتار خمشی جانبی و مود دوم به عنوان نماینده رفتار پیچشی. این دو مود به دلیل ماهیت غالب و نقش تعیین‌کننده در پاسخ دینامیکی تیر، برای ارزیابی تغییرات سفتی موثر کافی در نظر گرفته شدند.

مطابق جدول ۶، نسبت سفتی خمشی جانبی به سفتی خمشی جانبی نمونه مرجع در هر سه شرایط مرزی با افزایش ضریب دامنه و طول موج روندی افزایشی و تقریباً یکنواخت دارد و بیشینه آن در ضریب 5X مشاهده می‌شود (حدود ۱۴ درصد افزایش). این موضوع نشان می‌دهد افزایش همزمان دامنه و طول موج موجب تقویت سفتی خمشی موثر تیر می‌شود. در مقابل، سفتی پیچشی رفتار یکنواختی ندارد و بیشینه آن عمدتاً در ضریب 3X رخ می‌دهد، در حالی که در ضرایب بزرگ‌تر کاهش نسبی مشاهده می‌شود. برای نمونه، در شرایط ساده مقدار سفتی پیچشی در ضریب 5X کمتر از نمونه مرجع است. این نتیجه بیانگر وجود یک ضریب بهینه برای بیشینه‌سازی سفتی پیچشی و حساسیت بیشتر پیچش نسبت به تغییرات هندسی جان است.

۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک فرمول‌بندی اجزا محدود دقیق و بدون معادل‌سازی هندسی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر I شکل با جان موج‌دار سینوسی ارائه شد. استخراج روابط صریح ویژگی‌های مقطعی به صورت تابعی از هندسه موج امکان اعمال مستقیم اثر جان سینوسی در ماتریس‌های سفتی و جرمی را فراهم نمود. مقایسه نتایج با مدل اجزا محدود پوسه در نرم‌افزار آباکوس نشان داد که مدل پیشنهادی از دقت بالا و همگرایی مناسب برخوردار است و می‌تواند به عنوان ابزاری تحلیلی قابل اعتماد برای این دسته از سازه‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

مطالعه پارامتری نشان داد که تغییر همزمان دامنه و طول موج جان، در حالی که جرم سازه ثابت نگه داشته شده است، منجر به تغییرات قابل توجهی در بسامدهای طبیعی می‌شود. این نتیجه بیانگر آن است که هندسه جان به صورت مستقیم سفتی موثر سازه را کنترل می‌کند. مودهای با ماهیت خمشی جانبی افزایش یکنواختی را با افزایش ضریب موج تجربه کردند، در حالی که مودهای پیچشی رفتاری غیر یکنواخت داشته و دارای ضریب بهینه در محدوده ضرایب متوسط بودند. این رفتار نشان‌دهنده وجود محدوده طراحی بهینه برای بیشینه‌سازی سفتی پیچشی بدون افزایش وزن سازه است.

تحلیل سفتی مودال موثر نیز نشان داد که پارامترهای موج سینوسی امکان کنترل متفاوت سختی خمشی و پیچشی را فراهم می‌کنند؛ به گونه‌ای که افزایش ضرایب موج عمدتاً به تقویت رفتار خمشی منجر می‌شود، در حالی که رفتار پیچشی حساس‌تر و وابسته‌تر به توزیع هندسی جان است. در نتیجه، جان موج‌دار سینوسی نه تنها به عنوان یک راهکار تقویت سازه‌ای، بلکه به عنوان یک پارامتر طراحی موثر برای تنظیم هدفمند پاسخ ارتعاشی قابل

استفاده است. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که بدون افزایش جرم، تنها از طریق اصلاح هندسه جان می‌توان محدوده بسامدهای طبیعی و توزیع سختی موثر تیر را در بازه قابل توجهی کنترل نمود؛ موضوعی که در طراحی سازه‌های سبک‌وزن کاربرد مستقیم دارد.

