



Ferdowsi
University of
Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir



Society of
Manufacturing
Engineering of
Iran

Investigating the Effect of Structural Heterogeneity Model on the Buckling Capacity of Thin-Walled Porous Functionally Graded I-Beams and Channel Beams

Research Article

Reza Jahangiri¹, Rasoul Ghanbari², Mikaeil Naseri³, Akbar Allahverdizadeh⁴, Iraj Shakeri⁵

[10.22067/jacsm.2025.92494.1322](https://doi.org/10.22067/jacsm.2025.92494.1322)

Abstract -- The modeling and prediction of the structural characteristics of thin-walled beams and columns are of significant importance due to the potential occurrence of lateral buckling under eccentric, concentrated, and distributed lateral loads. In the present study, by incorporating the effects of warping, heterogeneity, porosity, and based on Vlasov's assumptions and the application of Hamilton's principle, the governing characteristic equations for the lateral buckling of multi-layered thin-walled porous functionally graded I-beams and channel beams were introduced. Using the finite element method and describing the displacement components of points within the elements in terms of Lagrangian and Hermitian interpolation functions, the governing eigenvalue equation was solved numerically. To validate the results of this study, they were compared with other references. The effect of various parameters, particularly porosity index, mixing index, material modulus ratio, end-moment ratio, and cross-sectional strength parameter, on the load-bearing capacity of multilayer thin-walled beams under multiple boundary conditions was investigated. It was demonstrated that various parameters have an important role in determining the range of buckling instability.

Key Words: Vlasov assumptions, Functionally Graded Beam, Lateral Buckling, Volume Fraction Index, Porosity Index

1. Introduction

Functionally Graded Materials (FGMs) exhibit continuous composition variation, especially along the thickness direction. This study analyzes ceramic-metal FGMs, incorporating porosity and structural heterogeneity effects, with material properties modeled via a power-law mixture rule. Using Hamilton's principle, we derive governing

equations for the static equilibrium of beams under diverse lateral loads. The critical buckling load of thin-walled FGM sandwich beams is examined for concentrated/distributed forces and moments, considering multiple thickness-wise gradation profiles. Numerical solutions for static instability are validated against prior literature. The equilibrium equations account for axial/lateral centroid displacements, shear-center effects, sectional rotation, and in-plane displacements under varying heterogeneity and loading conditions. A finite element approach solves the eigenvalue problem for lateral buckling (implemented in MATLAB), with results presented as characteristic curves. Parametric studies assess the impact of aspect ratio, porosity, and gradation indices on: (a) Channel section beams, and (b) mono-symmetric I-section beams.

Avcar conducted a comprehensive investigation on the free vibration behavior of functionally graded material (FGM) beams containing sigmoid and power-law defects. His findings revealed that such defects can significantly influence the vibrational response of FGM beams, highlighting the necessity of more precise design approaches to compensate for imperfections [1]. In 2020, AlSaid-Alwan and Avcar performed a comparative free vibration analysis of FGM beams using various beam theories. Their study demonstrated that the choice of an appropriate theoretical model plays a crucial role in achieving accurate predictions of the vibration characteristics [2]. Babayi and colleagues examined the thermal buckling of FGM plates and showed that thermal loads may induce instability in functionally graded plates, thereby underscoring the need for structural reinforcement under such loading conditions [3]. Youzera et al.

* Manuscript received 2025 February 4, Revised 2025 April 7, Accepted 2025 June 9.

¹ Corresponding author. Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Salmas Branch.

Email: R_Jahangiri2004@tabrizu.ac.ir.

² M.S Graduate, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

³ Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Salmas Branch, Salmas, Iran.

⁴ Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

⁵ M.S Graduate, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Salmas Branch, Salmas, Iran.

investigated the influence of axial–bending coupling effects on the free vibration response of FGM beams in thermally varying environments. Their results indicated that these coupling effects substantially alter the dynamic behavior of the beams, implying the need for more accurate thermal–mechanical design strategies [4]. Using the finite element method, Wang and collaborators analyzed the vibration and buckling behavior of FGM beams while explicitly modeling internal structural defects. Their findings confirmed that internal imperfections have a pronounced impact on the dynamic response and buckling resistance, necessitating greater attention during the design of FGM structures [5]. Most recently, Xie and co-workers examined the buckling behavior and stability of thin-walled FGM beams under axial loading. They reported that proper material selection and optimized structural design can effectively enhance the stability and buckling resistance of these beams, while simultaneously reducing structural weight [6].

2. Methods

This study considers three classifications of porous functionally graded materials (FGMs) with unidirectional property distributions along the thickness:

Type A: Material properties follow a power-law distribution, transitioning from pure metal (bottom surface) to pure ceramic (top surface), as depicted in Figure 1. The ceramic phase volume fraction can be defined by Equation (1).

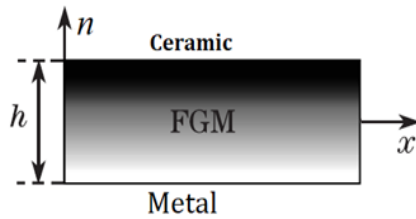


Fig 1: Type A Functionally Graded Structure

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{h} \right)^p, -\frac{h}{2} \leq n \leq +\frac{h}{2} \quad (1)$$

Type B: As illustrated in Figure 2, it is assumed that the thickness of the upper layer of the cross-section is equal to αh and is composed of pure ceramic material. In contrast, at the top surface of the lower layer, the material properties vary from pure metallic at $n = -h/2$ to pure ceramic at $n = (0.5 - \alpha)h$ accordingly, the ceramic phase volume fraction within the layers of Type B model can be defined by Equations (2).

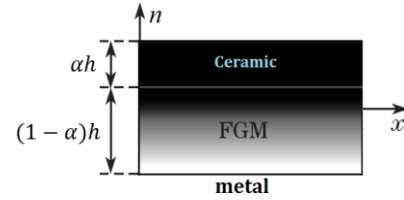


Figure 2: Type B Functionally Graded Structure

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{h} \right)^p, & -0.5h \leq n \leq (0.5 - \alpha)h \\ 1 & (0.5 - \alpha)h \leq n \leq 0.5h \end{cases} \quad (2)$$

Type C: According to this model, illustrated in Figure 3, it is assumed that the middle layer (core) of the cross-section is made of pure ceramic material, with a thickness of αh . The top and bottom layers are considered functionally graded, where the material properties vary from pure metal at their respective outer surfaces toward pure ceramic at the interface with the core.

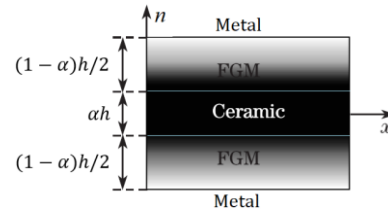


Figure 3: Type C Functionally Graded Structure

3. Validation

For validation purposes, Figure 4 presents the variation of the characteristic parameter of lateral-torsional buckling resistance of an I-section beam—which depends on both bending and torsional rigidities—as a function of the power-law index, for three different values of the dimensionless slenderness parameter. These results are quantitatively compared with those reported in Ref. [7]. As depicted in Figure 4, there is a strong and consistent agreement between the results obtained from the present model and those from Ref. [7].

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{-|n| + 0.5h}{0.5(1-\alpha)h} \right)^p, & +0.5\alpha h \leq n \leq +0.5h \\ 1 & -0.5\alpha h \leq n \leq 0.5h \\ \left(\frac{-|n| + 0.5h}{0.5(1-\alpha)h} \right)^p, & -0.5h \leq n \leq -0.5\alpha h \end{cases} \quad (3)$$

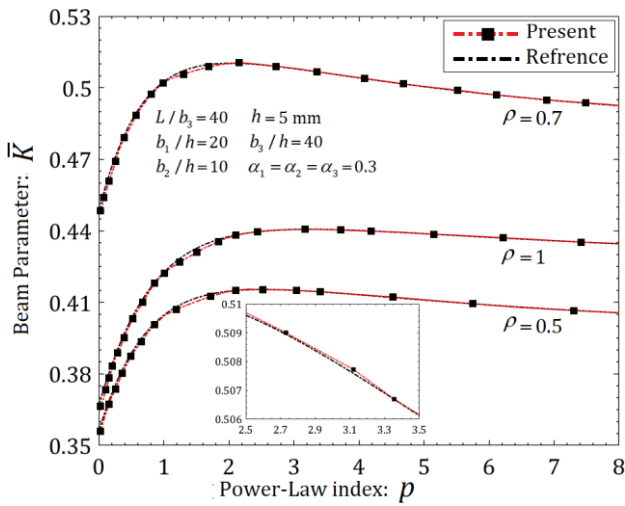


Figure 4: Buckling index versus Power Index.

4. Results and Discussion

4.1. Effect of p Index on Buckling Capacity

As shown in Figure 5, the lateral buckling capacities of the cross-sections modeled with types A, B, and C decrease as the total ceramic volume fraction is reduced. This decline is attributed to the consequent reduction in overall sectional stiffness.

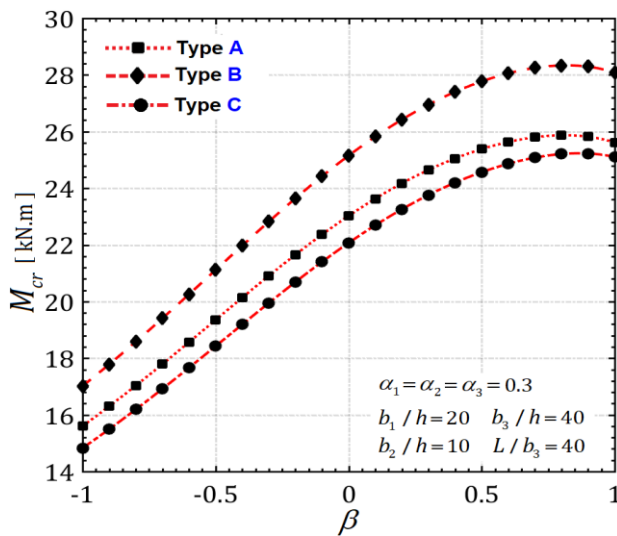


Figure 5: buckling moment versus end moments ratio.

4.2. Effect of Porosity Parameter on Buckling

Figure 6 shows that with the increase in the degree of boundary constraints from Condition SS to Condition CC, and as a result of the enhanced flexural stiffness of the beam, the lateral buckling capacity of the cross-section improves significantly. For any value of p index, the buckling capacity of the beam under CC B.C.s is higher than in the other two configurations. Furthermore, the buckling resistance of the beam under Condition CS is also greater than that of Condition SS.

