

ارائه یک روش عددی از مرتبه دقت بالا برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی

فائزه کلانتری^۱، محمدعلی مهرپویا^۲، نبی چگینی^۳

۱. کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش

۲. نویسنده مسئول: دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، Email: mehrpouya@tafreshu.ac.ir

۳. دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش

چکیده: در حالی که مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی سیستم‌های مکانیکی به خوبی توسعه یافته، لکن حل عددی معادلات حاکم بر بسیاری از این مدل‌ها هنوز یک زمینه بزرگ در حال بررسی است. از آنجایی که در هر سیستم مکانیکی محدود، اتصالات اجسام متصل، حرکت نسبی خود را محدود می‌نمایند، لذا معادلات حاکم بر مدل، معمولاً دستگاهی از معادلات دیفرانسیل-جبری را تشکیل می‌دهند که هم معادلات دیفرانسیلی و هم معادلات جبری را شامل می‌شود. لازم به ذکر است که برخلاف حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیلی، رفتار تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل-جبری پیچیده‌تر و کاملاً متفاوت از معادلات دیفرانسیلی است. در این مقاله، یک روش عددی از مرتبه دقت بالا جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی ارائه می‌گردد. روش ارائه شده مبتنی بر استفاده از یک روش شبه‌طیفی است به طوری که حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری حاکم بر مدل را به حل یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل خواهد نمود و برای حل دستگاه جبری به دست آمده، از تکنیک‌های بهینه‌سازی استفاده خواهد شد. در انتها برخی آزمایش‌های عددی روی چند مسأله معیارسنج انجام می‌گیرد تا دقت و کاربردی بودن روش نشان داده شود.

کلمات کلیدی: سیستم‌های مکانیکی، معادلات دیفرانسیل-جبری، روش‌های عددی، روش شبه‌طیفی

A High Accuracy Method for Solving the Differential-Algebraic Equations Arising in Mechanical Systems

Faezeh Kalantari, Mohammad Ali Mehrpouya, Nabi Chegini

Abstract: While the kinematic and dynamic modeling of mechanical systems is well developed, the numerical solution of the governing equations of many of these models is still a large field under investigation. Since in any constrained mechanical system, the connections of the connected bodies restrict their relative movement, therefore the governing equations of the model usually form a system of differential-algebraic equations that includes both differential and algebraic equations. It should be noted that, unlike the analytical and numerical solution of differential equations, the analytical and numerical behavior of differential-algebraic equations is more complex and completely different from differential equations. In this paper, a high accuracy method for solving the system of differential-algebraic equations arising in mechanical systems is presented. The presented method is based on the use of a pseudospectral method that will transform the solution of the system of differential-algebraic equations into the solution of a system of algebraic equations. Then, an optimization technique is utilized to facilitate solving the obtained system of algebraic equations. At the end, some numerical experiments are performed on several benchmark problems to show the accuracy and applicability of the method.

Keywords: Mechanical Systems, Differential-Algebraic Equations, Numerical Methods, Pseudospectral Method

معادلات دیفرانسیل یکی از ابزارهای مهم در مدل‌سازی ریاضی می‌باشند که بسیاری از قوانین طبیعت مانند قوانین موجود در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی، طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیلی می‌یابند. معادلات دیفرانسیل در هندسه و مکانیک نیز کاربرد زیادی دارند. به عنوان نمونه، حرکت جسم به وسیله‌ی سرعت و مکان آن در زمان‌های مختلف با استفاده از معادلات دیفرانسیلی توصیف می‌شود. معادلات دیفرانسیل-جبری نیز که در واقع مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری می‌باشند، کاربردهای زیادی در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی [1,2]، سیستم‌های مکانیکی [3]، سیستم‌های قدرت [4]، شبیه‌سازی فرآیندهای شیمیایی [5] و مسایل کنترل بهینه [6] دارند. علاوه بر این، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش خطوط^۱ و گسسته‌سازی مشتقات مکانی مثلا با استفاده از روش‌های اجزا^۲ یا تفاضلات متناهی^۳، می‌تواند به معادلات دیفرانسیل-جبری منجر شود [7,8].

چنانچه اشاره گردید، یکی از کاربردهای وسیع معادلات دیفرانسیل-جبری در سیستم‌های مکانیکی است. امروزه سیستم‌های مکانیکی در بسیاری از کاربردها مانند دینامیک خودرو، هوانوردی، بیومکانیک و رباتیک مورد استفاده قرار می‌گیرند. به لحاظ دینامیکی، یک سیستم مکانیکی به سیستمی اطلاق می‌گردد که در آن تعدادی از نقاط جرمی و بدنه‌های صلب یا الاستیکی با محدودیت‌هایی از انواع مختلف مانند اتصالات، فنرها، دمپرها و محرک‌ها به یکدیگر متصل شده باشند. در این گونه از سیستم‌ها، معادلات حرکت معمولا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل-جبری غیرخطی را تشکیل می‌دهند. علاقه‌مندان به نحوه مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل-جبری، می‌توانند به فصل چهارم از مرجع [3] مراجعه نمایند.

لازم به ذکر است که یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل-جبری به کمک مفهومی تحت عنوان اندیس یا شاخص^۴ تعیین و شناخته می‌شود و این مفهوم نقش مهمی را در تجزیه و تحلیل و طبقه‌بندی این مسایل به عهده دارد. در نحوه شکل‌گیری چنین مفهومی، دیده شده است که کلاس‌های معینی از معادلات دیفرانسیل-جبری در حل، مشکلات جزئی ایجاد می‌نمایند، در حالیکه فائق آمدن بر مشکلات حل کلاس‌هایی دیگر از این معادلات، دشوارتر است. لذا طبقه‌بندی و کلاس‌بندی این معادلات

با توجه به مشکلات ناشی از حل تحلیلی یا عددی آن‌ها امری ضروری بوده است. این طبقه‌بندی با معرفی تعاریف مختلف و متفاوتی از مفهومی تحت عنوان اندیس یا شاخص در کتب و مقالات به ثبت رسیده که در حقیقت معیاری از دشواری در حل معادلات دیفرانسیل-جبری را نشان می‌دهند. از مهمترین نمونه‌های اندیس می‌توان به اندیس مشتق^۵ [8]

