



Analysis of Magneto Hydrodynamic Flow with Wall Injection Using Fractional Derivative

Research Article

Mohammad Tolami¹, Akbar Nazari-Golshan², Seyed Salman Nourazar³ 

 [10.22067/jacsm.2025.91367.1309](https://doi.org/10.22067/jacsm.2025.91367.1309)

Abstract-- The aim of this study is to investigate the injection of mutable velocity flow from the walls into the magneto hydrodynamic flow. A dominant term of tangential velocity is considered and the remaining terms are ignored and the first order derivative with respect to r is replaced by a fractional derivative. The equation is transformed into a nonlinear ordinary differential equation with fractional derivative using the similarity transformation method and solved using semi-analytical and numerical methods. The results show that increasing Re causes a significant increase in the values of the dimensionless velocity and radial velocity in the center of the channel, while a slight decrease is observed in the regions closer to the walls, but in the regions very close to the walls it is almost unchanged. Increasing Ha leads to a significant decrease in the maximum velocity. the velocity vector lines at fixed radial positions become more uniform. Increasing the Ha also leads to the appearance of two smaller maximum velocities in the vicinity of the channel walls.

Keywords: Terms-- Convergent and Divergent Channel, Fractional Derivative, Injection, Jeffrey-Hamel Flow, Magneto Hydrodynamic Flow, Semi-Analytical Method

1. Introduction

The effects of injection and suction are substantial on flow characteristics, including boundary layer behavior, flow separation, stability management, drag reduction, and processes of heat and mass transfer. It is well-established that suction plays a vital role in sustaining boundary layer stability. On the other hand, injection may promote the rapid development of instabilities. Both strategies are effective in curtailing flow separation and drag. Injection can be utilized to enhance temperature and, conversely, can act as a thermal insulator by forming an insulating layer along the walls. In the realm of fluid mechanics, fractional derivatives serve as an effective means for the examination of magnetohydrodynamic flows and their related chemical reactions. This instrument is crucial for investigating phenomena including free convection, the influence of thermal radiation, the dynamics of porous media modeling, nonlocal and memory effects in

turbulence, boundary layer phenomena, and nanoscale heat transfer, which enhances prediction accuracy [1].

The initial analytical solutions for flow in convergent-divergent channels were provided by researchers Jeffery and Hamel [2], [3]. The study of Jeffrey-Hamel flow is significant for understanding flow instabilities, mass transfer processes, and injection effects. The objective of this research is to conduct an analytical examination of the influence of fractional derivative and magnetic fields and variable velocity flow injection from the channel wall on the velocity distribution within a diverging channel. The contributions of this study include: the application of variable velocity for the injected flow, the transformation of integer derivatives into fractional derivatives within the governing equations, an exploration of the impact of varying the order of the fractional derivative, the utilization of similarity transformations to convert partial differential equations into ordinary differential equations, and the implementation of a relatively obscure semi-analytical method for flow analysis.

2. Governing relations

The divergent channel in polar coordinates features an opening angle of $\alpha = 0.7 \text{ rad}$ and a radius that ranges from $r = 1$ to $r = 4$. The primary flow enters radially, while the secondary flow is introduced from the channel walls. The fundamental assumptions of this analysis are outlined as follows:

1. The flow is characterized as two-dimensional, steady, and incompressible, with the effects of gravity being disregarded.
2. The radial velocity v_r is deemed more significant than the tangential velocity v_θ . In the momentum equations, the prevailing term v_θ is taken into account, while the other terms are omitted. The variability of the injection velocity throughout the channel is acknowledged; this contrasts with earlier studies that presumed it to be constant.

* Manuscript received December 28, 2024, Revised March 17, 2025, Accepted July 12, 2025.

¹ Instructor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

² Corresponding author. Associate Professor, Physics Department, Shahed University, Tehran, Iran,
Email: anazariGolshan@yahoo.com.

³ Professor, Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

By implementing these assumptions and removing the pressure variable, the momentum equations in magnetohydrodynamic flow are reformulated into a higher-order partial differential equation:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial v_r}{\partial r} v_\theta - v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = v \left(\frac{\partial^3 v_r}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v_r}{\partial \theta^3} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

where v represents the kinematic viscosity, ρ denotes the density, σ signifies the electrical conductivity, and B_0 indicates the strength of the magnetic field. By substituting the first-order derivative concerning r with the Caputo fractional derivative of order β (${}_0D_r^\beta$) in the momentum equation and applying the subsequent dimensionless similarity transformations:

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha}, \quad \psi = r^2 v_w F(\eta) \quad (2)$$

In this context, η represents the dimensionless angular position, F denotes the dimensionless function associated with the momentum equation, v_w signifies a constant value, and ψ is the stream function, for which we express:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r}{\alpha} v_w F', \quad v_\theta = -{}_0D_r^\beta \psi = -v_w F {}_0D_r^\beta r^2 \quad (3)$$

Using the Caputo fractional derivative relation of the power function [4]:

$${}_0D_r^\gamma r^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\gamma+1)} r^{a-\gamma} \quad (4)$$

And by applying the dimensionless parameters of the Reynolds number and the Hartmann number, which are

defined as $Re = \frac{r^2 v_w}{v}$ and $Ha = r B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$, respectively, the following final relationship is obtained:

$$\begin{aligned} & F^{(IV)} + 2\alpha Re F'' F' - \\ & \frac{\Gamma(2)\alpha}{\Gamma(2-\beta)} \left(2 - \frac{2}{(2-\beta)} \right) Re r^{1-\beta} F'' F' + \\ & (\alpha^2 \Gamma(2) r^{-\beta+1} \left(\frac{r^{1-\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} - \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \right) + \\ & \alpha^2 (1 - Ha^2)) F'' - \frac{4\alpha^3 \Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)} Re r^{1-\beta} F F' = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

The secondary flow is introduced at an angle relative to the channel walls and in the opposite direction of the

primary flow. The boundary conditions are articulated as follows:

$$\begin{cases} \eta = 0 \rightarrow F = -\frac{v_\theta}{2rv_w} = -1, \quad F' = -1 \\ \eta = 1 \rightarrow F = -\frac{v_\theta}{2rv_w} = 1, \quad F' = -1 \end{cases} \quad (6)$$

To make the radial velocity non-dimensional, the tangential velocity at the initial point of the channel walls is used as a reference value:

$$\hat{v}_r = \frac{v_r}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (7)$$

3. Resolving of Equation

The adaptive fraction technique is employed to address ordinary differential equation. Initially, the linear component of the differential equation is resolved, followed by substituting the variables with polynomial fractional functions [1], [5]. Numerical solutions are obtained using Matlab software.

4. Validation

The presence of correlation and consistency between the numerical and analytical solutions substantiates the credibility of the current analytical approach. In Figure 1, the ratio of the flow velocity within the pipe to the velocity at the center of the pipe is illustrated using the experimental findings of Takeuchi et al. alongside the numerical analysis results from Goa et al. across various Hartmann numbers [6]. It is noted that as the Hartmann number increases, the velocity profile tends to flatten, with the exception of regions close to the pipe walls. This pattern mirrors the trend depicted in Figure 5 of the current study concerning the radial velocity of the flow within the diverging channel. Considering the strong correlation between the analytical and numerical solutions presented in this study, as well as the resemblance of the behavior observed for the radial velocity profile in the diverging channel to the experimental and numerical results of the velocity profile within the pipe in [6], the validity of the current analysis is affirmed.

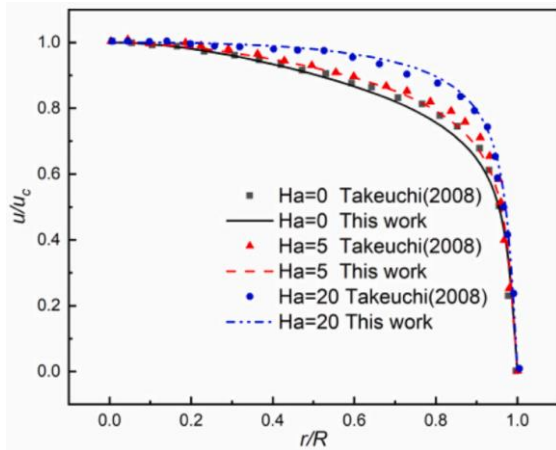


Fig. 1. Experimental results of Takeuchi et al. and numerical results of Guo et al. for the flow velocity inside the tube to the tube center velocity for different Hartmann numbers [6]

5. RESULTS

Figure 2 illustrates that as the Reynolds number rises, there is a notable increase in $\hat{v}_r$ at the center of the channel, whereas a minor decrease is noted in areas closer to the walls, with the regions adjacent to the walls remaining nearly unchanged. Figure 3 indicates that an increase in β produces effects on the variable $\hat{v}_r$ that are similar to those observed with an increase in the Reynolds number. Generally, the effect of increasing the Hartmann number is contrary to that of increasing the Reynolds number. As indicated in (3), the radial velocity is associated with the derivative of function F . As the Hartmann number increases, Figure 4 shows that curve F tends to become linear, leading to the observation in Figure 5 of a nearly constant dimensionless radial velocity, except in the vicinity of the walls. This figure also reveals that an increase in the Hartmann number enhances $\hat{v}_r$ near the walls while concurrently diminishing this value at the center of the channel. The reduction in velocity at the center of the channel with an increasing Hartmann number is attributed to the Lorentz force, which impedes fluid motion, particularly in the channel's center [7]. The increase in velocity near the walls can be explained by the principle of mass conservation. Overall, the increase in β exerts a similar influence on flow behavior as the increase in the Reynolds number. From a practical perspective, this finding is significant; rather than altering β , which poses challenges, one can anticipate the effects of varying β by adjusting the Reynolds number.

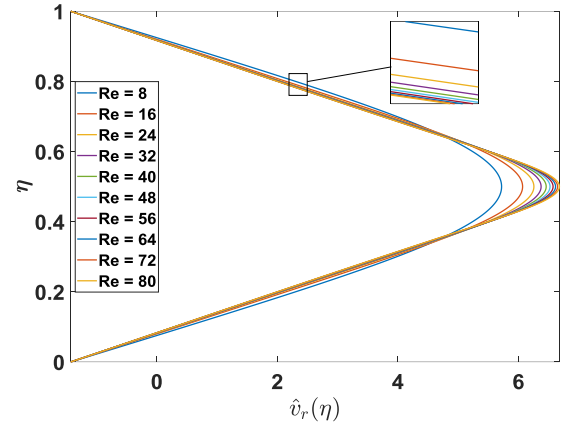


Fig. 2. Changes in the variable $\hat{v}_r$ depending on the parameter Re under the condition $Ha=1, \beta=1$

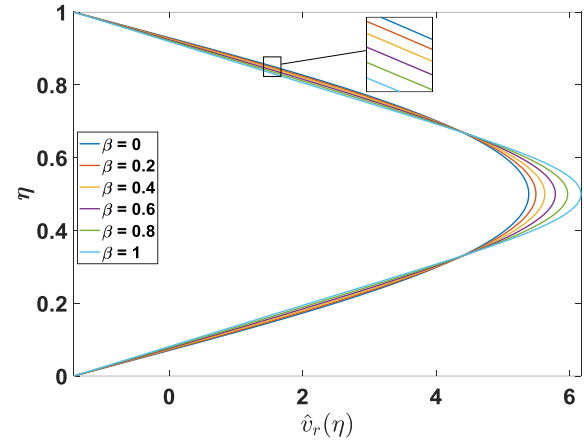


Fig. 3. Variations of the variable $\hat{v}_r$ in terms of the parameter β under the condition $Re=20, Ha=1$

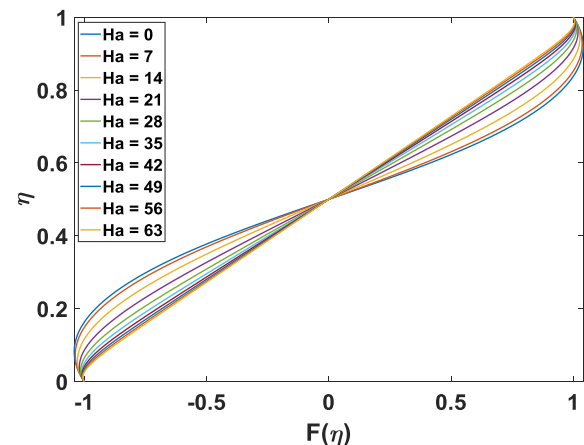


Fig. 4. Changes in the variable F according to the parameter Ha in the condition $Re=20, \beta=1$

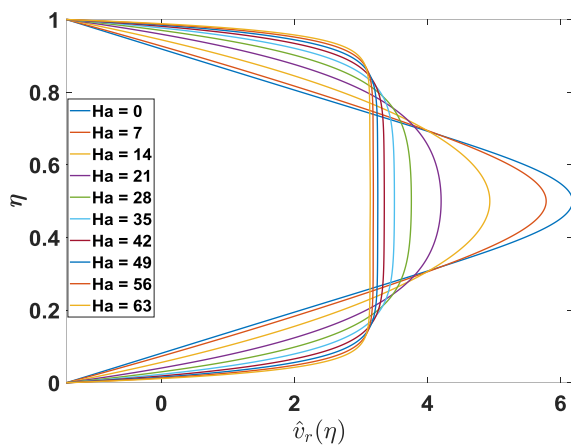


Fig. 5. Changes in the variable $\hat{v}_r$ depending on the parameter Ha under the condition $Re=20, \beta=1$

6. Conclusion

With an increase in the Hartmann number, the radial velocity profile within the diverging channel tends to flatten, except in areas near the walls. This observation aligns with both experimental and numerical findings regarding the velocity profile within pipes as reported in other researches. These instances highlight the efficacy of the current analytical approach in assessing flow characteristics. The principal conclusions of this study can be outlined as follows:

- An increase in the Reynolds number results in a notable rise in the dimensionless radial velocity at the channel's center, while a minor reduction is noted in areas closer to the walls; however, regions very near the walls remain largely unaffected.
- Elevating the order of the fractional derivative in the momentum equation produces effects similar to those observed with an increase in the Reynolds number on the flow dynamics.
- A rise in the Hartmann number typically induces a behavior that is contrary to that observed with an increase in the Reynolds number. Specifically, an increase in the Hartmann number results in a marked decrease in the maximum radial velocity at the center of the channel and contributes to the flattening of the radial velocity profile in this area.