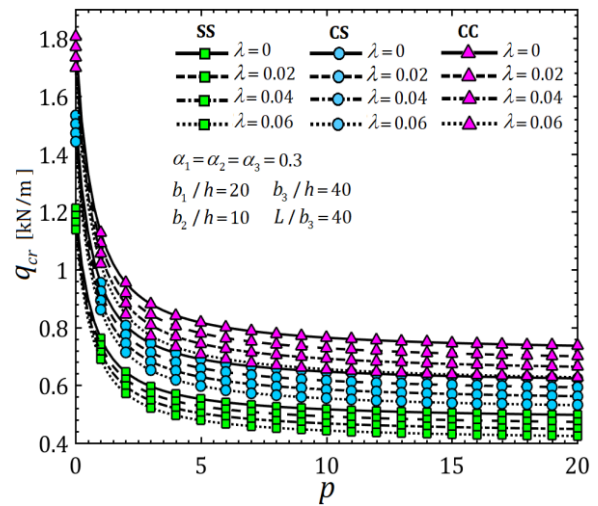


Figure 6: Variations of the critical bending moment versus the power-law.

5. Conclusion

This study employed a finite element approach to investigate the axial-lateral-torsional buckling behavior of thin-walled functionally graded I-beams and channel-section beams under three boundary conditions: simply supported-simply supported, clamped-simply supported, and clamped-clamped. The comprehensive parametric investigation revealed how variations in material composition and structural constraints influence the buckling performance of these advanced material systems.

Reference

- [1] M. Avcar, "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams," *Steel and Composite Structures*, vol. 30, pp. 603-615, 2019.
- [2] H. Alsaid Alwan and M. Avcar, "Analytical solution of free vibration of FG beam utilizing different types of beam theories: A comparative study," *Computers and Concrete*, vol. 26, pp. 285-292, 2020.
- [3] H. Babaei, Y. Kiani, and M. Reza Eslami, "Thermal buckling and post-buckling analysis of geometrically imperfect FGM clamped tubes on nonlinear elastic foundation," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 71, pp. 12-30, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.009>
- [4] H. Youzera, S. A. Meftah, M. M. Selim, and A. Tounsi, "Finite element method for axial and bending coupling effect on free vibration response of functionally graded beams under thermal environment," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 29, pp. 6436-6450, 2022.
- [5] M. Wang, M. He, Z. Liang, D. Wu, Y. Wang, X. Qing, et al., "Fatigue damage monitoring of composite laminates based on acoustic emission and digital image correlation techniques," *Composite Structures*, vol. 321, p. 117239, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117239>

- [6] X. Xie, J. Bai, and W. Zuo, "Topology optimization of fiber-reinforced concrete structures using membrane-embedded model," *Engineering Structures*, vol. 314, p. 118299, 2024.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117239>
- [7] T. T. Nguyen, P. T. Thang, and J. Lee, "Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams," *Composite Structures*, vol. 160, pp. 952-963, 2017.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.017>



بررسی اثر مدل ناهمگنی ساختاری بر ظرفیت کمانشی تیرهای مدرج تابعی متخلخل جدار نازک I شکل و ناودانی*

مقاله پژوهشی

رضا جهانگیری^(۱)  رسول قنبری^(۲) میکائیل ناصری^(۳) اکبر اللهوردی زاده^(۴) ایرج شاکری^(۵)

10.22067/jacsm.2025.92494.1322

چکیده مدل سازی و پیش بینی مشخصات سازه ای تیر و ستون های جدار نازک به علت احتمال بروز کمانش جانبی در آنها تحت بارهای جانبی خارج مرکز، متمرکز و توزیع شده از اهمیت زیادی برخوردار است. در مقاله حاضر، با لحاظ کردن اثرات اعوجاج، ناهمگنی، تخلخل و بر اساس فرضیات ولاسوف و به کارگیری اصل همیلتون، معادلات مشخصه حاکم بر کمانش جانبی تیرهای مدرج تابعی متخلخل جدار نازک I شکل و ناودانی چندانایه معرفی شدند. با اعمال روش المان محدود و توصیف مؤلفه های جابجایی نقاط داخل المانها برحسب توابع درونیابی لاگرانژی و هرمیتی معادله مقدار ویژه حاکم به صورت عددی حل شد. برای اعتبارسنجی نتایج تحقیق حاضر با مرجع دیگر مقایسه گردید. تأثیر پارامترهای مختلف به ویژه شاخص های تخلخل، اختلاط، نسبت مدول مواد، نسبت لنگرهای انتهایی و پارامتر مقاومت مقطع روی ظرفیت باربری تیرهای جدار نازک چندانایه تحت شرایط مرزی چندانایه بررسی گردید. نشان داده شد که پارامترهای مختلف نقش مهمی در تعیین محدوده ناپایداری کمانش دارند.

واژه های کلیدی فرضیات ولاسوف، تیر مدرج تابعی متخلخل، کمانش جانبی، شاخص تخلخل، شاخص اختلاط.

مقدمه

تیرها، ستون ها یا تیر - ستون های چندلایه ای به کار رفته در کوره های گرمایی یا حرارتی و یا اجزای پوشش بدنه سازه ای شاتل های فضاییماها، اجزای سازه ای به کار رفته در صنایع نورد فولادی، وقتی در مواجهه با شارهای حرارتی با دماهای بالای عملکردی واقع می گردند، به علت تفاوت ویژگی های ترموفیزیکی موجود در آنها دچار گسیختگی، تورق و جدایش می شوند. حال آنکه می توان با استفاده از تکنولوژی مواد نوظهور FGM بر این مشکل ها غلبه کرد. از مزایای برجسته FGM می توان به عملکرد آنها به عنوان عایق حرارتی در برابر دماهای بالا اشاره کرد. این مواد با افزایش استحکام کششی و کاهش تمرکز تنش ها، کارایی بیشتری از خود نشان می دهند و در نتیجه احتمال شکست

مواد مدرج تابعی (FGM) در سال ۱۹۸۴ توسط آزمایشگاه ملی هوافضای ژاپن معرفی شدند. این مواد به گونه ای طراحی شده اند که ترکیب آنها به صورت پیوسته به ویژه در امتداد ضخامت، تغییر کند [1]. این مواد که معمولاً از ترکیب سرامیک و فلز ساخته می شوند، خواص پیوسته و متغیر در امتداد ضخامت دارند که سبب افزایش مقاومت در برابر تنش های مکانیکی و حرارتی و لرزش می شود [2]. تحقیقات نشان می دهد که این تیرها عملکرد بهتری در کنترل تغییر شکل و توزیع تنش دارند. در صنایع هوافضا و مهندسی عمران این مواد به عنوان جایگزین های بهتری نسبت به مواد همگن شناخته شده اند. علاوه بر این ها هنگامی که

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۱۲/۱۶ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۴/۳/۱۹ می باشد.

Email: R_Jahangiri2004@tabrizu.ac.ir.

(۱) نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس.

(۲) کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز.

(۳) استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس.

(۴) دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز.

(۵) کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس.

مواد کاهش می‌یابد [3]. تفاوت اصلی FGM با کامپوزیت‌های سنتی در این است که این مواد از بروز ترک، لایه‌لایه شدن و تمرکز تنش جلوگیری می‌کنند زیرا فاقد مرز داخلی هستند. چندین روش برای ساخت این مواد وجود دارد از جمله متالورژی پودری [4]، رسوب بخار، نفوذ چندمرحله‌ای، یکپارچه‌سازی بدون فشار و سنتز خودتکثیری در دماهای بالا [5]. با این حال، در فرایند تولید مواد مدرج تابعی ممکن است به دلیل چالش‌های فنی، تخلخل و ریزمنفذهای درون ماده ایجاد شود. در روش نفوذ چندمرحله‌ای، نفوذ مواد ثانویه به لایه‌های میانی دشوارتر است در حالی که نفوذ به لایه‌های بالایی و پایینی آسان‌تر انجام می‌شود. در نتیجه، تخلخل عمدتاً در نواحی میانی مواد FGM شکل می‌گیرد. سایر روش‌های تولید این مواد شامل شکل‌دهی با لیزر [6]، روش پودر مخلوط شده با گریز از مرکز [7] و روش‌های نمونه‌سازی سریع و تولید تطبیقی هستند [8].

Kahya و Turan در سال ۲۰۱۷ مدلی از المان محدود برای تحلیل ارتعاش و کمانش تیرهای FGM بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه دادند. آن‌ها به بررسی ارتعاش و پایداری تیرهای FGM با استفاده از روش المان محدود پرداختند و نتایج نشان داد که افزایش نسبت طول به ضخامت تیر تأثیر زیادی بر رفتار ارتعاشی و کمانش تیر دارد. این مطالعه راهکارهای مفیدی برای طراحی این نوع تیرها ارائه داد [9].

تونسی و همکارانش در سال ۲۰۱۷ پاسخ کمانش حرارتی تیرهای FGM در محیط حرارتی را تحلیل کردند. آن‌ها با استفاده از روش عددی نشان دادند که رفتار حرارتی مواد مدرج تابعی در دماهای بالا می‌تواند بر پایداری تیرها تأثیر بگذارد. افزایش دمای محیط منجر به کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود [10]. Kahya و Turan در سال ۲۰۱۸ تحلیل ارتعاش و پایداری تیرهای ساندویچی FGM را با استفاده از روش المان محدود چندلایه ادامه دادند. این مطالعه بر روی تیرهای ساندویچی FGM تحت بارگذاری‌های مختلف و شرایط مرزی گوناگون تمرکز داشت و نشان داد که استفاده از مواد مدرج تابعی در لایه‌های مختلف می‌تواند منجر به بهبود رفتار مکانیکی تیرها شود [11].

Avcar در سال ۲۰۱۸ به بررسی ارتعاش آزاد تیرهای FGM بر روی پایه‌های الاستیک وینکلر - پاسترناک پرداخت. او نشان داد که پایه‌های الاستیک نقش مهمی در کنترل ارتعاشات تیرها دارند و استفاده از پایه‌های مناسب می‌تواند بهبود قابل توجهی در عملکرد

مکانیکی تیرهای FGM ایجاد کند [12]. Vo-Duy و همکارانش در سال ۲۰۱۹ به تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی FGM پرداختند. آن‌ها به بررسی رفتار دینامیکی این تیرها پرداختند و نشان دادند که تقویت نانولوله‌های کربنی می‌تواند به شکل قابل توجهی خواص مکانیکی تیرها را بهبود بخشد، به ویژه در شرایطی که بارگذاری‌های دینامیکی سنگین اعمال می‌شود [13]. Avcar در سال ۲۰۱۹ مطالعه‌ای بر روی ارتعاش آزاد تیرهای FGM با نقص‌های سیگموبید و قانون توانی انجام داد. او نشان داد که نقص‌ها در مواد تابعی می‌تواند تأثیر زیادی بر رفتار ارتعاشی تیرها داشته باشد و نیاز به طراحی دقیق‌تر برای جبران این نقص‌ها وجود دارد [14].