اندیس آشفتگی^۶ [9]، اندیس غریبگی^۷ [10] و اندیس قابلیت کشش^۸

[11] اشاره نمود [12] که در این میان به کارگیری اندیس مشتق برای معادلات دیفرانسیل-جبری رایج‌تر می‌باشد. در این مقاله، ما نیز اندیس مشتق را در مسایل به کار گرفته‌ایم. تعداد دفعاتی که از یک معادله دیفرانسیل-جبری مشتق گرفته می‌شود تا به یک معادله دیفرانسیلی تبدیل گردد را، اندیس مشتق آن معادله دیفرانسیل-جبری می‌نامند. به طور معمول معادلات دیفرانسیل-جبری دارای اندیس‌های ۱، ۲، ۳ و بالاتر می‌باشند. در مرجع [13] اشاره شده است که حل معادلات دیفرانسیل-جبری دارای اندیس‌های بالاتر از یک، می‌تواند بسیار دشوار باشد. به دلیل پیچیدگی که عمدتا به دلیل وجود معادلات جبری در حل معادلات دیفرانسیل-جبری به وجود می‌آید، همواره حل آن‌ها مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. از طرفی همانند معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری، حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل-جبری نیز به جز در موارد خاص امکان‌پذیر نیست. لذا نیاز به روش‌های عددی مناسب برای حل این گونه معادلات همواره احساس می‌شود. لازم به ذکر است که بیشتر روش‌های عددی موجود در حل معادلات دیفرانسیل-جبری مبتنی بر استفاده از روش‌هایی کلاسیک همچون روش اویلر پسر^۹ [13]، روش مشتق‌گیری

پسر^{۱۰} [14]، روش‌های رونگه-کوتا^{۱۱} [9,15]، روش تقریب پده^{۱۲}

[16] و روش تجزیه آدومیان^{۱۳} [17] بوده و این روش‌ها همواره در معرض مشکلاتی از قبیل پدیده کاهش مرتبه^{۱۴}، اثرات رهاشدگی^۱ و

ناپایداری می‌باشند [13]

^۵ Differentiation Index

^۶ Perturbation Index

^۷ Strangeness Index

^۸ Tractability Index

^۹ Backward Euler Method

^{۱۰} Backward Differentiation Method

^{۱۱} Runge-Kutta Methods

^{۱۲} Pade Approximation Method

^{۱۳} Adomian Decomposition Method

^{۱۴} Order Reduction Phenomena

^۱ Method of Lines

^۲ Finite Element Method

^۳ Finite Difference Method

^۴ Index

روی چند مسأله معیارسنج ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی و بیان مزایای روش پیشنهادی خواهد داشت.

۲- بیان مسأله، معادلات دیفرانسیل-جبری در کلی‌ترین و رایج‌ترین حالت

کلی‌ترین شکل نمایش یک معادله دیفرانسیل-جبری، فرمی به صورت

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

می‌باشد که به آن یک فرم تمام ضمنی غیرخطی اطلاق شده و در آن

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}'} \text{ ماتریسی منفرد^۶ می‌باشد و } \mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

[13]. در این مقاله قصد داریم تا به بررسی معادلات دیفرانسیل-جبری

در رایج‌ترین فرم نمایش آن که فرمی به صورت

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \quad (2)$$

است و به آن یک فرم نیمه صریح غیرخطی اطلاق می‌گردد، پردازیم.

باید توجه داشت که در فرم نمایش (۲)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= [y_1(t), \dots, y_p(t)]^T \\ \mathbf{z}(t) &= [z_1(t), \dots, z_q(t)]^T \end{aligned}$$

$$\text{و } \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$$

مشقت‌پذیر هستند. در ضمن شرایط اولیه و مرزی به صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(t_0, \mathbf{y}(t_0), \mathbf{z}(t_0)) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(T, \mathbf{y}(T), \mathbf{z}(T)) \end{aligned} \quad (3)$$

در کنار دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری (۲) قرار خواهند گرفت.

همچنین متغیرها یا به عبارتی توابع $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ به ترتیب

توابع دیفرانسیلی و توابع جبری و معادلات $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ و

$\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ به ترتیب معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری مسأله

(۲) محسوب می‌شوند.

۳- معرفی روش شبه‌طیفی رادائویی. برای طرح روش

پیشنهادی، اولین گام معرفی مجموعه‌ای از نقاط، تحت عنوان نقاط

لژاندر-گاوس-رادائویی است که نقشی اساسی در شکل‌گیری روش را

داشته و برای درک بهتر از آن‌ها، در شکل (۱) نحوه توزیعشان به ازای

M های مختلف به تصویر کشیده شده است. این نقاط در واقع صفرها یا

همان ریشه‌های توابع لژاندر $\{P_{M-1}(t) + P_M(t)\}$ بوده و

همان‌گونه که در شکل پیداست، توزیعشان در بازه $[-1, +1]$ می‌باشد.

در این مقاله به دنبال ارائه یک روش عددی از مرتبه دقت بالا برای

حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های

مکانیکی هستیم. روش پیشنهادی ما یک روش شبه‌طیفی از خانواده‌ی

روش‌های طیفی است که دارای سابقه‌ی بسیار خوبی در حل عددی

معادلات دیفرانسیلی می‌باشد [18,19,20]. لازم به ذکر است که

چنانچه یک معادله‌ی دیفرانسیلی که مسأله و جواب آن هموار باشد را

بخواهیم با دقت بالا روی یک دامنه‌ی ساده حل کنیم، در این صورت

روش‌های شبه‌طیفی بهترین انتخاب خواهند بود [21]. برای دقت‌های

پایین‌تر، این روش‌ها در مقایسه با روش‌های اجزا و تفاضلات متناهی از

زمان و حافظه کمتری برای اجرا، برخوردار هستند. روش‌های شبه‌طیفی

در یک تقسیم بندی دیگر به خانواده‌ی روش‌های هم‌مکانی^۱ نیز تعلق

دارند که خانواده‌ی بزرگ از روش‌های حل عددی برای معادلات

دیفرانسیلی، معادلات انتگرالی و سایر معادلات محسوب می‌گردند.

متأسفانه دامنه‌ی ورود روش‌های شبه‌طیفی به حل عددی معادلات

دیفرانسیل-جبری به گستردگی دامنه ورود این روش‌ها به حل عددی

سایر معادلات نیست و می‌توان در این زمینه به پژوهش‌هایی اندک از

محققینی همچون قنبری و قریشی [12]، حسینی [22] و بابلیان و حسینی

[23] اشاره نمود که در همه این تحقیقات معادله دیفرانسیل-جبری به

صورت خطی در نظر گرفته شده است. یک دلیل مهم برای این امر،

دشواری حل دستگاه معادلات جبری نهایی حاصل از پیاده‌سازی

روش‌های شبه‌طیفی در حل معادلات دیفرانسیل-جبری بوده که به دلیل

وجود معادلات جبری ظاهر شده در معادلات دیفرانسیل-جبری ایجاد

می‌گردد.

در این مقاله قصد داریم تا از یک روش شبه‌طیفی رادائویی^۲، مبتنی

بر استفاده از نقاط لژاندر-گاوس-رادائو^۴ در فرآیند هم‌مکانی، که در

واقع به نوعی یک روش هم‌مکانی متعامد^۵ نیز محسوب می‌شود، جهت

حل عددی این دسته از معادلات استفاده کنیم و برای حل دستگاه جبری

نهایی به دست آمده از پیاده‌سازی این روش، از تجربیات به کارگیری

تکنیک‌های بهینه‌سازی که در مرجع [24] به کار رفته است، بهره

بگیریم.