Acknowledgment

The authors gratefully acknowledge the contributions of Y. Farjami and M. R. Najafi for assist in performing and programming the analytical solution method.

References

- [1] M. Tolami, A. Nazari-Golshan, and S. S. Nourazar, "Impact of fractional derivative on the distribution of concentration injected from the walls in diverging channel," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 164, pp. 108932, 2025/05/01, 2025. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2025.108932.

- [2] G. B. Jeffery, "L. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 29, no. 172, pp. 455-465, 1915/04/01, 1915. doi: 10.1080/14786440408635327.
- [3] G. Hamel, "Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten," *Mathematische Annalen*, vol. 84, no. 1, pp. 148-148, 1921/03/01, 1921. doi: 10.1007/BF01458700.
- [4] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*: Academic Press, 1998. eBook ISBN: 9780080531984.
- [5] P. B. Ghaleh, A. A. Khayyat, Y. Farjami, and A. Abedian, "Approximate analytical solutions of an axially moving spacecraft appendage subjected to tip mass," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 228, no. 9, pp. 1487-1497, 2014/07/01, 2013. doi: 10.1177/0954410013494140.
- [6] J. Guo, Y. Chen, J. Hu, Z. Xu, and C. Ma, "Numerical study on the flow and heat transfer of molten salt in a horizontal pipe applied transverse magnetic field," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 192, pp. 108416, 10/01, 2023. doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2023.108416.
- [7] S. M. Živojin, D. D. Nikodijević, B. D. Blagojević, and S. R. Savić, "MHD flow and heat transfer of two immiscible fluids between moving plates," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 34, no. 3-4, pp. 351-372, 2010. doi: 10.1139/tcsme-2010-0021.



تحلیل جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی همراه تزریق جریان از دیوارها با استفاده از مشتق کسری*

مقاله پژوهشی

سید سلمان نورآذر^(۳)اکبر نظری گلشن^(۲)محمد تولمی^(۱)

10.22067/jacsm.2025.91367.1309

چکیده هدف این مطالعه بررسی تزریق جریان با سرعت تغییرپذیر از دیوارها به جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی است. در این مطالعه یک جمله غالب سرعت مماسی لحاظ گردیده و از باقی جملات صرفنظر شده است. مشتق مرتبه اول نسبت به x با مشتق کسری جایگزین گردیده است. معادله حاکم با استفاده از روش تبدیل تشابهی، به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی با مشتق کسری تبدیل و با استفاده از روشهای نیمه تحلیلی و عددی حل شده است. نتایج حاصل بیانگر این است که افزایش عدد رینولدز باعث افزایش قابل توجهی در مقادیر سرعت بدون بعد و سرعت شعاعی بی‌بعد در مرکز کانال می‌شود در حالی که یک کاهش جزئی در نواحی نزدیک‌تر به دیوارها مشاهده می‌شود اما در نواحی خیلی نزدیک دیوارها تقریباً بدون تغییر است. افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش قابل توجه در حداکثر سرعت می‌گردد. خطوط بردار سرعت در موقعیت‌های شعاعی ثابت، بکناخت‌تر می‌گردند. افزایش عدد هارتمن همچنین منجر به ظهور دو سرعت بیشینه کوچکتر در مجاورت دیوارهای کانال می‌شود.

واژه‌های کلیدی جریان جفری-همل، کانال همگرا و واگرا، تزریق، جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی، مشتق کسری، روش نیمه تحلیلی

مقدمه

کرده‌اند. یافته‌های المالکی و همکاران [1]، گائو [2]، فریدریش و کلورک [3] و کانت و همکاران [4] نشان می‌دهد که مکش با به تاخیر انداختن گذار جریان و کاهش ناپایداری‌های ثانویه، نقش مهمی در پایداری لایه مرزی ایفا می‌کند. از سوی دیگر، تزریق به عنوان ناپایدار کننده جریان با تغییر پروفیل‌های سرعت شناخته شده است که می‌تواند رشد ناپایداری‌ها را تسهیل کند. علاوه بر این، نقش تزریق و مکش در مدیریت جدایش جریان به طور کامل بررسی شده است. مطالعات شو و همکاران [5]، دبایسی و همکاران [6]، رایلی [7] و سیله و همکاران [8] نشان می‌دهد که هر دو روش می‌توانند به طور موثر جدایش جریان را کاهش دهند؛ البته در سطوح مومنتوم پایین‌تر، مکش با افزایش جریان نزدیک دیوار عموماً عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. استفاده از

تزریق و مکش تاثیر مهمی بر ویژگی‌های جریان دارند که شامل رفتار لایه مرزی، مدیریت جدایش و پایداری جریان، کاهش پسا و همچنین بهبود فرآیندهای انتقال گرما و جرم است. مکش به عنوان یک عامل کلیدی در حفظ پایداری لایه مرزی شناخته می‌شود. تزریق می‌تواند به تسریع رشد ناپایداری‌ها کمک کند. با این حال، هر دو روش قادرند به طور مؤثری جدایش جریان را کاهش دهند و تأثیر قابل توجهی در کاهش نیروی پسا داشته باشند. همچنین، تزریق می‌تواند به منظور افزایش دما به کار رود و از سوی دیگر، با ایجاد یک لایه عایق حرارتی در امتداد دیوارها، به عنوان عایق حرارتی عمل کند. در موضوع کنترل لایه مرزی، محققان مختلفی تأثیر تزریق و مکش را بر پایداری جریان بررسی

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۱۰/۸ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۴/۴/۲۱ می‌باشد.

(۱) مربی، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۲) نویسنده مسئول، دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه شاهد، تهران.

(۳) استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران.

زیادی دارد. مشتقات کسری به عنوان ابزاری برای تحلیل جریان‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی و واکنش‌های شیمیایی مرتبط با آن به کار می‌روند. این ابزارها در بررسی پدیده‌هایی نظیر همرفت آزاد، تأثیر تشعشعات حرارتی، مدل‌سازی دینامیک محیط‌های متخلخل، تأثیرات غیرمحلی و اثرات حافظه در آشفته‌گی، همچنین پدیده‌های لایه مرزی و انتقال حرارت در مقیاس نانو نقش مهمی ایفا می‌کنند. استفاده از مشتقات کسری به بهبود دقت پیش‌بینی‌ها منجر می‌شود. به عنوان مثال، اشتیاق و همکاران [56] و احمد و همکاران [57] از مشتقات کسری برای بررسی رفتارهای سیال مغناطیسی و پدیده همرفت آزاد استفاده کردند. همچنین عباس و همکاران [58] و ریاض و همکاران [59] تأثیر تشعشعات حرارتی و واکنش‌های شیمیایی در جریان‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی را با استفاده از مشتقات کسری بررسی کردند. علاوه بر این، مشتقات کسری برای مدل‌سازی دینامیک محیط‌های متخلخل و جریان‌های آشفته استفاده شده‌اند. یانگ و همکاران [60] و ژو و همکاران [61] مدل‌های کسری مربوط به جریان داری و غیرداری را استخراج کردند. عباس و همکاران [58] و سوزوکی و همکاران [62] از مشتقات کسری برای توضیح تأثیرات غیرمحلی و اثرات حافظه در آشفته‌گی استفاده نمودند. میلانوف و راسموسن [63] از سینتیک کسری برای تبیین مکانیسم‌های پراکندگی تلاطم بهره گرفتند. علاوه بر این، مشتقات کسری برای مطالعه پدیده‌های لایه مرزی استفاده شده است و همانطور که در تحقیق احمد و همکاران [57] نشان داده شده است؛ آنها توزیع سرعت، غلظت و دما را از طریق حساب کسری بهبود بخشیدند. ریاض و همکاران [64] جریان‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی را بر روی صفحات ریگا (Riga Plates) بررسی کردند؛ در حالی که شهریم و همکاران [65] دینامیک جریان‌ات روی صفحات شتابدار را بررسی نمودند. استفاده از مشتقات کسری در انتقال حرارت در مقیاس نانو نمایش دقیق‌تری از اثرات حافظه حرارتی ارائه می‌دهند [66-68].

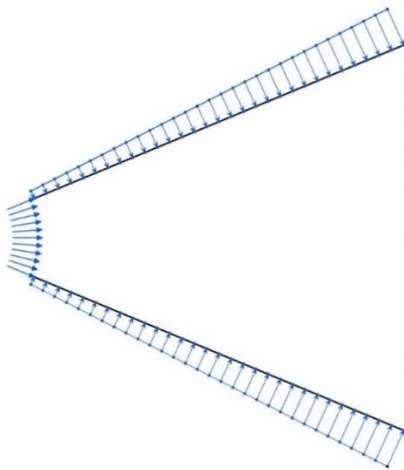
جریان جفري-همل دینامیک سیال را در کانال‌های همگرا و واگرا تحلیل می‌کند. این مدل کاربرد قابل توجهی در بررسی ناپایداری‌های جریان، فرآیندهای انتقال جرم و پیامدهای تزریق پیدا کرده است. بیتالو و همکاران [69]، انتقال حرارت و دینامیک جریان یک نانوسیال هیبریدی را در کانال‌های همگرا یا واگرا مطالعه کردند. بودجملین و همکاران [70] به بررسی جریان

روشهای تزریق و مکش اثرات قابل توجهی در کنترل نیروی پسا دارد. همانطور که اندرسون [9] و شلیختینگ و گریستن [10] اشاره کردند مکش می‌تواند به طور موثری با به تاخیر انداختن جدایش لایه مرزی، نیروی پسا را کاهش دهد. در مقابل، استفاده نادرست از تزریق می‌تواند منجر به افزایش درگ به دلیل تسریع جدایش لایه مرزی شود؛ همانطور که توسط کوئت و چو [11] و لیسمن [12] نشان داده شده است. علاوه بر این، استراتژی‌های تزریق با موفقیت برای افزایش انتقال حرارت مورد استفاده قرار گرفته‌اند. کیتاگاوا و همکاران [13] شواهدی ارائه می‌دهند که تزریق حباب‌های میلی‌متری در نزدیکی دیوارهای گرم شده به طور قابل توجهی ضرایب انتقال حرارت را با بهبود اختلاط عمود بر دیوار افزایش می‌دهد. علاوه بر کاربردهای شناخته شده، دامنه کنترل احتراق با استفاده از روش‌های تزریق افزایش یافته است. تحقیقات کوکجان و رایتز [14] و جهانگیریان و همکاران [15] نشان داده‌اند که روش‌های تزریق می‌توانند بر فاز احتراق تأثیر بگذارند؛ انتشار گازهای مضر را کاهش دهند و انتقال حرارت به دیواره‌های محفظه احتراق را کاهش دهند. سلجاک و همکاران [16] مفهوم رقیق‌سازی انتخابی مکانی (Spatially Selective Dilution) را برای مدیریت موثر انتشار گرما معرفی کردند. علاوه بر این، کاهش نویز آیرودینامیکی از طریق تزریق جریان جرمی مورد بررسی قرار گرفته است. سونگ و همکاران [17] و هافستاینسون و همکاران [18]، به این نتیجه رسیدند که تزریق می‌تواند به طور قابل توجهی هم صدای حفره‌زایی (Cavitation) و هم نویز ناشی از شوک را در جریان‌های مافوق صوت کاهش دهد. تزریق و مکش نقش اساسی در کنترل جریان‌های مافوق صوت دارند. تحقیقات اشمیت و همکاران [19] و وانگ و همکاران [20] نشان داد که تزریق منجر به تشکیل شوک‌های مایل (Oblique Shocks) و لایه‌های مرزی آشفته می‌شود در حالی که مکش به تثبیت قطارهای شوک (Shock Trains) کمک می‌کند. علاوه بر این، تحقیق در مورد خنک‌سازی فیلم توسط چانگ و همکاران [21] و لیو و همکاران [22] نشان داده است که تزریق، یک لایه عایق حرارتی را در امتداد دیوارها ایجاد می‌کند که در محیط‌هایی با درجه حرارت بالا ضروری است. در مهندسی شیمی، مهندسی محیط زیست و داروسازی کاربرد تزریق به کاربردهای انتقال جرم و اختلاط سیال گسترش می‌یابد [23-55]. استفاده از مشتقات کسری در مکانیک سیالات، کاربردهای