Alwan و Avcar در سال ۲۰۲۰ تحلیل مقایسه‌ای ارتعاش آزاد تیرهای FGM را با استفاده از نظریه‌های مختلف تیر انجام دادند. این مقاله به بررسی و مقایسه نظریه‌های مختلف برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرها پرداخت و نتایج آن نشان داد که انتخاب مدل مناسب می‌تواند به شکل قابل توجهی بر دقت تحلیل‌ها تأثیر بگذارد [15]. بابایی و همکاران کمانش حرارتی صفحات FGM را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که بارهای حرارتی می‌توانند منجر به ناپایداری در صفحات مدرج تابعی شوند و نیاز به تقویت ساختاری برای مقابله با این نوع بارگذاری‌ها وجود دارد [16].

در سال ۲۰۲۱، Youzera و همکارانش به بررسی اثرات کوپلینگ محوری و خمشی بر پاسخ ارتعاش آزاد تیرهای FGM در محیط‌های حرارتی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که این اثرات می‌تواند به طور قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی تیرها در شرایط حرارتی تأثیر بگذارد و طراحی دقیق‌تری برای این تیرها نیاز است [17].

با به کارگیری روش المان محدود، Wang و همکارانش در سال ۲۰۲۳ در تحقیقات خود روی رفتارشناسی مواد مدرج تابعی با مدل‌سازی دقیق عیوب ساختاری داخلی به بررسی ارتعاشات و رفتار کمانش تیرهای FGM پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که نقص‌های داخلی تأثیر قابل توجهی بر روی پاسخ دینامیکی و کمانش این تیرها دارد و نیاز به توجه بیشتری در طراحی سازه‌های FGM وجود دارد [18].

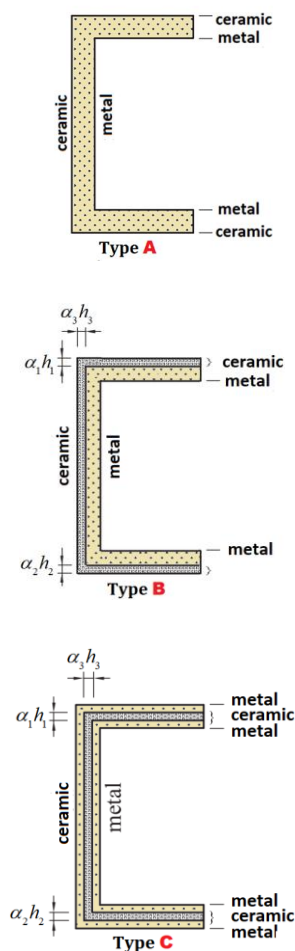
در سال ۲۰۲۴، Xie و همکاران به بررسی رفتار کمانش و پایداری تیرهای جدار نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی FGM تحت بارگذاری محوری پرداختند. نتایج نشان داد که انتخاب صحیح مواد و طراحی ساختاری می‌تواند مقاومت تیرها را در برابر ناپایداری و کمانش

مواد پیروی می کند و از رابطه (۱) به دست می آید:

$$P_{FG} = P_c V_c(n) + P_m V_m(n) \quad (1)$$

که اینجا P_c و P_m به ترتیب خواص خالص فلزی و سرامیکی می باشند. V_c و V_m نیز نشان دهنده کسر حجمی جزءهای سرامیکی و فلزی می باشند، به طوری که داریم:

$$V_c(n) + V_m(n) = 1 \quad (2)$$



شکل ۱ مقطع عرضی تیر ناودانی

در نتیجه می توان وابستگی مدول یانگ و نسبت پواسون لایه های متخلخل مقطع را در راستای ضخامت بر حسب کسر حجمی اجزا به صورت زیر توصیف کرد:

$$E(n) = E_m + (E_c - E_m) V_c(n) - \lambda (E_c + E_m) / 2 \quad (3)$$

بهبود بخشد و در عین حال وزن سازه را کاهش دهد [19].

در این مقاله، با در نظر گرفتن اثر تخلخل و اثر ناهمگنی ساختاری خواص مواد با اعمال قانون اختلاط خطی توانی و با به کارگیری اصل همپتون، معادلات مشخصه توصیف کننده تعادل استاتیکی تیر در معرض بارهای جانبی، با توزیع های متفاوت نیرویی استخراج گردید و بار بحرانی کمانش مربوط به تیر ساندویچی شکل (چندلایه) هدفمند تابعی جدار نازک در مواجهه با بارگذاری های متمرکز/ گسترده نیرویی و لنگری برای چند حالت متنوع از نحوه توزیع مواد در راستای ضخامت استخراج گردید. در ادامه نتایج عددی حاصل از حل معادله مشخصه حاکم بر ناپایداری استاتیکی مسئله، با نتایج سایر مراجع مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته است. نخست متناظر با انعکاس اثرات مؤلفه های تغییر مکان محوری و جانبی مرکز جرم، مرکز برش مقطع عرضی، زاویه چرخش مقطع و مؤلفه های تغییر مکان درون صفحه ای نقاط داخل تیر و برای چند حالت مختلف از ناهمگنی ساختاری چندلایه ای و نحوه بارگذاری جانبی تیر، معادلات حاکم بر تعادل استاتیکی تیر معرفی گردید. سپس با اعمال متد المان محدود و بهره گیری از نرم افزار متلب مسئله مقدار ویژه مشخصه مربوط به کمانش جانبی تیر با دقت کافی حل گردید. نمودارها و منحنی های مشخصه مد نظر ترسیم شد و تجزیه و تحلیل روی نتایج حاصل به صورت کامل انجام شد و تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف اعم از نسبت ابعاد تیر، شاخص تخلخل، شاخص اختلاط مواد تابعی متناظر با الف) مقطع ناودانی شکل و ب) مقطع I شکل با بال های نامساوی، مورد بررسی قرار گرفت.

مواد و روش ها

مدل سازی

تیری به طول L با ساختار ناهمگن دو فازه مدرج تابعی FG دربرگیرنده دو هندسه متفاوت عرضی نشان داده شده در شکل های (۱) و (۲) را که بخش های بال و جان آن ها از اختلاط دو جزء فلزی و سرامیکی ساخته شده است را در نظر می گیریم. شکل (۱) نشان دهنده نحوه تغییرات خواص مصالح داخل لایه تابعی متخلخل نوع A است. فرض می شود که توزیع خواص ماده در امتداد اعضای مقطع از قانون ترکیب خطی کسر حجمی

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \left(\frac{E_c - E_m}{p+1} + E_m \right) h \\
 B_{11} &= \frac{p(E_c - E_m)}{2(p+1)(p+2)} h^2 \\
 D_{11} &= \left[\frac{1}{4(p+1)} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} \right] (E_c - E_m) h^3 \\
 &\quad + \frac{E_m}{12} h^3
 \end{aligned} \quad (6)$$

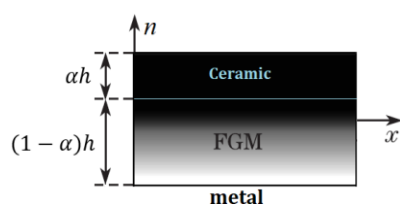
نوع B

با توجه به شکل (۴) فرض می‌کنیم که لایه بالایی مقطع از جنس خالص سرامیکی است و ضخامت آن αh است؛ اما در سطح روئین لایه تحتانی، خواص ماده از خالص فلزی در $n = -h/2$ به خالص سرامیکی در $n = (0.5 - \alpha)h$ تغییر می‌کند. که بر این اساس $V_c(n)$ داخل لایه‌های مدل نوع B به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{h} \right)^p, & -0.5h \leq n \leq (0.5 - \alpha)h \\ 1 & (0.5 - \alpha)h \leq n \leq 0.5h \end{cases} \quad (7)$$

که با انتگرال‌گیری از رابطه تنش - کرنش حاکم در راستای ضخامت می‌توان مؤلفه‌های سختی کششی، سختی پیوندی کششی - خمشی و سختی خمشی متناظر با مدل B را از روابط (۸) تعیین کرد:

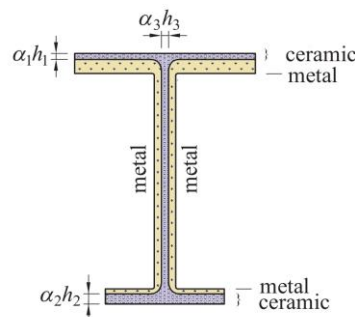
$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \alpha h E_c + \frac{E_c + p E_m}{p+1} (1 - \alpha) h \\
 B_{11} &= \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1 - \alpha}{(p+2)} \right] \\
 &\quad \times (E_c - E_m) (1 - \alpha) h^2 \\
 D_{11} &= \left[\frac{1}{24} + \frac{(1 - \alpha - 0.5)^3}{3} \right] E_c h^3 \\
 &\quad - \frac{1}{12} (4\alpha^3 - 6\alpha^2 + 3\alpha - 1) E_m h^3 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{4(p+1)} - \frac{1 - \alpha}{p+2} + \frac{(1 - \alpha)^3}{p+3} \right] \\
 &\quad \times (E_c - E_m) (1 - \alpha) h^3
 \end{aligned} \quad (8)$$



شکل ۴ ساختار ناهمگن نوع B

$$v(n) = v_m + (v_c - v_m) V_c(n) - \lambda (v_c + v_m) / 2 \quad (4)$$

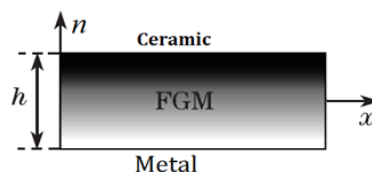
که در روابط (۳) و (۴)، λ پارامتر تخلخل متناظر با مدل تخلخل زوج است. در این مقاله توزیع تک‌جهته خواص ماده در امتداد ضخامت لایه‌ها را به صورت سه مدل زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:



شکل ۲ مقطع عرضی تیر I شکل با بال‌های نامساوی

نوع A

بر اساس این مدل فرض می‌شود که مطابق شکل (۳) خواص مصالح در راستای ضخامت از خواص خالص فلزی در $n = -h/2$ به خواص خالص سرامیکی در $n = +h/2$ بر اساس توزیع توانی تغییر می‌کند.



شکل ۳ ساختار ناهمگن نوع A

می‌توان کسر حجمی فاز سرامیکی را به صورت رابطه (۵)

تعریف کرد:

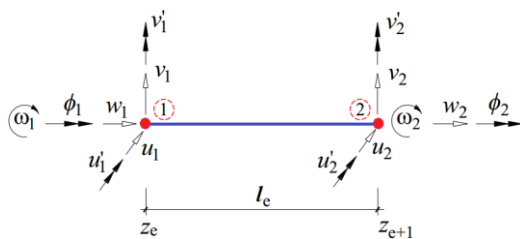
$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{h} \right)^p, \quad -\frac{h}{2} \leq n \leq +\frac{h}{2} \quad (5)$$

اینجا، شاخص توانی P یک عدد غیرمنفی است که توصیف‌کننده نحوه توزیع کسر حجمی ترکیب مواد در امتداد ضخامت لایه تابعی را توصیف می‌کند. بر این اساس می‌توان مؤلفه‌های سختی کششی A_{11} ، سختی پیوندی کششی - خمشی B_{11} و سختی خمشی D_{11} را با انتگرال‌گیری از رابطه تنش - کرنش در راستای ضخامت، به صورت زیر به دست آورد:

خمش است.