این مقاله در چند بخش طراحی شده است: بخش ۲، به معرفی

معادلات دیفرانسیل-جبری در کلی‌ترین و رایج‌ترین فرم خواهد

پرداخت. در بخش ۳، به معرفی روش شبه‌طیفی رادائویی و نحوه‌ی

عملکرد آن در گسسته‌سازی و در نهایت حل یک معادله دیفرانسیل-

جبری می‌پردازیم. بخش ۴، اختصاص به پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر

^۱ Drift-off Effects

^۲ Collocation Methods

^۳ Radau Pseudospectral Method

^۴ Legendre-Gauss-Radau

^۵ Orthogonal Collocation Method

^۶ Singular

$$\phi_i(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - \theta_j}{\theta_i - \theta_j}$$

بوده که دارای خاصیتی تحت عنوان خاصیت دلتای کرونگر^۱ هستند. یعنی به عبارت دیگر

$$\phi_i(\theta_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_{M+1}^{M+1}(x) = \frac{2M+1}{M+1} x P_M(x) - \frac{M}{M+1} P_{M-1}(x), \quad M = 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{y}(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t)$$

$$\mathbf{z}(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t) \quad (5)$$

که در آن

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{y}(\hat{\theta}_i) = [y_1(\hat{\theta}_i), \dots, y_{N_y}(\hat{\theta}_i)]^T$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{z}(\hat{\theta}_i) = [z_1(\hat{\theta}_i), \dots, z_{N_z}(\hat{\theta}_i)]^T$$

ضرایب مجهول می‌باشند. اکنون با تقریب \mathbf{y}' به صورت

$$\mathbf{y}'(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(t)$$

و سپس جای‌گزینی روابط بدست آمده در مسأله (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(t) \simeq \mathbf{f}(t, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t)), & \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ 0 \simeq \mathbf{g}(t, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(t), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(t)), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

تنها کاری که باقی مانده، گسسته‌سازی دستگاه معادلات (۶) می‌باشد که این کار به کمک فرآیند هم‌مکان کردن طرفین معادلات در نقاط لژاندر-گائوس-رادائویی انجام خواهد گرفت. بدین منظور و در نهایت با پیاده‌سازی فرآیند هم‌مکانی، آنها فقط در نقاط لژاندر-گائوس-رادائویی $\hat{\theta}_j, j = 1, \dots, n$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i'(\hat{\theta}_j) \simeq \mathbf{f}(\hat{\theta}_j, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j)), \quad j = 1, \dots, n$$

$$0 \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_j, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_j)), \quad j = 1, \dots, n$$

همچنین برای شرایط اولیه و مرزی (۳) داریم:

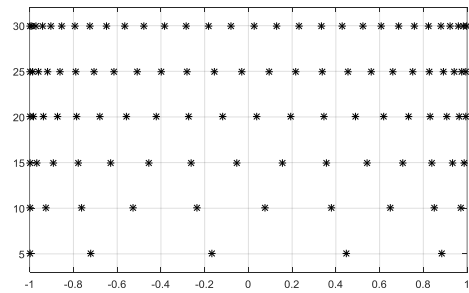
$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_1 = t_0) \simeq \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_1 = t_0, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1 = t_0), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1 = t_0))$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_{n+1} = T, \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1} = T), \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1} = T))$$

لازم به ذکر است که در روش پیشنهادی، علیرغم استفاده از نقطه

در روش شبه طیفی رادائویی از این نقاط هم در گسسته‌سازی مسأله و هم در فرآیند هم‌مکانی استفاده خواهیم کرد. لازم به ذکر است که توابع یا همان چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌هایی متعامد با انبوهی از خواص و کاربردهای مختلف در ریاضیات و علوم مهندسی می‌باشند که به کمک روابط بازگشتی و به صورت زیر قابل تولید هستند:



شکل ۱: نمایش توزیع نقاط لژاندر-گائوس-رادائویی

برای این کار فرض کنیم

$$\hat{\theta}_i = (T - t_0)\theta_i + (T + t_0) / 2, \quad i = 1, \dots, n$$

مجموعه‌ی شامل n نقطه‌ی لژاندر-گائوس-رادائویی انتقال داده شده به بازه $[t_0, T]$ باشد (در واقع θ_i ها همان نقاط لژاندر-گائوس-لوباتو در بازه $[-1, 1]$ و $\hat{\theta}_i$ ها نقاط انتقال داده شده به بازه $[t_0, T]$ هستند).

با افزودن نقطه $\hat{\theta}_{n+1} = T$ به این مجموعه، به یک مجموعه شامل $n+1$ نقطه $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{n+1} = T\}$ می‌رسیم که از این مجموعه نقاط برای تقریب $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ استفاده خواهد شد. به این منظور و برای تقریب k -امین درایه‌ی $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ خواهیم داشت:

$$y_k(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} c_{k,i} \hat{\phi}_i(t), \quad k = 1, \dots, p$$

$$z_k(t) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} d_{k,i} \hat{\phi}_i(t), \quad k = 1, \dots, q$$

که در آن

$$\hat{\phi}_i(t) = \phi_i\left(\frac{2}{T-t_0}t - \frac{T+t_0}{T-t_0}\right)$$

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مبتنی بر این $n+1$ نقطه‌ی انتقال داده شده می‌باشند. لازم به ذکر است که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ گذرنده از

$n+1$ نقطه $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{n+1} = T\}$ ، چندجمله‌ای‌هایی به

صورت کلی

^۱ Kronecker Property

اولیه (حدس اولیه)^۲ دقیق برای پارامترهای مجهول، امکان‌پذیر نخواهد بود، یا در صورت امکان، همگرایی به سختی حاصل خواهد شد. لذا، برای به دست آوردن یک حدس اولیه مناسب جهت همگرایی روش حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده، باید از تکنیک دیگری استفاده گردد که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت.

۱-۳- انتخاب حدس اولیه مناسب به کمک تکنیک‌های

بهینه‌سازی. مجدداً به دستگاه معادلات جبری به دست آمده از پیاده‌سازی روش شبه‌طیفی رادائویی بازمی‌گردیم. لازم به ذکر است که، همگرا شدن در روش‌های ریشه‌یابی مانند روش‌های شبه نیوتن^۳ یا نیوتنی در حل عددی دستگاه معادلات جبری (۷)، بدون داشتن مقدار اولیه‌ی خیلی دقیق برای پارامترهای مجهول، یا امکان‌پذیر نیست یا با کندی بسیار توأم خواهد بود. لذا برای رفع این مشکل، از یک تکنیک مبتنی بر بهینه‌سازی استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است که امروزه استفاده از الگوریتم‌های پیشرفته بهینه‌سازی در حل بسیاری از مدل‌های حاکم بر سیستم‌های مکانیکی رواج پیدا کرده است [25,26,27].