و $r = 4m$ می‌باشد. برای تحلیل از مختصات قطبی استفاده می‌شود. همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است؛ جریان اصلی شعاعی است در حالی که جریان ثانویه از دیوارهای کانال وارد می‌شود. مفروضات اساسی این تحلیل به شرح زیر است:

۱. جریان به صورت دو بعدی، پایا و تراکم ناپذیر تعریف و از اثرات گرانش صرفنظر شده است.

۲. مولفه سرعت شعاعی v_r در مقایسه با مولفه مماسی v_θ اهمیت بیشتری دارد. در معادلات تکانه، جمله غالب شامل v_θ لحاظ می‌شود و دیگر جملات آن نادیده گرفته می‌شوند. تغییرپذیری سرعت تزریق در سراسر کانال در نظر گرفته شده است؛ برخلاف مطالعات قبلی که آن را ثابت فرض می‌کردند.



شکل ۱ هندسه مساله

با اعمال مفروضات و حذف فشار، معادلات تکانه در جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی به یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه بالاتر تبدیل می‌شوند:

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_r}{\partial r} v_\theta - v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = v \left(\frac{\partial^3 v_r}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v_r}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (1)$$

در رابطه فوق با جایگزین کردن مشتق مرتبه اول نسبت به r با مشتق کسری از مرتبه b که به صورت OD_r^b نمایش داده می‌شود به دست می‌آوریم:

فشار-محور یک نانوسیال غیرنیوتنی در یک کانال همگرا یا واگرا پرداختند. در هر دو تحقیق، جریان کاملاً شعاعی در نظر گرفته شده و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با استفاده از یک تبدیل تشابهی مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و سپس حل شده است. اونیانگو و همکاران [71] و هم‌لاین و همکاران [72] جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی پایای دو بعدی و غیر قابل تراکم جفیری همل همراه با مکش و دمش از دیوارها را بررسی کردند. اونیانگو و همکاران دمش روی یک دیوار و مکش از دیوار دیگر را حل کردند؛ اما هم‌لاین و همکاران محدودیتی از نظر نوع مکش یا دمش روی دیوارها قرار ندادند. اونیانگو و همکاران سرعت در راستای θ را در هر x و هم‌لاین و همکاران سرعت در راستای y در کل جریان را ثابت فرض نمودند. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با استفاده از یک تبدیل تشابهی مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و سپس حل شده است. اونیانگو و همکاران [73] در یک تحقیق مشابه دیگر، معادله غلظت را هم در نظر گرفته و مساله را به صورت عددی حل کردند.

هدف از این مطالعه بررسی تحلیلی اثر میدان مغناطیسی و تزریق جریان با سرعت تغییرپذیر از دیوار بر توزیع سرعت در یک کانال واگرا است. نوآوری‌های مطالعه حاضر عبارت است از: اعمال سرعت تغییرپذیر پذیر جریان تزریقی، تبدیل مشتق صحیح به مشتق کسری در معادله حاکم و بررسی تاثیر تغییر مرتبه مشتق کسری، نحوه استفاده از تبدیل تشابهی (Similarity Transformation) برای تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی به معمولی و استفاده از یک روش نیمه تحلیلی کمتر شناخته شده برای تحلیل جریان. در این تحقیق تاثیر پارامترهای عدد رینولدز، عدد هارتمن و مرتبه مشتق کسری بر ویژگی‌های جریان بررسی می‌شود.

این مقاله در چندین بخش ساختار یافته است. در بخش روابط حاکم، به معرفی مسئله و استخراج معادله حاکم پرداخته شده است. بخش روش تحلیلی جزئیات فرآیند استخراج راه حل تحلیلی و روشهای حل معادله را تشریح می‌کند. بخش اعتبار سنجی، اعتبار سنجی تحقیق فعلی را بررسی می‌کند. بخش نتایج، مفاهیم نمودارهای بدست آمده را مورد بحث قرار می‌دهد. در نهایت، بخش جمع بندی، پژوهش حاضر را با تفسیر نتایج کلیدی به پایان می‌رساند.

روابط حاکم

کانال واگرا با زاویه باز شدن $\alpha = 0.7 \text{ rad}$ و شعاع بین $r = 1m$

طبق رابطه دیویسون-اسکس (Relation Davison-Essex)

داریم:

$${}_0D_r^\gamma r^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\gamma+1)} r^{a-\gamma} \quad (13)$$

با استفاده از رابطه (۱۳) و به کارگیری رابطه $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

و اعمال پارامترهای بدون بعد رینولدز و عدد هارتمن که به صورت $Re = \frac{r^2 v_w}{\nu}$ و $Ha = rB \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ تعریف می‌شود که در آن ν نشان دهنده ویسکوزیته سینماتیکی است. عدد هارتمن بیانگر تاثیر میدان مغناطیسی بر جریان سیال رسانای الکتریکی می‌باشد. رابطه (۱۲) به صورت نهایی زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} & F^{(IV)} + 2\alpha Re F''' F - \\ & \frac{\Gamma(2)\alpha}{\Gamma(2-\beta)} \left(2 - \frac{2}{(2-\beta)}\right) Re r^{1-\beta} F'' F' + \\ & (\alpha^2 \Gamma(2) r^{-\beta+1} \left(\frac{r^{1-\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} - \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\right) + \\ & \alpha^2 (1 - Ha^2) F'' - \frac{4\alpha^3 \Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)} Re r^{1-\beta} F' F = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

جریان ثانویه با زاویه نسبت به دیوارهای کانال و مخالف جهت جریان اصلی تزریق می‌شود. شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \eta = 0 \rightarrow F = -\frac{v_0}{2rv_w} = -1, \quad F' = -1 \\ \eta = 1 \rightarrow F = -\frac{v_0}{2rv_w} = 1, \quad F' = -1 \end{cases} \quad (15)$$

هنگامی که بر روی یک متغیر نماد $\wedge$ قرار گیرد؛ به این معنی است که متغیر بی‌بعد شده است. فرآیند بی‌بعد سازی از سرعت مماسی در ابتدای دیوار کانال ($r=1$) به عنوان مقادیر مرجع استفاده می‌نماید:

$$\hat{v}_r = \frac{v_r}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (16)$$

$$\hat{v}_\theta = \frac{v_\theta}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (17)$$

$$\hat{V} = \frac{|V|}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} {}_0D_r^\beta v_r + v_{r0} {}_0D_r^\beta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - v_{\theta 0} {}_0D_r^\beta v_r - v_{r0} {}_0D_r^\beta v_\theta\right) = \nu ({}_0D_r^{2\beta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v_r}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} {}_0D_r^\beta \frac{\partial v_r}{\partial \theta}) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

$V_{\theta w1}$ و $V_{\theta w2}$ به ترتیب سرعت مماسی تزریق را در دیواره‌های پایین و بالایی نشان می‌دهند. روابط $V_{\theta w1} = 2rv_{w1}$ و $V_{\theta w2} = 2rv_{w2}$ برقرار است و مقادیر ثابت هستند. تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} v_w = v_{w1} \text{ if } |v_{w1}| \geq |v_{w2}| \\ v_w = v_{w2} \text{ if } |v_{w2}| \geq |v_{w1}| \end{cases} \quad (3)$$

$$V_{\theta w} = \max[|V_{\theta w1}|, |V_{\theta w2}|] \quad (4)$$

تبدیل‌های تشابهی بی‌بعد زیر اعمال می‌شوند:

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha} \quad (5)$$

$$\psi = r^2 v_w F(\eta) \quad (6)$$

y تابع جریان می‌باشد. داریم:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r}{\alpha} v_w F' \quad (7)$$

$$v_\theta = -{}_0D_r^\beta \psi = -{}_0D_r^\beta (r^2 v_w F) = -v_w F {}_0D_r^\beta r^2 \quad (8)$$

مشتقات نسبت به θ از طریق روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{d}{d\eta} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\eta} \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{r}{\alpha^2} v_w F'' \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} = \frac{r}{\alpha^3} v_w F''' , \quad \frac{\partial^3 v_r}{\partial \theta^3} = \frac{r}{\alpha^4} v_w F^{(4)} \quad (11)$$

با گنجاندن روابط فوق در معادله (۲)، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\alpha^2} v_w F'' {}_0D_r^\beta \left(\frac{r}{\alpha} v_w F'\right) + \frac{r}{\alpha} v_w F' {}_0D_r^\beta \left(\frac{r}{\alpha^2} v_w F''\right) \\ & - \frac{1}{r\alpha} v_w F' \frac{r}{\alpha^2} v_w F'' {}_0D_r^\beta r^2 - 2v_w F \frac{r}{\alpha^3} v_w F''' - \\ & (-2rv_w F) {}_0D_r^\beta \left(\frac{r}{\alpha} v_w F'\right) - \frac{r}{\alpha} v_w F' {}_0D_r^\beta (-2rv_w F) \\ & = \nu ({}_0D_r^{2\beta} \left(\frac{r}{\alpha^2} v_w F''\right) + \frac{1}{r^2} \frac{r}{\alpha^4} v_w F^{(IV)} + \\ & \frac{1}{r^2} \frac{r}{\alpha^2} v_w F'' - \frac{1}{r} {}_0D_r^\beta \left(\frac{r}{\alpha^2} v_w F''\right)) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{r}{\alpha^2} v_w F'' \end{aligned} \quad (12)$$

$$L(F_L(\eta)) = 0 \quad (20)$$

جواب معادله (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$F_L(\eta) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(\eta) \quad (21)$$

به منظور یافتن پاسخ معادله (۱۹)، معادله (۲۱) را در نظر گرفته و به جای متغیر h یک تابع کسری چند جمله‌ای جایگزین می‌گردد:

$$F(\eta) = \sum_{i=1}^m c_i f_i \left(\frac{\sum_{j=0}^{l_1} p_{ij} \eta^j}{\sum_{k=0}^{l_2} q_{ik} \eta^k} \right) \quad (22)$$

برای تعیین ضرایب p_{ij} و q_{ik} ، معادله (۲۲) در معادله (۱۹) درج می‌گردد و با استفاده از رویکرد بهینه سازی، خطای حاصل به حداقل رسانده می‌شود. در نهایت، ضرایب c_i با برآورده نمودن شرایط مرزی محاسبه می‌شود.

در اینجا از نرم افزار متلب که روش تفاضل محدود را در ترکیب با فرمول سه مرحله ای لوباتو به کار می‌گیرد استفاده شده است تا جواب‌های عددی معادله (۱۴) محاسبه شود. متعاقباً متغیرهای $\hat{v}_\theta$ ، $\hat{v}_r$ و $\hat{V}$ از مقدار F محاسبه گردیدند.