روابط حاکم

از آنجایی که ارائه یک راه حل صریح و تحلیلی برای معادلات حاکم بر کمانش از پیچیدگی خاصی برخوردار است، از این روش عددی المان محدود برای حل معادلات حاکم بر مسئله کمانش تیر مفروض به کار گرفته شد. لذا برای دستیابی به این هدف تیر مفروض در امتداد طولی و در فواصل یکسان گره گذاری و به المان های یکسان تقسیم شد. به نحوی که با دخالت دادن اثر وارپینگ یا اعوجاج مطابق شکل (۶) هر کدام از این المان ها دارای هفت درجه آزادی می باشند.



شکل ۶ مختصات نقاط تعمیم یافته هر المان

لذا با توجه به شکل (۶) و با استفاده از عبارات درونیابی خطی لاگرانژی Ψ_j و چند جمله ای های درونیابی هریتی مکعبی Ψ_j می توان فرم تعمیم یافته مؤلفه های جابه جایی نقاط داخل هر کدام از المان ها را بر حسب مؤلفه های جابه جایی گره های ابتدایی و انتهای المان ها به شکل روابط (۱۳ - ۱۱) توصیف کرد:

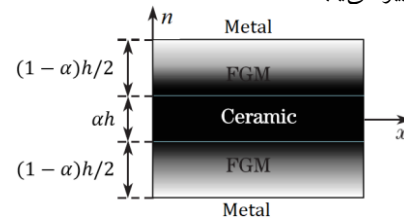
$$\begin{aligned} W(z) &= W_1 \Psi_1(z) + W_2 \Psi_2(z) \\ U(z) &= u_1 \Psi_1(z) + u_{1,z} \Psi_2(z) + u_2 \Psi_3(z) + u_{2,z} \Psi_4(z) \\ V(z) &= v_1 \Psi_1(z) + v_{1,z} \Psi_2(z) + v_2 \Psi_3(z) + v_{2,z} \Psi_4(z) \\ \Phi(z) &= \phi_1 \Psi_1(z) + \phi_{1,z} \Psi_2(z) + \phi_2 \Psi_3(z) + \phi_{2,z} \Psi_4(z) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= 1 - z/l_e \\ \Psi_2(z) &= z/l_e \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= 2z^3/l_e^3 - 3z^2/l_e^2 + 1 \\ \Psi_2(z) &= z^3/l_e^2 - 2z^2/l_e + z \\ \Psi_3(z) &= -2z^3/l_e^3 + 3z^2/l_e^2 \\ \Psi_4(z) &= z^3/l_e^2 - z^2/l_e \end{aligned} \quad (13)$$

نوع C

مطابق این مدل که در شکل (۵) نشان داده شده است فرض می شود که لایه میانی یا هسته مقطع از جنس خالص سرامیکی است که ضخامت آن برابر αh در نظر گرفته می شود، حال آنکه لایه های تحتانی و فوقانی ماهیت مدرج تابعی دارد و خواص مصالح در این لایه ها به ترتیب از سطوح زیرین و روین مربوط به سمت هسته از خواص خالص فلزی به خواص خالص سرامیکی تغییر می یابد.



شکل ۵ ساختار ناهمگن نوع C

بر این اساس این مدل نیز می توان کسر حجمی جزء سرامیکی داخل لایه های این مقطع را به صورت روابط (۹) توصیف کرد:

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{-|n| + 0.5h}{0.5(1-\alpha)h} \right)^p, & +0.5\alpha h \leq n \leq +0.5h \\ 1, & -0.5\alpha h \leq n \leq 0.5h \\ \left(\frac{-|n| + 0.5h}{0.5(1-\alpha)h} \right)^p, & -0.5h \leq n \leq -0.5\alpha h \end{cases} \quad (9)$$

که با استفاده از روابط (۹) و انتگرال گیری از رابطه تنش - کرنش حاکم در راستای ضخامت، می توان مؤلفه های سختی کششی، سختی کششی - خمشی و سختی خمشی متناظر با مدل C را نیز از روابط (۱۰) به دست آورد:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{12} E_c h^3 + \frac{1}{12} (1-\alpha^3) E_m h^3 \\ &+ \left[\frac{1}{4(p+1)} - \frac{1-\alpha}{2(p+2)} + \frac{(1-\alpha)^3}{4(p+3)} \right] \\ &\times (E_c - E_m) (1-\alpha) h^3 \end{aligned} \quad (10)$$

در مدل C، به علت توزیع متقارن خواص در راستای ضخامت، کوپلینگ بین متجه های کششی و خمشی از بین رفته و منتجه تنش B_{11} صفر می گردد. علاوه بر این به علت ایزوتروپیک بودن خواص مصالح در لایه های همگن و تابعی در هر سه مدل مفروض، $D_{66} = D_{11}/2(1+\nu)$ نشان دهنده منتجه

$$G = \begin{bmatrix} [0]_{[2 \times 2]} & [0]_{[2 \times 4]} & [0]_{[2 \times 4]} & [0]_{[2 \times 4]} \\ \vdots & [G_{ij}^{22}]_{[2 \times 4]} & [0]_{[2 \times 4]} & [G_{ij}^{24}]_{[2 \times 4]} \\ \vdots & \dots & [G_{ij}^{33}]_{[2 \times 4]} & [G_{ij}^{34}]_{[2 \times 4]} \\ \text{sym.} & \dots & \dots & [G_{ij}^{44}]_{[2 \times 4]} \end{bmatrix} \quad (18)$$

در پژوهش حاضر با توجه به این نکته که تغییرات خواص مصالح فقط در راستای ضخامت اتفاق می افتد می توان اجزای ماتریس سختی المان و ماتریس سختی هندسی متناظر با هر کدام از روابط (۱۹) و (۲۰) را به دست آورد:

$$\begin{aligned} K_{IJ}^{11} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{11} \Psi'_I \Psi'_J dAdz, K_{IJ}^{12} = - \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{12} \Psi'_I \Psi''_J dAdz \\ K_{IJ}^{13} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{13} \Psi'_I \Psi''_J dAdz, K_{IJ}^{14} = \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{14} \Psi'_I \Psi'''_J dAdz \\ K_{IJ}^{22} &= - \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{22} \Psi''_I \Psi''_J dAdz, K_{IJ}^{23} = - \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{23} \Psi''_I \Psi''_J dAdz \\ K_{IJ}^{24} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{24} \Psi''_I \Psi''_J dAdz, K_{IJ}^{33} = \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{33} \Psi''_I \Psi''_J dAdz \\ K_{IJ}^{34} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} E_{34} \Psi''_I \Psi''_J dAdz \\ K_{IJ}^{44} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} (E_{44} \Psi''_I \Psi''_J + 4E_{55} \Psi'_I \Psi'_J) dAdz \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_{IJ}^{24} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} f(z) \Psi_I \Psi''_J dz \\ G_{IJ}^{44} &= \int_{z_e}^{z_{e+1}} g(z) \xi \Psi_I \Psi''_J dz \end{aligned} \quad (20)$$

و تمامی زیرماتریس های دیگر، برابر ماتریس صفر می باشند. شایان ذکر است که در روابط (۲۰) توابع $f(z)$ و $g(z)$ توابعی هستند که به چگونگی و الگوی بارگذاری تیر وابسته هستند و به صورت زیر داده می شوند:

(الف) برای تیر تحت گرادیان لنگری:

$$f(z) = \frac{1-\beta}{2} - \frac{(1+\beta)z}{L}$$

$$g(z) = 0 \quad (21)$$

که در آن β نشان دهنده نسبت لنگر انتهای راست می باشد.

(ب) برای تیر تحت بار گسترده با توزیع یکنواخت:

$$\begin{aligned} f(z) &= L^2/8 - z^2/2 \\ g(z) &= 1 \end{aligned} \quad (22)$$

(ج) برای تیر تحت بارگذاری متمرکز مرکزی:

در ادامه این تحقیق با پرهیز از پرداختن به جزئیات نحوه استخراج معادله انتگرالی مستخرج از اصل همپلتون، می توان با استفاده از عبارات (۱۲) و (۱۳) این معادله انتگرالی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^4 \sum_{I,J}^2 \int_0^L \{ & [E_{11} \Psi'_I \Psi'_J w_J - E_{12} \Psi'_I \Psi'_J u_J \\ & - E_{13} \Psi'_I \Psi'_J v_J - E_{14} \Psi'_I \Psi'_J \phi_J] \delta w_I \\ & + [E_{12} \Psi'_I \Psi'_J w_J + E_{22} \Psi''_I \Psi''_J u_J \\ & + E_{23} \Psi''_I \Psi''_J v_J + E_{24} \Psi''_I \Psi''_J \phi_J \\ & - \lambda f(z) \Psi''_I \Psi''_J \phi_J] \delta u_I \\ & + [-E_{13} \Psi'_I \Psi'_J w_J + E_{23} \Psi''_I \Psi''_J u_J \\ & + E_{33} \Psi''_I \Psi''_J v_J + E_{34} \Psi''_I \Psi''_J \phi_J] \delta v_I \\ & + [-E_{14} \Psi'_I \Psi'_J w_J + E_{24} \Psi''_I \Psi''_J u_J \\ & + E_{34} \Psi''_I \Psi''_J v_J + E_{44} \Psi''_I \Psi''_J \phi_J \\ & + 4E_{55} \Psi'_I \Psi'_J \phi_J \\ & - \lambda \xi g(z) \Psi_I \Psi_J \phi_I] \delta \phi_I \} dz = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

در ادامه با متحد صفر قرار دادن ضرایب کمیت های مستقل $\delta \phi_i$ ، δw_i ، δv_i ، δu_i کمانش هر کدام از المان های مدل سازی شده بروش المان محدود را در فرم ماتریسی خود به صورت رابطه (۱۵) بازنویسی کرد:

$$(K - \lambda^* G) \times \Delta = 0 \quad (15)$$

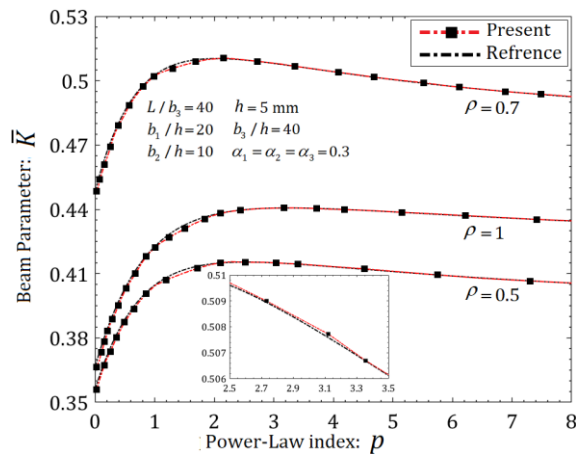
که در آن:

$$\Delta = \{w_1, w_2, u_1, u'_1, u_2, u'_2, v_1, v'_1, v_2, v'_2, \phi_1, \phi'_1, \phi_2, \phi'_2\}^T \quad (16)$$