لذا ما نیز در اینجا با در نظر گرفتن مجموع مربعات معادلات شرایط اولیه و مرزی گسسته شده در فرآیند پیاده‌سازی روش پیشنهادی به عنوان تابع هدف و همچنین معادلات هم‌مکانی به دست آمده از پیاده‌سازی روش به عنوان قیود مسأله بهینه‌سازی، دستگاه معادلات جبری (۷) را به عنوان یک مسأله بهینه‌سازی و به صورت

$$(A) \quad \begin{cases} \text{Min} & J = (\mathbf{c}_1 - \mathbf{y}_0)^2 + (\mathbf{g}(T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}))^2 \\ \text{S.t.} & \\ & \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{i1} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) = \mathbf{0} \\ & \vdots \\ & \mathbf{g}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) = \mathbf{0} \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. به بیان دیگر، حل دستگاه معادلات جبری (۷) را به حل مسأله بهینه‌سازی (۸) تبدیل می‌نماییم. از آن جایی که، حل مسأله بهینه‌سازی (۸) که توسط الگوریتم‌های پیشرفته بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد، به حدس اولیه حساسیت کم‌تری دارد، لذا حل آن به مراتب از حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده از پیاده‌سازی روش پیشنهادی به کمک روش‌های ریشه‌یابی حساس به حدس اولیه ساده‌تر خواهد بود. لذا در نهایت، از حل مسأله بهینه‌سازی (۸) یک حدس اولیه مناسب برای پارامترهای مجهول پیدا شده و لذا حل دستگاه معادلات جبری (۷) امکان‌پذیر خواهد شد.

توجه شود که تمام پیاده‌سازی‌های انجام شده در این مقاله در محیط نرم‌افزاری Matlab و به کمک یک لپ‌تاپ پنج هسته‌ای با

$\hat{\theta}_{n+1} = T$ در کنار سایر نقاط لژاندر-گوس-رادائویی به منظور تقریب $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ ، از این نقطه در فرآیند هم‌مکانی استفاده نمی‌شود و این نکته بکار رفته در روش پیشنهادی ما می‌باشد. اکنون به کمک خاصیت دلتای کرونگر (۴) داریم:

$$\frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{ij} \simeq \mathbf{f}(\hat{\theta}_j, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_j, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n$$

که در آن

$$d_{ij} = \hat{\phi}_i'(\hat{\theta}_j), \quad i = 1, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, n$$

(i, j) -امین درایه از ماتریس $(n+1) \times (n+1)$ \mathbf{D} می‌باشد که به عنوان ماتریس مشتق^۱ شناخته می‌شود. همچنین مجدداً با استفاده از خاصیت دلتای کرونگر (۴) خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_1 = t_0) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_1) = \mathbf{c}_1$$

$$\mathbf{y}(\hat{\theta}_{n+1} = T) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1}) = \mathbf{c}_{n+1}$$

$$\mathbf{z}(\hat{\theta}_{n+1} = T) \simeq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{d}_i \hat{\phi}_i(\hat{\theta}_{n+1}) = \mathbf{d}_{n+1}$$

و لذا شرایط اولیه و مرزی (۳) تبدیل به شرایط زیر خواهند شد:

$$\mathbf{c}_1 \simeq \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_1 = t_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1)$$

$$\mathbf{0} \simeq \mathbf{g}(\hat{\theta}_{n+1} = T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1})$$

و در نهایت، مسأله‌ی (۲) به همراه شرایط اولیه و مرزی (۳) به یک دستگاه از معادلات جبری غیر خطی به صورت زیر گسسته خواهد گردید:

$$(V) \quad \mathcal{F} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n+1} \\ \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{i1} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ \frac{2}{T - t_0} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i d_{in} - \mathbf{f}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\hat{\theta}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{c}_1 - \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{g}(T, \mathbf{c}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

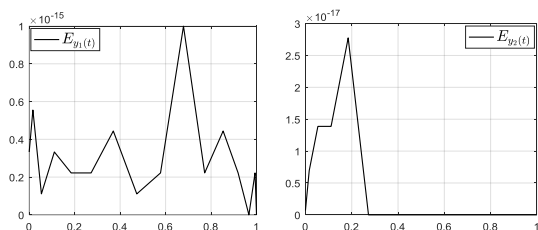
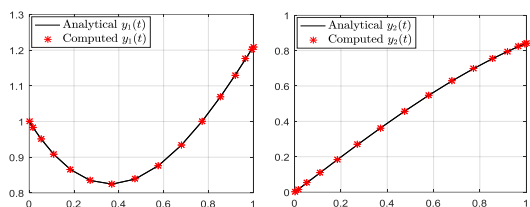
که پس از حل آن، مجهولات $\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i, i = 1, \dots, n+1$ به دست آمده و یک تقریب برای جواب مسأله‌ی (۲) به دست خواهد آمد. متأسفانه، حل عددی دستگاه معادلات جبری (۷) بدون داشتن مقادیر

^۲ Initial Guess

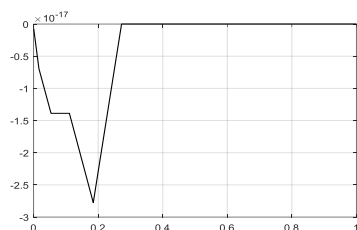
^۳ Quasi-Newton Methods

^۱ Differentiation Matrix

روش‌های به کار رفته دیگر، مقادیر توابع جواب $y_1(t)$ و $y_2(t)$ حاصل از روش پیشنهادی و به ازای $n = 15$ نقطه گسسته‌سازی در مجموعه‌ای از نقاط گسسته شده در بازه $[0, 1]$ ، در جداول (۱) و (۲) به همراه نتایج به دست آمده از دو روش مشتق‌گیری پسر و روش تقریب پده به کار رفته در [28]، آمده است. همان‌گونه که مشخص است، دقت روش پیشنهادی نسبت به دو روش به کار رفته در [28] بسیار بالاتر است. در ضمن روش پیشنهادی با استفاده از نقاط بسیار کم در گسسته‌سازی موفق به رسیدن به دقت ماشین^۲ شده است که نشان از قدرت حل بالای این روش دارد.



شکل ۲: نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای بدست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۱



شکل ۳: نمودار تقریبی تابع $y_2(t) - \sin(t)$ به کار رفته در سمت چپ معادله جبری مسأله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۱

۴-۲- مثال ۲: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس

۲. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت

2.53 GHz CPU و یک سیستم 64-bit می‌باشد. در ضمن برای حل عددی دستگاه معادلات جبری (۷) به دست آمده از پیاده‌سازی روش شبه‌طیفی پیشنهادی از تابع fsolve در نرم افزار Matlab استفاده و به منظور تأمین دقت مطلوب در این تابع، دو پارامتر تنظیمی آن یعنی TolX و TolFun را روی 10^{-14} قرار می‌دهیم. همچنین برای تأمین حدس اولیه مناسب برای این تابع، از حل مسأله‌ی بهینه‌سازی (۸)، به کمک تابع fmincon و با بهره‌گیری از الگوریتم نقطه‌ی درونی^۱ آن استفاده نموده و پارامترهای تنظیمی این تابع یعنی TolCon، TolFun و TolX را نیز روی 10^{-14} تنظیم می‌نماییم.