اعتبار سنجی

نتایج تحلیلی و عددی در شکل‌های (۲) تا (۴) نشان داده شده است. اختلاف بین پاسخهای تحلیلی و عددی با استفاده از ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) (Mean Square Error Root) بررسی گردیده است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_A - f_N^2} \quad (23)$$

f_A و f_N به ترتیب بیانگر حل‌های تحلیلی و عددی است. متغیر n تعداد نقاط تحلیل را در بازه $0 \leq \eta \leq 1$ بیان می‌کند که در اینجا برابر ۱۰۱ می‌باشد. مقادیر RMSE برای F ، $\hat{v}_r$ و $\hat{V}$ در $Re = 20, Ha = 2, Sc = 2, \beta = 0.8, \xi = 0.8$ بدست آمده است و به ترتیب 1.42724×10^{-4} ، 0.00101 و 8.73780×10^{-4} می‌باشد. همبستگی قوی و سازگاری در نتایج مشاهده شده بین راه‌حل‌های عددی و تحلیلی بر قابلیت روش تحلیلی برای پیش‌بینی دقیق جریان تأکید می‌کند.

در شکل (۵) نسبت سرعت جریان داخل لوله به سرعت مرکز

ثابت بودن مخرج در معادلات (۱۶) تا (۱۸) بیانگر این است که تغییرات مشاهده شده در متغیرهای بدون بعد $\hat{v}_\theta$ ، $\hat{v}_r$ و $\hat{V}$ مستقیماً بیانگر تغییرات مربوط در متغیرهای v_θ ، v_r و V می‌باشد.

روش تحلیلی

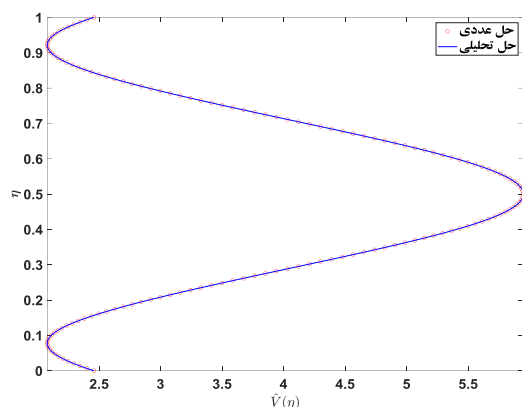
حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی با روشهای مختلف، به سادگی در دسترس می‌باشد. با این وجود حل تحلیلی مزایایی دارد که حل عددی فاقد آن می‌باشد. از جمله مزایای حل تحلیلی موارد زیر می‌باشد:

۱. امکان بررسی دقیق تأثیر پارامترهای مختلف مساله بدون نیاز به شبیه‌سازی‌های متعدد
۲. امکان دستیابی به روابط صریح بین پارامترها و متغیرهای جریان که برای طراحی بهینه سیستم‌ها مفید است
۳. استفاده به عنوان مرجع برای اعتبارسنجی حل‌های عددی
۴. امکان استخراج حالت‌های حدی و رفتار مجانبی سیستم
۵. کاهش خطاهای محاسباتی که در روش‌های عددی به دلیل گسسته‌سازی و تقریب رخ می‌دهد

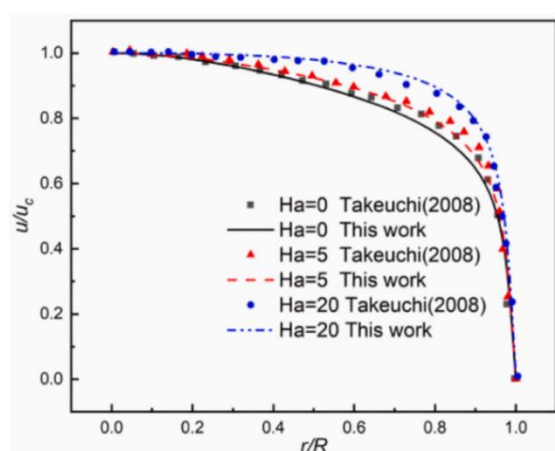
با توجه به مزایای فوق، بدست آوردن حل تحلیلی مساله به درک فیزیکی بهتر مخصوصاً به منظور طراحی بهینه یک سیستم کمک می‌کند. در اینجا از روش کسر تطبیقی (Adaptive Fraction Method) (AFM) [74-76] برای حل تحلیلی معادله دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود. این روش با حل بخش خطی معادله دیفرانسیل شروع می‌شود و متعاقباً متغیرها را با تابع کسری مشتمل بر چند جمله‌ای جایگزین می‌کند. ضرایب اولیه این چند جمله‌ای‌ها در ابتدا برای مطابقت با معادله دیفرانسیل خطی انتخاب می‌شوند. به دنبال این، ضرایب نهایی از طریق یک استراتژی بهینه‌سازی که با مقادیر اولیه مرتبط با معادله دیفرانسیل خطی شروع می‌شود؛ با هدف کاهش واریانس بین معادله پاسخ و معادله دیفرانسیل غیرخطی به دست می‌آید. ضرایب ثابت مطابق با شرایط مرزی از پیش تعیین شده مشخص می‌شوند. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$H(F(\eta)) = L(F(\eta)) + N(F(\eta)) = 0 \quad (19)$$

H به عنوان یک عملگر، L به عنوان یک عملگر خطی و N به عنوان یک عملگر غیر خطی می‌باشد. در ابتدا بخش خطی معادله در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۴ حل تحلیلی و عددی $\bar{V}$ در شرایط
 $Re = 20, Ha = 2, \beta = 0.8$



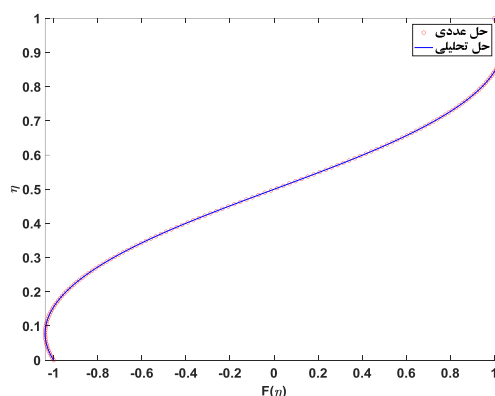
شکل ۵ نتایج تجربی تاکوچی و همکاران و نتایج تحلیل عددی گوا و همکاران برای سرعت جریان داخل لوله به سرعت مرکز لوله برای اعداد هارتمن مختلف [77]

نتایج

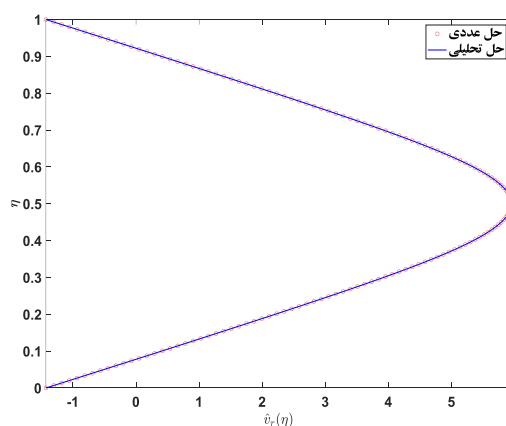
پارامترهای موثر بر مساله شامل Re ، Ha و b می‌باشد. بعلاوه، مساله شامل چندین متغیر بدون بعد F ، $\hat{v}_r$ ، $\hat{v}_\theta$ و $\hat{V}$ می‌باشد که به ترتیب تابع F ، سرعت شعاعی بدون بعد، سرعت مماسی بدون بعد و سرعت بدون بعد می‌باشند.

شکل (۶) نشان می‌دهد که به جز نواحی خیلی نزدیک به دیوارها و هسته مرکزی کانال، افزایش عدد رینولدز منجر به افزایش جزئی در $|F|$ (و در نتیجه طبق رابطه (۸) افزایش در $|\hat{v}_\theta|$) می‌شود. شکل‌های (۷) و (۸) نشان می‌دهد که با افزایش عدد رینولدز، افزایش قابل توجهی در $\hat{v}_r$ و $\hat{V}$ در مرکز کانال وجود دارد و در عین حال، یک کاهش جزئی در نواحی نزدیک‌تر به دیوارها مشاهده می‌شود اما در نواحی چسبیده به دیوارها تقریباً بدون تغییر است. در این دو شکل، پروفیل سرعت شعاعی بی

لوله با استفاده از نتایج تجربی تاکوچی و همکاران و نتایج تحلیل عددی گوا و همکاران در اعداد هارتمن مختلف رسم شده است [77]. مشاهده می‌شود با افزایش عدد هارتمن، پروفیل سرعت در به جز نواحی نزدیک دیواره‌های لوله به صورت تقریباً تخت در می‌آید. این روند مشابه روندی است که در شکل (۱۳) تحقیق حاضر برای سرعت شعاعی جریان داخل کانال واگرا مشاهده گردیده است. با توجه به تطابق خیلی خوب حل تحلیلی و عددی در تحقیق حاضر و مشابهت رفتار مشاهده شده برای پروفیل سرعت شعاعی در کانال واگرا در تحقیق حاضر با نتایج تجربی و عددی پروفیل سرعت داخل لوله در مرجع [77]، اعتبار تحلیل حاضر تایید می‌شود.

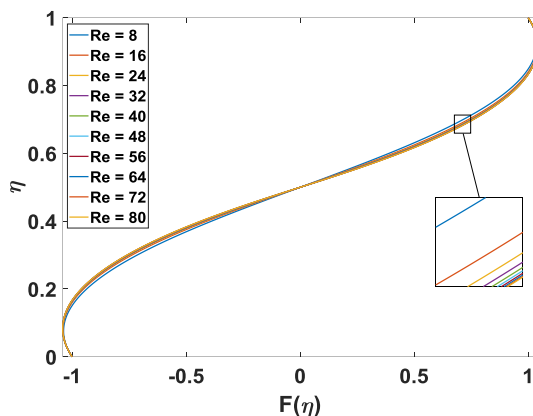


شکل ۶ حل تحلیلی و عددی تابع F در شرایط
 $Re = 20, Ha = 2, \beta = 0.8$

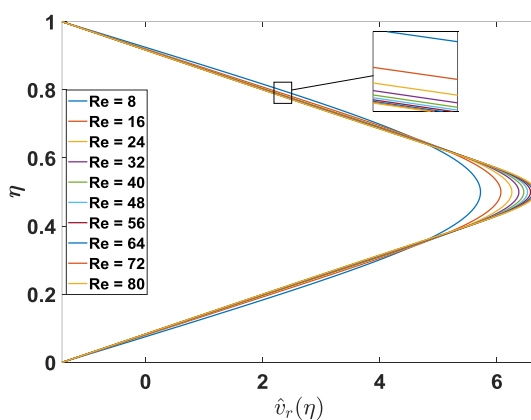


شکل ۷ حل تحلیلی و عددی $\hat{v}_r$ در شرایط
 $Re = 20, Ha = 2, \beta = 0.8$

رینولدز تاثیرات تغییر b را پیش‌بینی کرد. تجزیه و تحلیل اطلاعات ارائه شده در شکل‌های (۲۱) تا (۲۴) نشان می‌دهد که افزایش Ha معمولاً اثراتی برخلاف آنچه در هنگام افزایش Re مشاهده می‌شود ایجاد می‌کند. شکل (۲۱) نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن، خطوط کانتورهای سرعت مماسی بدون بعد مستقیم‌تر شده و از مرکز کانال فاصله می‌گیرند. علاوه بر این، شکل‌های (۲۲) و (۲۳) نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن، کاهش قابل توجهی در هر دو مقدار حداکثر سرعت شعاعی بدون بعد و حداکثر سرعت بدون بعد ایجاد می‌شود. علاوه بر این در اعداد هارتمن بالا در موقعیت‌های شعاعی ثابت، خطوط کانتور یکنواخت‌تر می‌شوند. مطابق شکل (۲۳) در مقادیر به اندازه کافی بزرگ از اعداد هارتمن، دو سرعت بیشینه کوچک در نزدیکی دیوارهای کانال تشکیل می‌شود. شکل (۲۴) نشان می‌دهد که افزایش عدد هارتمن منجر به یکنواختی بردارهای سرعت بدون بعد می‌گردد.