Δ بردار ویژه در برگیرنده جابه جایی های گرهی متناظر با مقدار ویژه (پارامتر بار کمانشی) برای λ^* می باشند. G و K نیز به ترتیب ماتریس سختی المان و ماتریس سختی هندسی هستند که به صورت روابط (۱۷) و (۱۸) نشان داده می شوند:

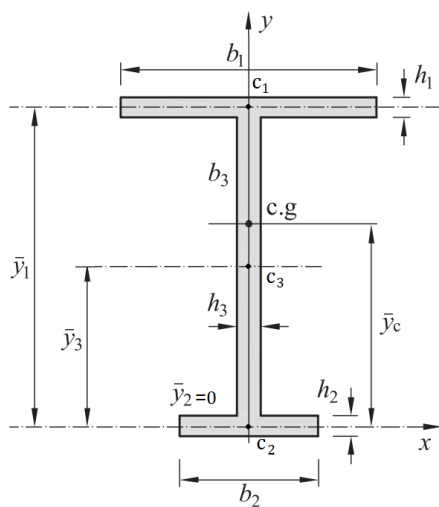
$$K = \begin{bmatrix} [K_{ij}^{11}]_{[2 \times 2]} & [K_{ij}^{12}]_{[2 \times 4]} & [K_{ij}^{13}]_{[2 \times 4]} & [K_{ij}^{14}]_{[2 \times 4]} \\ \vdots & [K_{ij}^{22}]_{[2 \times 4]} & [K_{ij}^{23}]_{[2 \times 4]} & [K_{ij}^{24}]_{[2 \times 4]} \\ \vdots & \dots & [K_{ij}^{33}]_{[2 \times 4]} & [K_{ij}^{34}]_{[2 \times 4]} \\ \text{sym.} & \dots & \dots & [K_{ij}^{44}]_{[2 \times 4]} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ثابت با شیب بسیار ملایمی تغییر می‌کند. از طرف دیگر مطابق این شکل ظرفیت کمانش جانبی تیر علاوه بر وابستگی به مدل توزیع خواص، به شکل هندسی مقطع عرضی نیز شدیداً وابسته است، به نحوی که با افزایش درجه تیر از $\rho = 0.5$ به $\rho = 1$ (متناظر با T شکل شدن مقطع)، افزایش سختی سبب افزایش ظرفیت باربری جانبی می‌گردد.



شکل ۷ تغییرات پارامتر مقاومت کمانشی جانبی - پیچشی در برابر شاخص توانی، برای سه مقدار مختلف از پارامتر بدون بعد درجه تیر

به عنوان مثال اول، دو تیر جدار نازک با مقاطع عرضی I شکل با یک محور تقارن و ناودانی با شرایط مرزی چندگانه و هندسه‌های مقطع عرضی آورده شده در شکل (۸) را در نظر می‌گیریم.

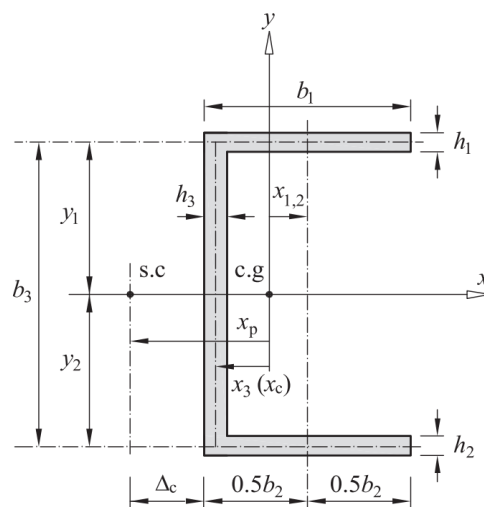


$$f(z) = (L/4 - |z|/2)$$

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \neq L/2 \\ 1, & z = L/2 \end{cases} \quad (23)$$

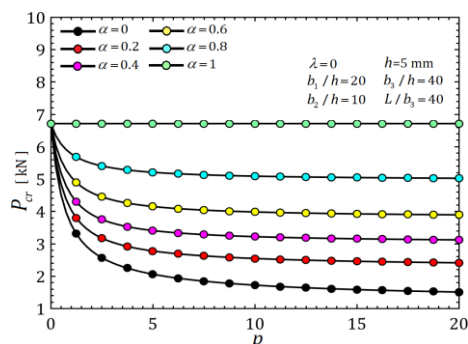
اعتبارسنجی مدل عددی

به منظور بررسی صحت و اعتبار نتایج عددی مستخرج از فرمول‌بندی ارائه شده در این تحقیق، نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از تحقیق نگوین و همکارانش [20] مورد مقایسه کمی قرار گرفت. برای این منظور همانند این مرجع و تحت شرایط خاصی مسئله کمانش تیرهای دارای دو محور تقارن با خواص ایزوتروپیک و متناظر با مقادیر $E_c = 17,225 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.3$ مورد آنالیز عددی قرار گرفت. برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از پژوهش اخیر، در شکل (۷) منحنی تغییرات پارامتر مشخصه مقاومت کمانش جانبی - پیچشی تیر I شکل که تابعی از صلبیت خمشی و صلبیت پیچشی است در برابر شاخص توانی، برای سه مقدار مختلف از پارامتر بدون بعد درجه تیر $\rho = b_1/b_1 + b_2$ ارائه شد و به صورت کمی با نتایج مستخرج از مرجع [20] مقایسه قرار گرفته است. همانند این مرجع، مشاهده می‌شود که خواص تیر در راستای ضخامت لایه‌ها از مدل توزیع خواص نوع B تبعیت می‌کند. مطابق این شکل مشاهده می‌شود که شکل سازگاری بسیار مطلوبی بین نتایج حاصل از مدل حاضر و مرجع [20] وجود دارد. پدیده‌ای که با افزایش شاخص توانی (کاهش جزء سرامیکی)، پارامتر مشخص به صورت پیوسته تا رسیدن به مقدار اکسترمم مربوط با شیب قابل ملاحظه‌ای افزایش و سپس با ادامه افزایش شاخص توانی پارامتر تا تثبیت شدن روی مقادیر



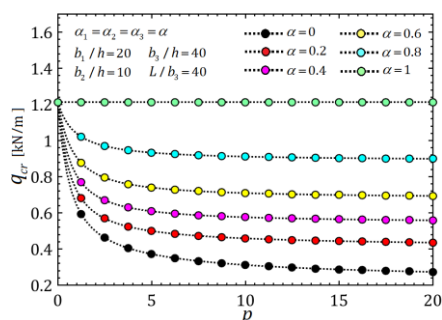
شکل ۸ هندسه مقطع عرضی تیر I و ناودانی

تمامی مقادیر داده شده از نسبت ضخامت سرامیکی، با ادامه افزایش شاخص توانی، ظرفیت کمانش محوری روی مقادیر حدی خاص (وابسته به α) تثبیت می گردند. علاوه بر این مشاهده می شود که افزایش پارامتر نسبت ضخامت تأثیر پایدارساز دارد زیرا سختی تیر نیز در نتیجه افزایش هر چه بیشتر این نسبت افزایش می یابد و سبب می شود که کمانش محوری در مقادیر بالاتری از نیروی محوری متمرکز وارد شده رخ بدهد.



شکل ۹ تغییرات بار کمانشی متمرکز مرکزی بحرانی در برابر شاخص توانی اختلاط برای α های مختلف

در شکل (۱۰) تغییرات ظرفیت کمانش جانبی تحت بارگذاری گسترده در برابر شاخص توانی اختلاط p ، متناظر با شش مقدار صعودی از پارامتر نسبت ضخامت لایه سرامیکی α ، نمایش داده شده است. مطابق این شکل نیز به خوبی مشاهده می شود که برای هر مقدار خاصی از نسبت ضخامت سرامیکی α ، با افزایش شاخص p ، ظرفیت بار کمانشی گسترده نیز در نتیجه کاهش سختی (ناشی از کاهش سهم اشتراک جزء سرامیکی)، تنزل پیدا می کند. علاوه بر این مطابق این شکل مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت، ظرفیت کمانشی تحت اعمال بار گسترده نیز ارتقا می یابد زیرا به واسطه افزایش این نسبت سختی تیر نیز ارتقا می یابد.



شکل ۱۰ تغییرات بار گسترده یکنواخت بحرانی در برابر شاخص توانی اختلاط

مشخصات هندسی سطح با مقطع I شکل به صورت $b_3=2b_1=4b_2=40h$ و $h_1=h_2=h_3=h=5$ و مشخصات هندسی سطح مقطع ناودانی شکل $b_3=2b_1=2b_2=40h$ و $h_1=h_2=h_3=h=5$ است. علاوه بر این فرض می شود که مقاطع عرضی اعضاء مقطع به صورت تک لایه، دولایه و یا سه لایه می باشند به نحوی که در لایه تابعی آن ها، خواص ماده به صورت تدریجی از جزء سرامیکی با $E_c = 380$ GPa به جزء فلزی با $E_m = 70$ GPa متغیر است. علاوه بر این برای پرهیز از پیچیدگی های مفرط در محاسبات انتگرالی، نسبت پواسن اجزای فلزی و سرامیکی را برابر $\nu = 0.3$ در نظر می گیریم. همچنین، فرض می کنیم که α_1 و α_2 به ترتیب بیانگر نسبت ضخامت لایه های خالص سرامیکی فوقانی و تحتانی به ضخامت لایه تابعی روی اعضاء بال مقاطع I شکل و ناودانی می باشند. ضمناً مطابق این شکل ها فرض می کنیم که α_3 نشان دهنده نسبت ضخامت لایه خالص سرامیکی به ضخامت لایه تابعی این مقاطع می باشد. علاوه بر این مگر اینکه در جایی اشاره شود، پارامتر نسبت ابعاد طول به ارتفاع تیر را نیز برابر $L/b_3=40$ در نظر می گیریم. مطابق شکل (۸) ساختار ظاهری مقطع عرضی تیر هدفمند تابعی با هندسه I شکل است که نشان دهنده ساختار هندسی و نحوه چینش لایه های همگن و تابعی است.