۴- مثال‌های عددی. در این بخش چهار مثال عددی ارائه

خواهد گردید. این مثال‌ها در حقیقت دستگاه‌هایی از معادلات دیفرانسیل-جبری با اندیس‌های ۱، ۲، ۳ و بالاتر از ۳ می‌باشند که جهت نشان دادن دقت و کاربردی بودن روش پیشنهادی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۴-۱- مثال ۱: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس

۱. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت

$$y_1'(t) = t \cos(t) - y_1(t) + (1+t)y_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y_2(t) - \sin(t) = 0$$

و شرایط اولیه نیز به صورت

$$y(0) = [y_1(0), y_2(0)]^T = [1, 0]^T$$

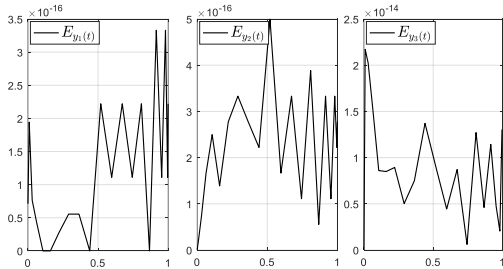
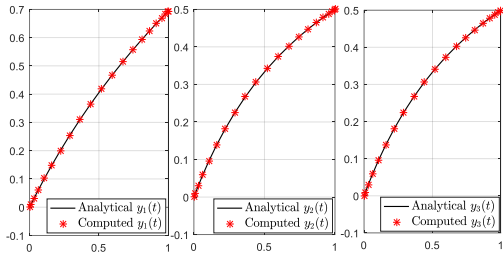
باشد [28]. واضح است که شرط مرزی به صورت $y_2(1) = \sin(1)$ نیز در کنار شرایط اولیه این مسأله قرار خواهد گرفت. این مسأله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + t \sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

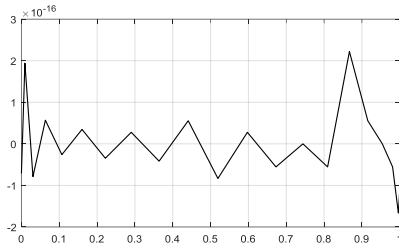
اکنون به کمک روش پیشنهادی برای حل تقریبی این مسأله دست به کار می‌شویم. جواب‌های تقریبی، تحلیلی و تابع خطا به ازای $n = 15$ نقطه گسسته‌سازی شده، در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. همچنین برای مشاهده این موضوع که روش تا چه اندازه موفق به برقراری معادله جبری موجود در مسأله شده است، تقریبی از تابع $y_2(t) - \sin(t)$ را نیز روی بازه $[0, 1]$ رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۳) به تصویر کشیده شده است که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی می‌باشد. به علاوه اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل-جبری و مربوط به برقرار نشدن مطلوب معادلات جبری توسط روش عددی حل کننده مسأله می‌باشد، در روش پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادله جبری همانگونه که در شکل (۳) پیداست، به نحو بسیار مطلوبی برقرار خواهد گشت. همچنین، برای مقایسه روش پیشنهادی با

^۲ Machine Accuracy

^۱ Interior-Point Algorithm

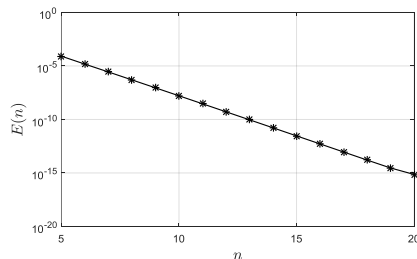


شکل ۴: نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای بدست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۲



شکل ۵: نمودار تقریبی تابع

چپ معادله جبری مسأله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۲

$$(y_1(t) + ty_2(t) - \ln(1+t) - \frac{t^2}{1+t})$$


شکل ۶: نمودار مقدار خطای تابع y_1 به ازای n های مختلف در روش پیشنهادی مربوط به معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۲ در مثال ۲

$$y_1'(t) = ty_2^2(t) + y_3(t) + \frac{1-t^2-t^3}{(1+t)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y_2'(t) = te^{y_1(t)} + ty_3(t) + \frac{1-t-4t^2-4t^3-t^4}{(1+t)^2}$$

$$y_1(t) + ty_2(t) - \ln(1+t) - \frac{t^2}{1+t} = 0$$

و شرایط اولیه نیز به صورت

$$\mathbf{y}(0) = [y_1(0), y_2(0), y_3(0)]^T = [0, 0, 0]^T$$

باشد [29]. واضح است که شرط مرزی به صورت $y_1(1) + y_2(1) = \ln(2) + \frac{1}{2}$ نیز در کنار شرایط اولیه این مسأله قرار خواهد گرفت. این مسأله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \\ y_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(1+t) \\ t \\ \frac{t}{1+t} \end{bmatrix}$$

اکنون به کمک روش پیشنهادی برای حل عددی این مسأله اقدام می‌نماییم. جواب‌های تقریبی، تحلیلی و تابع خطا به ازای $n = 20$ نقطه گسسته‌سازی شده، در شکل (۴) نشان داده شده‌اند. همچنین برای مشاهده این موضوع که روش تا چه اندازه موفق به برقراری معادله جبری موجود در مسأله شده است، تقریبی از تابع $(y_1(t) + ty_2(t) - \ln(1+t) - \frac{t^2}{1+t})$ را نیز روی بازه $[0, 1]$ رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۵) به تصویر کشیده شده است که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی می‌باشد. به علاوه اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل-جبری می‌باشد، در روش پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادله جبری همانگونه که در شکل (۵) پیداست، به نحو بسیار مطلوبی برقرار خواهد گشت. همچنین برای آگاهی یافتن از نرخ همگرایی روش، مقدار خطای ایجاد شده در روش را به ازای n های مختلف رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۶) آمده است. همانگونه که از این شکل پیداست، با افزایش n ، میزان خطا با شیب مطلوبی کاهش خواهد یافت و البته چنین انتظاری را با توجه به این که روش پیشنهادی روشی متعلق به خانواده روش‌های طیفی است، از قبل متصور بودیم.