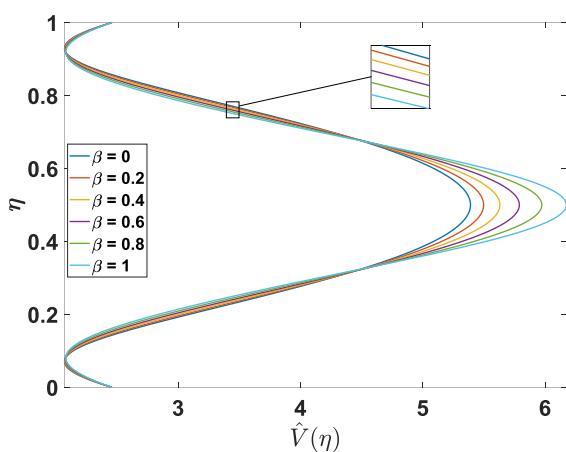


شکل ۶ تغییرات متغیر F برحسب پارامتر Re در شرایط $Ha=1, \beta=1$

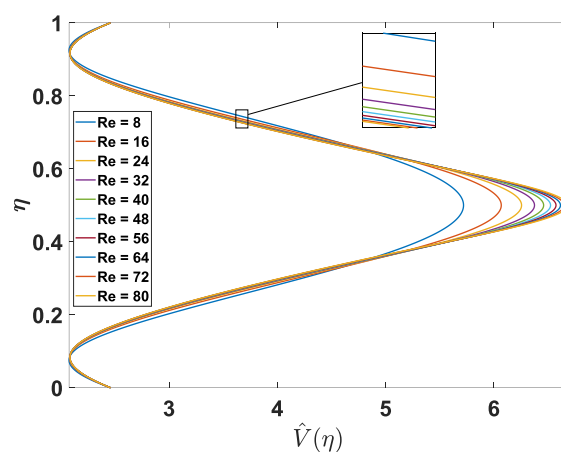


شکل ۷ تغییرات متغیر $\hat{v}_r$ برحسب پارامتر Re در شرایط $Ha=1, \beta=1$

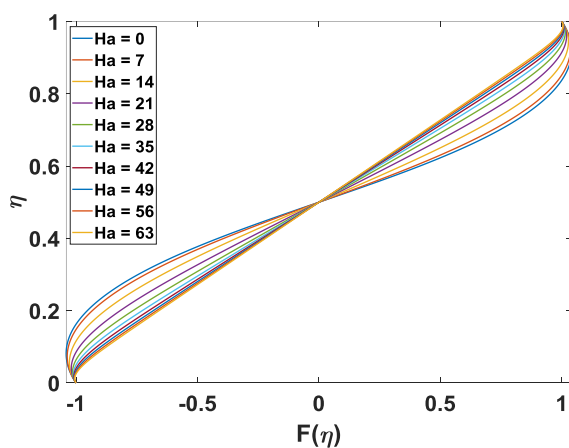
بعد V شکل و پروفیل سرعت بی بعد W شکل می‌باشد. بر طبق شکل‌های (۹) تا (۱۱) افزایش b همان تاثیر افزایش عدد رینولدز را بر متغیرهای F , $\hat{v}_r$, و $\hat{V}$ نشان می‌دهد. طبق اشکال (۱۲) تا (۱۴) به طور کلی افزایش عدد هارتمن رفتاری مخالف افزایش عدد رینولدز را به نمایش می‌گذارد. شکل (۱۲) نشان می‌دهد که افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش $|F|$ (و در نتیجه طبق رابطه (۸) کاهش در $|\hat{v}_r|$) می‌گردد. همانطور که در رابطه (۷) بیان شده است سرعت شعاعی با مشتق تابع F رابطه دارد. مطابق شکل (۱۲)، با افزایش عدد هارتمن، منحنی F به خط مستقیم نزدیک می‌شود بنابراین طبق انتظار، در شکل (۱۳) سرعت شعاعی بدون بعد تقریباً ثابتی به جز نزدیک دیوارها مشاهده می‌گردد. مطابق این شکل، افزایش عدد هارتمن باعث افزایش $\hat{v}_r$ نزدیک دیوارها می‌شود؛ در حالی که به طور همزمان این مقدار را در مرکز کانال کاهش می‌دهد. نیروی لورنتس (Force Lorentz) علت کاهش سرعت در مرکز کانال بر اثر افزایش عدد هارتمن می‌باشد که در مقابل حرکت سیال مخصوصاً در مرکز کانال مقاومت می‌کند [78]. افزایش سرعت نزدیک دیوارها بخاطر بقاء جرم می‌باشد. مطابق شکل (۱۴) افزایش عدد هارتمن باعث کاهش $\hat{V}$ در مرکز کانال و ناحیه خیلی نزدیک دیوارها می‌شود؛ در حالی که در منطقه واقع در بین این دو ناحیه، باعث افزایش آن می‌شود. این پدیده منجر به توزیع سرعت بدون بعد یکنواخت‌تر در ناحیه مرکزی کانال تا عدد هارتمن حدود ۲۸ می‌شود. با این حال، افزایش بیشتر در عدد هارتمن منجر به ظهور دو سرعت بیشینه نزدیک دیوارهای کانال می‌شود. بر طبق شکل (۱۵)، مشاهده می‌شود که افزایش Re منجر به تمایل جزئی خطوط کانتور سرعت مماسی بدون بعد به سمت مرکز کانال می‌شود. از سوی دیگر شکل (۱۶) نشان می‌دهد که با افزایش مقادیر Re ، خطوط کانتور سرعت شعاعی بدون بعد به سمت مرکز کانال تغییر می‌کنند و برجستگی و تیزی بیشتری در راس مخروط کانتور ایجاد می‌شود. علاوه بر این، در مرکز کانال افزایش در حداکثر سرعت شعاعی بدون بعد مشاهده می‌شود. شکل (۱۷) بر تاثیر عدد رینولدز بر بردارهای سرعت بدون بعد تمرکز دارند. با افزایش عدد رینولدز، بردارها یک توزیع زنگوله شکل از خود نشان می‌دهند که با سرعت‌های بالاتر در مرکز و سرعت‌های پایین‌تر در حاشیه مشخص می‌شود. طبق شکل‌های (۱۸) تا (۲۰) به طور کلی، افزایش b همان تاثیر افزایش عدد رینولدز بر رفتار جریان را نمایش می‌دهد. از نظر کاربردی این نتیجه مفیدی است و در عمل بجای تغییر b که دشوار می‌باشد می‌توان با تغییر



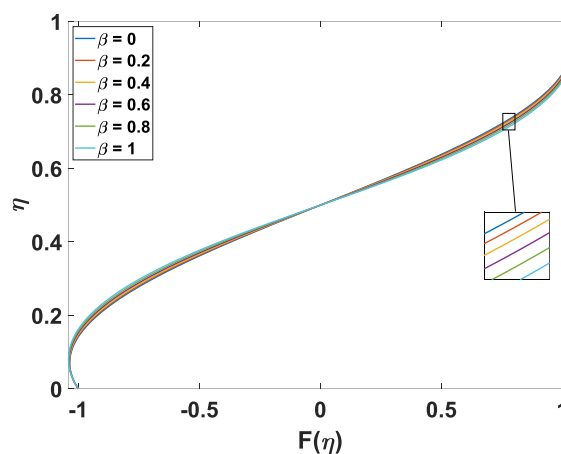
شکل ۱۱ تغییرات متغیر $\hat{V}$ برحسب پارامتر b در شرایط $Re=20, Ha=1$



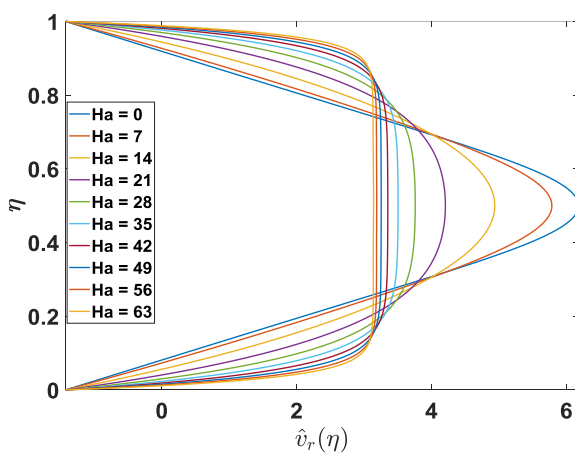
شکل ۸ تغییرات متغیر $\hat{V}$ برحسب پارامتر Re در شرایط $Ha=1, \beta=1$



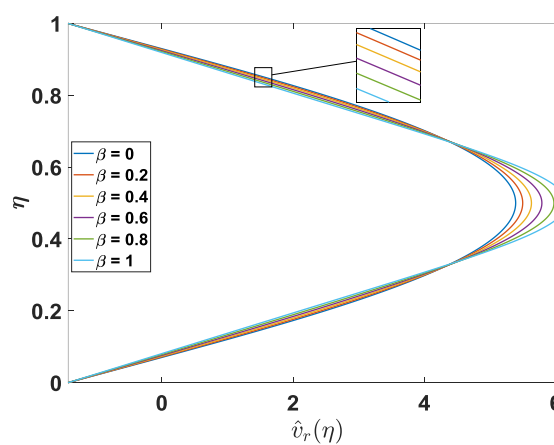
شکل ۱۲ تغییرات متغیر F برحسب پارامتر Ha در شرایط $Re=20, \beta=1$



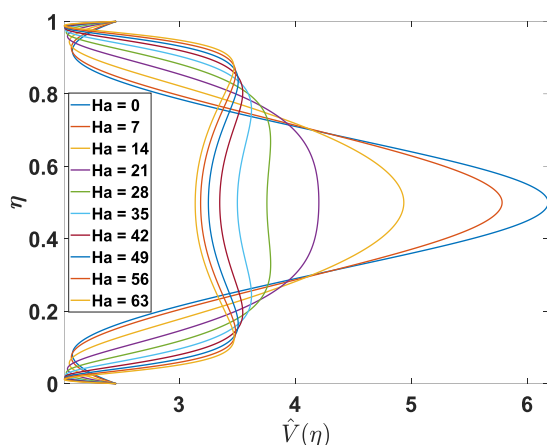
شکل ۹ تغییرات متغیر F برحسب پارامتر b در شرایط $Re=20, Ha=1$



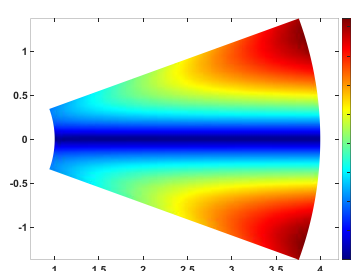
شکل ۱۳ تغییرات متغیر $\hat{v}_r$ برحسب پارامتر Ha در شرایط $Re=20, \beta=1$



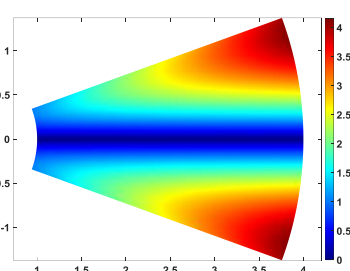
شکل ۱۰ تغییرات متغیر $\hat{v}_r$ برحسب پارامتر b در شرایط $Re=20, Ha=1$



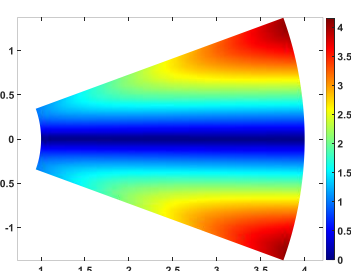
شکل ۱۴ تغییرات متغیر $\hat{V}$ برحسب پارامتر Ha در شرایط $Re=20, \beta=1$



(ج)

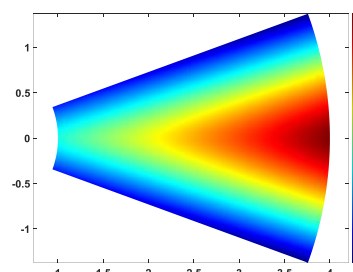


(ب)

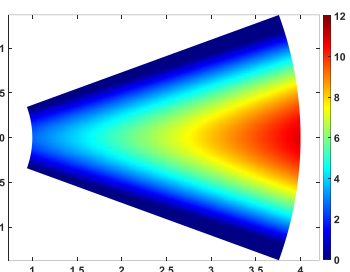


(الف)

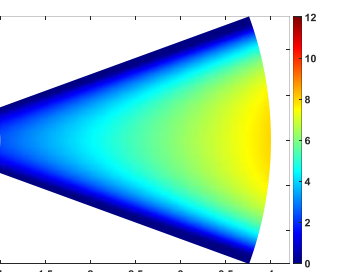
شکل ۱۵ کانتورهای $\hat{v}_\theta$ در شرایط $Ha_{in} = 5, \beta = 0.6$ و (الف) $Re_{in} = 0.8$ (ب) $Re_{in} = 8$ (ج) $Re_{in} = 18$



(ج)

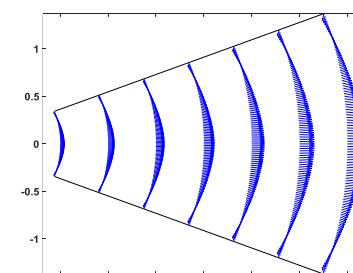


(ب)