نتایج عددی

بررسی تأثیر نسبت ضخامت سرامیکی روی ظرفیت

کمانش تیر I شکل

ابتدا مسئله کمانش تیرهای جدار نازک باز با مقاطع عرضی I شکل دارای یک محور تقارن، در معرض لنگر انتهایی را تجزیه و تحلیل می کنیم. ضمناً مگر اینکه در جایی ذکر شود، فرض می کنیم که پارامترهای نسبت ضخامت سرامیکی بال ها و پارامتر نسبت ضخامت سرامیکی هسته جان روی مقاطع عرضی برابر می باشند ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$).

در شکل (۹) تغییرات نیروی محوری بحرانی متناظر با بروز کمانش در برابر تغییرات شاخص اختلاط توانی p ، متناظر با شش مقدار صعودی از پارامتر نسبت ضخامت لایه سرامیکی α به تصویر کشیده شده است. مطابق این شکل، پر واضح است که به ازای تمام مقادیر داده شده از α

ین نسبت، با افزایش شاخص p ، ظرفیت باربری کمانش نیرویی محوری به سبب کاهش سختی متأثر از کاهش سهم اشتراک جزء سرامیکی در ماده تابعی، کاهش پیدا می کند. به نحوی که برای

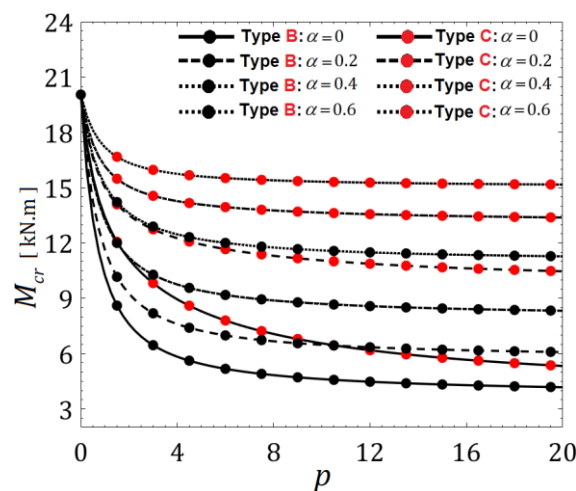
تأثیر نسبت ضخامت سرامیکی روی کمانش عرضی تیر ناودانی

برای این منظور در شکل (۱۱) تغییرات لنگر بحرانی کمانش تیر با مقاطع عرضی ناودانی دولایه (مدل B) و سه لایه (مدل C) در برابر تغییرات شاخص p ، متناظر با چهار مقدار مختلف از نسبت ضخامت α برای $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ و $\beta = -1$ ، مورد مقایسه کمی واقع شده است. مطابق شکل (۱۱) برای تمامی مقادیر α با افزایش شاخص توانی و به تبع آن کاهش اشتراک سهم جزء سرامیکی در جان و بال مقاطع، کمانش عرضی تیر ناودانی در مقادیر پایین تری از بارگذاری لنگری رخ می دهد. از طرف دیگر افزایش α در اعضای مقطع، سبب ارتقای سهم مشارکت فاز سرامیکی در تحمل بار لنگری وارد بر مقطع و متعاقباً سبب افزایش سختی کل تیر می گردد. بدین معنی که کمانش در بارهای لنگری بزرگتر رخ می دهد. علاوه بر این با مقایسه آن منحنی های مشخصه در شکل (۱۱) می توان دریافت که برای تمامی مقادیر داده شده از p و α ، ظرفیت کمانشی تیر با مقطع سه لایه (مدل C) در مقایسه با مقطع دولایه (مدل B) بیشتر است.

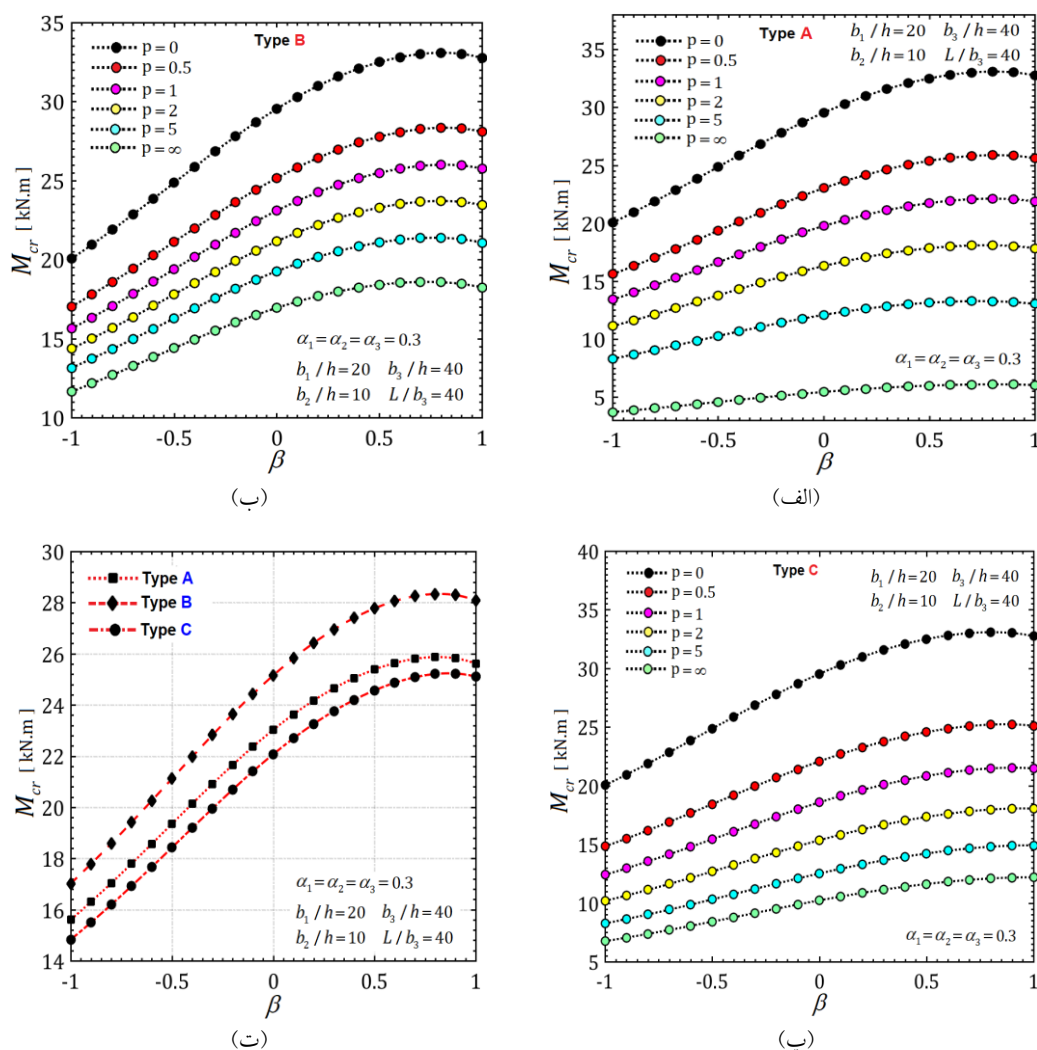
تأثیر شاخص کسر حجمی اختلاط روی ظرفیت کمانش عرضی

در شکل های (۱۲) نیز منحنی های مشخصه تغییرات ظرفیت کمانش لنگری تیر ناودانی با مقاطع (الف) نوع A، (ب) نوع B و (ج) نوع C در برابر پارامتر نسبت لنگرهای انتهایی برای شش

مقدار مختلف از شاخص اختلاط توانی نشان داده شده است. با توجه به این شکل ها به ازای تمامی مقادیر از p ، با افزایش نسبت لنگرهای انتهایی ظرفیت کمانشی لنگری در محدوده $-1 \leq \beta \leq 0$ ابتدا ظرفیت باربری کمانش جانبی لنگری با شیب زیادی افزایش می یابد و در محدوده $0 \leq \beta \leq 1$ بعد از گذر از نقطه اکسترمم منحنی های مربوط در $\beta \approx 0.8$ با شیب ملایمی کاهش می یابد. شایان ذکر است که در محدوده های $0 \leq \beta \leq 1$ به ترتیب تیر با یک انحنا و دو انحنا خمیده می شود. مطابق این شکل در محدوده تغییرات نسبت لنگرهای انتهایی ($-1 \leq \beta \leq 1$)، با ارتقای شاخص توانی از $p=0$ (مربوط به منحنی سیاه رنگ متناظر با سرامیکی شدن جنس کل مقطع) به $p=\infty$ (مربوط به منحنی سبز کم رنگ متناظر با بزرگتر شدن سهم فلزی)، ظرفیت کمانشی مقاطع عرضی با مدل های نوع A، B و C به علت کاهش سختی مقطع به سبب کاهش کسر حجمی سرامیکی کل کاهش می یابد. برای مقایسه کمی اثر چگونگی توزیع ساختاری خواص لایه های همگن و تابعی مقطع عرضی روی ظرفیت کمانشی، در شکل (۱۲-ت) نیز منحنی های مشخصه ظرفیت کمانش جانبی - لنگری تیر ناودانی با مقطع عرضی، نوع A، نوع B و نوع C در برابر نسبت لنگرهای انتهایی برای مقدار خاص از شاخص توانی $p=0.5$ به تصویر کشیده شده است. با توجه به این شکل به ازای تمامی مقادیر از نسبت لنگر انتهایی، تیر ناودانی با مقطع سه لایه ای نوع B دارای بیشترین ظرفیت کمانش جانبی و مقطع عرضی نوع C دارای کمترین ظرفیت می باشد.



شکل ۱۱ مقایسه تغییرات لنگر بحرانی کمانش مدل های دولایه (مدل B) و سه لایه (مدل C) در برابر شاخص توانی



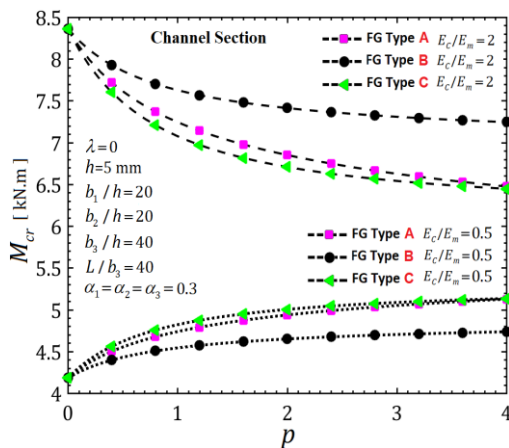
شکل ۱۲ تغییرات بار لنگری کمانش عرضی در برابر نسبت لنگرهای انتهایی برای شش مقدار مختلف از شاخص توانی

آنالیز اثرگذاری تغییرات پارامتر تخلخل روی ظرفیت کمانشی

در شکل‌های (۱۳) منحنی‌های مشخصه کمانش جانبی تیر I شکل در برابر شاخص توانی، به ترتیب تحت بارگذاری‌های گسترده، متمرکز و لنگری و متناظر با سه حالت مختلف از شرایط مرزی تکیه‌گاهی (الف) دو سر ساده SS، (ب) یکسر ساده - یکسر گیردار CS، (ج) دو سر گیردار CC برای چهار مقدار مختلف از پارامتر تخلخل از $\lambda = 0$ ، $\lambda = 0.02$ ، $\lambda = 0.04$ و $\lambda = 0.06$ آورده شده است. در تمامی این شکل‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص توانی از خواص سرامیکی (متناظر با $p = 0$) به خواص فلزی (متناظر با $p \rightarrow \infty$) بار کمانش گسترده، متمرکز

و لنگری تا تثبیت شدن روی مقادیر خاص مربوط کاهش می‌یابد. مقایسه این شکل‌ها نشان دهنده آن است که از مقایسه نتایج به دست آمده پیداست که با افزایش درجه فیود تکیه‌گاهی حاکم بر تیر از حالت SS به CC و به دنبال افزایش سختی خمشی تیر، ظرفیت کمانشی جانبی مقطع به طرز قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌یابد. به بیان دیگر برای هر مقدار از شاخص توانی، ظرفیت کمانشی تیر CC بیشتر از دو حالت دیگر است و ظرفیت باربری کمانشی تیر CS نیز در مقایسه با تیر SS بیشتر است. از طرف دیگر مطابق این شکل‌ها و همچنان که انتظار می‌رود در تمامی حالات افزایش پارامتر تخلخل از $\lambda = 0$ به $\lambda = 0.06$ سبب کاهش ظرفیت کمانش جانبی می‌گردد.