۳-۴-۳: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس

۳. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ \dot{y}_2(t) &= y_3(t) \\ y_1(t) - e^{-t} &= 0 \end{aligned}$$

و شرایط اولیه نیز به صورت

$$\mathbf{y}(0) = [y_1(0), y_2(0), y_3(0)]^T = [1, -1, 1]^T$$

باشد [30]. واضح است که شرط مرزی به صورت

$$y_1(1) - e^{-1} = 0$$

گرفت. این مسأله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \\ y_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

اکنون به کمک روش پیشنهادی برای حل عددی این مسأله اقدام می‌نماییم. جواب‌های تقریبی، تحلیلی و تابع خطا به ازای $n = 15$

نقطه گسسته‌سازی شده، در شکل (۷) نشان داده شده‌اند. همچنین برای مشاهده این موضوع که روش تا چه اندازه موفق به برقراری معادله جبری

موجود در مسأله شده است، تقریبی از تابع $y_1(t) - e^{-t}$ را نیز روی بازه $[0, 1]$ رسم می‌نماییم. نتیجه در شکل (۸) به تصویر کشیده شده

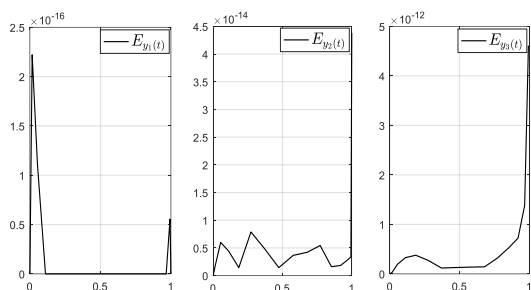
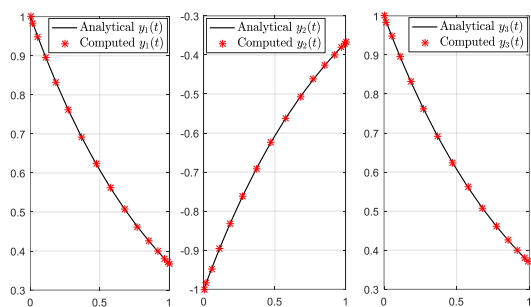
است که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی می‌باشد. به علاوه اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش‌های کلاسیک در حل معادلات

دیفرانسیل-جبری می‌باشد، در روش پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادله جبری همانگونه که در شکل (۸) پیداست، به نحو بسیار مطلوبی برقرار

خواهد گشت. همچنین برای آگاهی یافتن از نرخ همگرایی روش، مقدار خطای ایجاد شده در روش را به ازای n های مختلف رسم می‌نماییم.

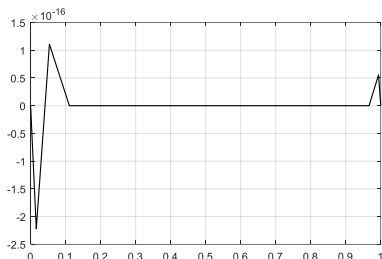
نتیجه در شکل (۹) آمده است. همان گونه که از این شکل پیداست، با افزایش n ، میزان خطا با شیب زیادی کاهش می‌یابد و این بدان معناست

که نرخ همگرایی روش شبه‌طیفی رادائویی برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری بالاست.



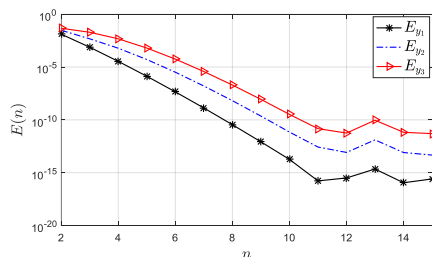
شکل ۷: نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای بدست آمده از

روش پیشنهادی در مثال ۳



شکل ۸: نمودار تقریبی تابع $y_1(t) - e^{-t}$ به کار رفته در سمت چپ

معادله جبری مسأله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۳

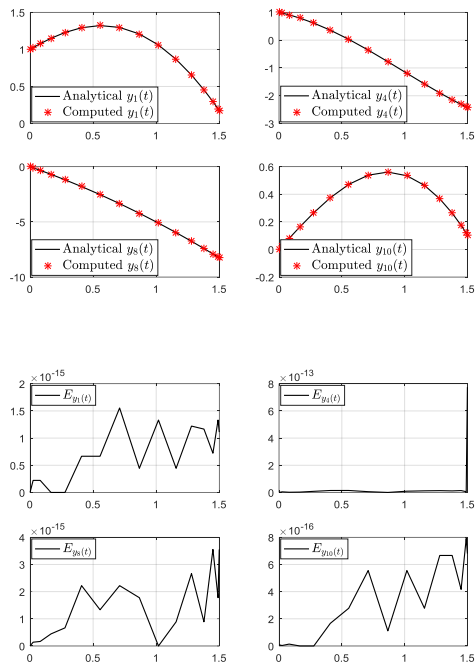


شکل ۹: نمودار مقدار خطای توابع جواب به ازای n های مختلف در

روش پیشنهادی مربوط به معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۳ در مثال ۳

۴-۴-۴: معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس

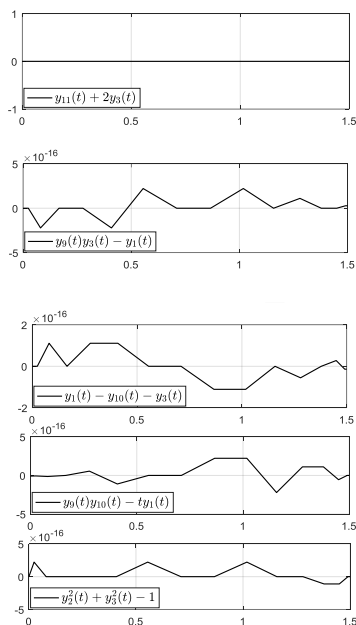
بالا. فرض کنیم معادلات حرکت در یک سیستم مکانیکی به صورت



شکل ۱۰: نمودار توابع جواب تحلیلی، تقریبی و خطای بدست آمده از

روش پیشنهادی در مثال ۴

$$\mathbf{y}(0) = [y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0), y_5(0), y_6(0), y_7(0), y_8(0)]^T = [1, 0, 1, 1, 1, 0, -2, 0]^T$$