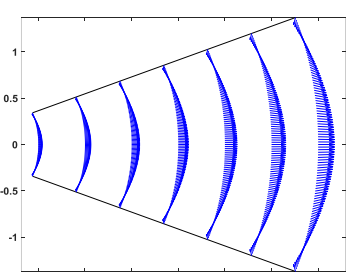


(الف)

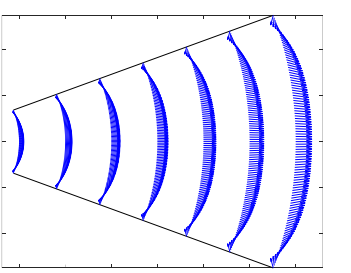
شکل ۱۶ کانتورهای $\hat{v}_r$ در شرایط $Ha_{in} = 5, \beta = 0.6$ و (الف) $Re_{in} = 0.8$ (ب) $Re_{in} = 8$ (ج) $Re_{in} = 18$



(ج)

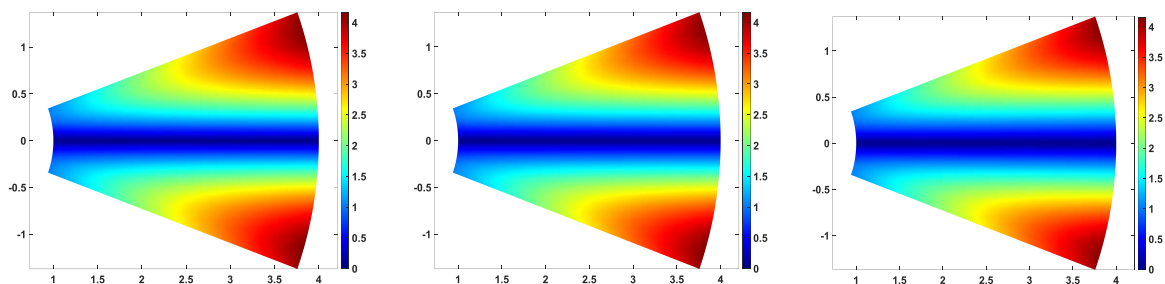


(ب)

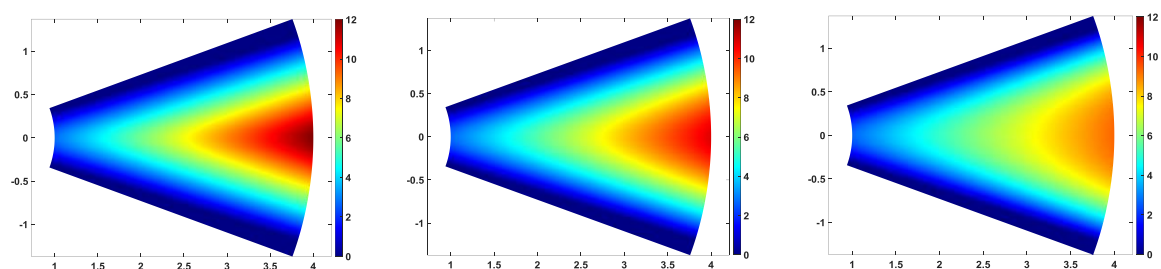


(الف)

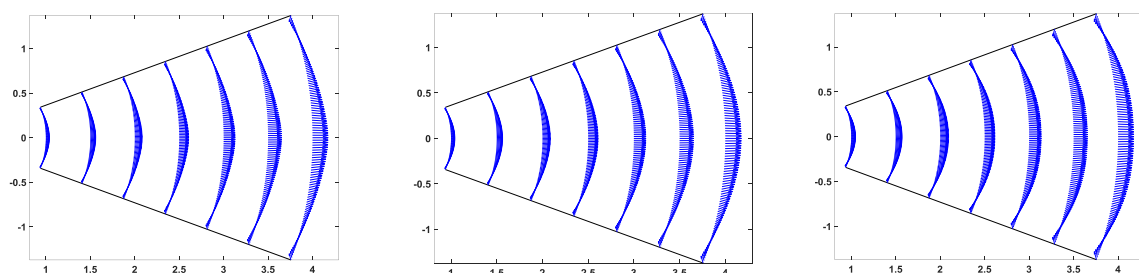
شکل ۱۷ بردارهای $\hat{V}$ در شرایط $Ha_{in} = 5, \beta = 0.6$ و (الف) $Re_{in} = 0.8$ (ب) $Re_{in} = 8$ (ج) $Re_{in} = 18$



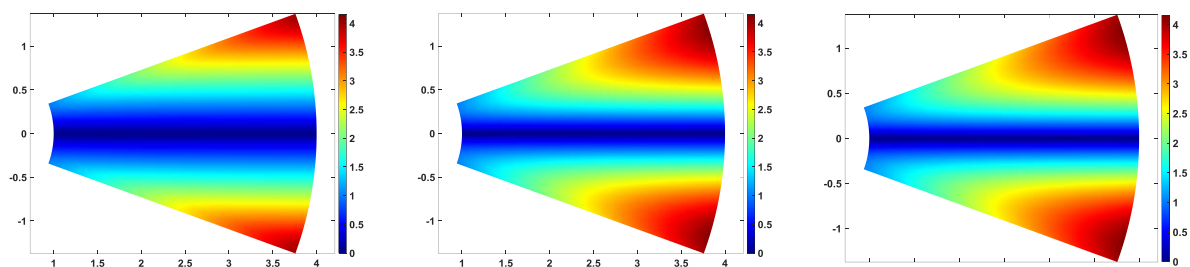
شکل ۱۸ کانتورهای $\hat{v}_\theta$ در شرایط $\text{Re}_{\text{in}} = 8, \text{Ha}_{\text{in}} = 5$ و (الف) $\beta = 0$ (ب) $\beta = 0.6$ (ج) $\beta = 1$



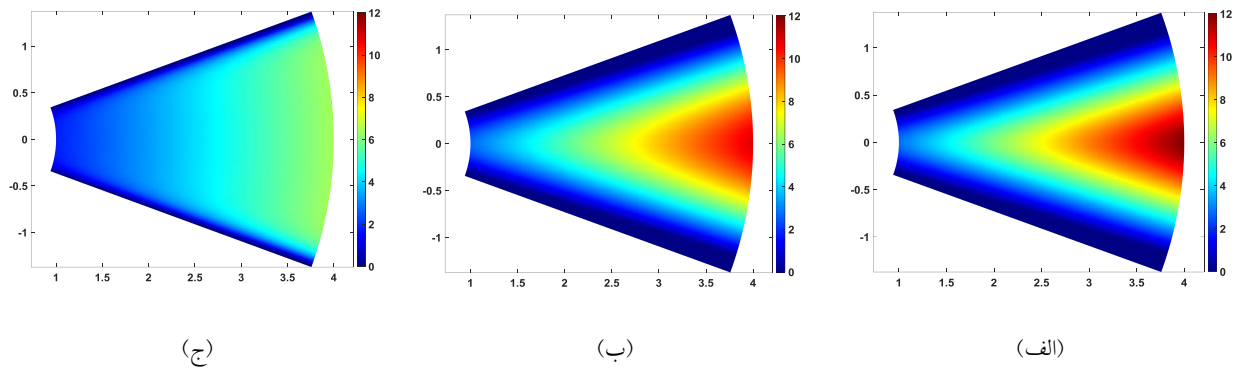
شکل ۱۹ کانتورهای $\hat{v}_r$ در شرایط $\text{Re}_{\text{in}} = 8, \text{Ha}_{\text{in}} = 5$ و (الف) $\beta = 0$ (ب) $\beta = 0.6$ (ج) $\beta = 1$



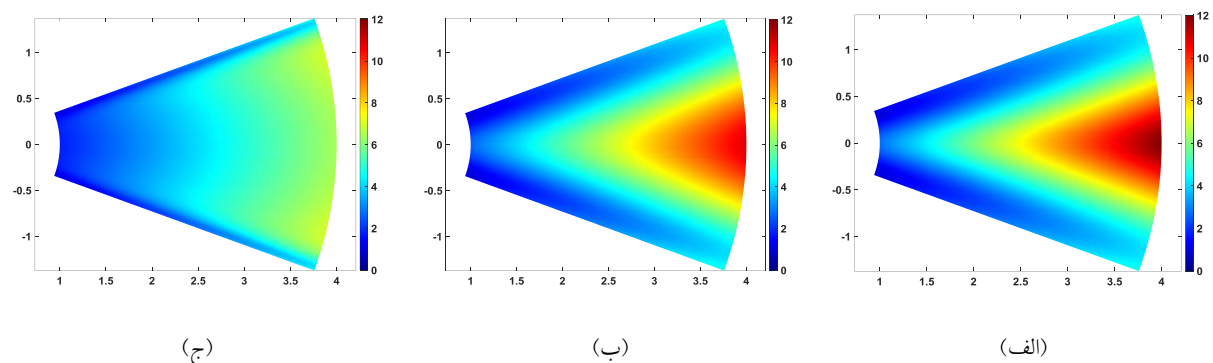
شکل ۲۰ بردارهای $\hat{V}$ در شرایط $\text{Re}_{\text{in}} = 8, \text{Ha}_{\text{in}} = 5$ و (الف) $\beta = 0$ (ب) $\beta = 0.6$ (ج) $\beta = 1$



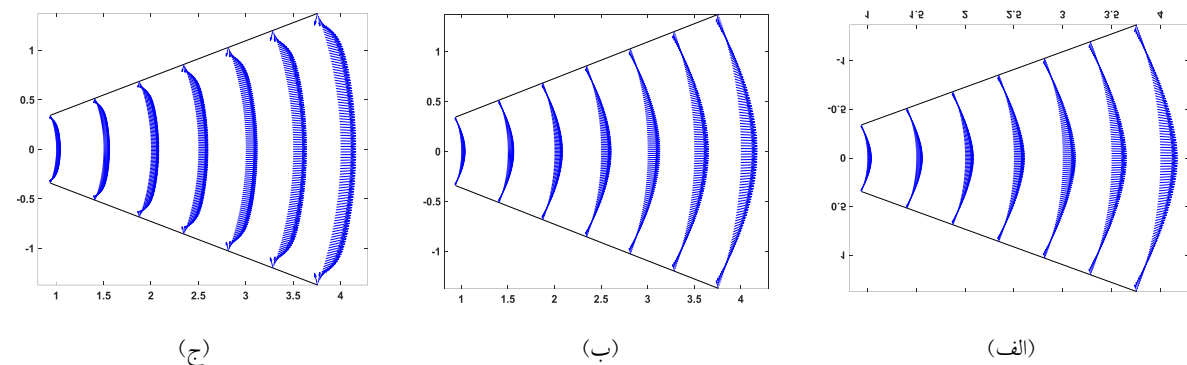
شکل ۲۱ کانتورهای $\hat{v}_\theta$ در شرایط $\text{Re}_{\text{in}} = 8, \beta = 0.6$ و (الف) $\text{Ha}_{\text{in}} = 0$ (ب) $\text{Ha}_{\text{in}} = 5$ (ج) $\text{Ha}_{\text{in}} = 25$



شکل ۲۲. کانتورهای $\hat{V}_r$ در شرایط $Re_{in} = 8, \beta = 0.6$ و (الف) $Ha_{in} = 0$ (ب) $Ha_{in} = 5$ (ج) $Ha_{in} = 25$



شکل ۲۳. کانتورهای $\hat{V}$ در شرایط $Re_{in} = 8, \beta = 0.6$ و (الف) $Ha_{in} = 0$ (ب) $Ha_{in} = 5$ (ج) $Ha_{in} = 25$



شکل ۲۴. بردارهای $\hat{V}$ در شرایط $Re_{in} = 8, \beta = 0.6$ و (الف) $Ha_{in} = 0$ (ب) $Ha_{in} = 5$ (ج) $Ha_{in} = 25$

جمع‌بندی

کاربرد روشهای تزریق یا مکش بر روی سطوح با اهداف متعددی از جمله مدیریت لایه مرزی، کنترل جدایش جریان، کاهش درگ، افزایش انتقال حرارت، تنظیم احتراق، کاهش نویز آیرودینامیکی، کنترل جریان مافوق صوت، اجرای خنک‌سازی فیلم، تسهیل انتقال جرم و سیال انجام می‌شود. در این تحقیق تزریق جریان از دیوارهای کانال به جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی در کانال‌های واگرا بررسی شده است. سرعت مماسی در سراسر کانال