۷ فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت مقطع
b_f	عرض بال
$\mathbf{b}^T$	بردار درجات آزادی مرتبط با انرژی جنبشی
$\mathbf{b}^u$	بردار درجات آزادی مرتبط با انرژی کرنشی
C	مرکز هندسی
d	فاصله بین مرکز جان تیر و مرکز بال‌های تیر در هر نقطه از طول تیر
$d_{\max}$	دامنه موج جان
$\mathbf{e}^T$	ماتریس ویژگی‌های مقطع تیر مرتبط با انرژی جنبشی
$\mathbf{e}^u$	ماتریس ویژگی‌های مقطع تیر مرتبط با انرژی کرنشی
E	مدول یانگ
G	مدول برشی
h_w	ارتفاع جان
I_o	گشتاور لختی قطبی
I_y و I_x	گشتاور لختی به ترتیب حول محور قوی و ضعیف مقطع
I_{xy}	محصول لختی
I_θ	ثابت اعوجاج
J	ثابت پیچش
K	ماتریس سفتی مجتمع
$\mathbf{K}_e$	ماتریس سفتی المان
l	طول المان
L	طول تیر
M	ماتریس جرمی مجتمع
$\mathbf{M}_e$	ماتریس جرمی المان
$\mathbf{N}^H$	تابع شکل مکعبی هرمیتی
$\mathbf{N}^L$	تابع شکل لاگرانژ دو نقطه‌ای
O	مرکز برش
R	محل تلاقی مرکز بال‌ها و خط تقارن مقطع
s_1 ، s_2 و s_3	مسیرهای کانتور مقطع
S_y و S_x	گشتاورهای استاتیک
$S_{y\omega}$ و $S_{x\omega}$	محصولات مقطعی لختی
t_f	ضخامت بال
t_s	ضخامت جان نسبت به صفحات عمود بر تابع خودش

علائم یونانی

t_w	ضخامت جان نسبت به صفحات عمود بر محور طولی تیر
$\mathbf{t}^u$	ماتریس انتقال انرژی کرنشی
$\mathbf{t}^T$	ماتریس انتقال انرژی جنبشی
T	انرژی جنبشی
u ، v و w	انتقال خارج صفحه‌ای به ترتیب در راستای محورها x ، y و z
U	انرژی کرنشی
V	حجم مقطع
y_c و x_c	موقعیت مرکز هندسی نسبت به نقطه R
y_c و x_c	موقعیت مرکز برش نسبت به مرکز هندسی
δ	بردار تغییر مکان‌های گره‌ای
λ	طول موج جان
ν	ضریب پواسون
Π	انرژی پتانسیل کل
ρ	چگالی
ϕ_x ، ϕ_y و θ	زوایای پیچش به ترتیب حول محورها x ، y و z
χ	اعوجاج مقطع
ω	تابع اعوجاج
ω_i	مقدار اعوجاج مقطع در شروع مسیر
Ω	بسامد ارتعاشی

بالانویس‌ها

b ، w و t	به ترتیب بال بالایی، جان و بال پایینی
T	ترانهاده ماتریس

- [١] M. Elgaaly, R. W. Hamilton, and A. Seshadri, "Shear strength of beams with corrugated webs," *Journal of Structural Engineering*, vol. 122, no. 4, pp. 390-398, 1996.
- [٢] M. Elgaaly, A. Seshadri, and R. W. Hamilton, "Bending strength of steel beams with corrugated webs," *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, no. 6, pp. 772-782, 1997.
- [٣] H. H. Abbas, R. Sause, and R. G. Driver, "Behavior of corrugated web I-girders under in-plane loads," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132, no. 8, pp. 806-814, 2006.
- [٤] R. G. Driver, H. H. Abbas, and R. Sause, "Shear behavior of corrugated web bridge girders," *Journal of Structural Engineering*, vol. 132, no. 2, pp. 195-203, 2006.
- [٥] H. H. Abbas, R. Sause, and R. G. Driver, "Analysis of flange transverse bending of corrugated web I-girders under in-plane loads," *Journal of Structural Engineering*, vol. 133, no. 3, pp. 347-355, 2007.
- [٦] Z. Tian, "Review of Research on Corrugated Web Steel Beams," *Journal of Engineering Mechanics and Machinery*, vol. 8, no. 4, pp. 11-14, 2023.
- [٧] M. Y. Kim, S. P. Chang, and S. B. Kim, "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams. I: Analytical approach," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 23, pp. 4097-4115, 1994.
- [٨] M. Y. Kim, S. P. Chang, and S. B. Kim, "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams. II: Numerical approach," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 23, pp. 4117-4140, 1994.
- [٩] N.-I. Kim and M.-Y. Kim, "Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects," *Thin-Walled Structures*, vol. 43, no. 5, pp. 701-734, 2005.
- [١٠] N.-I. Kim, C. C. Fu, and M.-Y. Kim, "Stiffness matrices for flexural-torsional/lateral buckling and vibration analysis of thin-walled beam," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 4-5, pp. 739-756, 2007.
- [١١] B. Asgarian, M. Soltani, and F. Mohri, "Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections," *Thin-Walled Structures*, vol. 62, pp. 96-108, 2013.
- [١٢] M. Soltani, B. Asgarian, and F. Mohri, "Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams," *Thin-Walled Structures*, vol. 82, pp. 245-261, 2014.
- [١٣] R. Jahangiri, R. Ghanbari, M. Naseri, A. Allahverdizadeh, and I. Shakeri, "Investigating the Effect of Structural Heterogeneity Model on the Buckling Capacity of Thin-Walled Porous Functionally Graded I-Beams and Channel Beams," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 37, no. 4, pp. 95-114, 2025.
- [١٤] F. Ebrahimi and S. Dashti, "Free vibration analysis of functionally graded rotating double tapered beam by using Euler-Bernoulli Beam Theory and differential transform method," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 27, no. 1, pp. 51-70, 2016.
- [١٥] J. Lee and S.-E. Kim, "Flexural-torsional coupled vibration of thin-walled composite beams with channel sections," *Computers & Structures*, vol. 80, no. 2, pp. 133-144, 2002.
- [١٦] J. Lee and S.-E. Kim, "Free vibration of thin-walled composite beams with I-shaped cross-sections," *Composite Structures*, vol. 55, no. 2, pp. 205-215, 2002.
- [١٧] T. P. Vo and J. Lee, "Flexural-torsional coupled vibration and buckling of thin-walled open section composite beams using shear-deformable beam theory," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, no. 9-10, pp. 631-641, 2009.
- [١٨] N.-I. Kim and J. Lee, "Coupled vibration characteristics of shear flexible thin-walled functionally graded sandwich I-beams," *Composites Part B: Engineering*, vol. 110, pp. 229-247, 2017.
- [١٩] T.-T. Nguyen and J. Lee, "Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams," *Composites Part B: Engineering*, vol. 154, pp. 351-362, 2018.