شکل ۱۱: نمودار تقریبی از توابع به کار رفته در سمت چپ معادلات

جبری مسئله، به دست آمده از روش پیشنهادی در مثال ۴

$$\dot{y}_1(t) = y_4(t), \quad 0 \leq t \leq 1.5$$

$$\dot{y}_2(t) = y_5(t)$$

$$\dot{y}_3(t) = y_6(t)$$

$$\dot{y}_4(t) = -2y_2(t) + ty_{12}(t) - \frac{y_{12}(t)y_{10}(t)}{y_3(t)} - y_{12}(t)y_9(t)$$

$$\dot{y}_5(t) = 2y_4(t) + y_2(t) + y_{11}(t) - 2y_2(t)y_{13}(t)$$

$$\dot{y}_6(t) = y_7(t) + y_8(t)y_3(t) + \frac{y_{12}(t)y_9(t)y_{10}(t)}{y_3(t)} + y_{12}(t)y_9(t) - 2y_3(t)y_{13}(t)$$

$$\dot{y}_7(t) = 2y_2(t)$$

$$\dot{y}_8(t) = -2y_9(t) - 2$$

$$y_{11}(t) + 2y_3(t) = 0$$

$$y_9(t)y_3(t) - y_1(t) = 0$$

$$y_1(t) - y_{10}(t) - y_3(t) = 0$$

$$y_9(t)y_{10}(t) - ty_1(t) = 0$$

$$y_2^2(t) + y_3^2(t) - 1 = 0$$

و شرایط اولیه نیز به صورت

باشند [3]. این مسأله دارای جوابی تحلیلی به صورت زیر می باشد:

$$y_1^*(t) = \cos(t)(1+t)$$

$$y_2^*(t) = -y_6^*(t) = \sin(t)$$

$$y_3^*(t) = y_5^*(t) = -\frac{1}{2}y_7^*(t) = -\frac{1}{2}y_{11}^*(t) = y_{12}^*(t) = \cos(t)$$

$$y_4^*(t) = -\sin(t)(1+t) + \cos(t)$$

$$y_8^*(t) = -4t - t^2$$

$$y_9^*(t) = 1+t$$

$$y_{10}^*(t) = t \cos(t)$$

$$y_{13}^*(t) = -t$$

اکنون قصد داریم تا به کمک روش پیشنهادی به حل این مسأله بپردازیم.

در شکل (۱۰)، جواب های تقریبی، تحلیلی و توابع خطا برای به طور مثال

توابع $y_1(t), y_4(t), y_8(t), y_{10}(t)$ به ازای $n = 15$ روی بازه

$[0, 1.5]$ نشان داده شده اند. همچنین برای مشاهده این موضوع که روش

تا چه اندازه موفق به برقراری معادلات جبری موجود در مسأله شده است،

طرف های چپ موجود در پنج معادله جبری ظاهر شده در این مسأله را

نیز به صورت تقریبی روی بازه $[0, 1.5]$ رسم می نمایم. نتایج در شکل

(۱۱) قابل مشاهده است، که خود گویای دقت بالای روش پیشنهادی

می باشد. همچنین اثر رهاشدگی که یکی از مشکلات روش های

کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل-جبری می باشد، در روش

پیشنهادی رخ نخواهد داد و معادلات جبری همانگونه که در شکل (۱۱)

پیدا است، به نحو بسیار مطلوبی برقرار خواهند گشت.

نتیجه گیری:

در این مقاله از یک روش شبه طیفی رادائویی، مبتنی بر استفاده از نقاط لژاندر-گوس-رادائو در فرآیند هم مکانی، در کنار تکنیک های بهینه سازی برای حل عددی مناسب دستگاه معادلات

- mathematics*, vol. 157, no. 2, pp. 477-505, (2003).
- [2] M. S. Soto and C. Tischendorf, "Numerical analysis of DAEs from coupled circuit and semiconductor simulation," *Applied numerical mathematics*, vol. 53, no. 2-4, pp. 471-488, (2005).
- [3] A. Steinbrecher, "Numerical solution of quasi-linear differential-algebraic equations and industrial simulation of multibody systems," (2006).
- [4] C. C. Pantelides, D. Gritsis, K. R. Morison, and R. W. H. Sargent, "The mathematical modelling of transient systems using differential-algebraic equations," *Computers & chemical engineering*, vol. 12, no. 5, pp. 449-454, (1988).
- [5] R. Gani and I. T. Cameron, "Modelling for dynamic simulation of chemical processes: the index problem," *Chemical engineering science*, vol. 47, no. 5, pp. 1311-1315, (1992).
- [6] H. Peng, F. Li, J. Liu, and Z. Ju, "A symplectic instantaneous optimal control for robot trajectory tracking with differential-algebraic equation models," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 5, pp. 3819-3829, (2019).
- [7] P. Kunkel and V. Mehrmann, *Differential-Algebraic Equations - Analysis and Numerical Solution*. Zurich, (2006).
- [8] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations, 2nd edition*. Philadelphia: SIAM, (1996).
- [9] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Berlin: Springer-Verlag, (2010).
- [10] P. Kunkel and V. Mehrmann, "Canonical forms for linear

دیفرانسیل-جبری ظاهر شده در سیستم‌های مکانیکی استفاده شد و نتایج کار روی چهار مسأله معیارسنج مشاهده گردید. در مقایسه با روش‌های موجود برای حل این دسته از مسایل می‌توان گفت که روش پیشنهادی دقت بسیار مناسبی داشته و به خوبی می‌تواند معادله یا معادلات جبری ظاهر شده در مسأله را با دقت بالا و بدون رخ دادن اثرات رهاشدگی برآورده سازد. در ضمن استفاده از تکنیک بهینه‌سازی جهت حل دستگاه معادلات جبری حاصل از پیاده‌سازی روش، این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان روش پیشنهادی را بدون نیاز به حدس اولیه دقیق برای متغیرهای تصمیم، با آسودگی خاطر بیشتر پیاده نمود.

واژه نامه

Switching optimal control problem	معادلات دیفرانسیل-جبری
State variable	روش شبه‌طیفی
Orthogonal Collocation Method	روش هم‌مکانی متعامد
Lagrange Polynomial	چندجمله‌ای لاگرانژ
Legendre-Gauss-Radau Points	نقاط لژاندر-گائوس-رادائو
Kronecker Property	خاصیت دلتای کرونگر
Differentiation Matrix	ماتریس مشتق
Convergency	همگرایی
Initial Guess	حدس اولیه
Method of Lines	روش خطوط
Finite Element Method	روش اجزاء متناهی
Finite Difference Method	روش تفاضلات متناهی
Backward Euler Method	روش اویلر پسرو
Backward Differentiation Method	روش مشتق‌گیری پسرو
Runge-Kutta Methods	روش‌های رونگه-کوتا
Pade Approximation Method	روش تقریب پده
Adomian Decomposition Method	روش تجزیه آدومیان
Order Reduction Phenomena	پدیده کاهش مرتبه
Drift-off Effects	اثرات رهاشدگی
Differentiation Index	اندیس مشتق
Perturbation Index	اندیس آشفتگی
Strangeness Index	اندیس غریبگی
Tractability Index	اندیس قابلیت‌کشش
Quasi-Newton Methods	روش‌های شبه-نیوتنی
Interior-point Algorithm	الگوریتم نقطه‌ی درونی
Machine Accuracy	دقت ماشین
Benchmark Problem	مسأله معیارسنج

مراجع

- [1] R. Winkler, "Stochastic differential algebraic equations of index 1 and applications in circuit simulation," *Journal of computational and applied*