(الف) مدل A، (ب) مدل B، (ج) مدل C متناظر با $E_c/E_m = ۰.۵$ و $E_c/E_m = ۲$ ارائه شده است و نشان می‌دهد که برای $E_c/E_m = ۰.۵$ ظرفیت کمانشی مدل سه لایه‌ای C، بیشتر از ظرفیت کمانشی دو مدل دیگر است. دلیل آن نیز به کمتر بودن کسر حجمی جزء سرامیکی (جنس ضعیف در حالت $E_c/E_m < ۱$) و بیشتر بودن جزء فلزی (جنس قوی در حالت $E_c/E_m < ۱$) با مدول بزرگ‌تر است. اما برای حالت $E_c/E_m = ۲$ ، چون مدل دولایه‌ای B از ضخامت لایه همگن سرامیکی (جنس قوی‌تر $E_c/E_m > ۱$) بزرگ‌تری در مقایسه با دو مدل دیگر برخوردار است، بنابراین ظرفیت کمانش لنگری این مدل در مقایسه با دو مدل دیگر (به سبب بالا بودن سختی خمشی) بزرگ‌تر است.

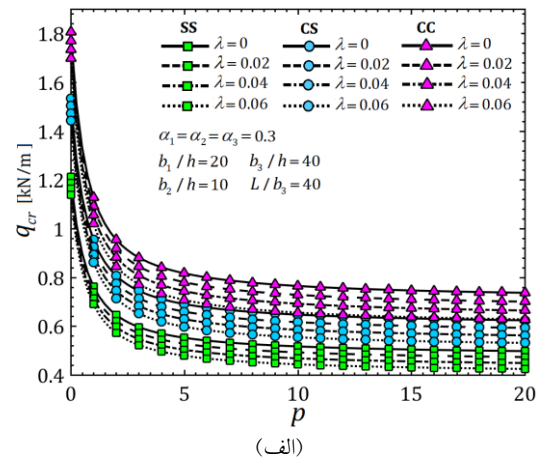


شکل ۱۴ ظرفیت کمانشی تیر ناودانی با: (الف) مدل A، (ب)

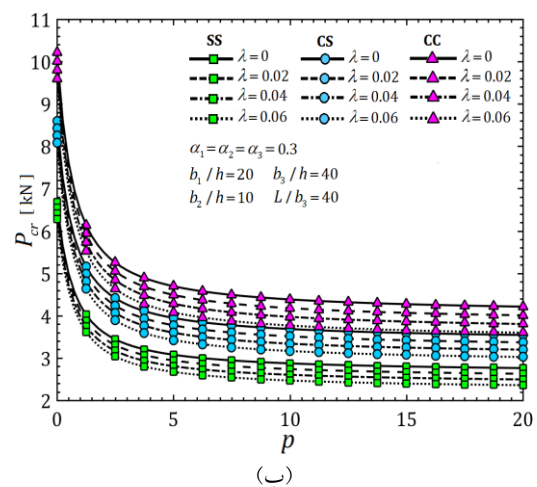
مدل B، (ج) مدل C

آنالیز اثرگذاری نقطه اثر بارگذاری نیرویی روی ظرفیت کمانش

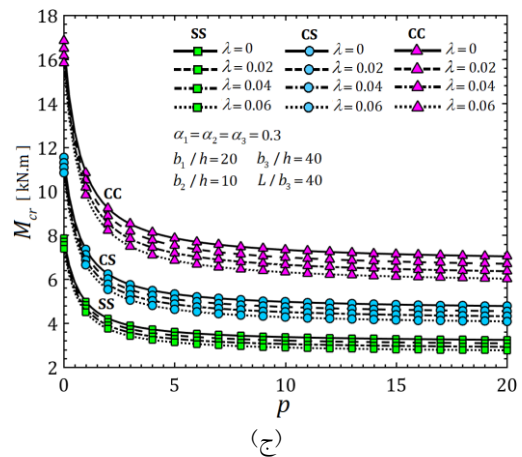
در شکل (۱۵) منحنی‌های مشخصه کمانش نسبت به تغییرات p متناظر با بارگذاری نیرویی متمرکز در سه نقطه مختلف واقع بر مقطع عرضی (الف) اعمال نیروی متمرکز در مرکز تار فوقانی بال بالایی، (ب) اعمال نیرو در مرکز برش مقطع، (ج) اعمال نیروی متمرکز در مرکز تار تحتانی بال پایینی، متناظر با حالت خاص $b_1 = 3b_2$ ارائه شده است. مطابق این شکل به وضوح مشاهده می‌شود که در حالت (ج) که در آن نیروی متمرکز عرضی در مرکز تار تحتانی بال پایینی اعمال شده است در مقایسه با دو حالت دیگر (حالت الف و ب) از بیشترین ظرفیت کمانشی برخوردار است.



(الف)



(ب)

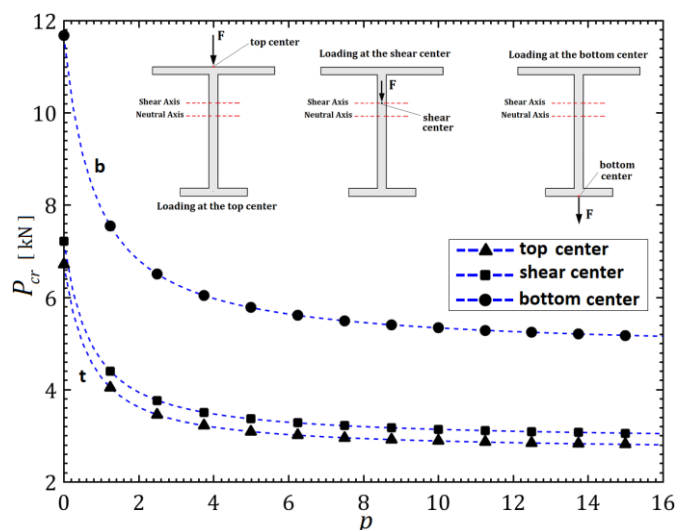


(ج)

شکل ۱۵ تغییرات لنگر بحرانی در برابر شاخص توانی

بررسی تأثیر نسبت مدول مواد متشکله روی ظرفیت کمانش تحت بارگذاری‌های متمرکز و لنگری

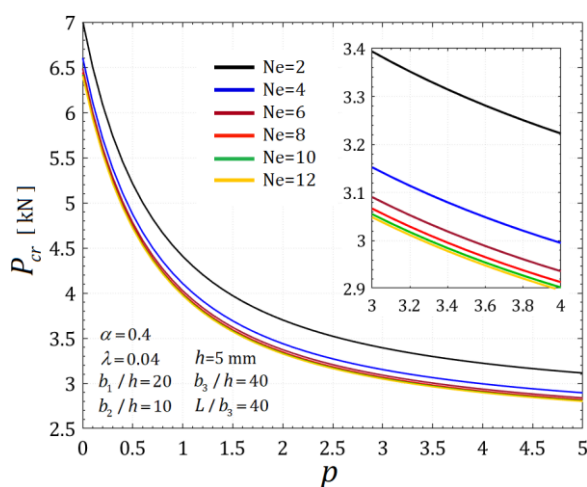
در شکل (۱۶) منحنی‌های کمانش تیر ناودانی دو سر ساده در برابر p ، برای سه مدل مختلف از توزیع ناهمگنی ساختاری:



شکل ۱۵ تغییرات بار کمانش در برابر شاخص توانی، برای بارگذاری متمرکز در سه نقطه از مقطع عرضی

آنالیز همگرایی (استقلال شبکه محاسباتی)

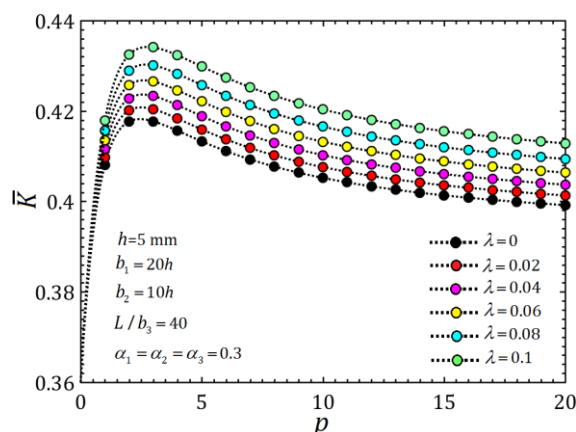
برای مطالعه اثرگذاری تعداد المان‌های طولی انتخابی تیر یعنی N_e روی ظرفیت کمانش جانبی، در شکل (۱۷) تغییرات بار متمرکز نیرویی در برابر شاخص توانی p برای شش انتخاب مختلف از تعداد المان‌های طولی انتخابی در امتداد تیر به تصویر کشیده شده است. با مقایسه رفتار این منحنی‌ها پیداست که با افزایش تعداد المان‌ها در طول تیر منحنی‌های مشخصه به سمت منحنی مشخصه یکنای متناظر با حل دقیق همگرا می‌شود به طوری که برای $N_e \geq 10$ نتایج مستخرج از استقلال محاسباتی نسبت به تعداد المان‌های انتخابی برخوردار خواهند شد.