- [٢٠] N.-D. Nguyen, T.-K. Nguyen, T. P. Vo, T.-N. Nguyen, and S. Lee, "Vibration and buckling behaviours of thin-walled composite and functionally graded sandwich I-beams," *Composites Part B: Engineering*, vol. 166, pp. 414-427, 2019.
- [٢١] L. T. Phi, T.-T. Nguyen, and J. Lee, "Free vibration of thin-walled open-section beams with functionally graded materials along the contour direction," *Thin-Walled Structures*, vol. 159, p. 107146, 2021.
- [٢٢] J. Moon, J.-W. Yi, B. H. Choi, and H.-E. Lee, "Lateral-torsional buckling of I-girder with corrugated webs under uniform bending," *Thin-Walled Structures*, vol. 47, no. 1, pp. 21-30, 2009.
- [٢٣] N. D. Nguyen, S. N. Kim, S.-R. Han, and Y.-J. Kang, "Elastic lateral-torsional buckling strength of I-girder with trapezoidal web corrugations using a new warping constant under uniform moment," *Engineering Structures*, vol. 32, no. 8, pp. 2157-2165, 2010.
- [٢٤] N. D. Nguyen, H. Nguyen-Van, S.-Y. Han, J.-H. Choi, and Y.-J. Kang, "Elastic lateral-torsional buckling of tapered I-girder with corrugated webs," *International Journal of Steel Structures*, vol. 13, pp. 71-79, 2013.
- [٢٥] D.-Q. Vo and H. L. Ton-That, "Free vibration of simply supported steel I-girders with trapezoidal web corrugations," *Reports in Mechanical Engineering*, vol. 1, no. 1, pp. 141-150, 2020.
- [٢٦] B. Kövesdi and L. Dunai, "Fatigue life of girders with trapezoidally corrugated webs: An experimental study," *International Journal of Fatigue*, vol. 64, pp. 22-32, 2014.
- [٢٧] J. Xu, H. Sun, S. Cai, W. Sun, and B. Zhang, "Fatigue testing and analysis of I-girders with trapezoidal corrugated webs," *Engineering Structures*, vol. 196, p. 109344, 2019.
- [٢٨] L. Gil-Martín and E. Hernández-Montes, "Principal Sectorial coordinate system," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 90, pp. 305-312, 2020.
- [٢٩] J. Lindner, "Lateral torsional buckling of beams with trapezoidally corrugated webs," in *Proc. 4th Int. Colloquium on Stability of Steel Structures*, Budapest, Hungary, 1990, pp. 25-27.
- [٣٠] J. Connor, *Analysis of Structural Member Systems*. New York: The Ronald Press Company, 1976.