-
- [19] A. H. Hashemian and E. Mohammadpour Hamedani, "The Effects of Winkler-Pasternak Foundation Coefficients on the Natural Frequency of Cylindrical Lattice Structures Using Galerkin Method," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 34, no. 3, pp. 19-34, (2022).
- [20] A. Jafarian, M. Alavi Tabatabaei, and S. Shakhesi, "Calculating the Added Mass Matrix of an Airship Using Boundary Element Method," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 34, no. 2, pp. 15-28, (2022).
- [21] B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, (1998).
- [22] M. M. Hosseini, "Pseudospectral method for numerical solution of DAEs with an error estimation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 170, no. 1, pp. 115-124, (2005).
- [23] E. Babolian and M. M. Hosseini, "Reducing index, and pseudospectral methods for differential-algebraic equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 140, no. 1, pp. 77-90, (2003).
- [24] M. A. Mehrpouya and R. Salehi, "A numerical scheme based on the collocation and optimization methods for accurate solution of sensitive boundary value problems," *The European Physical Journal Plus*, vol. 136:909, pp. 1-23, (2021).
- [25] H. Eskandari and S. Hashemi, "Numerical Comparison of Shell Side Thermo-Hydraulic Characteristics for Shell and Tube Heat Exchangers with Trefoil and Segmental Baffle by Genetic Algorithm," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 2, pp. 55-76, (2023).
- [26] F. Rabiei, M. Seidi, and Z. Seydi, differential-algebraic equations with variable coefficients," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 56, no. 3, pp. 225-251, (1994).
- [11] R. Marz, "Numerical methods for differential algebraic equations," *Acta Numerica*, vol. 1, pp. 141-198, (1992).
- [12] F. Ghanbari and F. Ghoreishi, "Convergence analysis of the pseudospectral method for linear DAEs of index-2," *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, no. 04, p. 1350019, (2013).
- [13] U. Archer and L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Philadelphia: SIAM, (1998).
- [14] C. W. Gear, "Differential-algebraic equations and index transformation," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 9, pp. 39-47, (1988).
- [15] E. Hairer, C. Lubich, and M. Roche, *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Berlin: Springer-Verlag, (1989).
- [16] N. Guzel and M. Bayram, "On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 175, no. 2, pp. 1320-1331, (2006).
- [17] M. M. Hosseini, "Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 181, no. 2, pp. 1737-1744, (2006).
- [18] S. Ghasemi and S. M. M. Jafarian, "The Application of Adaptive Time Spectral Method for Analyzing Inviscid Compressible Flow around a Pitching Airfoil," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 1-18, (2023).
-

perturbation method and their engineering applications," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87, no. 9, pp. 1950-1974, (2010).

[30] P. G. Thomsen and C. Bendtsen, "Numerical Solution of Differential Algebraic Equations," Lyngby-Denmark, in Technical Report, (1999).

"Prediction and Optimization of Hardness Value of Mold Steel in Wirecut Process based on Fuzzy Inference System," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 53-70, (2023).

[27] P. Kazemiani-Najafabadi and E. Amiri Rad, "Thermoeconomic Optimization of a Superheated Kalina Cycle for Various Geothermal Source Temperatures in Iran," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 33, no. 1, pp. 1-16, (2021).

[28] K. A. Samer Amin, "Numerical Methods for Solving Differential Algebraic Equations," in *M. Sc. Thesis*, (2010).

[29] F. Soltanian, M. Dehghan, and S. M. Karbassi, "Solution of the differential algebraic equations via homotopy

جدول ۱: مقایسه مقادیر به دست آمده برای $y_1(t)$ از روش پیشنهادی با $n = 15$ نقطه گسسته‌سازی با دو روش مشتق‌گیری پسرو و تقریب پده به

کار رفته در [28] در معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۱ در مثال ۱

t	جواب تحلیلی	روش تقریب پده	خطا	روش مشتق‌گیری پسرو	خطا	روش پیشنهادی	خطا
0	1.0000	1.0000	0	1.0000	0	1.0000	$3.3e - 16$
0.1	0.9148	0.9148	$2.7e - 06$	0.9148	$2.2e - 07$	0.9148	$5.3e - 16$
0.2	0.8585	0.8585	$2.0e - 05$	0.8585	$3.9e - 07$	0.8585	$4.9e - 17$
0.3	0.8295	0.8295	$6.7e - 05$	0.8295	$5.3e - 07$	0.8295	$2.9e - 16$
0.4	0.8261	0.8262	$1.6e - 04$	0.8261	$6.3e - 07$	0.8261	$3.3e - 16$
0.5	0.8462	0.8466	$3.2e - 04$	0.8462	$6.9e - 07$	0.8462	$2.2e - 16$
0.6	0.8876	0.8882	$5.8e - 04$	0.8876	$1.3e - 05$	0.8876	$3.9e - 16$
0.7	0.9475	0.9485	$1.0e - 03$	0.9475	$8.5e - 05$	0.9475	$8.9e - 16$
0.8	1.0232	1.0249	$1.7e - 03$	1.0232	$2.3e - 05$	1.0232	$1.1e - 16$
0.9	1.1116	1.1143	$2.7e - 03$	1.1121	$5.8e - 04$	1.1116	$3.3e - 16$
1	1.2094	1.2094	$4.2e - 03$	1.2117	$2.3e - 03$	1.2094	0

جدول ۲: مقایسه مقادیر به دست آمده برای $y_2(t)$ از روش پیشنهادی با $n = 15$ نقطه گسسته‌سازی با دو روش مشتق‌گیری پسرو و تقریب پده به

کار رفته در [28] در معادله دیفرانسیل-جبری با اندیس ۱ در مثال ۱

t	جواب تحلیلی	روش تقریب پده	خطا	روش مشتق‌گیری پسرو	خطا	روش پیشنهادی	خطا
0	0	0	0	0	0	0	$2.2e - 16$
0.1	0.0998	0.0998	$2.0e - 11$	0.0998	$3.5e - 09$	0.0998	$4.2e - 17$
0.2	0.1987	0.1987	$2.5e - 09$	0.1987	$6.9e - 09$	0.1987	$1.1e - 16$
0.3	0.2955	0.2955	$4.3e - 08$	0.2955	$1.0e - 08$	0.2955	0
0.4	0.3894	0.3894	$3.2e - 07$	0.3894	$1.4e - 08$	0.3894	0
0.5	0.4794	0.4794	$1.5e - 06$	0.4794	$1.7e - 08$	0.4794	$5.6e - 17$
0.6	0.5646	0.5646	$5.5e - 06$	0.5646	$3.9e - 05$	0.5646	0
0.7	0.6442	0.6442	$1.6e - 05$	0.6440	$2.0e - 04$	0.6442	$1.1e - 16$
0.8	0.7174	0.7174	$4.1e - 05$	0.7177	$3.0e - 04$	0.7174	$1.1e - 16$
0.9	0.7833	0.7834	$9.4e - 05$	0.7855	$2.2e - 03$	0.7833	$1.1e - 16$
1	0.8415	0.8417	$2.0e - 04$	0.8467	$5.2e - 03$	0.8415	0

دانشگاه