تغییرپذیر می‌باشد. با استفاده از روش تشابهی، معادله دیفرانسیل جزئی حاکم به یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) تبدیل گردیده سپس با دو روش تحلیلی و عددی حل شده است. نتایج حاصل از هر دو روش، انطباق بالایی نشان می‌دهد. از طرفی با افزایش عدد هارتمن، پروفیل سرعت شعاعی در کانال واگرا بجز نواحی نزدیک به دیوارها به حالت تخت در می‌آید که با نتایج تجربی و عددی پروفیل سرعت داخل لوله در دیگر پژوهش‌ها مطابقت دارد. این موارد، بر اثربخشی روش تحلیلی حاضر در

N	عملگر غیر خطی
P	فشار
P_{ij}, q_{ik}	ضرایب ثابت
Re	عدد رینولدز
Re_{in}	عدد رینولدز در ورودی کانال
r	مختصات شعاعی
$\vec{V}$	بردار سرعت
$V_{\theta w1}$	سرعت مماسی جریان تزریقی از دیوار پایینی
$V_{\theta w2}$	سرعت مماسی جریان تزریقی از دیوار بالایی
V_r	سرعت شعاعی
V_θ	سرعت مماسی
V_{w1}, V_{w2}	مقادیر ثابت

علامه یونانی

α	زاویه باز شدگی کانال
β	مرتبه مشتق کسری تکانه
η	موقعیت زاویه ای بی بعد
θ	مختصات مماسی
μ	لزجت دینامیکی
ν	لزجت سینماتیکی
ρ	چگالی
σ	رسانش الکتریکی
ψ	تابع جریان

بالانویس

$\wedge$	کمیت بی بعد شده
----------	-----------------

واژه نامه

پیشنهادی نویسنده	واژه لاتین	پیشنهادی ویراستار
تبدیل تشابهی	similarity transformation	
روش کسر تطبیقی	adaptive fraction Method (AFM)	

تخمین خواص جریان تاکید می کند. یافته های اصلی مطالعه را می توان به صورت زیر تشریح کرد:

۱. افزایش عدد رینولدز: باعث افزایش قابل توجهی در مقادیر سرعت بدون بعد و سرعت شعاعی بی بعد در مرکز کانال می شود در حالی که یک کاهش جزئی در نواحی نزدیکتر به دیوارها مشاهده می شود اما در نواحی خیلی نزدیک دیوارها تقریباً بدون تغییر است. این منجر به توزیع زنگوله شکل بردارهای سرعت بدون بعد می شود و از طرفی منجر به تیزتر شدن رأس مخروط کانتورهای سرعت می گردد.
۲. افزایش مرتبه مشتق کسری معادله ممنتوم: همان تاثیر افزایش عدد رینولدز را بر جریان نمایش می دهد.
۳. افزایش عدد هارتمن: به طور کلی منجر به رفتاری بر خلاف جهت افزایش عدد رینولدز می گردد. افزایش عدد هارتمن باعث می شود خطوط کانتور سرعت مماسی بی بعد، مستقیم تر شده و از مرکز کانال دورتر شوند. همچنین بردارهای سرعت بدون بعد یکنواخت تر می شوند. علاوه بر این، با کاهش قابل توجهی در حداکثر سرعت بدون بعد و حداکثر سرعت شعاعی بدون بعد همراه است. خطوط کانتور سرعت شعاعی بی بعد، یکنواختی بیشتری را در موقعیت های شعاع ثابت نشان می دهند و دو سرعت بدون بعد بیشینه کوچک در نزدیکی دیوارها مشاهده می شود.

فهرست علامه انگلیسی

$\vec{B}$	میدان مغناطیسی
B_0	شدت میدان مغناطیسی
C_i	ضریب ثابت
D_r^β	مشتق مرتبه β معادله تکانه در جهت r

F	تابع بی بعد معادله تکانه
F_L	جملات خطی ضابطه F
f_A	پاسخ تحلیلی
f_N	پاسخ عددی
H	عملگر
Ha	عدد هارتمن
L	عملگر خطی

	cavitation	حفره زایی
	convergent and divergent channel	کانال همگرا واگرا
	injection	تزریق

	root mean square error	ریشه میانگین مربعات خطا
	Lorentz Force	نیروی لورنتس
	magneto hydrodynamic flow	جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی
	fractional derivative	مشتق کسری
	semi-analytical method	روش نیمه تحلیلی

تقدیر و تشکر

نویسندگان از مشارکت‌های یعقوب فرجامی و محمد رسول نجفی برای کمک در اجرا و برنامه‌نویسی روش حل تحلیلی، صمیمانه قدردانی می‌کنند.

مراجع

- [1] M. Al-Malki, Z. Hussain, S. Garrett, and S. Calabretto, "Effects of parietal suction and injection on the stability of the Blasius boundary-layer flow over a permeable, heated plate," *Physical Review Fluids*, vol. 6, 2021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.113902>
- [2] P. Gao "Effects of wall suction/injection on the linear stability of flat Stokes layers," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 551, pp. 303-308, 2006. <https://doi.org/10.1017/S0022112005008554>
- [3] T. Friederich, and M. J. Kloker, "Control of the secondary cross-flow instability using localized suction," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 706, pp. 470-495, 2012. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.269>
- [4] R. Kant, N. Vinod, and U. Ghosh, "Stability and Control of the Flow in a Porous Channel," *IUTAM Bookseries*, pp. 419-437, 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67902-6_36
- [5] Y. Y. Xu, X. Li, H. J. Tan, H. X. Huang, and Y. Zhang, "Compression Corner Shock Wave/Boundary Layer Interaction Flow Control Based on Local Particles Injection," *Tuijin Jishu/Journal of Propulsion Technology*, vol. 44, no. 2, 2023. <https://doi.org/10.13675/j.cnki.tjjs.2207089>
- [6] M. Debiasi, M. Herberg, Y. Zeng, H. M. Tsai, and S. Dhanabalan, "Control of Flow Separation in S-Ducts via Flow Injection and Suction," *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Aerospace Sciences Meetings: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008. <https://doi.org/10.2514/6.2008-74>
- [7] N. Riley, "On the control of laminar flow separation," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 57, no. 2, pp. 237-244, 2004. <https://doi.org/10.1093/qjmam/57.2.237>
- [8] R. Seele, C. Chen, C. Bhamburkar, and I. Wygnanski, "Some effects of blowing, suction and trailing edge bluntness on flow separation from thick airfoils; computations & measurements," p. 3357, 2011. <https://doi.org/10.2514/6.2011-3357>
- [9] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, fifth ed.: McGraw-Hill Education, 2011.
- [10] H. Schlichting, and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*: Springer, 2017.

- [11] A. M. Kuethe, and C.-Y. Chow, *Foundations of Aerodynamics: Bases of Aerodynamic Design*, Fifth edition ed.: John Wiley and Sons, 1998.
- [12] P. B. S. Lissaman, "Low-Reynolds-Number Airfoils," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 15, no. 1, pp. 223-239, 1983.
- [13] A. Kitagawa, P. Denissenko, and Y. Murai, "Effect of heated wall inclination on natural convection heat transfer in water with near-wall injection of millimeter-sized bubbles," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 113, pp. 1200-1211, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.06.009>
- [14] S. L. Kokjohn, and R. D. Reitz, "Investigation of charge preparation strategies for controlled premixed charge compression ignition combustion using a variable pressure injection system," *International Journal of Engine Research*, vol. 11, no. 4, pp. 257-282, 2010. <https://doi.org/10.1243/14680874JER06409>
- [15] S. Jahangirian, A. Ghafourian, M. Abarham, and M. H. Saidi, "Effect of vortex flow on heat transfer to combustion chamber wall," vol. 4708, pp. 37-44, 2004. <https://doi.org/10.1115/IMECE2004-59550>
- [16] T. Seljak, U. Žvar Baškovič, and T. Kutrašnik, "Spatially selective dilution - A novel approach for heat release control in continuous combustion," *Journal of Environmental Management*, vol. 316, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2022.115068>
- [17] Z. Song, D. Chang, H. Sun, X. Cheng, and H. Wang, "Suppression of flow-induced resonant cavity noise using mass flow injection," *Shengxue Xuebao/Acta Acustica*, vol. 48, no. 1, pp. 225-237, 2023. <https://dx.doi.org/10.15949/j.cnki.0371-0025.2023.01.030>
- [18] H. E. Hafsteinsson, L. E. Eriksson, N. Andersson, D. R. Cuppoletti, E. Gutmark, and E. Prisell, "Supersonic jet noise reduction using steady injection and flapping injection," In 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2013, p. 2144. <https://doi.org/10.2514/6.2013-2144>
- [19] B. E. Schmidt, N. P. Bitter, H. G. Hornung, and J. E. Shepherd, "Injection into supersonic boundary layers," *AIAA Journal*, vol. 54, no. 1, pp. 161-173, 2016. <https://doi.org/10.2514/1.J054123>
- [20] Z. Wang, J. Chang, Y. Li, and C. Kong, "Investigation of shock wave control by suction in a supersonic cascade," *Aerospace Science and Technology*, vol. 108, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106382>
- [21] J. Chang, Y. Du, S. Zheng, X. Duan, and Y. Liu, "Performance analysis of different influencing factors on film cooling and the internal relations with vortex structures," *AIP Advances*, vol. 9, no. 7, 2019. <https://doi.org/10.1063/1.5110726>
- [22] Z. Liu, W. Zhang, Y. Xie, Y. Ding, and Z. Feng, "Experimental Study on Influence of Mid-Passage Gap Leakage on Turbine Endwall Film Cooling Characteristics," *Hsi-An Chiao Tung Ta Hsueh/Journal of Xi'an Jiaotong University*, vol. 57, no. 5, pp. 1-10, 2023. <https://doi.org/10.22044/jsfm.2025.15521.3928>
- [23] N. Balcazar-Arciniega, J. Rigola, and A. Oliva, "DNS of Mass Transfer in Bi-dispersed Bubbly Flows in a Vertical Pipe," *ERCOFTAC Series*, pp. 55-61, 2024. https://doi.org/10.1007/978-3-031-47028-8_9
- [24] A. K. Ray, *Coulson and Richardson's Chemical Engineering: Volume 2B: Separation Processes*, 2023.
- [25] H. Alvarez, "Teaching control into a mass transfer operations course," in 2021 IEEE 5th Colombian Conference on Automatic Control (CCAC), Ibagué, Colombia, Oct. 2021, pp. 303-308.

<https://doi.org/10.1109/CCAC51819.2021.9633313>

- [26] F. A. Versteeg, F. Picchioni, and G. F. Versteeg, "On the mass transfer of supercritical fluids, specifically supercritical CO₂: An overview," *Chemical Engineering Journal*, vol. 493, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2024.152521>
- [27] B. Özkaya, A. H. Kaksonen, E. Sahinkaya, and J. A. Puhakka, "Fluidized bed bioreactor for multiple environmental engineering solutions," *Water Research*, vol. 150, pp. 452-465, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2018.11.061>
- [28] P. Le Cloirec, S. Giraudet, N. Cimetiere, P. F. Biard, A. Couvert, and D. Wolbert, "Process modeling and environmental engineering," *Actualite Chimique*, no. 450, pp. 19-24, 2020.
- [29] A. Sharifi Haddad, H. Hassanzadeh, J. Abedi, and Z. Chen, "Impact of adsorption on mass transfer in fractured reservoirs," in *SPE Canada Heavy Oil Conference*, Calgary, AB, Canada, June 2012, SPE-157863-MS. <https://doi.org/10.2118/157863-MS>
- [30] J. Fan, S. Li, Z. Wu, and Z. Chen, "Diffusion and mixing in microfluidic devices," *Microfluidics for Pharmaceutical Applications: From Nano/Micro Systems Fabrication to Controlled Drug Delivery*, pp. 79-100, 2019. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812659-2.00003-X>
- [31] W. Y. Liu, W. Wang, X. J. Ju, Z. Liu, R. Xie, and L. Y. Chu, "Functional microparticles from multiscale regulation of multiphase emulsions for mass-transfer intensification," *Chemical Engineering Science*, vol. 231, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.116242>
- [32] S. Shaheen, M. B. Arain, N. Ijaz, F. Z. Duraihem, and J. Hu, "Insights into metachronal propulsion's influence on Ellis fluid flow across tri-layers amid dynamic thermal transport: Theoretical study," *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2024. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300977>
- [33] L. Reid, "An Introduction to Biomedical Computational Fluid Dynamics," *Advances in Experimental Medicine and Biology*, pp. 205-222, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76951-2_10
- [34] P. J. Cullen, *Food Mixing: Principles and Applications*, 2009.
- [35] J. Y. Oldshue, "Agitation," *Fermentation and Biochemical Engineering Handbook: Principles, Process Design, and Equipment: Third Edition*, pp. 109-133, 2014. <https://doi.org/10.1016/B978-1-4557-2553-3.00007-6>
- [36] M. Farid, "Heat and Mass Transfer in Food Processing," *Handbook of Farm Dairy and Food Machinery*, pp. 367-390, 2007. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814803-7.00017-8>
- [37] Q. Yuan, X. Zhou, F. Zeng, K. D. Knorr, and M. Imran, "Investigation of concentration-dependent diffusion on frontal instabilities and mass transfer in homogeneous porous media," *Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 96, no. 1, pp. 323-338, 2018. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814803-7.00017-8>
- [38] M. A. Miranda, A. K. Yegya Raman, D. M. Lavenson, H. J. Subramani, S. A. Mohammad, and C. P. Aichele, "Gas Evolution Rates in Supersaturated Water-in-Oil Emulsions at Elevated Pressures," *Energy and Fuels*, pp. 8176-8183, 2019.
- [39] T. Kajiwara, and Y. Nakayama, "Capturing the efficiency of a melt-mixing process for polymer processing," *Journal of Chemical Engineering of Japan*, vol. 44, no. 11, pp. 831-839, 2011. <https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.9b01568>