شکل ۱۷ تغییرات بار کمانش جانبی متمرکز در برابر تغییرات p برای شش تعداد از المان‌های انتخابی روی تیر N_e

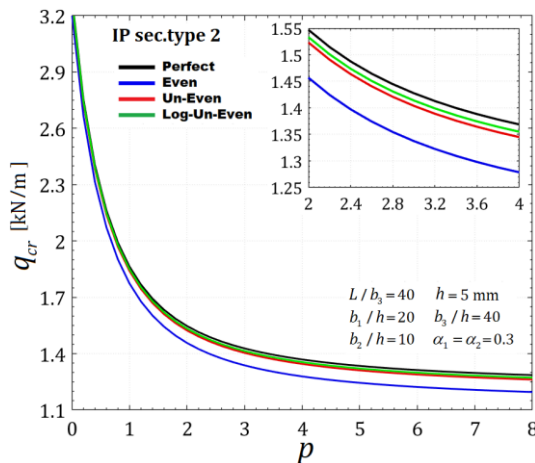
بررسی تغییرات پارامتر تیر I شکل روی ظرفیت کمانش جانبی-پیچشی

در شکل (۱۶) نیز منحنی تغییرات پارامتر مشخصه مقاومت $\bar{K} = \frac{\pi^2(EI)_y b_3^2}{4(GJ)_{com} L^2}$ تیر I شکل (با مدل توزیع خواص نوع B) که تابعی صلبیت‌های خمشی $(EI)_y$ و پیچشی $(GJ)_{com}$ است در برابر شاخص توانی p ، برای شش مقدار از ثابت تخریل نشان داده شده است. پیداست که به ازاء جمیع مقادیر داده از ثابت تخریل، ابتدا با افزایش شاخص توانی (کاهش سهم جزء سرامیکی)، مقدار پارامتر $\bar{K}$ تارسیدن به مقادیر اکسترمم مربوطه افزایش یافته و سپس با ادامه افزایش p ، مقدار $\bar{K}$ نیز رو به کاهش می‌گذارد. علاوه بر این در محدوده داده شده از شاخص توانی، با افزایش ثابت تخریل پارامتر مشخصه $\bar{K}$ بترتیب افزایش می‌یابد.



شکل ۱۶ تغییرات پارامتر مشخصه $\bar{K}$ در برابر شاخص توانی

افقی تیر سالم (نامتخلخل) و تیر با مدل تخلخل even یکنواخت به ترتیب از بیشترین و کمترین مقاومت کمانشی تحت اثر بار گسترده برخوردار می‌باشند.



شکل ۱۹ تغییرات بار کمانش گسترده یکنواخت در برابر p برای چهار مدل از تخلخل تیر I شکل

نتیجه‌گیری

در این مقاله با به کارگیری روش عددی مبتنی بر روش المان محدود، ظرفیت کمانش محوری - جانبی - خمشی تیرهای تابعی جدار نازک [شکل و ناودانی متناظر با شرایط مرزی سه‌گانه: الف) دوسر ساده، ب) یکسر گیردار - یکسر ساده و ج) دو سر گیردار به دست آمد و تأثیر درجه گیرداری تکیه‌گاهی روی ناپایداری استاتیکی مسئله آنالیز شد. برای این منظور با بهره‌گیری از اصل کار مجازی، انرژی پتانسیل کلی سیستم توأم با منعکس کردن اثر کارهای انجام شده بارگذاری‌های جانبی به دست آمد و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر ناپایداری استاتیکی با دخالت دادن اثر عامل کوپلینگ (تاب‌خوردگی اعضای مقطع) حاصل شد. در ادامه با اعمال روش المان محدود و متناظر با شرایط مرزی مفروض ماتریس‌های سختی، خمشی و سختی هندسی حاصل گردید و با حل عددی مسئله مقدار ویژه حاکم، ریشه‌های معادله مشخصه به عنوان ظرفیت‌های بحرانی کمانشی محوری و جانبی محاسبه شد و نشان داده شد که پارامترهای گوناگون مسئله اعم از نسبت ابعاد هندسی تیر، شاخص اختلاط، درجه گیرداری تیر، هندسه مقطع عرضی تیر و نوع بارگذاری محوری/ جانبی نقش به‌سزایی در تعیین محدوده کمانش خمشی - جانبی ایفا می‌کنند.

آنالیز اثرگذاری مدل‌های تخلخل درجه‌بندی شده روی ظرفیت کمانش جانبی گسترده

برای مطالعه و مقایسه اثرگذاری نحوه توزیع درجه‌بندی شده تخلخل ساختاری روی ظرفیت کمانش جانبی تیر I شکل، می‌توان برای چهار مدل مختلف از تخلخل نشان داده شده در شکل (۱۸) به صورت الف) نامتخلخل (سالم)، ب) تخلخل even، ج) تخلخل un-even، د) تخلخل لگاریتمیک Log-un-even مدول الاستیسیته تیر در راستای ضخامت اعضای جان و بال مقطع به صورت زیر توصیف کرد:

الف) برای تیر سالم:

$$E(n) = E_m + (E_c - E_m)V_c(n) \quad (24)$$

ب) برای تیر با مدل تخلخل even:

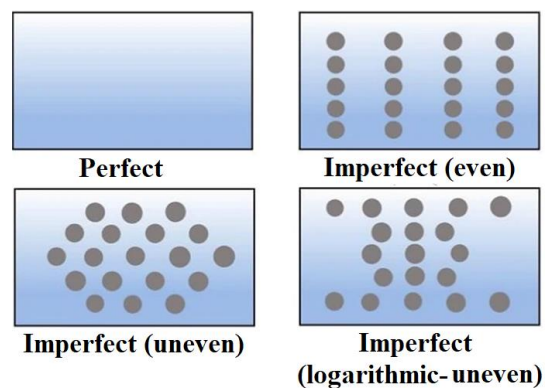
$$E(n) = E_m + (E_c - E_m)V_c(n) - \lambda(E_c + E_m)/2 \quad (25)$$

ج) برای تیر با مدل تخلخل un-even:

$$E(n) = E_m + (E_c - E_m)V_c(n) - \lambda(E_c + E_m)(1/2 - |n|/h) \quad (26)$$

د) برای تیر با مدل تخلخل Log-un-even:

$$E(n) = E_m + (E_c - E_m)V_c(n) - \log_{10}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)(E_c + E_m)\left(\frac{1 - 2|n|}{h}\right) \quad (27)$$



شکل ۱۸ مدل‌های مختلف از تخلخل درجه‌بندی شده در راستای ضخامت

در شکل (۱۹) تغییرات ظرفیت کمانش جانبی تحت بارگذاری گسترده در برابر شاخص توانی p ، برای چهار مدل مختلف از تخلخل به تصویر کشیده شده است. با مقایسه رفتار این منحنی‌ها به ازای جمیع مقادیر از شاخص توانی روی محور

نایکنواخت	un-even	غیر یکنواخت
	even	یکنواخت

تقدیر و تشکر

واژه‌نامه

پیشنهادی ویراستار	واژه لاتین	پیشنهادی نویسنده
نایکنواختی لگاریتمی	log-un-even	غیر یکنواخت به صورت لگاریتمی

مراجع

- [1] N. D. Duc and T. Q. Quan, "Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 48, pp. 435-448, 2012. <https://doi.org/10.1007/s11029-012-9289-z>
- [2] T. M. Tu, T. H. Quoc, and N. Van Long, "Vibration analysis of functionally graded plates using the eight-unknown higher order shear deformation theory in thermal environments," *Aerospace Science and Technology*, vol. 84, pp. 698-711, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.11.010>
- [3] T.-T. Nguyen, P. Thang, and J. Lee, "Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams," *Thin-Walled Structures*, vol. 110, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.09.021>
- [4] B. Kieback, A. Neubrand, and H. Riedel, "Processing techniques for functionally graded materials," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1-2, pp. 81-106, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
- [5] Y. Q. Wang and J. W. Zu, "Vibration characteristics of moving sigmoid functionally graded plates containing porosities," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 14, pp. 473-489, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10999-017-9385-2>
- [6] W. Liu and J. N. DuPont, "Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by Laser Engineered Net Shaping," *Scripta Materialia*, vol. 48, no. 9, pp. 1337-1342, 2003. [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(03\)00020-4](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(03)00020-4)
- [7] W. Yoshimi, I. Yoshifumi, H. Sato, and E. Miura-Fujiwara, "A Novel Fabrication Method for Functionally Graded Materials under Centrifugal Force: The Centrifugal Mixed-Powder Method," *Materials*, vol. 2, no. 4, pp. 2510-2525, 2009. <https://doi.org/10.3390/ma2042510>
- [8] G. Q. Jin and W. D. Li, "Adaptive rapid prototyping/manufacturing for functionally graded material-based biomedical models," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 65, pp. 97-113, 2013. <https://doi.org/10.1007/s00170-012-4153-9>
- [9] V. Kahya and M. Turan, "Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 109, pp. 108-115, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039>
- [10] P. Phung-Van, Q. X. Lieu, H. Nguyen-Xuan, and M. Abdel Wahab, "Size-dependent isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates," *Composite Structures*, vol. 166, pp. 120-135, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.049>
- [11] V. Kahya and M. Turan, "Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element," *Composites Part B: Engineering*, vol. 146, pp. 198-212, 2018.

<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.04.011>

- [12] M. Avcar and W. K. M. Mohammed, "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation," *Arabian Journal of Geosciences*, vol. 11, no. 232, 2018. <https://doi.org/10.1007/s12517-018-3579-2>
- [13] T. Vo-Duy, V. Ho-Huu, and T. Nguyen-Thoi, "Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite beams using finite element method," *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, vol. 13, pp. 324-336, 2019. <https://doi.org/10.1007/s11709-018-0466-6>
- [14] M. Avcar, "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams," *Steel and Composite Structures*, vol. 30, pp. 603-615, 2019.
- [15] H. Alsaied Alwan and M. Avcar, "Analytical solution of free vibration of FG beam utilizing different types of beam theories: A comparative study," *Computers and Concrete*, vol. 26, pp. 285-292, 2020.
- [16] H. Babaei, Y. Kiani, and M. Reza Eslami, "Thermal buckling and post-buckling analysis of geometrically imperfect FGM clamped tubes on nonlinear elastic foundation," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 71, pp. 12-30, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.009>
- [17] H. Youzera, S. A. Meftah, M. M. Selim, and A. Tounsi, "Finite element method for axial and bending coupling effect on free vibration response of functionally graded beams under thermal environment," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 29, pp. 6436-6450, 2022.
- [18] M. Wang, M. He, Z. Liang, D. Wu, Y. Wang, X. Qing, *et al.*, "Fatigue damage monitoring of composite laminates based on acoustic emission and digital image correlation techniques," *Composite Structures*, vol. 321, p. 117239, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117239>
- [19] X. Xie, J. Bai, and W. Zuo, "Topology optimization of fiber-reinforced concrete structures using membrane-embedded model," *Engineering Structures*, vol. 314, p. 118299, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117239>
- [20] T. T. Nguyen, P. T. Thang, and J. Lee, "Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams," *Composite Structures*, vol. 160, pp. 952-963, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.017>