- [40] N. Balcázar, O. Antepará, J. Rigola, and A. Oliva, "DNS of Drag-Force and Reactive Mass Transfer in Gravity-Driven Bubbly Flows," *ERCOFTAC Series*, pp. 119-125, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42822-8_16
- [41] B. Sundén, "On computational heat transfer in industrial applications," in Proc. ASME Heat Transfer Summer Conference, Minneapolis, MN, USA, July 2013, p. HT2013-V003T21A013. <https://doi.org/10.1115/HT2013-17289>
- [42] J. D. Ramsey, and K. Bell, "Applications: Heat exchangers for the process and energy industries," *CRC Handbook of Thermal Engineering, Second Edition*, pp. 459-500, 2017.
- [43] R. Herrmann-Heber, S. F. Reinecke, and U. Hampel, "Dynamic aeration for improved oxygen mass transfer in the wastewater treatment process," *Chemical Engineering Journal*, vol. 386, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2019.122068>
- [44] D. S. N. Bharghava, T. Jana, and M. Kaushik, "A survey on synthetic jets as active flow control," *Aerospace Systems*, vol. 7, no. 3, pp. 435-451, 2024. <https://doi.org/10.1007/s42401-024-00301-5>
- [45] M. Krstić, "Mixing control for jet flows," *Combustion Processes in Propulsion: Control, Noise, and Pulse Detonation*, pp. 87-96, 2005.
- [46] A. Meyer, B. M. Sloyan, K. L. Polzin, H. E. Phillips, and N. L. Bindoff, "Mixing variability in the Southern Ocean," *Journal of Physical Oceanography*, vol. 45, no. 4, pp. 966-987, 2015. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-14-0110.1>
- [47] C. Aeppli, M. Berg, O. A. Cirpka, C. Holliger, R. P. Schwarzenbach, and T. B. Hofstetter, "Influence of mass-transfer limitations on carbon isotope fractionation during microbial dechlorination of trichloroethene," *Environmental Science and Technology*, vol. 43, no. 23, pp. 8813-8820, 2009. <https://doi.org/10.1021/es901481b>
- [48] A. Vailati, H. Bataller, M. M. Bou-Ali, M. Carpineti, R. Cerbino, F. Croccolo, S. U. Egelhaaf, F. Giavazzi, C. Giraudet, G. Guevara-Carrion, D. Horváth, W. Köhler, A. Mialdun, J. Porter, K. Schwarzenberger, V. Shevtsova, and A. De Wit, "Diffusion in liquid mixtures," *npj Microgravity*, vol. 9, no. 1, 2023. <https://doi.org/10.1038/s41526-022-00246-z>
- [49] N. Ghasem, "Mass transfer modeling in nanofluids: Theoretical basics and model development," *Nanofluids and Mass Transfer*, pp. 247-271, 2021. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-823996-4.00009-4>
- [50] C. Kleinstreuer, and Z. Xu, "Mathematical modeling and computer simulations of nanofluid flow with applications to cooling and lubrication," *Fluids*, vol. 1, no. 2, 2016. <https://doi.org/10.3390/fluids1020016>
- [51] J. Z. Jiang, S. Zhang, X. L. Fu, L. Liu, and B. M. Sun, "Review of gas-liquid mass transfer enhancement by nanoparticles from macro to microscopic," *Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung*, vol. 55, no. 8, pp. 2061-2072, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00231-019-02580-7>
- [52] J. X. Duan, L. Y. Zhu, and Z. B. Wang, "Research Progress of Liquid Heterogeneous Mixing Process," *Petrochemical Equipment*, vol. 50, no. 1, pp. 47-52, 2021. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-7466.2021.01.009>
- [53] B. N. Arzamasov, and V. N. Simonov, "Circulation method for depositing diffusion coatings," *Metal Science and Heat Treatment*, vol. 52, no. 9-10, pp. 403-407, 2011. <https://doi.org/10.1007/s11041-010-9291-9>
- [54] A. Brun, H. Dihang, and L. Brunel, "Film formation of coatings studied by diffusing-wave spectroscopy," *Progress in Organic Coatings*, vol. 61, no. 2-4, pp. 181-191, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2007.09.041>

- [55] M. S. Tirumkudulu, and V. S. Punati, "Solventborne Polymer Coatings: Drying, Film Formation, Stress Evolution, and Failure," *Langmuir*, vol. 38, no. 8, pp. 2409-2414, 2022. <https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.1c03124>
- [56] B. Ishtiaq, S. Nadeem, and J. Alzabut, "Thermal analysis of magnetized Walter's-B fluid with the application of Prabhakar fractional derivative over an exponentially moving inclined plate," *Physics of Fluids*, vol. 35, 2023. <https://doi.org/10.1063/5.0179491>
- [57] S. Ahmad, S. Ul Haq, F. Ali, I. Khan, and S. Eldin, "Free convection channel flow of couple stress casson fluid: A fractional model using Fourier's and Fick's laws," *Frontiers in Physics*, vol. 11, pp. 1031042, 2023. <https://doi.org/10.3389/fphy.2023.1031042>
- [58] S. Abbas, Z. Nisa, M. Nazar, M. Amjad, H. Ali, and A. Jan, "Application of Heat and Mass Transfer to Convective Flow of Casson Fluids in a Microchannel with Caputo-Fabrizio Derivative Approach," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 49, 2023. <https://doi.org/10.1007/s13369-023-08351-1>
- [59] R. Reyaz, A. Q. Mohamad, Y. Lim, M. Saqib, and S. Shafie, "Analytical Solution for Impact of Caputo-Fabrizio Fractional Derivative on MHD Casson Fluid with Thermal Radiation and Chemical Reaction Effects," *Fractal and Fractional*, vol. 6, pp. 38, 2022. <https://doi.org/10.3390/fractalfract6010038>
- [60] S. Yang, H. W. Zhou, and W. G. Ren, "A Unified Fractional Derivative Model for Darcian and Non-Darcian Flow in Porous Media," in *ISRM International Symposium - EUROCK 2020*, 2020, pp. ISRM-EUROCK-2020-019.
- [61] H. W. Zhou, and S. Yang, "Fractional derivative approach to non-Darcian flow in porous media," *Journal of Hydrology*, vol. 566, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2018.09.039>
- [62] J. Suzuki, M. Gulian, M. Zayernouri, and M. D'Elia, "Fractional Modeling in Action: a Survey of Nonlocal Models for Subsurface Transport, Turbulent Flows, and Anomalous Materials," *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, vol. 5, 2022. <https://doi.org/10.1007/s42102-022-00085-2>
- [63] A. Milovanov, and J. Rasmussen, "Turbulence spreading by resonant wave-wave interactions: A fractional kinetics approach," *Physical Review E*, vol. 109, 2024. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.045105>
- [64] R. Reyaz, A. Q. Mohamad, Y. Lim, and S. Shafie, "Analytical Treatment for Accelerated Riga Plate on Fractional Caputo-Fabrizio Casson Fluid," *CFD Letters*, vol. 15, pp. 114-131, 2023. <https://doi.org/10.37934/cfdl.15.4.114131>
- [65] M. Shahrim, A. Q. Mohamad, L. Jiann, M. Zakaria, S. Shafie, Z. Ismail, and A. Kasim, "Exact Solution of Fractional Convective Casson Fluid Through an Accelerated Plate," *CFD Letters*, vol. 13, pp. 15-25, 2021. <https://doi.org/10.37934/cfdl.15.4.114131>
- [66] A. Abouelregal, M. Marin, A. Foul, and S. S. Askar, "Coupled responses of thermomechanical waves in functionally graded viscoelastic nanobeams via thermoelastic heat conduction model including Atangana-Baleanu fractional derivative," *Scientific Reports*, vol. 14, 2024.
- [67] A. Soleiman, A. Abouelregal, M. Fahmy, and H. M. Sedighi, "Thermomechanical Behavior of Functionally Graded Nanoscale Beams Under Fractional Heat Transfer Model with a Two-Parameter Mittag-Leffler Function," *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 48, 2023. <https://doi.org/10.1007/s40997-023-00698-y>

- [68] S. Ahmed, M. Mansour, E. Abdel-Salam, and E. Mohamed, "Effects of the Caputo fractional derivatives on convective flow in wavy vented enclosures filled with a porous medium using $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Cu}$ hybrid nanofluids," *Heat Transfer*, vol. 49, 2020. <https://doi.org/10.1002/htj.21699>
- [69] R. Baithalu, S. R. Mishra, and S. Panda, "Heat transfer and flow dynamics of methanol-based CuO and MgO hybrid nanomaterial in convergent and divergent channels: a Jeffery–Hamel flow study," *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 149, 2024. <https://doi.org/10.1007/s10973-024-13914-x>
- [70] A. Boudjemline, I. Ahmad, S. Rehman, H. Ali, and N. ben khedher, "Jeffery–Hamel flow extension and thermal analysis of Oldroyd-B nanofluid in expanding channel," *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 48, 2022. <https://doi.org/10.1515/jnet-2022-0052>
- [71] O. Edward Richard, K. Mathew Ngugi, K. Mark, and U. Surindar Mohan, "Unsteady Jeffrey-Hamel Flow in the Presence of Oblique Magnetic Field with Suction and Injection," *Applied and Computational Mathematics*, vol. 9, no. 1, pp. 1-13, 2020.
- [72] S. Hamrelaine, F. Mebarek-Oudina, and M. Rafik, "Analysis of MHD Jeffery Hamel Flow with Suction/Injection by Homotopy Analysis Method," vol. 58, pp. 173-186, 2019.
- [73] O. Edward Richard, K. Mathew Ngugi, K. Mark, and U. Surindar Mohan, "Heat and Mass Transfer on MHD Jeffrey-Hamel Flow in Presence of Inclined Magnetic Field," *Applied and Computational Mathematics*, vol. 9, no. 4, pp. 108-117, 2020. <https://doi.org/10.11648/j.acm.20200904.11>
- [74] h. Ravanbod, M. Hajihasani, Y. Farjami, and E. Norouzi, *Developing an Adaptive Fractional Model of a Magnetic Structure using Evolutionary Algorithm*, 2008. <https://doi.org/10.1109/ICCCYB.2008.4721403>
- [75] P. B. Ghaleh, A. A. Khayyat, Y. Farjami, and A. Abedian, "Approximate analytical solutions of an axially moving spacecraft appendage subjected to tip mass," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 228, no. 9, pp. 1487-1497, 2013. <https://doi.org/10.1177/0954410013494140>
- [76] A. K. Sahoo, and S. Chakraverty, "Curriculum Learning-Based Artificial Neural Network Model for Solving Differential Equations," pp. 129-145, 2021. https://doi.org/10.1007/978-981-16-4713-0_6
- [77] J. Guo, Y. Chen, J. Hu, Z. Xu, and C. Ma, "Numerical study on the flow and heat transfer of molten salt in a horizontal pipe applied transverse magnetic field," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 192, pp. 108416, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2023.108416>
- [78] S. M. Živojin, D. D. Nikodijević, B. D. Blagojević, and S. R. Savić, "MHD flow and heat transfer of two immiscible fluids between moving plates," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 34, no. 3-4, pp. 351-372, 2010. <https://doi.org/10.1139/tcsme-2010-0021>